QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

HUSENOV BEHZOD ERKIN O‘G‘LI

$A(z)$-ANALITIK FUNKSIYALAR UCHUN KARLEMAN FORMULASI

01.01.01 – Matematik analiz

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Qarshi – 2024

UDK: 517.54

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

HUSENOV BEHZOD ERKIN O‘G‘LI

$A(z)$-ANALITIK FUNKSIYALAR UCHUN KARLEMAN FORMULASI

01.01.01 – Matematik analiz

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Qarshi – 2024

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestasiya komissiyasida B2021.1.PhD/FM255 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Buxoro davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (http://ik-fizmat.nuu.uz/) va «ZiyoNet» ta'lim axborot tarmog'ida (http://www.ziyonet.uz/) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Jabborov Nasridin Mirzoodilovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Yaxshiboyev Maxmadiyor Umirovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Bozorov Jo'rabek Tog'aymurotovich fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)
Yetakchi tashkilot:	Nukus davlat pedagogika instituti

Dissertatsiya himoyasi Qarshi davlat universiteti huzuridagi PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 raqamli Ilmiy kengashning 2024-yil «24» may soat 11⁰⁰ dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 180103, Qarshi sh., Ko'chabog' ko'chasi, 17-uy. Tel.: (+998 75) 225 34 13, faks: (+998 75) 221 00 56, e-mail: qarshidu@umail.uz). Qarshi davlat universiteti 2-binosi, 202-xona.

Dissertatsiya bilan Qarshi davlat universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (216 raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 180103, Qarshi sh., Ko'chabog' ko'chasi, 17-uy. Tel.: (+998 75) 225 34 13, faks: (+998 75) 221 00 56, e-mail: qarshidu@umail.uz). Qarshi davlat universiteti 2-binosi, 202-xona.

Dissertatsiya avtoreferati 2024-yil «11» may kuni tarqatildi.
(2024-yil «11» may dagi 1 raqamli reestr bayonnomasi).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI

B.A.Shoimqulov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi,
f.-m.f.d., professor

Sh.D.Nodirov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash ilmiy kotibi,
f.-m.f.f.d. (PhD)

A.A.Imomov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash huzuridagi
Ilmiy seminar raisi,
f.-m.f.d.(DSc.), dotsent

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasining annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahonda olib borilayotgan kompleks analizdagi aksariyat izlanishlar analitik funksiyalarning chegaraviy xossalarini va integral ifodasini tadqiq qilishga olib kelinadi. Analitik funksiyalarning chegaraviy xossalari nazariyasi matematik analizning, shuningdek matematikaning boshqa sohalariga yaqindan bog‘liq. Bu nazariya chegaraviy masalalar orqali matematikaning turli sohalari bilan uzviy bog‘langan. Analitik funksiyalarning chegaraviy xossalari nazariyasini qurishda integral ifodalar muhim vosita hisoblanadi. Ular ayniqsa soha ichida golomorf funksiyani uning soha chegarasidagi yoki chegaraning qismidagi qiymati orqali tiklash va golomorf davom ettirish masalalarida keng qo‘llaniladi. Shu sababdan, analitik funksiyalarning chegaraviy xossalari va integral ifodalarini tadqiq etish dolzarb yo‘nalishlardan biri hisoblanadi. Bu yo‘nalishdagi amaliy masalalarga birinchi bo‘lib V.A.Fok va F.M.Kuni fizik olimlar nazariy yadro fizikasida dispersion muhitlarga tadbiq etishgan. Shuningdek, ushbu yo‘nalishdagi natijalardan mexanikadagi ko‘p fazali muhitlarda ba’zi bosim formulalarini topishda foydalanilmoqda.

Hozirgi vaqtda dunyoda $A(z)$-analitik funksiyalarning chegaraviy xossalari va integral ifodalari nazariyasini o‘rganishga hamda ularning tatbiqlariga keltiriladigan masalalarga qiziqish ortdi. Mazkur nazariya usullarining kvazikonform akslantirishlar va tomografiya masalalariga, kompleks dinamik sistemalar, matematik fizika hamda fanning boshqa sohalaridagi tatbiqlarining ko‘pligi bilan bog‘liq. Shu bilan birga, yangi chegaraviy xossalarini va klassik teoremalarning analogini topish, mavjud sinflarni va integral ifodalarni umumlashtirish, ularning tegishli sohalarga tatbiq qilish maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi. Bunga misol qilib Rossiya FAning Sibir bo‘limi Matematika instituti olimlari E.V.Arbuzov, A.A.Buxgeym va S.G.Kazansevlarning ilmiy ishlarida A-analitik funksiyalar (*const* holi) yordamida tomografiya masalasining yechimini berishgan. Shuningdek, X.X.Imomnazarov va N.M.Jabborovlar tomonidan A-analitik funksiyalarni neft-gaz masalalariga tatbiq etishgan.

Mamlakatimizda ilmiy va amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan fundamental fanlarga, shular qatorida kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasiga alohida e’tibor qaratilgan. “Algebra va funksional analiz, differensial tenglama va matematik fizika tenglamalari, dinamik tizimlar nazariyasi, geometriya va topologiya, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, amaliy matematika va matematik modellashtirish” fanlarining ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish asosiy vazifalar va faoliyat yo‘nalishlari etib belgilandi[1]. $A(z)$-analitik funksiyalarning chegaraviy xossalarini tadqiq qilish va ularning integral ifodalari kompleks analizning ko‘plab masalalarini yechishda va uni tatbiq etishda, shuningdek ushbu qarorni amalga oshirishda muhim rol o‘ynaydi.

---

[1] O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi 2017-yil 18-maydagi “O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish to‘g‘risida”gi 292-sonli qarori.

Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi PF-4947-son “Oʻzbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish boʻyicha Harakatlar strategiyasi toʻgʻrisida”gi Farmoni, 2017-yil 17-fevraldagi “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida”gi PQ-2789-sonli Qarori, 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qoʻllab-quvvatlash, shuningdek, Oʻzbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida”gi Farmoni, 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yoʻnalishlariga bogʻliqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining “Matematika, mexanika va informatika” toʻrtinchi ustuvor yoʻnalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning oʻrganilganlik darajasi. Kompleks analiz usullarini fanning boshqa boʻlimlariga tatbiqlarining kengayishi munosabati bilan hozirda u klassik usulga aylangan, jumladan, analitik funksiyalarning aniqlanish sohasi chegarasiga yaqinlashgandagi xossalarini oʻrganish va analitik funksiyalarni soha ichida chegaraning qismidagi qiymatlari yordamida tiklash kabi masalalar paydo boʻldi.

XIX asrning ikkinchi yarmida yakkalangan maxsus nuqtalar atrofida analitik funksiyalar xossalari haqidagi Pikar va Soxotskiy teoremalari orqali analitik funksiyalar chegaraviy masalalarni tadqiq qilish boshlandi. Fatu natijalaridan soʻng uning teoremalarini kattaroq sinflarga kengaytirgan V.V.Golubev, N.N.Luzin, I.I.Privalovlarning klassik teoremalari yuzaga keldi. Keyinchalik, bu nazariyaning istiqboli A.I.Markushevich va uning shogirdlari N.A.Davidov, G.T.Tumarkin hamda boshqalarning ilmiy ishlari bilan davom ettirildi. Chegaraviy xossalar nazariyasining keyingi rivojlanishi funksional analiz bilan bogʻlandi, uning usullari hozirda ushbu nazariyada keng qoʻllanilmoqda.

Chegaraviy xossalar avvalo berilgan analitik funksiyaning aniqlanish sohasi chegarasining geometriyasi bilan bogʻliq boʻlganligi sababli, ushbu nazariyada asosan quyidagi uchta: chegara qiymatlarning mavjudligi , chegaraviy ifodalash va yagonalik masalalari qaraladi. Mavjudlik masalasini yechishdagi dastlabki natijalar Fatuning ishlarida tadqiq etilgan: Ushbu natijalarda aytilishicha, agar funksiya birlik doirada chegaralangan boʻlsa, u holda birlik aylananing deyarli hamma yerida funksiyaning radial va burchak qiymatlari mavjud boʻladi. N.N.Luzin Fatu teoremasining ma’lum ma’noda yaxshilanmasligini koʻrsatdi. Fatu natijalaridan soʻng, asosiy masala uning teoremalarini kattaroq sinflarda oʻrganish masalasiga olib keladi. Birlik doiradagi analitik funksiyalar uchun Nevanlinna sinfi Xardi sinflarini va chegaralangan funksiyalar sinflarini oʻz ichiga oladi.

Yagonalik toʻplami masalasidagi dastlabki natijalar 1916-yilda aka-uka F.Riss va M.Risslar tomonidan olingan: agar chegaralangan funksiyaning doira chegarasining musbat Lebeg oʻlchovli qismida radial chegaraviy qiymati nolga teng bo‘lsa, u holda funksiyaning doira ichidagi qiymati aynan nolga teng bo‘ladi. Meromorf funksiyalar uchun umumiy chegaraviy yagonalik teoremalari 1925-yilda N.N.Luzin va I.I.Privalov tomonidan isbotlangan.

Golomorf funksiyani integral ifodasi kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar klassik nazariyasining amaliy masalalaridan biri hisoblanadi. Bu integral ifoda soha chegarasidagi qiymatlar bo‘yicha soha ichida funksiyani tiklash masalasini yechadi. Ushbu klassik masala qatorida quyidagi masalani ham qarash mumkin: golomorf funksiyani soha ihida uning sohaning butun chegarasida emas, balki chegaraning biror qismidagi qiymatlari orqali tiklash. Albatta, qaralayotgan chegaraviy qism to‘plam golomorf funksiyalar sinfi uchun yagonalik to‘plami bo‘lishi kerak.

Bu yo‘nalishdagi dastlabki natija 1926-yilda maxsus ko‘rinishdagi soha uchun T.Karleman tomonidan olingan. Keyinchalik, uning bu g‘oyasi G.M.Goluzin va V.I.Krilov ishlarida rivojlantirilgan. Ular bir bog‘lamli sohalar uchun Koshining integral formulasida chegaraning bir qismida “so‘ndiruvchi” funksiya qurish usulini taklif etgan.

Kompleks analizda, kompleks dinamik sistemalar nazariyasida, shuningdek tomografiya masalalarida olib borilgan ko‘plab nazariy va amaliy tadqiqotlar, $A(z)$-analitik funksiyalar xossalarini chuqurroq o‘rganishni talab qiladi.

O‘zbekistonda 2010-yildan boshlab O‘zbekiston Milliy universiteti Matematik analiz kafedrasida akademik A.Sadullaev rahbarligida uning shogirdlari N.M.Jabborov, T.U.Otaboyev, Sh.Y.Xursanov va boshqalar tomonidan $A(z)$-analitik funksiyalarning funksional xossalari o‘rganila boshlandi va natijada Koshi yadrosining analogi, Shvarts va Puasson formulalari, Riss tipidagi ifoda uchun $A(z)$-garmonik va $A(z)$-subgarmonik funksiyalarning xossalari isbotlandi.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti O‘zbekiston Milliy universiteti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasining 2018-2019 yillarga mo‘ljallangan MRU-OT-9/2017-raqamli “Ko‘p o‘lchovli kompleks analiz” (2018-2019) mavzularidagi ilmiy tadqiqot yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi $A(z)$-analitik funksiyalar uchun analitik funksiyalarning chegaraviy xossalarini va Xardi sinfiga tegishli $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Karleman formulasini isbotlash kabi masalalarni o‘rganishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

$A(z)$-lemniskatada $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Xardi sinfini ta’rifini berish va ushbu funksiyalar sinfining funksional xossalarini isbotlash;

$A(z)$-analitik funksiyalar va $A(z)$-garmonik funksiyalar hamda Xardi sinfi orasida bog‘liqlikni kiritish;

$A(z)$-lemniskatada chegaralangan $A(z)$-analitik funksiyalar uchun chegaraviy qiymatlari mavjudligini tekshirish;

$A(z)$-analitik funksiyalar uchun Nevalinna-Ostrovskiy sinfini kiritish va bu sinfdagi funksiyalarning xossalarini isbotlash;

$A(z)$-garmonik majoranta tushunchasini kiritish;

$A(z)$-analitik funksiyalar uchun Nevalinna sinfidagi funksiyalar chegaraviy qiymatlari mavjudlik shartini tekshirish;

$A(z)$-analitik funksiyalar uchun chegaraviy yagonalik teoremasini isbotlash;

$A(z)$-analitik funksiyalar uchun so‘ndiruvchi funksiyani qurish;

Xardi sinfiga tegishli $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Karleman formulasi isbotlash.

Tadqiqotning obyekti $A(z)$-analitik funksiyalarning integral ifodasi va ushbu funksiyalarning aniqlanish sohasi chegarasida o‘zgarishidan iborat.

Tadqiqotning predmetini $A(z)$-analitik va $A(z)$-garmonik funksiyalarning chegaraviy xossalari, Koshi integral formulasi, Puasson formulasi, Karleman formulasi tashkil etgan.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiya ishida funksiyalar nazariyasi, analitik funksiyalar nazariyasi, klassik potensiallar nazariyasi, kvazikonform akslantirishlar nazariyasi va $A(z)$-analitik funksiyalar nazariyasi usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

$A(z)$-analitik funksiyalar uchun Xardi sinfi kiritilgan va bu sinfga tegishli funksiyalarning funksional xossalari isbotlangan, shuningdek, Xardi sinfidagi $A(z)$-garmonik funksiyalar uchun Dirixle masalasining yechimi Puasson formulasi yordamida berilgan;

$A(z)$-analitik funksiyalar sinfida radial va burchakli limit tushunchasi kiritilgan hamda bular yordamida $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Fatu teoremasi isbotlangan, bu teoremadan foydalanib Xardi sinfiga tegishli $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Koshi formulasi keltirib chiqarilgan;

$A(z)$-analitik funksiyalar uchun Nevanlinna-Ostrovskiy sinfi va $A(z)$-garmonik majoranta tushunchasi kiritilgan. Ushbu sinfga tegishli funksiyalarni Blyashke ko‘paytmasiga yoyilgan va ularning chegaraviy qiymatlari mavjudligi isbotlangan;

Chegaralangan yoki Xardi sinfiga tegishli $A(z)$-analitik funksiyalar uchun chegaraviy yagonalik teoremalari isbotlangan. Shuningdek, chegaraviy to‘plamning $A(z)$-garmonik o‘lchovi kiritilgan, $A(z)$-garmonik va $A(z)$-analitik funksiyalarni bahosi hamda $A(z)$-analitik funksiyalar ketma-ketligini tekis yaqinlashishi tekshirilgan;

$A(z)$-garmonik o‘lchov orqali chegaralangan $A(z)$-analitik funksiyalar uchun so‘ndiruvchi funksiya qurilgan va ushbu funksiya yordamida Xardi sinfiga tegishli $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Karleman formulasi isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijasi dissertatsiyada isbotlangan teoremalarda, $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Xardi sinfida topilgan Karleman formulasining tatbiqi elliptik tipdagi chegaraviy masalalarni hamda matematik fizika tenglamalarning boshqa bo‘limlaridagi masalalarni yechishda qo‘llanishi mumkin. Bundan tashqari, olingan natijalar va qo‘llanilgan usullar oliy o‘quv yurtlarida magistratura talabalari hamda doktorantlar uchun o‘quv kursi sifatida o‘qitilishi mumkin.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi matematik fizika usullarini, funksiyalar nazariyasi, klassik potensiallar nazariyasi va bir o‘zgaruvchili kompleks funksiyalar nazariyasi usullaridan tatbiq etilishi va qat’iy matematik dalillardan foydalanilishi bilan izohlanadi. Undan tashqari, dissertatsiyadagi natijalar nufuzli impakt-faktorli ilmiy jurnallarda chop etilgan, xususan xalqaro va respublika miqyosidagi konferensiyalarda, ilmiy seminarlarda muhokamadan o‘tgan. Bularning barchasi dissertatsiya natijalarining ishonchliligini isbotlaydi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati shundan iboratki, $A(z)$-analitik va $A(z)$-garmonik funksiyalarni aniq baholanishi, $A(z)$-analitik funksiyalar uchun yagonalik to‘plami mavjudligini isbotlash va $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Karleman formulasini topish kabi olingan natijalardan foydalanishi mumkinligi bilan izohlanadi.

Dissertatsiya natijalarning amaliy ahamiyati shundan iboratki, kompyuter tomografiyasida va suyuqliklar ishqalanish koeffisiyentini hisoblashda, mexanik muammolar va matematik fizikaning chegarasida berilgan qiymatga ko‘ra soha ichkarisidagi qiymatlarni tiklashda $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Xardi sinfida Koshining integral formulasi qo‘llanilish mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Dissertatsiya tadqiqoti jarayonida olingan ilmiy natijalar quyidagi yo‘nalishlarda amaliyotga joriy qilingan:

Chegaralangan yoki Xardi sinfiga tegishli $A(z)$-analitik funksiyalar uchun chegaraviy yagonalik teoremalaridan 2018-2020 yillarda OT-Atex-2018-340-“Ikki tezlikli muhit dinamikasining amaliy geofizik masalalarini nazariy va sonli tadqiq etish” amaliy tadqiqotlari ilmiy loyihasida foydalanilgan (Qarshi davlat universitetining 2023-yil 20-sentyabrdagi 03/3556-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo‘llanilishi yopishqoq-elastik tenglamalar sistemasida diagonal matritsali yadroni aniqlash masalasining yagonaligi va mavjudligini o‘rganish imkonini bergan.

$A(z)$-analitik funksiyalar uchun Fatu teoremasi, $A(z)$-analitik funksiyalarning chegaraviy qiymatlari mavjudligi tasdig‘idan 2018-2019 yillarda bajarilgan MRU-OT-9/2017 “Ko‘p o‘lchovli kompleks analiz” mavzusidagi fundamental loyihasida foydalanilgan (O‘zbekiston Milliy universiteti 2023-yil 26-sentyabrdagi 04/11-6047-sonli ma’lumotnomasi). Natijada $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Xardi sinfida Koshi formulasini keltirib chiqarish imkoni yaratilgan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiyaning asosiy natijalari 3 ta xalqaro va 2 ta respublika ilmiy-amaliy konferensiyalarida, jami 5 ta ilmiy-amaliy konferensiyalarda muhokama qilindi.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinishi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 20 ta ilmiy ish chop etilgan, ulardan 6 tasi O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestasiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari (PhD) asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda, jumladan, 1 tasi xorijiy va 5 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning hajmi 83 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismda dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning birinchi bobi **“Dastlabki ma’lumotlar”** deb ataladi. Ushbu bobda doktorlik dissertatsiya ishining asosiy natijalarini bayon qilishda va isbotlashda foydalanilgan muhim tushunchalar, tasdiqlar va teoremalar keltirilgan. Bundan tashqari, $A(z)$-garmonik funksiyalarning va $A(z)$-subgarmonik funksiyalar xossalariga bag‘ishlangan ayrim maqolalarning qiyosiy tahlili keltirilgan.

Dissertatsiyaning ikkinchi bobi, **“$A(z)$-analitik funksiyalarning chegaraviy qiymatlarini mavjudligi”** deb nomlanadi. Bu bobda analitik va garmonik funksiyalar nazariyasi klassik analizning eng nozik va mantiqiy bo‘limlarini ifodalashdir. $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Xardi va Nevanlinna sinflarining chegaraviy xossalarini o‘rganishda funksiyaning lemniskatada chegaraviy qiymatlarining mavjudligi muhim o‘rin tutadi. Shuningdek, bu bobda $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Nevanlinna-Ostrovskiy sinfi ham kiritilgan va bu sinfning xossalari tadqiq qilingan. Asosiy natija sifatida chegaralangan va H_A^1 Xardi sinfidagi funksiya uchun lemniskataning chegaraviy qiymatlari mavjudligini ko‘rsatishda $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Fatu teoremasini isbotlangan.

Kvazikonform akslantirishlar nazariyasi bilan bog‘liq bo‘lgan ushbu

$$\bar{D}_A f(z) := \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} - A(z)\frac{\partial f(z)}{\partial z} = 0 \tag{1}$$

Beltrami tenglamasining yechimini qaraylik. Bu yerda, $A(z)$ funksiya o‘lchovli va qaralayotgan $D \subset \mathbb{C}$ sohaning deyarli barcha nuqtalarida $|A(z)| \le C < 1$ shartni qanoatlantiradi. Adabiyotlarda (1) tenglamaning yechimi $A(z)$-*analitik funksiya* deb ataladi.

Aytaylik, $A(z)$-antianalitik funksiya, $\frac{\partial A}{\partial z} = 0$, $D \subset \mathbb{C}$ sohada $|A(z)| \le C < 1$, $\forall z \in D$ o‘rinli bo‘lsin. Shunday qilib, antianalitik funksiyalar cheksiz silliq bo‘lganligidan $O_A(D) \subset C^\infty(D)$ ekanligi kelib chiqadi.

1-teorema (Koshi teoremasining analogi). *Faraz qilaylik, $D \subset \mathbb{C}$ soha bo‘lakli silliq chegaradan iborat bo‘lsin. Agar $f \in O_A(D) \cap C(\bar{D})$ bo‘lsa, u holda $\int\limits_{\partial D} f(z)\left(dz + A(z)d\bar{z}\right) = 0$ bo‘ladi.*

Aytaylik, $D \subset \mathbb{C}$ qavariq soha bo‘lsin. $\psi(z,\xi) = z - \xi + \overline{\int\limits_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}(\tau)d\tau} \in O_A(D)$ funksiya ichki akslantirishni amalga oshiradi, bu yerda $\gamma(\xi,z) - \xi, z \in D$ nuqtalarni tutashtiruvchi silliq egri chiziq. Xususan, $L(a,r) = \{z \in D : |\psi(a,z)| < r\}$

to‘plam D da ochiq to‘plamni ifodalaydi, bu yerda $\gamma(a,z)-a,z\in D$ nuqtalarni tutashtiruvchi silliq chiziq. Yetarlicha kichik $r>0$ uchun bu to‘plam D da kompakt yotadi va nuqtani o‘z ichiga oladi. Bu to‘plamni markazi a bo‘lgan $A(z)$-*lemniskata* deyiladi va $L(a,r)$ ko‘rinishda belgilanadi.

2-teorema (Koshi formulasining analogi). *Faraz qilaylik,* $D\subset\mathbb{C}-$*qavariq soha va* $G\subset D-\partial G$ *chegarasi bo‘lakli silliq soha bo‘lsin. U holda ixtiyoriy* $f\in O_A(D)\cap C(\bar{D})$ *funksiya uchun quyidagi formula o‘rinli*

$$f(z)=\int_{\partial G}\frac{1}{\xi-z+\int\limits_{\gamma(z,\xi)}\bar{A}(\tau)d\tau}f(\xi)\big(d\xi+A(\xi)d\bar{\xi}\big),\ \ z\in G.$$

3-teorema. *Faraz qilaylik,* $f\in O_A(D)$ *haqiqiy qismi* $u=\operatorname{Re}f$ *funksiya* D *sohada quyidagi tenglamani qanoatlantirsin:*

$$\Delta_A u:=\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{1}{1-|A|^2}\left[(1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}-2A\frac{\partial u}{\partial z}\right]\right]+\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left[\frac{1}{1-|A|^2}\left[(1+|A|^2)\frac{\partial u}{\partial z}-2\bar{A}\frac{\partial u}{\partial\bar{z}}\right]\right]=0.\quad(2)$$

Aksincha, agar $D-$*bir bog‘lamli sohada,* $u\in C^2(D)$, $u:D\to\mathbb{R}$, *ikki marta differensiallanuvchi va (2) tenglamani qanoatlantiruvchi funksiya bo‘lsa, u holda shunday* $f\in O_A(D)$ *funksiya mavjudki, uning haqiqiy qismi* $u=\operatorname{Re}f$ *bo‘ladi.*

3-teoremaga asoslanib $A(z)$-*garmonik* funksiyani quyidagicha ta’riflash mumkin:

1-ta’rif. *Aytaylik,* $D\subset\mathbb{C}-$*bir bog‘lamli soha berilgan bo‘lsin. Bu sohada ikki marta differensiallanuvchi* $u\in C^2(D)$, $u:D\to\mathbb{R}$, *funksiya* D *ning barcha nuqtalarida (2) tenglamani qanoatlantirsa, u holda* $u(z)$ D *sohada* $A(z)$*-garmonik funksiya deyiladi.*

D sohada $A(z)$-garmonik funksiyalar sinfi $h_A(D)$ kabi belgilanadi.

Shuningdek, $\Delta_A u$ operator ham klassik holdagi Δu operator kabi $A(z)$-garmonik funksiyalar nazariyasida muhim rol o‘ynaydi. 3-teoremadan kelib chiqadiki, D sohada $A(z)$-analitik funksiya $f=u+iv$ ning haqiqiy va mavhum qismlari $A(z)$-garmonik funksiya bo‘lishi kelib chiqadi. v funksiya u funksiyaga *qo‘shma garmonik funksiya* deyiladi.

Endi $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Xardi sinfini kiritamiz. Aytaylik, $L(a,r)\subset\subset D$ bo‘lsin.

2-ta’rif. $A(z)$*-analitik funksiyalar uchun* H_A^p, $p>0$, *Xardi sinfi deb, shunday* $f(z)\in O_A(L(a,r))$ *funksiyalar to‘plamiga aytiladiki, bu funksiyalarning o‘rta qiymati*

$$\frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho}|f(z)|^p\,|dz+A(z)d\bar{z}|\qquad(4)$$

$\rho<r$ *uchun tekis chegaralangan, ya’ni*

$$\sup_{\rho<r}\left\{\frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho}|f(z)|^p\left|dz+A(z)d\overline{z}\right|\right\}<\infty$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

4-teorema. *Faraz qilaylik,* $u(z)\in h_A^p\left(L(a,r)\right)$, $p\geq 1$ *Xardi sinfiga tegishli bo'lsin, ya'ni o'rta qiymat*

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho}|u(z)|^p\left|dz+A(z)d\overline{z}\right|$$

$\rho<r$ *da tekis chegaralangan bo'lsin. U holda shunday* $\omega(\zeta)\in L_A^p\left(\partial L(a,r)\right)$ *funksiya mavjud bo'ladi, unda*

$$u(z)=\frac{1}{2\pi r}\int\limits_{|\psi(a,\zeta)|=r}P(z,\zeta)\omega(\zeta)\left|d\zeta+A(\zeta)d\overline{\zeta}\right|.$$

Endi $\zeta\in\partial L(a,r)$ da radial $f^*(\zeta)$ va burchakli $f_{\sphericalangle}^*(\zeta)$ limitlarni aniqlaymiz. $U=\{|w|<1\}\subset\mathbb{C}_w$ uchun $\tau_\zeta=\{w=t\zeta\}$, $0\leq t\leq 1$, $\zeta\in\partial U$ radius bo'yicha limit $\varphi(w)$ funksiya $\varphi^*(\zeta)=\lim\limits_{w\to\zeta,\ w\in\tau_\zeta}\varphi(w)$ radial limit deyiladi, ζ, $\zeta\in\sphericalangle$ nuqtalardan chiquvchi $\sphericalangle\subset U$ burchak bo'yicha limit $\varphi_{\sphericalangle}^*(\zeta)=\lim\limits_{w\to\zeta,\ w\in\sphericalangle}\varphi(w)$ burchakli limit deyiladi. $L(a,r)$ lemniskata haqiqiy analitik chegara bilan bir bog'lamli soha hosil qiladi, u holda Riman teoremasiga ko'ra $\chi(z):U\to L(a,r)$ konform akslantirish mavjud bo'ladi, bu yuqoridagi akslantirish $\overline{U}$ yopig'ining biror atrofida konform bo'ladi. χ chegaraviy $\lambda\in\partial U$ nuqtani $\zeta\in\partial L(a,r)$ chegaraviy nuqtaga akslantiradi. U holda $\gamma_\zeta=\chi(\tau_\lambda)$ egri chiziq shunday xossaga egaki, bu chiziq a, ζ nuqtalarni birlashtiradi va $\partial L(a,\rho)=\{|\psi(a,z)|=\rho\}$, barcha darajadagi chiziqlarga perpendikulyar, bunda $0<\rho\leq r.$ $A(z)-$analitik funksiyalar nazariyasida γ_ζ egri chiziq radial yo'nalish sifatida rol o'ynaydi, $\chi(\sphericalangle)$ burchakning obrazi $\zeta\in\partial L(a,r)$ nuqtada burchakli to'plam sifatida rol o'ynaydi. Bu egri chiziqli burchakni $\sphericalangle=\sphericalangle_\zeta$ kabi belgilaymiz. $f(z)$ funksiyaning $\zeta\in\partial L(a,r)$ nuqtadagi $\lim\limits_{z\to\zeta,\ z\in\gamma_\zeta}f(z)=f^*(\zeta)$ radial limit, $f_{\sphericalangle}^*(\zeta)=\lim\limits_{z\to\zeta,\ z\in\sphericalangle_\zeta}f(z)-$ burchakli limit $\lim\limits_{z\to\zeta,\ z\in\gamma_\zeta}f(z)=f^*(\zeta)$ deyiladi.

$A(z)$-analitik funksiyalar uchun Fatu teoremasi yordamida $f^*(\zeta)$ funksiyaning chegaraviy qiymati mavjudligini ko'rsatamiz.

5-teorema. *Aytaylik,* $f(z)\in O_A\left(L(a,r)\right)$ *bo'lsin. Agar* $f(z)$ *funksiya* $L(a,r)$ *lemniskatada chegaralangan bo'lsa, u holda* $\partial L(a,r)$ *chegaradagi barcha* ζ

nuqtalar uchun $f^*(\zeta)=\lim\limits_{z\to\zeta} f(z)$ *radial limit mavjud bo‘ladi. Ushbu limit mavjud bo‘lmaydigan chegaraviy nuqtalarning o‘lchovi nolga teng bo‘ladi.*

1-natija. *Aytaylik,* $u(z)\in h_A\left(L\left(a,r\right)\right)$. *Agar* $u(z)$ *funksiya* $L(a,r)$ *lemniskatada chegaralangan bo‘lsa, u holda* $u\left(\zeta\right)=\lim\limits_{z\to\zeta\in\partial L\left(a,r\right)} u(z)$ *radial limit mavjud bo‘ladi. Ushbu limit mavjud bo‘lmaydigan chegaraviy nuqtalarning o‘lchovi nolga teng bo‘ladi.*

Ko‘rinadiki, agar $f^*_{\sphericalangle}\left(\zeta\right)$ burchakli limit mavjud bo‘lsa, u holda $f^*\left(\zeta\right)=f^*_{\sphericalangle}\left(\zeta\right)$ radial limit mavjud bo‘ladi.

6-teorema. *Agar* $f(z)\in H^1_A\left(L\left(a,r\right)\right)$ *bo‘lsa, u holda deyarli barcha* $\zeta\in\partial L(a,r)$ *nuqtalarda*

$$f^*\left(\zeta\right)=\lim_{z\to\zeta,\, z\in\sphericalangle} f(z)$$

burchakli limit mavjud va chekli bo‘ladi.

2-natija. *Aytaylik,* $f(z)\in O_A\left(L\left(a,r\right)\right)$ *bo‘lsin. Agar ushbu funksiya* $L\left(a,r\right)$ *lemniskatada chegaralangan bo‘lsa, u holda* $\partial L\left(a,r\right)$ *chegaraning deyarli barcha nuqtalarida* $f^*_{\sphericalangle}\left(\zeta\right)$ *burchakli limit qiymat mavjud bo‘ladi.*

Ma’lumki, agar $f(z)\in H^1_A\left(L\left(a,r\right)\right)$ bo‘lsa, u holda $f^*\left(\zeta\right)\in L^1_A\left(\partial L\left(a,r\right)\right)$ bo‘ladi. $\rho\to r$ bo‘lganda

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} f(z)\left|dz+A(z)d\overline{z}\right|\to\int\limits_{|\psi(a,z)|=r} f(z)\left|dz+A(z)d\overline{z}\right| \tag{5}$$

va

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho}\left|f(z)-f^*\left(\zeta\right)\right|\left|dz+A(z)d\overline{z}\right|\to 0. \tag{6}$$

(2) Koshi formulasidan $L\left(a,r\right)$ lemniskata uchun qarasak,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\psi(a,\xi)|=\rho} f\left(\xi\right)K\left(\xi,z\right)\left(d\xi+A\left(\xi\right)d\overline{\xi}\right)$$

o‘rinli bo‘ladi.

$z\in L\left(a,r\right)$ nuqta fiksirlanganda $\rho\to r$ bo‘lsa, bu formula asosida va 6-teoremadan quyidagini hosil qilamiz:

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\psi(a,\zeta)|=r} f^*\left(\zeta\right)K\left(\zeta,z\right)\left(d\zeta+A\left(\zeta\right)d\overline{\zeta}\right). \tag{7}$$

(7) H_A^1 dagi funksiyalar uchun Koshi formulasini ifodalaydi.

Yana bir $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Xardi sinfiga yaqin bo‘lgan funksiyalar sinfini kiritamiz.

3-ta’rif. *Aytaylik,* $f(z)\in O_A\left(L\left(a,r\right)\right)$ *bo‘lsin. Ushbu funksiya* N_A *sinfga tegishli deyiladi, agar uning o‘rta qiymati*

$$\frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho}\ln^{+}\left|f(z)\right|\left|dz+A(z)d\overline{z}\right| \tag{8}$$

tekis chegaralangan bo‘lsa, ya’ni quyidagi munosabat o‘rinli bo‘lsa:

$$\sup_{\rho<r}\left\{\frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho}\ln^{+}\left|f(z)\right|\left|dz+A(z)d\overline{z}\right|\right\}<+\infty.$$

$v(z)\in sh_A\left(L\left(a,r\right)\right)$ uchun $u(z)\in h_A\left(L\left(a,r\right)\right)$ funksiya $L\left(a,r\right)$ lemniskatada $A(z)$-garmonik bo‘lib, agar $v(z)\le u(z),\ \forall z\in L\left(a,r\right)$ bo‘lsa, u holda $A(z)$-*garmonik majoranta* deyiladi. Ta’kidlaymizki, agar $v(z)\in sh_A\left(D\right)$ va $L\left(a,r\right)\subset\subset D$ bo‘lsa, u holda $\omega(z)\in h_A\left(L\left(a,r\right)\right),\quad \omega(z)\,|_{\partial L(a,r)}=v(z)\,||_{\partial L(a,r)}$ Dirixle masalasining yechimi $v(z),\ \omega(z)\ge v(z),\ \forall z\in L\left(a,r\right)$ funksiyaning $A(z)$-garmonik majorantasi bo‘ladi.

7-teorema. *Aytaylik,* $v(z)\in sh_A\left(L\left(a,r\right)\right)$ *bo‘lsin. Ushbu funksiya uchun* $u(z)\in h_A\left(L\left(a,r\right)\right),\ u(z)\ge v(z)$ *garmonik majoranta bo‘lishi zarur va yetarli, agar* $\int\limits_{\partial L(a,\rho)} v(z)\left|dz+A(z)d\overline{z}\right|$ *integrallar oilasi tekis chegaralangan bo‘lsa, ya’ni*

$$\sup_{\rho<r}\left\{\int\limits_{\partial L(a,\rho)} v(z)\left|dz+A(z)d\overline{z}\right|\right\}<+\infty.$$

8-teorema. *Faraz qilaylik,* $u(z)\in h_A\left(L\left(a,r\right)\right)$ *bo‘lsin. Agar* $\int\limits_{\partial L(a,\rho)}\left|u(z)\right|\left|dz+A(z)d\overline{z}\right|$ *tekis chegaralangan bo‘lsa, ya’ni* $\sup\limits_{\rho<r}\left\{\int\limits_{\partial L(a,\rho)}\left|u(z)\right|\left|dz+A(z)d\overline{z}\right|\right\}<+\infty$ *bo‘lsa, u holda* $u(z)$ *funksiyani ikkita musbat* $A(z)$-*garmonik funksiyalar ayirmasi* $u(z)=u_1(z)-u_2(z),\quad u_1(z)>0,\quad u_2(z)>0$ *ko‘rinishida ifodalanadi.*

9-teorema. *Agar* $f(z)\in N_A\left(L\left(a,r\right)\right)$ *bo‘lsa, u holda funksiyani ikkita chegaralangan funksiyalarning nisbati*

$$f(z)=\frac{f_1(z)}{f_2(z)},\quad f_1(z),\,f_2(z)\in O_A\left(L\left(a,r\right)\right),\left|f_1(z)\right|,\left|f_2(z)\right|\le C<\infty,\ \forall z\in L\left(a,r\right).$$

ko'rinishida ifodalash mumkin.

3-natija. *Agar* $f(z)\in N_A\left(L\left(a,r\right)\right)$ *bo'lsa, u holda funksiya* $\partial L\left(a,r\right)$ *chegaraning deyarli hamma yerida radial(burchakli) limitga ega bo'ladi.*

Dissertatsiyaning **"*A*(*z*)-analitik funksiyalar uchun Karleman formulasi"** nomli uchinchi bobida *A*(*z*)-garmonik va *A*(*z*)-subgarmonik funksiyalar yordamida *A*(*z*)-analitik funksiyalar uchun chegaraviy yagonalik teoremasi isbotlangan. Shuningdek, bu yerda $L\left(a,r\right)$ sohaga binoan chegaraviy $M\subset\partial L\left(a,r\right)$, $mes\left(M\right)>0$ to'plamning *A*(*z*)-garmonik o'lchovi bajarilishini mavjudligini hamda $H_A^1\left(L\left(a,r\right)\right)$ funksiyalar sinfi uchun Karleman formulasining analogini isbotlangan.

Kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning chegaraviy xossalarini o'rganishda, uning chegaraviy qiymatlari bilan berilishida uning yagonalik xossasi muhim ahamiyatga ega. Dastlab bu xossani chegaralangan *A*(*z*)-analitik funksiya uchun qaraymiz.

10-teorema. *Faraz qilaylik,* $f(z)\in O_A\left(L\left(a,r\right)\right)$ *bo'lsin. Agar ushbu funksiya* $L\left(a,r\right)$ *lemniskatada chegaralangan bo'lsa, shuningdek, chegaraning biror musbat o'lchovli* $M\subset\partial L\left(a,r\right)$ *qismida radius bo'yicha qiymati nolga intilsa, u holda* $f(z)$ *aynan nolga teng bo'ladi.*

11-teorema. *Faraz qilaylik,* $f(z)\in H_A^1\left(L\left(a,r\right)\right)$ *bo'lsin. Agar musbat o'lchovli* $M\subset\partial L\left(a,r\right)$ *to'plamda funksiyaning chegaraviy qiymatlari* $\zeta\in M$ *da* $f^*\left(\zeta\right)=0$ *bo'lsa, u holda* $f(z)\equiv 0$ *bo'ladi.*

12-teorema. *Aytaylik,* $M\subset\partial L\left(a,r\right)$ *soha chegaradagi musbat o'lchovli qism to'plam bo'lsin. Agar* $\omega\left(z,M,L\left(a,r\right)\right)\in h_A\left(L\left(a,r\right)\right)$ *bo'lsa, u holda* M *to'plamning deyarli barcha* $\zeta\in M$ *nuqtalarida*

$$\omega^*\left(\zeta,M,L\left(a,r\right)\right)=\lim_{z\to\zeta,\,z\in\sphericalangle}\omega\left(z,M,L\left(a,r\right)\right)=-1$$

bo'ladi. Undan tashqari, $\partial L\left(a,r\right)\setminus M$ *to'plamning deyarli barcha* $\zeta\in\partial L\left(a,r\right)\setminus M$ *nuqtalarida*

$$\omega^*\left(\zeta,M,L\left(a,r\right)\right)=\lim_{z\to\zeta,\,z\in\sphericalangle}\omega^*\left(z,M,L\left(a,r\right)\right)=0$$

bo'ladi.

13-teorema. *Faraz qilaylik,* $M\subset\partial L\left(a,r\right)$ *musbat o'lchovli to'plam bo'lsin. Agar* $\omega\left(z,M,L\left(a,r\right)\right)\in h_A\left(L\left(a,r\right)\right)$ *bo'lsa, u holda deyarli* $\zeta^0\in M$ *nuqtalar uchun radial(burchakli) limitlar mavjud bo'ladi, ya'ni*

$$\lim_{z\to\zeta^0,\,z\in\sphericalangle_{\zeta^0}}\omega\left(z,M,L\left(a,r\right)\right)=\omega^*\left(\zeta^0,M,L\left(a,r\right)\right)=-1.$$

14-teorema. *Faraz qilaylik,* $u(z)\in sh_A\left(L\left(a,r\right)\right)$ *va* $\omega\left(z,M,L\left(a,r\right)\right)\in h_A\left(L\left(a,r\right)\right)$ *bo'lsin. Agar* $u(z)<0$ *va* $M\subset\partial L\left(a,r\right)$

to'plamning deyarli hamma yerida burchakli limit uchun $\overline{\lim\limits_{z\to\zeta,\, z\in \sphericalangle_\zeta}} u(z) \le -1,\ \zeta\in M$ *bo'lsa, u holda* $L(a,r)$ *lemniskataning hamma yerida* $u(z)\le \omega\big(z,M,L(a,r)\big)$, $z\in L(a,r)$ *tengsizlik bajariladi.*

15-teorema. *Faraz qilaylik,* $f(z)\in O_A\big(L(a,r)\big)$ *bo'lsin. Agar* $\forall z\in L(a,r)$ *larda* $\exists E>0,$ $|f(z)|\le E$ *va chegaraviy musbat o'lchovli* $M\subset \partial L(a,r)$ *to'plamning deyarli hamma yerida chegaraviy limit uchun* $\overline{\lim\limits_{z\to\zeta,\, z\in \sphericalangle_\zeta}} f(z)\le E_0,$ $\zeta\in M$, $E_0<E$ *tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda* $L(a,r)$ *lemniskataning hamma yerida* $|f(z)|\le E^{1+\omega(z,M,L(a,r))}E_0^{-\omega(z,M,L(a,r))}$, $z\in L(a,r)$ *tengsizlik bajariladi.*

16-teorema. *Faraz qilaylik,* $f(z)\in O_A\big(L(a,r)\big)$ *va* $\{f_j(z)\}\in O_A\big(L(a,r)\big)$ *funksiyalar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Agar chegaraviy qiymatlardagi* $f_j^*(\zeta)$, $\zeta\in M$ *funksiyalar ketma-ketliklar* M *ning deyarli hamma yerida yaqinlashsa, u holda* $f_j(z)$ *funksiyalar ketma-ketligi* $f(z)$ *funksiyaga* $L(a,r)$ *lemniskataning ichki sohasida tekis yaqinlashadi, ya'ni* $\{f_j(z)\}$ *funksiyalar ketma-ketligi ixtiyoriy* $K\subset\subset L(a,r)$ *kompaktda tekis yaqinlashadi.*

Aytaylik, $D\subset\mathbb{C}-$qavariq soha, $L(a,r)\subset\subset D-$biror lemniskata hamda chegarada biror $M\subset\partial L(a,r)$ musbat o'lchovli $M\subset\partial L(a,r)$ to'plam berilgan bo'lsin. $f(z)\in H_A^1\big(L(a,r)\big)$ funksiyalar uchun $\partial L(a,r)$ ning ba'zi chegaraviy nuqtalarida, (7) H_A^1 Xardi sinfi uchun Koshining integral formulasida faqat $M\subset\partial L(a,r)$ bo'yicha $L(a,r)$ da tiklash masalasini qo'yamiz. Goluzin-Krilov usulini qo'llab, *"so'ndiruvchi"* funksiya quramiz, u (7) da $\partial L(a,r)\setminus M$ bo'yicha integrallashni yo'qotadi. Buning uchun quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\varphi(z)\in H_A^\infty\big(L(a,r)\big)$ yordamchi funksiya quramiz:

1. $\left|\varphi^*(\zeta)\right|=1,$ $\partial L(a,r)\setminus M$ ning deyarli hamma yerida $\left|\varphi^*(\zeta)\right|=1,$ bu yerda φ^*-funksiyaning chegaraviy qiymati;
2. $\forall z\in L(a,r)$ uchun $|\varphi(z)|>1.$

Buning uchun chegaraviy $M\subset\partial L(a,r)$ to'plam $A(z)$-garmonik o'lchovini quramiz. 13-teoremadan kelib chiqqan holda $\omega^*\big(\zeta,M,L(a,r)\big)\in h_A\big(L(a,r)\big)$, $-1\le\omega^*\big(\zeta,M,L(a,r)\big)<0,$ va M to'plamning deyarli hamma yerida

$$\omega^*\big(\zeta,M,L(a,r)\big)=\lim_{z\to\zeta,\, z\in\sphericalangle}\omega^*\big(z,M,L(a,r)\big)=-1,$$

$\partial L(a,r)\setminus M$ to'plamning deyarli hamma yerida esa

$$\omega^*\big(\zeta,M,L(a,r)\big)=\lim_{z\to\zeta,\, z\in\sphericalangle}\omega^*\big(z,M,L(a,r)\big)=0$$

bo'ladi.

$L(a,r) \subset\subset D-$bir bog‘lamli bo‘lsa, u holda $A(z)$-garmonik $v(z)$ funksiyaga qo‘shma $\omega(z,M,L(a,r))=u(z)$ funksiya mavjud bo‘ladi, shunday qilib $u(z)+iv(z)=w(z)\in O_A(L(a,r))$ bo‘ladi. Endi $\varphi(z)=\exp(-w(z))$ funksiyani qaraymiz. Ushbu funksiya yuqorida 1 va 2 shartlarni qanoatlantiradi: $\varphi(z)\in O_A(L(a,r))$, ya’ni agar $-w(z)\in O_A(L(a,r))$, u holda $\varphi(z)=e^{-w(z)}\in O_A(L(a,r))$. Haqiqattan ham, osongina ko‘rinadiki, $-w(z)$ funksiya (1) Beltrami tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\overline{D}_A\varphi(z)=\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}}-A(z)\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial e^{w}}{\partial\bar{z}}-A(z)\frac{\partial e^{-w}}{\partial z}=e^{-w}\frac{\partial(-w)}{\partial\bar{z}}-A(z)e^{-w}\frac{\partial(-w)}{\partial z}=$$

$$=-e^{-w}\left(\frac{\partial w}{\partial\bar{z}}-A(z)\frac{\partial w}{\partial z}\right)=0,$$

shuningdek $e^{-w(z)}$ funksiya (1) ni qanoatlantiradi va $L(a,r)$ ning hamma yerida $|\varphi(z)|=e^{-u(z)}\le e$ bo‘ladi, ya’ni

1. $\varphi(z)\in H_A^{\infty}(L(a,r))$, $|\varphi^*(\zeta)|=e^{-u^*(\zeta)}=e^0=1$, $\partial L(a,r)\setminus M$ ning deyarli hamma yerida;
2. $|\varphi(z)|=e^{-u(z)}>1$, $\forall z\in L(a,r)$ larda.

Bu funksiya M to‘plam bog‘liq *so‘ndiruvchi* funksiyani hosil qiladi.

17-teorema. *Agar* $f\in H_A^1(L(a,r))$ *va* $M\subset\partial L(a,r)-$*musbat o‘lchovli to‘plam bo‘lsa, u holda ixtiyoriy* $z\in L(a,r)$ *nuqta uchun*

$$f(z)=\lim_{m\to\infty}\int_M f^*(\zeta)\left[\frac{\varphi(\zeta)}{\varphi(z)}\right]^m K(\zeta,z)\left(d\zeta+A(\zeta)d\bar{\zeta}\right) \tag{8}$$

formula o‘rinli, bu yerda (8) dagi yaqinlashish $L(a,r)$ *dagi kompaktda tekis yaqinlashadi.*

XULOSA

Ushbu dissertatsiyada $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Xardi sinfi ba’zi chegaraviy xossalari ko‘rilgan. $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Xardi sinfidan olingan funksiya uchun ba’zi muhim teoremalar isbotlangan. Undan tashqari, $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Nevanlinna sinfi kiritilgan va asosiy natijalar quyidagilardan iborat:

$A(z)$-analitik va $A(z)$-garmonik funksiyalar uchun Xardi sinfi kiritilgan hamda ushbu sinflarning funksional xossalari isbotlangan;

Puasson fomulasidan foydalanib, $A(z)$-garmonik funksiyalar uchun chegaraviy funksiya qurilgan;

Lemniskata chegarasining deyarli hamma yerida $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Xardi sinfidan olingan funksiya uchun burchakli limitning mavjudligi isbotlangan;

$A(z)$-analitik funksiyalar uchun Nevanlinna-Ostrovskiy sinfi kiritilgan. Blyashke ko‘paytmalarida ushbu funksiyalar sinfi xossalari berilgan;

$A(z)$-analitik funksiyalar uchun Nevanlinna-Ostrovskiy sinfidan olingan funksiyani har doim ikkita chegaralangan funksiya munosabati ko‘rinishida ifodalanishi isbotlangan;

$A(z)$-analitik funksiyalar uchun Nevanlinna-Ostrovskiy sinfidan olingan funksiyani uchun chegaraning hamma yerida burchakli limitning mavjudligi isbotlangan;

$A(z)$-analitik funksiyalar uchun chegaraviy yagonalik teoremalari isbotlangan;

lemniskata chegarasining qismining deyarli hamma nuqtalari uchun $A(z)$-garmonik o‘lchov mavjudligi ko‘rsatilgan;

$A(z)$-analitik funksiyalar uchun so‘ndiruvchi funksiya qurilgan;

so‘ndiruvchi funksiya tadbiq qilinib, $A(z)$-analitik funksiyalar uchun Xardi sinfidan olingan funksiya uchun Karleman formulasi isbotlangan.

Umuman olganda olingan natijalar dissertatsiya tadqiqotining maqsadlariga muvofiq hisoblanadi.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ КАРШИНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

БУХАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ХУСЕНОВ БЕХЗОД ЭРКИН УГЛИ

ФОРМУЛА КАРЛЕМАНА ДЛЯ $A(z)$-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Карши – 2024

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико–математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2021.1.PhD/FM255.

Диссертация выполнена в Бухарском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на Информационно образовательном портале «Ziyonet» (http://www.ziyonet.uz/).

Научный руководитель:	**Жабборов Насридин Мирзоодилович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Яхшибаев Махмадиёр Умирович** доктор физико-математических наук, профессор
	Бозоров Журабек Тугаймуратович доктор философи по физико-математическом наукам
Ведущая организация:	Нукусский государственный педагогический институт

Защита диссертации состоится «24» 05 2024 года в 11^00 на заседании Научного совета PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 при Каршинском государственном университете. (Адрес: 100174, г. Карши, ул. Кучабаг, 17. Тел.: (+998 75) 225 34 13, факс: (+998 75) 221 00 56, e-mail: qarshidu@umail.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Каршинского государственного университета Узбекистана (зарегистрирована за №216). (Адрес: 180103, г. Карши, ул. Кучабаг, 17. Тел.: (+998 75) 225 34 13, факс: (+998 75) 221 00 56).

Автореферат диссертации разослан «11» 05 2024 года.

(протокол рассылки №1 от «11» 05 2024 года).

Б.А.Шаимкулов
Председатель Научного совета
по присуждению научных
степеней, д.ф.-м.н., профессор,

Ш.Д.Нодиров
Ученый секретарь Научного совета
по присуждению ученых степеней,
д.ф.ф.-м.н.(PhD), доцент

А.А.Имомов
Председатель Научного семинара
при Научном совете по
присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н.(DSc.), доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные и практические исследования в комплексном анализе, проводимые на мировом уровне, сводятся к изучению граничных свойств аналитических функций и интегральных представлений. Теория граничных свойств аналитических функций тесно связана с различными разделами математического анализа и вообще математики. Через граничные задачи эта теория тесно взаимодействует с различными областями применения математики. Интегральные представления являются важным инструментом при построении теории граничных свойств аналитических функций. Они служат основой исследований в задачах зависимости значений голоморфных функций внутри области от ее значений на границе или на части границы области и в задачах голоморфного продолжения. Поэтому исследование граничных свойств и интегральных представлений аналитических функций и их применений является одним из актуальных направлений. Первым к практическим задачам в этом направлении обратились ученые-физики В.А. Фок и Ф.М. Куни, которые применили их к дисперсионным средам в теоретической ядерной физике. Также результаты этого направления используются для нахождения некоторых формул давления в многофазных средах в механике.

В мире вырос интерес к задачам которые сводятся к изучению и применению теории граничных свойств и интегральных представлений $A(z)$-аналитических функций. Это связано с применением методов этой теории к задачам квазиконформных отображений, задачам томографии, комплексной теории динамических систем, математической физики и других разделов науки. При этом нахождение новых граничных свойств и аналогов классических теорем, обобщение существующих классов, обобщений интегральных представлений, исследование их применений в соответствующих областях считаются целевыми научными исследованиями. Так, ученые Института математики Сибирского отделения РАН Э.В.Арбузова, А.А.Бухгейм и С.Г.Казанцев, в своих научных работах дали решение задачи томографии с помощью A-аналитических функций (случае const). Также Х.Х. Имомназаров и Н.М.Жабборов применили A-аналитические функции к задачам нефти и газа.

В нашей стране особое внимание уделяется фундаментальным наукам, имеющим научное и практическое применение, к которым относится и теория функций комплексных переменных. Нашими учёными внесены весомый вклад в построение теории $A(z)$-аналитических функций. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям функционального анализа, математического анализа и комплексного анализа многих переменных установлено основной задачей и направлением деятельности[2]. Исследования граничных свойств $A(z)$-аналитических функций и их интегральные представления играет важную роль в решении многих задач комплексного анализа и его применениях , а также для реализации указанного постановления.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, указанных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан № УП-4947 О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан» от 7 февраля 2017 года, № УП-2789 «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» от 17 февраля 2017 года, № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института математики имени В.И.Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» от 9 июля 2019 года и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным четвёртим направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. В связи расширением применения методов комплексного анализа в других разделах науки, возникли задачи, которые стали классическими: изучение свойства аналитических функций при приближение к границе области определения и восстановления внутри области по их значениям на части её границы.

Изучение граничных задач аналитических функций начинается с теоремы Сохоцкого и теоремы Пикара о поведении аналитических функций в окрестности изолированной существенно особой точки, полученных во второй половине XIX века. После результатов Фату появились классические результаты В.В.Голубева, Н.Н.Лузина, И.И.Привалова распространяющие на более широкие классы его теорему. Дальнейшие развития теории связана с работами А.И.Маркушевича и его учеников Н.А.Давидова, Г.Ц.Тумаркина и др. В последующем развитие теории граничных свойств привело к установлению глубоких связей с функциональным анализом, методы которого широко используется в ней и по настоящее время.

Так как граничные свойства связано прежде всего с геометрией границы области определения аналитической функции в данной теории изучаются в основном три задачи: проблема существование граничных значений, проблема граничного представления, проблема единственности. Первым

---

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии Наук Республики Узбекистан» от 18 мая 2017 года

результатом в решение проблемы существования является работа Фату: если функция ограничена в единичном круге, то почти всюду на единичной окружности существует радиальные и угловые значения. Н.Н.Лузин показал, что теорема Фату в определенном смысле не улучшаема. После результатов Фату первоочередной задачей выглядело распространение его теорем на более широкие классы функций. Класс Неванлинна для аналитических функций в единичном круге содержит в себя класс ограниченных функций и классы Харди.

В проблеме множества единственности первый результат был получен братьями Ф.Рисс и М.Рисс (1916): если функция из класса ограниченных функций на части границы круга положительной меры Лебега имеет радиальные граничные значения равную нул, то она равна нулю в круге. Наиболее общие граничные теоремы единственности для мероморфных функций общего вида были получены Н.Н.Лузиным и И.И.Приваловым в 1925 г.

Одним из прикладных задач классической теории функций комплексного переменного является интегральное представление голоморфных функций. Оно решает важную проблему восстановления функции внутри области по её значениям на границе. Наряду с этой классической задачей можно и естественно рассматривать следующую задачу: восстановить голоморфную функцию в области по её значениям на куске границе. Конечно, этот граничной множестве должно быть множеством единственности для рассматриваемого класса голоморфных функций.

Первый результат в этом направлении принадлежит Т.Карлеману. Он в 1926 г. решил задачу области одного специального вида. Его идею затем развили Г.М.Голузин и В.И.Крылов (1933) применительно к односвязным областям. Их метод предусматривал построение некоторой вспомогательной голоморфной функции, зависящей от куска границы области, «гасяшую» часть интеграла в интегральной формуле Коши

Многие теоретические и прикладные исследования, проводимые в комплексном анализе, в комплексной теории динамических систем, а также в задачах томографии сводится к изучении свойств $A(z)$-аналитических функций.

В Узбекистане начиная с 2010 года на кафедре математического анализа Национального университета Узбекистана под руководством академика А.Садуллаева в работах его учеников Н.М.Жабборова, Т.Ю.Отабоева, Ш.Я.Хурсанова и др. началось изучение функциональных свойств $A(z)$-аналитических функций. Ими получены аналоги многих теорем классичнской теории функции, в частности теорема Коши, аналоги ядра Коши, интегральные формулы Коши, Шварца для $A(z)$-аналитических функций.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения, где выполнялась диссертация.

Диссертационное исследование выполнено в соответствии с планами научных исследований по грантам OT-Atex-2018-340-научном проекте прикладных исследования научного направления MRU-OT-/2017 «Многомерный комплексный анализ» Национального университета Узбекистана на 2018-2019 гг.

Целью исследования является изучение аналогичных задач теории граничных свойств аналитических функций для $A(z)$-аналитических функций и доказать формулы Карлемана для $A(z)$-аналитической функции.

Задачи исследования:

определение класса Харди $A(z)$-аналитических функций в $A(z)$-лемнискате и изучение функциональные свойства этого класса;

изучение связи между классами Харди $A(z)$-аналитических и $A(z)$-гармоническими функций;

исследование существование граничных значений для ограниченных $A(z)$-аналитических функций в $A(z)$-лемнискате;

определение класса Неванлинны-Островского для $A(z)$-аналитических функций и изучить представления функций из этого класс;

ввести понятие $A(z)$-гармонической мажоранты;

исследование условия существование граничных значений из класса Неванлинны-Островского для $A(z)$-аналитических функций;

доказать граничной теоремы единственности для $A(z)$-аналитических функций;

построить гасящую функцию для $A(z)$-аналитической функции;

доказать формулы Карлемана для $A(z)$-аналитических функций.

Объект исследования поведение на границе области определения и интегральные представления $A(z)$-аналитических функций.

Предмет исследования - граничные свойства $A(z)$-аналитических и $A(z)$-гармонических функции, интегральная формула Коши, формула Пуассона, формула Карлемана.

Методика исследования. В диссертации использованы методы теории функций, классическая теория потенциала, теории квазиконформных отображений и $A(z)$-аналитических функций.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

введен класс Харди $A(z)$-аналитических функций и доказаны основные его функционального свойств, также дано решение задачи Дирихле для $A(z)$-гармонических функций из класса Харди с помощю формулой Пуассона;

введен понятия радиальные и угловые пределы из класса $A(z)$-аналитических функций и доказан теорема Фату для $A(z)$-аналитических функций, с использованием этой теоремы выведена формула Коши для $A(z)$-аналитических функций из класса Харди;

введен класс Неванлинны-Островского для $A(z)$-аналитических функций и $A(z)$-гармоническая мажоранта. Функции, принадлежащие этому классу, разлагаются в произведение Бляшке и доказывается существование их граничных значений;

доказано граничные теоремы единственности для $A(z)$-аналитических функций из класса Харди или ограниченных. Введена $A(z)$-гармоническая мера граничного множества, исследованы оценки $A(z)$-гармонических и $A(z)$-аналитических функций, и равномерная сходимость последовательности $A(z)$-аналитических функций;

для ограниченных $A(z)$-аналитических функций через $A(z)$-гармонической мерой построена гасяющая функция и с помощью этой функции доказан формула Карлемана для $A(z)$-аналитических функций из класса Харди;

Практические результаты исследования заключаются в возможности применения доказанных в диссертации теорем и полученной формулы Карлемана на классе Харди для $A(z)$-аналитических функций, в решениях краевых задач эллиптических уравнений и в других разделах математической физики. Кроме того, полученные результаты и методы, использованные в диссертации, могут быть использованы в качестве учебного курса для магистрантов и докторантов высших учебных заведений.

Достоверность результатов исследования обоснована применением известных методов математической физики, теории функций, классической теории потенциала и строгими математическими доказательствами. Кроме того, публикацией результатов диссертации в авторитетных научных журналах, в частности с импакт-факторами и апробации работы в научных семинарах, на Республиканских и Международных конференциях. Все это доказывают достоверность результатов диссертации.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования состоит в том, что полученные результаты могут быть использованы для качественной оценки $A(z)$-аналитических и $A(z)$-гармонических функций, а формула Карлемана для реализации множества единственности $A(z)$-аналитических функций.

Практическая значимость диссертации заключается в том, что она позволяет восстанавливать значения $A(z)$-аналитических функций, используемых для компьютерной томографии и расчета трения жидкости, механики и других задачи математической физики внутри области с данными на части границы, на основании формулы Карлемана для $A(z)$-аналитических функций.

Внедрение результатов исследования. Полученные научные результаты в процессе диссертационного исследования внедрены в практику по следующим направлениям:

Из граничных теорем единсвенности для $A(z)$-аналитических функций использованы при выполнении научно-исследовательских работ по проекту OT-Atex-2018-340 в 2018-2020 гг. «Теоретическое и численное исследование прикладных геофизических вопросов двухскоростной динамики среды» (Справка Каршинского государственного университета № 03/3556 от 20 сентября 2023 года). Применение научных результатов позволило исследования единственности и существования задачи определения ядра диагональной матрицы в системе вязкоупругих уравнений.

Теорема Фату для $A(z)$-аналитических функций, подтверждение существования предельных значений $A(z)$-аналитических функций использована в фундаментальном проекте МРУ-ОТ-9/2017 по теме «Многомерный комплексный анализ» проведена выйдет в 2018-2019 гг. (Справка Национального университета Узбекистана № 04/11-6047 от 26 сентября 2023 года). В результате появилась возможность найти формулу Коши из класса Харди для $A(z)$-аналитических функций.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования обсуждены в 5 научно-практических конференциях, в том числе в 3 международных и 2 республиканских.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 20 научных работ, из них 6 статей в научных изданиях, рекомендованных Высшей аттестационный комиссией Республики, в том числе 1 опубликованы в зарубежных журналах и 5 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Нумерации теорем, предложений, определений, формул сквозные, отдельно для каждой главы. Объем диссертации 83 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации называется **“Предварительные сведения”**. В этой главе представлены важные понятия, утверждения и теоремы, используемые при изложении и доказательстве основных результатов диссертации. А также, анализируются некоторых статей, посвященных свойствам $A(z)$-гармонических и $A(z)$-субгармонических функциям.

Вторая глава диссертационной работы называется **“Существование граничные значение $A(z)$-аналитических функций”**. В этой главе является теория аналитических и гармонических функций представляет собой один из наиболее изящных и стройных разделов классического анализа. При изучении классы Харди, Неванлинна для $A(z)$-аналитических функций комплексного переменного большое значение имеет граничное свойство, существование граничные значении лемнискаты. В этой главе мы для класса Харди исследуем свойства таких множеств. Основной результат относится к установлении, что доказано теорема Фату для $A(z)$-аналитических в разных классов функций.

Решения уравнения Бельтрами:

$$\bar{D}_A f(z) = \frac{\partial f(z)}{\partial \bar{z}} - A(z)\frac{\partial f(z)}{\partial z} = 0 \qquad (1)$$

напрямую связано с квазиконформными отображениями. В общем случае, относительно функции $A(z)$, предполагается, что она измерима и $|A(z)| \le C < 1$ почти всюду в рассматриваемой области $D \subset \mathbb{C}$. В литературе решения уравнения (1) обычно называют $A(z)$-*аналитическими* функциями.

Наиболее интересным является случай, когда $A(z)$-антианалитическая функция, $\left(\frac{\partial A}{\partial z} = 0\right)$ в области $D \subset \mathbb{C}$ такая, что $|A(z)| \le c < 1, \ \forall z \in D.$ Так как антианалитическая функция является бесконечно гладкой, то вытекает, что $O_A(D) \subset C^{\infty}(D)$.

Теорема 1 (аналог теоремы Коши). *Пусть* $D \subset \mathbb{C} -$ *с кусочно гладкой границей. Если* $f \in O_A(D) \cap C(\bar{D})$, *то*

$$\int_{\partial D} f(z)\left(dz + A(z)d\,\bar{z}\right) = 0\,.$$

Пусть область $D \subset \mathbb{C}$ является выпуклой. То функция $\psi(z,\xi) = z - \xi + \overline{\int_{\gamma(\xi,z)} \bar{A}(\tau)d\tau} \in O_A(D)$ осуществляет внутреннее отображение где $\gamma(\xi,z) -$ гладкая кривая, соединяющая точки $\xi, z \in D.$ В частности, множество $L(a,r) = \{z \in D : |\psi(a,z)| < r\}$ представляет собой открытое множество в D. Для достаточно маленьких $r > 0$ оно компактно принадлежит D и содержит точку a. Это множество называется $A(z)$-*лемнискатой, с центром в точке* a и обозначается как $L(a,r)$.

Теорема 2 (формула Коши). *Пусть* $D \subset \mathbb{C} -$ *выпуклая область и* $G \subset D -$ *произвольная подобласть, с кусочно гладкой границей* ∂G. *Тогда для любой функции* $f(z) \in O_A(G) \cap C(\bar{G})$ *имеет место формула*

$$f(z) = \int_{\partial G} \frac{1}{\xi - z + \overline{\int_{\gamma(z,\xi)} \bar{A}(\tau)d\tau}} f(\xi)\left(d\xi + A(\xi)d\,\bar{\xi}\right), \ \ z \in G. \qquad (2)$$

Теорема 3. *Предположим, что действительная часть* $A(z)$-*аналитической функции* $f(z)$ *удовлетворяет в области* D *следующему уравнению*

$$\Delta_A u = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{1-|A|^2}\left(\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial \bar{z}} - 2A\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right) + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left(\frac{1}{1-|A|^2}\left(\left(1+|A|^2\right)\frac{\partial u}{\partial z} - 2\bar{A}\frac{\partial u}{\partial \bar{z}}\right)\right) = 0. \quad (3)$$

И наоборот, если D *– односвязная область, а* $u: D \to \mathbb{R}$, *дважды дифференцируемая функция,* $u \in C^2(D)$, *удовлетворяет дифференциальному уравнению* (3), то *существует* $f \in O_A(D)$: $u = \operatorname{Re} f$.

В связи с теоремой 3 естественно ввести понятие $A(z)$-*гармонической* функции следующим образом:

Определение 1. *Предположим, что дважды дифференцируемая функция* $u \in C^2(D)$, $u: D \to \mathbb{R}$, *называется* $A(z)$-*гармонической в области* D, *если всюду в* D *функция* u *удовлетворяет дифференциальному уравнению (*3).

Класс $A(z)$-гармонических в области D функций обозначается как $h_A(D)$.

Таким образом, оператор $\Delta_A u$ в теории $A(z)$-гармонических функций играет такую же роль, что и оператор Δu в теории гармонических функций. Из теоремы 3 вытекает, что действительная часть и мнимая часть $A(z)$-аналитической в области D функции $f = u + iv$ являются $A(z)$-гармоническими функциями. Функция v называется *сопряженно гармонической* к u функцией.

Теперь введем класс Харди для $A(z)$-аналитических функций. Пусть $L(a,r) \subset\subset D$.

Определение 2. *Классом Харди* H_A^p, $p > 0$, *для* $A(z)$-*аналитические функции называют множество всех функций* $f(z) \in O_A(L(a,r))$ *таких, что средние*

$$\frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} |f(z)|^p \left| dz + A(z) d\bar{z} \right| \tag{4}$$

равномерно ограничены для $\rho < r$, $\sup\limits_{\rho<r} \left\{ \frac{1}{2\pi\rho} \int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} |f(z)|^p \left| dz + A(z) d\bar{z} \right| \right\} < \infty.$

Теорема 4. *Пусть* $A(z)$ *– гармоническая функция* $u(z)$ *и принадлежит классу Харди,* $u(z) \in h_A^p(L(a,r))$, $p \ge 1$, *т.е. что средние*

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} |u(z)|^p \left| dz + A(z) d\bar{z} \right|$$

равномерно ограничены при $\rho < r$. *Тогда существует такая функция* $\omega(\zeta) \in L_A^p(\partial L(a,r))$, *что*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi r} \int\limits_{|\psi(a,\zeta)|=r} P(z,\zeta) \omega(\zeta) \left| d\zeta + A(\zeta) d\bar{\zeta} \right|.$$

Теперь мы определим радиальные и угловые пределы $f^*(\zeta)$ и $f_{<}^*(\zeta)$, $\zeta \in \partial L(a,r)$. Для круга $U = \{|w|<1\} \subset \mathbb{C}_w$ предел по радиусу $\tau_\zeta = \{w = t\zeta\}$, $0 \le t \le 1$, $\zeta \in \partial U$ функции $\varphi(w)$, $\varphi^*(\zeta) = \lim\limits_{w\to\zeta,\, w\in\tau_\zeta} \varphi(w)$ называется радиальным пределом, а предел по углу $\measuredangle \subset U$, выходящий из точки ζ, $\zeta \in \measuredangle$ называется угловым пределом, $\varphi_{\measuredangle}^*(\zeta) = \lim\limits_{w\to\zeta,\, w\in\measuredangle} \varphi(w)$. Так как лемниската $L(a,r)$ является односвязной областью, с вещественно аналитической границей, то по теореме Римана существует конформное отображение $\chi(z): U \to L(a,r)$, которое кроме того конформно в некоторой окрестности замыкания $\bar{U}$. Пусть χ отображает граничную точку $\lambda \in \partial U$ в граничную точку $\zeta \in \partial L(a,r)$. Тогда кривая $\gamma_\zeta = \chi(\tau_\lambda)$ обладает тем свойством, что она соединяет точки a, ζ и перпендикулярна ко всем линиям уровня $\partial L(a,\rho) = \{|\psi(a,z)| = \rho\}$, $0 < \rho \le r$. В теории $A(z)$-аналитических функций кривая γ_ζ играет роль радиального направления, а образ угла $\chi(\measuredangle)$ играет роль углового множества в точке $\zeta \in \partial L(a,r)$. Этот криволинейный угол мы обозначим через $\measuredangle = \measuredangle_\zeta$. Предел $\lim\limits_{z\to\zeta,\, z\in\gamma_\zeta} f(z) = f^*(\zeta)$ называется радиальным пределом, а $f_{\measuredangle}^*(\zeta) = \lim\limits_{z\to\zeta,\, z\in\measuredangle_\zeta} f(z)$ $-$угловым пределом функции $f(z)$ в точке $\zeta \in \partial L(a,r)$.

$f^*(\zeta)$ существование граничной функции покажем сейчас с помощью аналога теоремы Фату.

Теорема 5. *Пусть* $f(z) \in O_A(L(a,r))$. *Если этая функция* $f(z)$ *ограничена в лемнискате* $L(a,r)$, *то радиальные пределы* $f^*(\zeta) = \lim\limits_{z\to\zeta} f(z)$ *существует для всех точек* ζ *на* $\partial L(a,r)$, *кроме, быть может, точек некоторого множества меры нуль.*

Следствие 1. *Пусть* $u(z) \in h_A(L(a,r))$. *Если функция* $u(z)$ *ограничена в лемнискате* $L(a,r)$, *то радиальные пределы* $u(\zeta) = \lim\limits_{z\to\zeta\in\partial L(a,r)} u(z)$ *существует для всех точек* ζ *на* $\partial L(a,r)$, *кроме, быть может, точек некоторого множества меры нуль.*

Ясно, что если существует угловой предел $f_{\measuredangle}^*(\zeta)$, то существует радиальный предел $f^*(\zeta) = f_{\measuredangle}^*(\zeta)$.

Теорема 6. *Если* $f(z) \in H_A^1(L(a,r))$, *то угловой предел*

$$f^*(\zeta) = \lim_{z\to\zeta,\, z\in\measuredangle} f(z)$$

существует и конечен для почти всех $\zeta \in \partial L(a,r)$.

Следствие 2. *Пусть* $f(z) \in O_A(L(a,r))$. *Если этая функция ограничена в лемнискате* $L(a,r)$, *то почти всюду на границе* $\partial L(a,r)$ *она имеет угловая предельная значения* $f_{\measuredangle}^{*}(\zeta)$.

Ясно, что если $f(z) \in H_A^1(L(a,r))$, то $f^*(\zeta) \in L_A^1(\partial L(a,r))$. При $\rho \to r$ имеем

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} f(z)|dz + A(z)d\bar{z}| \to \int\limits_{|\psi(a,\zeta)|=r} f^*(\zeta)|d\zeta + A(\zeta)d\bar{\zeta}| \tag{5}$$

и

$$\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} |f(z) - f^*(\zeta)||dz + A(z)d\bar{z}| \to 0. \tag{6}$$

По формуле Коши (2) для лемнискаты $L(a,r)$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\psi(a,\xi)|=\rho} f(\xi)K(\xi,z)(d\xi + A(\xi)d\bar{\xi}).$$

Устремив ρ к r при фиксированной точке $z \in L(a,r)$, на основании этой формулы и теореме 6 заключаем, что

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\psi(a,\zeta)|=r} f^*(\zeta)K(\zeta,z)(d\zeta + A(\zeta)d\bar{\zeta}). \tag{7}$$

(7) представляется формула Коши для функций из H_A^1.

Введем еще один класс функций, близкого к пространству Харди.

Определение 3. *Пусть* $f(z) \in O_A(L(a,r))$. *Этая функция называется принадлежит классу* N_A, *если её средние*

$$\frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \ln^+|f(z)||dz + A(z)d\bar{z}| \tag{8}$$

равномерно ограничены, $\sup\limits_{\rho<r}\left\{\frac{1}{2\pi\rho}\int\limits_{|\psi(a,z)|=\rho} \ln^+|f(z)||dz + A(z)d\bar{z}|\right\} < +\infty.$

Для функции $v(z) \in sh_A(L(a,r))$ $A(z)$-гармоническая в лемнискате $L(a,r)$ функция $u(z) \in h_A(L(a,r))$ называется $A(z)$-*гармонической* мажорантой, если $v(z) \le u(z)$, $\forall z \in L(a,r)$. Отметим, что если $v(z) \in sh_A(D)$ и $L(a,r) \subset\subset D$, то решение задачи Дирихле $\omega(z) \in h_A(L(a,r))$,

$\omega(z)|_{\partial L(a,r)} = v(z)||_{\partial L(a,r)}$ является $A(z)$-гармонической мажорантой функции $v(z),\ \omega(z) \geq v(z),\ \forall z \in L(a,r)$.

Теорема 7. *Пусть* $v(z) \in sh_A(L(a,r))$. *Для этот функция имела гармоническую мажоранту* $u(z) \in h_A(L(a,r)),\ u(z) \geq v(z)$ *необходим и достаточно, если семейство интегралов* $\int\limits_{\partial L(a,\rho)} v(z)|dz + A(z)d\bar{z}|$ *была равномерно ограничено, то*

$$\sup_{\rho<r}\left\{\int\limits_{\partial L(a,\rho)} v(z)|dz + A(z)d\bar{z}|\right\} < +\infty.$$

Теорема 8. *Пусть* $u(z) \in h_A(L(a,r))$. *Если* $\int\limits_{\partial L(a,\rho)} |u(z)||dz + A(z)d\bar{z}|$ *равномерно ограничена, т.е.* $\sup\limits_{\rho<r}\left\{\int\limits_{\partial L(a,\rho)} |u(z)||dz + A(z)d\bar{z}|\right\} < +\infty$, *то* $u(z)$ *представляется в виде разности двух положительных* $A(z)$*-гармонических функций,* $u(z) = u_1(z) - u_2(z),\ u_1(z) > 0,\ u_2(z) > 0$.

Теорема 9. *Если* $f(z) \in N_A(L(a,r))$, *то функция представляется в виде отношений двух ограниченных функций,*

$$f(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)},\quad f_1(z), f_2(z) \in O_A(L(a,r)), |f_1(z)|, |f_2(z)| \leq C < \infty, \forall z \in L(a,r).$$

Следствие 3. *Если* $f(z) \in N_A(L(a,r))$, *то функция имеет радиальные (угловые) пределы* $f^*(\zeta)$ *почти всюду на границе* $\partial L(a,r)$.

В третьей главе диссертации, названной «**Формула Карлемана для *A*(*z*)-аналитических функций**» с помощью $A(z)$-гармонических и $A(z)$-субгармонических функций мы докажем теорему единственности − аналог теоремы Фату для $A(z)$-аналитических функций. Таким образом, при доказательстве существенно используется $A(z)$-гармоническая мера $\omega(z, M, L(a,r))$ граничного множества $M \subset \partial L(a,r)$, $mes(M) > 0$ относительно области $L(a,r)$ и аналог формулы Карлемана в класса $H_A^1(L(a,r))$.

При изучении граничных свойств функций комплексного переменного основоположное значение имеет свойство единственности её определения по граничным значениям. Рассмотрим сначала это свойство для $A(z)$-аналитических ограниченных функций.

Теорема 10. *Пусть* $f(z) \in O_A(L(a,r))$. *Если функция* $f(z)$ *ограничена в лемнискате* $L(a,r)$, *стремится по радиусам к значению нуль на* *положительной меры множестве точек куске границы* $M \subset \partial L(a,r)$, *то* $f(z)$ *тождественно равно нулю.*

Теорема 11. *Пусть* $f(z) \in H_A^1(L(a,r))$. *Если для множества* $M \subset \partial L(a,r)$, *положительной меры,* $mes(M) > 0$, *граничные значения* $f^*(\zeta) = 0$, *при* $\zeta \in M$, *то* $f(z) \equiv 0$.

Теорема 12. *Пусть* $\omega(z, M, L(a,r)) \in h_A(L(a,r))$. *Функция* $\omega(z, M, L(a,r))$ *либо нигде не обращается в нуль* $\omega(z, M, L(a,r)) < 0$, *либо тождественно равна нулю,* $\omega(z, M, L(a,r)) \equiv 0$. $\omega(z, M, L(a,r)) \equiv 0$ *тогда и только тогда, когда граничное множество* $M \subset \partial L(a,r)$ *имеет меру нуль,* $mesM = 0$.

Теорема 13. *Пусть* $M \subset \partial L(a,r) -$ *измеримое граничное множество положительной меры,* $mesM > 0$. *Если* $\omega(z, M, L(a,r)) \in h_A(L(a,r))$, *то для почти всех точек* $\zeta^0 \in M$ *существуют радиальные (угловые) пределы*

$$\lim_{z \to \zeta^0, z \in <_{\zeta^0}} \omega(z, M, L(a,r)) = \omega^*(\zeta^0, M, L(a,r)) = -1.$$

Теорема 14. *Пусть* $u(z) \in sh_A(L(a,r))$ *и* $\omega(z, M, L(a,r)) \in h_A(L(a,r))$. *Если* $u(z) < 0$ *и почти всюду на множестве* $M \subset \partial L(a,r)$ *угловые пределы* $\overline{\lim_{z \to \zeta, z \in <_\zeta}} u(z) \le -1$, $\zeta \in M$, *то во всей лемнискате* $L(a,r)$ *имеет место неравенство* $u(z) \le \omega(z, M, L(a,r))$, $z \in L(a,r)$.

Теорема 15. *Пусть* $f(z) \in O_A(L(a,r))$. *Если* $\exists E > 0$, $|f(z)| \le E$, $\forall z \in L(a,r)$ *и почти всюду на граничном множестве положительной меры* $M \subset \partial L(a,r)$ *угловые пределы* $\overline{\lim_{z \to \zeta, z \in <_\zeta}} f(z) \le E_0$, $\zeta \in M$, $E_0 < E$. *Тогда во всей лемнискате* $L(a,r)$ *имеет место неравенство* $|f(z)| \le E^{1+\omega(z,M,L(a,r))} E_0^{-\omega(z,M,L(a,r))}$, $z \in L(a,r)$.

Теорема 16. *Пусть* $f(z) \in O_A(L(a,r))$ *и последовательность функций* $\{f_j(z)\} \in O_A(L(a,r))$. *Если последовательность граничных значений* $f_j^*(\zeta)$, $\zeta \in M$, *почти всюду сходится на* M, *то последовательность* $f_j(z)$, $z \in L(a,r)$, *сходится к некоторой функции* $f(z)$ *равномерно внутри лемнискаты* $L(a,r)$ *т.е. эта сходимость будет равномерной на любом компакте* $K \subset\subset L(a,r)$.

Пусть $D \subset \mathbb{C} -$ выпуклая область, $L(a,r) \subset\subset D -$ некоторая лемниската, на границе которой дано множество $M \subset \partial L(a,r)$ положительной меры.

Ставится задача восстановления функции $f(z)\in H_A^1\big(L(a,r)\big)$ в $L(a,r)$ по граничным значениям не по всей границы $\partial L(a,r)$, как в интегральном формулы Коши для класс Харди H_A^1 (7), а только по $M\subset\partial L(a,r)$. Применяя метод, Голузина-Крылова построим «*гасящую*» *функцию*, которая позволит избавиться в (7) интегрирования по $\partial L(a,r)\setminus M$. Для этой цели нужно сконструировать вспомогательную функцию $\varphi(z)\in H_A^\infty\big(L(a,r)\big)$ удовлетворяющую двум условиям:

1. $\left|\varphi^*(\zeta)\right|=1$ почти всюду на $\partial L(a,r)\setminus M$, здесь φ^*-граничное значение φ;
2. $|\varphi(z)|>1$ в $L(a,r)$.

Это можно сделать, построив $A(z)$-гармоническую меру $\omega\big(z,M,L(a,r)\big)$ граничного множества $M\subset\partial L(a,r)$. Согласно теореме 13 $\omega\big(z,M,L(a,r)\big)\in h_A\big(L(a,r)\big)$, $-1\le\omega\big(z,M,L(a,r)\big)<0$, и

$$\omega^*\big(\zeta,M,L(a,r)\big)=\lim_{z\to\zeta,\,z\in\sphericalangle}\omega\big(z,M,L(a,r)\big)=-1$$

почти всюду на M,

$$\omega^*\big(\zeta,\partial L(a,r)\setminus M,L(a,r)\big)=\lim_{z\to\zeta,\,z\in\sphericalangle}\omega\big(z,\partial L(a,r)\setminus M,L(a,r)\big)=0$$

почти всюду на $\partial L(a,r)\setminus M$.

Так как $L(a,r)\subset\subset D$ $-$односвязная, то существует сопряженная к $\omega\big(z,M,L(a,r)\big)=u(z)$ $A(z)$-гармоническая функция $v(z)$, такая что функция $u(z)+iv(z)=w(z)\in O_A\big(L(a,r)\big)$. Рассмотрим функцию $\varphi(z)=\exp\big(-w(z)\big)$. Она удовлетворяет указанным выше условиям 1 и 2: $\varphi(z)\in O_A\big(L(a,r)\big)$, т.е. если $-w(z)\in O_A\big(L(a,r)\big)$, то $\varphi(z)=e^{-w(z)}\in O_A\big(L(a,r)\big)$. Действительно, легко проверить, что функция $-w(z)$ удовлетворяет уравнения Бельтрами (1):

$$\overline{D}_A\varphi(z)=\frac{\partial\varphi}{\partial\bar z}-A(z)\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{\partial e^{-w}}{\partial\bar z}-A(z)\frac{\partial e^{-w}}{\partial z}=e^{-w}\frac{\partial(-w)}{\partial\bar z}-A(z)e^{-w}\frac{\partial(-w)}{\partial z}=$$

$$=e^{-w}\left(\frac{\partial(-w)}{\partial\bar z}-A(z)\frac{\partial(-w)}{\partial z}\right)=0,$$

также функция $e^{-w(z)}$ удовлетворяет (1) и $\left|\varphi(z)\right|=e^{-u(z)}\le e$ всюду в $L(a,r)$, т.е.

1. $\varphi(z)\in H_A^\infty\big(L(a,r)\big)$, $\left|\varphi^*(\zeta)\right|=e^{-u^*(\zeta)}=e^0=1$ почти всюду на $\partial L(a,r)\setminus M$;
2. $\left|\varphi(z)\right|=e^{-u(z)}>1$, $\forall z\in L(a,r)$.

Эта функция является *гасящей* функцией относительно множества M.

Теорема 17. *Если* $f \in H_A^1(L(a,r))$ *и* $M \subset \partial L(a,r)$ *– множество положительной меры, то для любой точки* $z \in L(a,r)$ *верна формула*

$$f(z) = \lim_{m\to\infty} \int_M f^*(\zeta) \left[\frac{\varphi^*(\zeta)}{\varphi(z)} \right]^m K(\zeta, z) \left(d\zeta + A(\zeta) d\bar{\zeta} \right), \qquad (8)$$

причем сходимость в (8) *будет равномерной на компактах в* $L(a,r)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации рассматривались граничные задачи $A(z)$-аналитических и $A(z)-$гармонических функций. Доказаны ряд полезных теорем для функций из класса Харди для $A(z)$-аналитических функций. Кроме того, введен класс Неванлинна для $A(z)$-аналитических функций и исследованы граничные свойства функций из этого класса:

введены классы Харди для $A(z)$-аналитических и $A(z)$-гармонических функций в лемнискате и доказаны ряд их функциональные свойства;

используя формулу Пуассона построена граничные функции для $A(z)$-гармонических функций;

доказано существование углового предела для функции из класса Харди для $A(z)$-аналитических функций на почти всех точках границы лемнискате;

введен класс Неванлинны-Островского для $A(z)$-аналитических функций. Дана характеристика этого класса в терминах рядов Бляшке;

доказано, что функции из класса Неванлинны-Островского для $A(z)$-аналитических функций всегда представляется отношением двух ограниченных функций;

для функции из класса Неванлинны-Островского для $A(z)$-аналитических функций доказано существование углового предела почти всюду на границе лемнискате.

доказана граничная теорема единственности для $A(z)$-аналитических функций;

показано, что $A(z)$-гармоническая мера существует для почти всех точках куске границе лемнискате;

построена гасящая функция для $A(z)$-аналитических функций;

применяя этую гасящую функцию получен формулы Карлемана для функция из класса Харди для $A(z)$-аналитических функций.

В целом, полученные результаты позволяют говорить о достижении цели исследования диссертации.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 KARSHI STATE UNIVERSITY

BUKHARA STATE UNIVERSITY

KHUSENOV BEHZOD ERKIN UGLI

CARLEMAN’S FORMULA FOR $A(z)$-ANALYTIC FUNCTIONS

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Karshi – 2024

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number B2021.1.PhD/FM255.

Dissertation has been prepared at Bukhara state university.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council (http://ik-fizmat.nuu.uz/) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (http://www.ziyonet.uz/).

Scientific supervisor:	**Zhabborov Nasridin Mirzoodilovich** Doctor of physical and mathematical sciences, professor
Official opponents:	**Yakhshibayev Makhmadiyor Umirovich** Doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Bozorov Jurabek Togaymuratovich Doctor of philosophy on physical and mathematical sciences (PhD)
Leading organization:	

Defense will take place on "24" 05 2024 at 11^00 at the meeting of Scientific Council PhD.03/30.06.2020.FM.70.04 at Karshi state university. (Address: Kuchabag str., 17, Karshi city, 180103, Uzbekistan, Tel.: (+998 75) 225 34 13, Fax: (+998 75) 221 00 56, e-mail: qarshidu@umail.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at National University of Uzbekistan (registered for No 216). (Address: Kuchabag str., 17, Karshi city, 180103, Uzbekistan, Tel.: (+998 75) 225 34 13, Fax: (+998 75) 221 00 56, e-mail: qarshidu@umail.uz).

Abstract of dissertation sent out on "11" 05 2024.
(Mailing report No. 1 on "11" 05 2024).

B.A.Shaimkulov
Chairman of Scientific council on award of scientific degrees, Dr.Phys.-Math.Sci., professor

Sh.D.Nodirov
Scientific secretary of Scientific council on award of scientific degrees, PhD. associate professor

A.A.Imomov
Chairman of scientific seminar under Scientific council on award of scientific degrees, DSc., associate professor

INTRODUCTION (Abstract of PhD dissertation)

The aim of the study is to study analogous problems in the theory of boundary properties of analytic functions for $A(z)$-analytic functions and to prove Carleman formulas for $A(z)$-analytic function.

The object of the research work is to study was the behavior at the boundary of the domain of definition and integral representations of $A(z)$-analytical functions.

Scientific novelty of the research work is as follows:

the Hardy class of $A(z)$-analytic functions is introduced and its main functional properties are proved, and the solution of the Dirichlet problem for $A(z)$-harmonic functions from the Hardy class is also given using the Poisson formula;

the concepts of radial and angular limits from the class of $A(z)$-analytic functions are introduced and the Fatou theorem for $A(z)$-analytic functions is proved, using this theorem the Cauchy formula for $A(z)$-analytic functions from the Hardy class is derived;

the Nevanlinna-Ostrovsky class is introduced for $A(z)$-analytic functions and $A(z)$-harmonic majorant. The functions belonging to this class are decomposed into a Blaschke product and the existence of their boundary values is proved;

the boundary uniqueness theorems for $A(z)$-analytic functions from the Hardy or bounded class are proved. An $A(z)$-harmonic measure of a boundary set is introduced, estimates of $A(z)$-harmonic and $A(z)$-analytic functions are investigated, and uniform convergence of a sequence of $A(z)$-analytic functions;

for bounded $A(z)$-analytic functions through $A(z)$-harmonic measure, an quenching function is constructed and using this function, the Carleman formula for $A(z)$-analytic functions from the Hardy class is proved.

Implementation of the research results. In the course of the dissertation research, the obtained scientific results were put into practice in the following areas:

From the conclusions based on the proof, boundary theorems for $A(z)$-analytic functions were used in carrying out research work on the OT-Atex-2018-340 project in 2018-2020. “Theoretical and numerical study of applied geophysical issues of two-speed medium dynamics” (Reference of Karshi State University No. 03/3556 dated September 20, 2023). The application of scientific results made it possible to study the uniqueness and existence of the problem of determining the core of a diagonal matrix in a system of viscoelastic equations.

From the conclusions based on the proof, Fatou's theorem for $A(z)$-analytic functions was used in carrying out research work on the MRU-OT-9/2017 project in 2018-2019. “Multidimensional complex analysis” (Reference of the National University of Uzbekistan No. 04/11-6047 dated September 26, 2023). As a result, it became possible to find the Cauchy formula from the Hardy class for $A(z)$-analytic functions.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion and a list of references. The numbering of theorems, propositions, definitions, and formulas is end-to-end, separately for each chapter. The total number of dissertation pages is 83.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (1 часть; part 1)

1. Жабборов Н.М., Хусенов Б.Э. Аналог теорема Фату для $A(z)$-аналитических функций. Известия ВУЗов. Математика 7(2023) – С. 13-22 (Scopus IF=0.36). (01.00.00; №22).

2. Husenov B.E., Generalization of the Hardy class for $A(z)$–analytic functions, Scientific Reports of BukhSU, 4(2021) - Pp. 29-46. (01.00.00; №3).

3. Zhabborov N.M., Khursanov Sh.Y., Husenov B.E. Existence of boundary values of Hardy class functions H_A^1, Bulleten of the National University of Uzbekistan, 2022, Volume 5, Issue 2, Pp. 79-90. (01.00.00).

4. Zhabborov N.M., Husenov B.E., Boundary uniqueness theorem for bounded $A(z)$–analytic functions, Bulletin of the Institute of Mathematics, 2023, Volume 6, Issue 2, Pp. 71-78. (01.00.00; №17).

5. Zhabborov N.M., Husenov B.E., Boundary properties of the Hardy class for $A(z)$–analytic functions, Scientific sources, 2023, Volume 12, Issue 8, Pp. 26-35. (01.00.00; №12).

6. Жабборов Н.М., Хусенов Б.Э., Формула Карлемана $A(z)$-аналитических функций, журнала Доклады академии наук Республики Узбекистан (ДАН), 6(2023) - С. 8-13. (01.00.00; №7).

II bo‘lim (2 часть; part 2)

7. Хусенов Б.Э., “Класс Харди для $A(z)$-аналитических функций”, Республиканская научно-практическая конференция на тему “Саримсаковские чтения”, Ташкент, 16-17 сентября 2021 года, стр. 152-155.

8. Husenov B.E., Boundary uniqueness theorems class for $A(z)$-analytic functions, International conference of the “Functions theory, operator theory and Quantum information theory”, Ufa (Russia Federation), (October 4-5, 2021), pp. 47-49.

9. Хусенов Б.Э., “Обобшённие граничные теоремы единственности для $A(z)$-аналитических функций”, Республиканская научно-практическая конференция “Теоретические основы и практические задачи современной математики”, Андижан, 2022 год 28 март, стр. 298-300.

10. Zhabborov N.M. and Husenov B.E., Greens function for class $A(z)$-analytic functions, International Scientific Conference “Scientific foundations of the useof new-level information technologies and modern problemsautomation”, Tashkent, 2022 year 24-25 april, pp. 223-225.

11. Хусенов Б.Э., Существования предельных значений $A(z)$-аналитических функций, Международная научно-практическая конференция “Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий”, Бухара, 2022 год 11-12 мая, стр. 81-82.

12. Husenov B.E., “Radial limit functions for $A(z)$-analytic functions”, Republican Scientific Conference “Operator algebras, non-associative structures and related problems”, Tashkent, September 14-15, 2022, pp. 126-128.

13. Zhabborov N.M. and Husenov B.E., “The Cauchy integral formula for the class of H_A^1 functions”, The Uzbekistan-Malaysia international Scientific Conference “Computational models and technologies”, Tashkent, September 16-17, 2022, pp. 146-148.

14. Zhabborov N.M. and Husenov B.E., “The Poisson representation for the Hardy class of H_A^1 functions”, International conference “Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics”, Samarkand, September 23-24, 2022, pp. 125-127.

15. Husenov B.E., “Non-tangential boundary values for $A(z)$-analytic functions”, International conference “Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics”, Samarkand, September 23-24, 2022, pp. 125-127.

16. Husenov B.E., “Construction of a quenching $A(z)$-analytic function”, International Scientific Conference “Ufa autumn mathematical school – 2022”, Ufa (Russian Federation), September 28 – October 1, 2022, pp. 198-201.

17. Zhabborov N.M. and Husenov B.E., “Generalization of the boundary uniqueness theorem for $A(z)$-analytic functions”, “IUTAM Symposium on Optimal Guidance and Control for Autonomous Systems”, Honoulu (Hawai USA),March 15 – 17, 2023, pp. 55-56.

18. Zhabborov N.M. and Husenov B.E., Rissov’s theorem for $A(z)$-analytic functions, The II International scientific conference “The scientific basis for raising the use of information technologies to a new level and modern problems of automation”, Tashkent, May 19–20, 2023, pp. 208-210.

19. Zhabborov N.M. and Husenov B.E. “Generalization of the Cauchy integral formula for a class of functions H_A^1”, The International scientific and practical conference “Actual problems of physics, mathematics and mechanics”, Bukhara, May 25–26, 2023, pp. 86-89.

20. Жабборов Н.М. и Хусенов Б.Э., “Формула Карлемана для $A(z)$-аналитических функций”, Республиканская конференция “Современные проблемы анализа”, Карши, 1-2 июня 2023 г., стр. 97-99.

Avtoreferat "Durdona" nashriyotida tahrirdan o'tkazildi hamda o'zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlarning mosligi tekshirildi.

Bosishga ruxsat etildi: 06.05.2024 yil. Bichimi 60x84 $^{1}/_{16}$, «Times New Roman» garniturada raqamli bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog'i 2,5. Adadi: 100 nusxa. Buyurtma №263.

Guvohnoma AI №178. 08.12.2010.
"Sadriddin Salim Buxoriy" MChJ bosmaxonasida chop etildi.
Buxoro shahri, M.Iqbol ko'chasi, 11-uy. Tel.: 65 221-26-45