URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJA BERUVCHI PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

RO‘ZMETOV MUROD MARKSOVICH

MOSLANGAN MANBALI TODA TENGLAMASI VA UNING UMUMLASHMALARINI TESKARI SPEKTRAL MASALA USULIDA INTEGRALLASH

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Urganch – 2024

UDK: 517.957

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Ro'zmetov Murod Marksovich
Moslangan manbali Toda tenglamasi va uning umumlashmalarini teskari spektral masala usulida integrallash ……………………………..……………………… 3

Рузметов Мурод Марксович
Интегрирование уравнения Тоды с самосогласованным источником и его обобщений методом обратной спектральной задачи ……………...………… 21

Ruzmetov Murod Marksovich
Integration of the Toda equation with a self-consistent source and its generalizations by the inverse spectral problem method ……………………….. 41

E'lon qilingan ishlar ro'yxati
List of published works
Список опубликованных работ……………………………………………45

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJA BERUVCHI PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

RO‘ZMETOV MUROD MARKSOVICH

MOSLANGAN MANBALI TODA TENGLAMASI VA UNING UMUMLASHMALARINI TESKARI SPEKTRAL MASALA USULIDA INTEGRALLASH

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Urganch – 2024

Fizika-matematika fanlari boʻyicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi Oʻzbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2023.4.PhD/FM952 raqam bilan roʻyxatga olingan.

Dissertatsiya Urganch davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (oʻzbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida (www.ik-mat.urdu.uz) va «ZiyoNet» Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Babajanov Bazar Atajanovich** fizika-matematika fanlari doktori, dotsent
Rasmiy opponentlar:	**Yaxshumuratov Alisher Bekchanovich** fizika-matematika fanlari doktori
	Babadjanova Aygul Kamildjanovna fizika-matematika fanlari falsafa doktori (PhD)
Yetakchi tashkilot:	**Samarqand davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi Urganch davlat universiteti huzuridagi PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 raqamli Ilmiy kengashning ____ yil «___»_________ soat ____ dagi majlisida boʻlib oʻtadi. (Manzil: 220100, Urganch sh., H.Olimjon koʻchasi, 14-uy. Tel.: (+99862) 224-66-11, faks: (+99862) 224-67-00, e-mail: ik-mat.urdu@umail.uz.)

Dissertatsiya bilan Urganch davlat universiteti Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (___ raqami bilan roʻyxatga olingan). (Manzil: 220100, Urganch sh., H.Olimjon koʻchasi, 14-uy. Tel.: (+99868) 224-67-00).

Dissertatsiya avtoreferati ______ yil «___»_________ kuni tarqatildi.

(_____ yil __ (oy)dagi __ raqamli reestr bayonnomasi).

Gʻ.Oʻ. Oʻrazboyev
Ilmiy daraja beruvchi Ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d.

A.A. Reyimberganov
Ilmiy daraja beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.n.

A.B. Yaxshimuratov
Ilmiy daraja beruvchi Ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi oʻrinbosari, f.-m.f.d.

Kirish (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida olib borilayotgan ko‘plab ilmiy-amaliy tadqiqotlar shuni ko‘rsatadiki, matematik fizika va kvant mexanikasining ko‘plab masalalari, ko‘p hollarda, differensial-chekli ayirmali tenglamalar bilan ifodalanadigan matematik modellar orqali ifodalanadi. Bu turdagi Toda zanjiri, differensial-chekli ayirmali Shredinger tenglamasi, Ablovitz-Ladik zanjiri kabi nochiziqli tenglamalar kvant mexanikasi, nochiziqli optika, plazma fizikasi kabi sohalarda keng qo‘llanilmoqda. Bunday tenglamalarni integrallashda chekli ayirmali operatorlar spektral nazariyasining to‘g‘ri va teskari masalalari usullaridan foydalanish, jarayon haqidagi tasavvurlarni kengaytirishda muhim ahamiyat kasb etadi. Shu sababli differensial-chekli ayirmali tenglamalarni integrallash, ularni integrallashga chekli ayirmali operatorlar spektral nazariyasining to‘g‘ri va teskari masalalari usullarini tadbiq qilish ushbu sohadagi muhim vazifalardan biri bo‘lib qolmoqda.

Hozirgi kunda jahonda fizik modellarni o‘rganishda chekli ayirmali operatorlar spektral nazariyasi usullari muhim matematik instrument bo‘lib xizmat qilmoqda. Plazma fizikasi, nochiziqli optika, yadro fizikasi sohalarida yuzaga keladigan to‘lqin tarqalish jarayonlarini tadqiq qilishda muhitga qo‘shimcha ta’sirlarni hisobga olish, soliton to‘lqinlarning turli xil dinamikalarini o‘rganish zaruratini paydo qiladi. Bu jarayonlarning matematik modeli sifatida, moslangan manbali differensial-chekli ayirmali tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar qaraladi. Bu tenglamalarning ayrim yechimlari soliton to‘lqinlarni ifodalaydi. Shu sababli, Toda tipidagi tenglama, moslangan manbali Toda tenglamasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalasi hamda moslangan manbali umumlashgan Toda tenglamasi uchun Koshi masalasi yechimini topish maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda amaliy va fundamental ahamiyatga ega bo‘lgan matematik fizikaning tadbiqiy masalalarini hal qilish uchun zamonaviy matematik uslullarini ishlab chiqish va qo‘llashga alohida e’tibor qaratilmoqda. Xususan, differensial, chekli-ayirmali operatorlar uchun sochilish nazariyasining to‘g‘ri va teskari spektral masalalari va xususiy hosilali differensial tenglamalarning amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan masalalarini o‘rganishga e’tibor kuchaydi. Buning natijasida matematik fizikaning amaliy va fundamental ahamiyatga ega bo‘lgan nochiziqli evolyutsion tenglamalari uchun qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masalalarini to‘g‘ri va teskari spektral masalalar usuli yordamida integrallash bo‘yicha salmoqli natijalarga erishildi. Matematika, fizika va matematik fizikaning zamonaviy usullari sohasida xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish ilmiy tadqiqot va oliy ta’lim muassasalari faoliyatining asosiy vazifalaridan biri hisoblanadi[1]. Qaror ijrosini ta’minlashda, differensial, chekli-ayirmali operatorlar uchun to‘g‘ri va teskari spektral masalalar nazariyasini rivojlantirish, moslangan manbali chekli-ayirmali differensial tenglamalarni o‘rganish va tatqiq qilish muhim ahamiyatga ega.

---

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 7 maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-son qarori.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-son «Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi va 2020 yil 7 maydagi PQ-4708-son «Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi qarorlari, 2020-yil 29-oktabrdagi "Ilm-fanni 2030-yilgacha rivojlantirish Konsepsiyasi" tasdiqlash to‘g‘risidagi PF-6097-son Farmoni, 2020-yil 6-noyabrdagi “O‘zbekistonning yangi taraqqiyot davrida ta’lim-tarbiya va ilm-fan sohalarini rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PF-6108-son Farmoni, 2022-yil 28-yanvardagi “2022–2026 yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-60-son Farmoni hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishi ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Ushbu dissertatsiyadagi izlanish va tadqiqotlar O‘zbekiston Respublikasida fan va texnika taraqqiyotining IV. «Matematika, mexanika va informatika» ustuvor yo‘nalishiga muvofiq olib borildi.

Muammoni o‘rganilganlik darajasi. Shturm-Liuvill tipidagi operatorlarning spektral nazariyasi bo‘yicha dastlabki tadqiqotlar, tor tebranishini tavsiflovchi tenglamaning yechimi bilan bog‘liq holda Dalamber, Eyler, Liuvill, Shturm va D.Bernulli tomonidan amalga oshirilgan. Ma’lumki, spektral tahlilning to‘g‘ri masalasi spektrning xossalari va chiziqli operatorlarning xos funksiyalari, shuningdek, to‘liqlik va spektral yoyish masalalarini o‘rganishdan iborat. Teskari masalalar chiziqli operatorlarni ularning spektral xarakteristikalari asosida aniqlashdan iborat. XX-asrning ikkinchi yarmida oddiy differensial operatorlar uchun spektral tahlilning to‘g‘ri masalalarini o‘rganishga A.G. Kostyuchenko, M.A. Naymark, V.B. Lidskiy, Ya.T. Sultanaev, V.A. Sadovnichiy, M.K. Fage, A.A. Shkalikov va A.P. Xromov boshqa matematiklarning asarlari katta hissa qo‘shgan.

Oddiy differensial operatorlar uchun teskari spektral masalalar nazariyasidagi asosiy natijalar N.Levinson, L.A.Chudov, A.N.Tixonov, V.A.Marchenko, M.G.Kreyn, I.M.Gelfand, B.M.Levitan, Yu.M.Berezanskiy, M.G.Gasimov, I.Key, L.D.Faddeev, V.A.Sadovnichiy, V.E.Lyantse, F.S.Rofe-Beketov, Yu.Moser, V.A.Yurko, A.B. Xasanov va boshqalar tomonidan olingan.

Diskret Shturm-Liuvill operatori uchun sochilish nazariyasining teskari masalasi birinchi marta K.Keys va M.Kats ishlarida ko‘rib chiqilgan bo‘lsa, S.V.Manakov, N.Flashka, E.M.Nikishin, G.Sh.Guseynov, M.S.Eskin, V.G.Tarnopolskiy va boshqalar ishlarida rivojlantirilgan. Diskret Hill operatori uchun to‘g‘ri va teskari masala M.G.Kreyn, H.Hochstadt, E.Deyt, S.Tanaka, M.Toda, N.V.Jernakov, G.Teschl A.B.Xasanov, va boshqalarning ishlarida o‘rganilgan.

Diskret operatorlar uchun teskari masala usulining keyingi rivojlanishi uning differensial-chekli ayirmali tenglamalar sistemasiga qo‘llanilishi bilan bog‘liq.

Bunday sistemalarga bir o‘lchamli zarrachaning eng yaqin qo‘shni zarracha bilan o‘zaro eksponensial ta’sir dinamikasini tavsiflovchi tenglamalar sistemasi misol bo‘ladi. Birinchi marta bu sistema M.Toda tomonidan o‘rganilib, aniq yechimi topilgan, shuning uchun bu sistema Toda zanjiri deb ataladi. S.V.Manakov, N.Flashka va A.X.Xanmamedovlarning ishlarida Toda sistemasini yechish uchun chekli ayirmali Shturm-Liuvill operatori uchun sochilish nazaiyasining teskari masalasi usulini qo‘llash mumkinligi ko‘rsatilgan.

Umumiy Toda tenglamasi uchun teskari masala usulini qo‘llash mumkinligi V. Bull, F. Gestezi, X. Holden va G. Teschl ishlarida o‘rganilgan.

V.K.Melnikovning moslangan manbali nochiziqli evolyutsion tenglamalar bo‘yicha fundamental ishlarida sochilish nazariyasi teskari masalasi usulidan foydalangan holda moslangan manbali KdF tenglamasi "tez kamayuvchi" funksiyalar sinfida integrallangan. Xitoy matematiklari Xing-Biao Hu, Hong-Yan Wang, Da-jun Zhang, Xiaojun Liu, Yunbo Zeng, Deng-yuan Chen asarlarida Xirota va Darbu almashtirishi usullari turli moslangan manbali nochiziqli evolyutsion tenglamalarni yechish uchun qo‘llanilgan. Xususan, Xiaojun Liu, Yunbo Zeng ishida moslangan manbali Toda zanjirining yechimlari Darbu almashtirishi usuli yordamida tuzilgan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Urganch davlat universiteti “Amaliy matematika va matematik fizika” kafedrasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq OT-F4-04 (05)- “Spektral usulni matritsaviy nochiziqli evolyutsion tenglamalarni yechishga tatbiqlari, Yurak qon-tomir tizimining biomexanikasi” (2017-2020 y.) mavzusidagi fundamental ilmiy tadqiqot loyihasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi. Chekli kompleks Toda tipidagi tenglamaga qo‘yilgan boshlang‘ich chegaraviy masalani teskari spektral masala usulida yechish, moslangan manbali haqiqiy chekli Toda tenglamasiga qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masalani teskari spektral masala usulida yechish, moslangan manbali kompleks chekli Toda tenglamasiga qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masalani teskari spektral masala usulida yechish, integral manbali umumiy Toda va Toda tipidagi tenglamalarni integrallashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari.

Chekli kompleks Toda tipidagi tenglamaga qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masalani teskari spektral masala usulida yechish;

moslangan manbali haqiqiy chekli Toda tenglamasiga qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masalani teskari spektral masala usulida yechish;

moslangan manbali kompleks chekli Toda tenglamasiga qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masalani teskari spektral masala usulida yechish;

Integral manbali Toda tipidagi tenglamani integrallash;

Integral manbali umumiy Toda tenglamasini tuzish;

Integral manbali umumiy Toda tenglamasini integrallash.

Tadqiqot ob’ekti diskret Shturm-Liuvill tenglamasi, Toda tenglamasi, Toda tipidagi tenglama, moslangan manbali Toda tenglamasi, integral manbali Toda tipidagi tenglama, integral manbali umumiy Toda tenglamasi.

Tadqiqot predmeti diskret Shturm-Liuvill tenglamasi uchun sochilish nazariyasining teskari masalasi hamda uni moslangan manbali evolyutsion tenglamalarga tatbiqlari.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiya ishida xususiy hosilali tenglamalar, funksional tahlil va kompleks oʻzgaruvchili funksiyalar nazariyasi usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

Chekli ayirmali operatorlar spektral nazariyasining teskari masalasi usuli yordamida chekli kompleks Toda tipidagi tenglamaga qoʻyilgan boshlangʻich-chegaraviy masala yechilgan;

Koeffitsiyentlari moslangan manbali chekli haqiqiy Toda tenglamasiga qoʻyilgan boshlangʻich-chegaraviy masalaning yechimi boʻlgan chekli ayirmali operatorning spektral berilganlarining vaqtga bogʻliq oʻzgarishi topilgan hamda ular orqali moslangan manbali haqiqiy chekli Toda tenglamasi integrallangan;

moslangan manbali kompleks chekli Toda tenglamasiga qoʻyilgan boshlangʻich-chegaraviy masalanining yechimini topishga chekli ayirmali operatorlar spektral nazariyasining teskari masalasi usuli tadbiq qilingan;

Sochilish nazariyasining teskari masalasi usulidan foydalangan holda integral manbali umumiy Toda hamda Toda tipidagi tenglamalarining integrallanuvchanligi isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

chekli kompleks Toda tipidagi tenglamaga qoʻyilgan boshlangʻich-chegaraviy masalani chekli ayirmali operatorlar spektral nazariyasining teskari masalasi usulidan foydalangan holda yechish algoritmlari ishlab chiqilgan. Mazkur algoritm moslangan manbali chekli Toda tenglamasiga qoʻyilgan boshlangʻich-chegaraviy masalani yechishga qoʻllanilgan;

chekli ayirmali operatorlar uchun sochilish nazariyasining berilganlarining vaqt boʻyicha oʻzgarish dinamikasini ifodalovchi chiziqli differensial tenglamalar integral manbali umumiy Toda hamda Toda tipidagi tenglamalarini integrallashda qoʻllanilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi qoʻyilgan vazifalarni oʻrganishda matematik fizika, funksional tahlil va kompleks oʻzgaruvchili funksiyalar nazariyasi, chekli ayirmali operatorlar uchun sochilish nazariyasining teskari masalasi usullaridan foydalanilgan va barcha isbotlar qat’iy matematik mulohazalarga tayanganligi bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati shundan iboratki, ishda olingan ilmiy natijalar chiziqli operatorlarning spektral nazariyasida, qattiq jismlar fizikasida, maxsus turdagi elektr uzatish liniyalarining ayrim modellarida, gidrodinamikada va kvant fizikada qoʻllanilishi mumkin. Dissertatsiya tadqiqotining amaliy ahamiyati ishda olingan ilmiy natijalarni matematik fizika sohasida nochiziqli evolyutsion tenglamalarni integrallashda qoʻllash bilan belgilanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Moslangan manbali Toda tenglamasi va uning umumlashmalarini teskari spektral masala usulida yechish boʻyicha olingan natijalar asosida:

yuqori tartibli Toda tenglamasini diskret Shturm-Liuvill tenglamasi uchun qo‘yilgan teskari masala yordamida integrallash algoritmidan RFFI 20-01-00293 raqamli “Boshqaruv nazariyasi muammolarida sifat usullari va tayinlanmagan terminal momentli differensial o‘yinlar nazariyasi” mavzusidagi fundamental loyihada xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan ifodalanuvchi tizimlarni boshqarish masalalarini hal qilishda foydalanilgan (Udmurt davlat universitetining 2023 yil 15-noyabrdagi №1001-10430/32-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo‘llanilishi yangi yondashuv asosida maxsus turdagi o‘tao‘tkazgichlar subzonalari o‘rtasidagi o‘zaro ta’sirlarini o‘rganish imkonini bergan;

tez kamayuvchi funksiyalar sinfida moslangan manbali Toda turidagi tenglama uchun qo‘yilgan Koshi masalasini diskret Shturm-Liuvill operatori uchun teskari spektral masala usulida yechishdan OT-F4-04 (05) raqamli “Spektral usulni matritsaviy nochiziqli evolyutsion tenglamalarni yechishga tatbiqlari; Yurak qon-tomir tizimining biomexanikasi” mavzusidagi fundamental loyihasi doirasida tez kamayuvchi funksiyalar sinfida umumiy Toda tenglamasi uchun moslangan manba qurish algoritmini keltirib chiqarishda foydalanilgan (Urganch davlat universitetining 2023-yil 16-noyabrdagi №01-04/01-11/3077-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo‘llanilishi integral manbali matritsaviy Korteveg-de Friz tenglamasi uchun qo‘yilgan Koshi masalasini yechish algoritmini ishlab chiqish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiyaning asosiy mazmuni 12 ta ilmiy-amaliy konferensiyalarda, shu jumladan 8 ta xalqaro va 4 ta respublika ilmiy-amaliy konferensiyalarda muhokama qilindi.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusida 19 ta ilmiy ish chop qilingan, ulardan 7 tasi doktorlik dissertatsiyalarining asosiy ilmiy natijalarini nashr etish uchun O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasi tomonidan tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda, shu jumladan 5 tasi xorijiy jurnallarda chop qilingan.

Dissertatsiyaning hajmi va tuzilishi. Dissertatsiya kirish, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Dissretatsiyaning hajmi 114 betni tashkil qiladi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Dissertatsiyaning birinchi bobi **“Chekli kompleks Toda tipidagi tenglama uchun boshlang‘ich-chegaraviy masala”** mavzusiga bag‘ishlangan bo‘lib, uning birinchi paragrafida chekli kompleks Yakobi matritsasiga qo‘yilgan to‘g‘ri va teskari spektral masalalar haqida zururiy ma’lumotlar keltirilgan.

Ushbu

$$J=\begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & b_1 & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-3} & a_{N-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-3} & b_{N-2} & a_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N-2} & b_{N-1} \end{bmatrix}, \qquad (1)$$

matritsaga $N\times N$ o‘lchamli Yakobi matritsasi deyiladi. Bu yerda a_n va b_n lar ixtiyoriy kompleks sonlar bo‘lib, $a_n, b_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0.$

Ushbu $\omega(\lambda) = -((R(\lambda)e_0, e_0)$ funksiya J matritsaning rezolventa funksiyasi deyiladi. Bu yerda $R(\lambda)=(J-\lambda I)^{-1}$, $e_0=(1,0,...,0)^T$ va $(\cdot,\cdot)$ belgi $\mathbb{C}^N$ fazodagi skalyar ko‘paytmani bildiradi.

$\lambda_1,...,\lambda_p$ orqali J matritsaning barcha xos qiymatlarini, $m_1,...,m_p$ orqali ularning karraliligini belgilaymiz, bunda $1\le p\le N$ va $m_1+...+m_p=N.$ $\omega(\lambda)$ ratsional funksiya bo‘ladi, uni oddiy kasrlarga yoysak, quyidagiga ega bo‘lamiz

$$\omega(\lambda)=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{\beta_{kj}}{(\lambda-\lambda_k)^j}.$$

Bu yerda β_{kj} biror kompleks sonlar bo‘lib, J matritsa orqali bir qiymatli topiladi.

1-ta’rif. Ushbu $\{\lambda_k, \beta_{kj}(j=1,...,m_k, k=1,...,p)\}$ sonlar tizimiga J matritsaning spektral berilganlari deyiladi. Har bir $k\in\{1,...,p\}$ uchun ushbu $\{\beta_{k1},...,\beta_{km_k}\}$ chekli ketma-ketlik J matritsaning λ_k xos qiymatiga mos keluvchi normallovchi o‘zgarmaslari deyiladi.

J matritsa bo‘yicha spektral berilganlarni topish to‘g‘ri masala, spektral berilganlar yordamida J matritsaning a_n, b_n koeffitsiyentlarini aniqlash J matritsa uchun teskari masala deyiladi.

Spektral berilganlar yordamida J matritsaning a_n, b_n koeffitsiyentlarini topish algoritmini keltiramiz. Avvalo spektral berilganlar yordamida ushbu

$$s_l=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m_k}\binom{l}{j-1}\beta_{kj}\lambda_k^{l-j+1},\ l=0,1,2,...,$$

sonlarni tuzib olamiz, bunda $\binom{l}{j-1}$ binom koeffitsiyenti bo‘lib, $j-1>l$ uchun $\binom{l}{j-1}=0$ deb olinadi. Shundan so‘ng, s_l sonlaridan foydalanib, quyidagi determinantlarni kiritamiz

$$D_n=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n} \end{vmatrix}, \quad n=0,1,...,N, \tag{2}$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} & s_{n+1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n & s_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1} & s_{2n+1} \end{vmatrix}, \quad n=0,1,...,N. \tag{3}$$

Bu yerda

$$D_n \neq 0,\ n\in\{0,1,...,N-1\} \text{ va } D_N=0. \tag{4}$$

J matritsaning a_n, b_n koeffitsiyentlari spektral berilganlar yordamida quyidagicha topiladi:

$$a_n^2=\frac{D_{n-1}D_{n+1}}{D_n},\ n\in\{0,1,...,N-2\},\ D_{-1}=1, \tag{5}$$

$$b_n=\frac{\Delta_n}{D_n}-\frac{\Delta_{n-1}}{D_{n-1}},\ n\in\{0,1,...,N-1\},\ \Delta_{-1}=0,\ \Delta_0=s_l. \tag{6}$$

Aytaylik $\{\lambda_k,\beta_{kj}(j=1,...,m_k,k=1,...,p)\}$ ixtiyoriy sonlar tizimi berilgan bo‘lsin. Bu yerda $\lambda_1,...,\lambda_p$, $(1\le p\le N)$ turlicha bo‘lib, $1\le m_k\le N$ va $m_1+...+m_p=N$. Bu sonlar tizimi biror J Yakobi matritsasining spektral berilganlari bo‘lishi uchun ushbu

$$\sum_{k=1}^{p}\beta_{k1}=1$$

va (4) shartning bajarilishi zarur va yetarli.

Birinchi bobning ikkinchi paragrafida quyidagi chekli kompleks Toda tipidagi nochiziqli tenglamalar sistemasini

$$\begin{cases} \dot a_n=a_n(a_{n+1}^2-a_{n-1}^2)+a_n(b_{n+1}^2-b_n^2), \\ \dot b_n=2a_n^2(b_{n+1}+b_n)-2a_{n-1}^2(b_n+b_{n-1}),\ n=0,1,...,N-1 \end{cases} \tag{7}$$

ushbu

$$a_n(0)=a_n^0,\ b_n(0)=b_n^0,\ n=0,1,...,N-1 \tag{8}$$

boshlang‘ich va ushbu

$$a_{-1} = a_{N-1} = 0 \tag{9}$$
chegaraviy shartlar bilan birgalikda qaraymiz. Bu yerda a_n^0, b_n^0 oldindan berilgan kompleks sonlar bo‘lib, ular uchun $a_n^0 \neq 0$, $(n = 0,1,...,N-2)$, $a_{N-1}^0 = 0$ munosabatlar o‘rinli.

Bu paragrafning asosiy natijasi quyidagi teoremadan iborat.

1-teorema. *Agar* $\{a_n(t), b_n(t)\}$, $(n = 0,1,...,N-1)$ *funksiyalar (7)-(9) masalaning yechimi bo‘lsa, u holda* $J(t)$ *matritsaning spektral berilganlari* t $(t \in (0,t_1))$ *bo‘yicha quyidagicha o‘zgaradi:*

$$\lambda_k(t) = \lambda_k(0),$$
$$\beta_{kj}(t) = \frac{1}{S(t)} \sum_{s=j}^{m_k} \beta_{ks}(0) \left. \left(\frac{(e^{2z^2 t})_z^{(s-j)}}{(s-j)!} \right) \right|_{z=\lambda_k}, \ (j = 1,2,...,m_k;\ k = 1,...,p).$$

Bu yerda
$$S(t) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_k} \beta_{kj}(0) \left. \left(\frac{(e^{2z^2 t})_z^{(j-1)}}{(j-1)!} \right) \right|_{z=\lambda_k}$$
bo‘lib, t_1 *soni* $S(t)$ *funksiyaning eng kichik musbat ildizini bildiradi (agar musbat ildiz bo‘lmasa* t_1 *ixtiyoriy musbat son).*

Olingan natijalar $J(t)$ matritsa spektral berilganlarining vaqt bo‘yicha evolyutsiyasini to‘la aniqlaydi va (7)-(9) masalani teskari spektral masala yordamida yechish imkonini beradi.

1-misol. Teorema 1 ning qo‘llanilishini quyidagi misolda ko‘rib chiqamiz. $N = 2$ bo‘lganda (7) tenglamalar sistemasini ushbu
$$a_0(0) = ic,\ b_0(0) = \lambda_0 + c,\ b_1(0) = \lambda_0 - c,$$
$$a_{-1}(t) = a_1(t) = 0,\ t > 0$$
boshlang‘ich va chegaraviy shartlar bilan qaraymiz. Bu yerda λ_0 va c ixtiyoriy kompleks sonlar va $c \neq 0$.

$J(0)$ matritsaning spektral berilganlarini topamiz:
$$\lambda(0) = \lambda_0,\ \beta_{11}(0) = 1,\ \beta_{12}(0) = c.$$
1-teorema natijalaridan foydalanib, quyidagiga ega bo‘lamiz
$$\lambda(t) = \lambda_0,\ \beta_{11}(t) = 1,\ \beta_{12}(t) = \frac{c}{1 + 4\lambda_0 ct}.$$

Topilgan spektral berilganlar yordamida, (2) va (3) tengliklardan foydalanib quyidagilarni aniqlaymiz

$$D_{-1}(t) = 1,\ D_0(t) = 1,\ D_1(t) = -\frac{c^2}{(1 + 4\lambda_0 ct)^2},\ D_2(t) = 0,$$

$$\Delta_{-1}(t)=0\,,\ \ \Delta_0(t)=\lambda_0+\frac{c}{1+4\lambda_0 ct}\,,\ \Delta_1(t)=-\frac{2c^2\lambda_0}{(1+4\lambda_0 ct)^2}\,.$$

Natijada (5) va (6) tengliklardan, qaralayotgan masalaning yechimi $a_n(t), b_n(t)$, $(n=0,1)$ funksiyalar topiladi. Ular quyidagicha bo‘ladi:

$$a_0(t)=\frac{ic}{1+4\lambda_0 ct}\,,\ b_0(t)=\lambda_0+\frac{c}{1+4\lambda_0 ct}\,,\ b_1(t)=\lambda_0-\frac{c}{1+4\lambda_0 ct}\,.$$

Agar $\lambda_0 c\notin\mathbb{R}$ yoki $\lambda_0 c\geq 0$ bo‘lsa, $t\in[0,\infty)$ bo‘ladi. Agar $\lambda_0 c<0$ bo‘lsa, $t\in[0,-1/4\lambda_0 c)$ bo‘ladi.

Ikkinchi bob “**Moslangan manbali chekli Toda tenglamasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masala**” deb nomlangan bo‘lib, uning birinchi paragfarida moslangan manbali haqiqiy chekli Toda tenglamasiga qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masalani Yakobi matritsasi uchun teskari masala usuli yordamida yechish algoritmi keltirilgan.

Quyidagi moslangan manbali chekli Toda tenglamalar sistemasini

$$\begin{cases}\dot{a}_n=a_n(b_{n+1}-b_n)+a_n\sum\limits_{k=1}^{N}\left((g_n^k)^2-(g_{n+1}^k)^2\right),\\ \dot{b}_n=2(a_n^2-a_{n-1}^2)-2\sum\limits_{k=1}^{N}g_n^k(a_n g_{n+1}^k-a_{n-1}g_{n-1}^k),\\ a_{n-1}g_{n-1}^k+b_n g_n^k+a_n g_{n+1}^k=\lambda_k g_n^k,\ k=1,...,N,\ n=0,1,...,N-1\end{cases}\tag{10}$$

ushbu

$$a_n(0)=a_n^0, b_n(0)=b_n^0,\ n=0,1,...,N-1,\tag{11}$$

$$a_{-1}=a_{N-1}=0\tag{12}$$

boshlang‘ich va chegaraviy shartlar bilan qaraymiz. Bu yerda a_n^0, b_n^0 oldindan berilgan haqiqiy sonlar bo‘lib, $a_n^0\neq 0$ $(n=0,1,...,N-2)$, $a_{N-1}^0=0$.

Bu holda $J(t)$ matritsa karrali xos qiymatga ega bo‘lmaydi.

(10) sistemada $\{a_n=a_n(t)\}_{n=0}^{N-1}$, $\{b_n=b_n(t)\}_{n=0}^{N-1}$ va $\{g_n^1(t), g_n^2(t),...,g_n^N(t)\}_{n=0}^{N-1}$ noma’lum funksiyalar bo‘lib, $g^k(t)=(g_0^k(t),g_1^k(t),...,g_{N-1}^k(t))^T$, $k=1,...,N$ vektor-funksiyalar (1) ko‘rinishdagi Yakobi matritsasining λ_k, $k=1,...,N$ xos qiymatlariga mos keluvchi va ushbu $\sum\limits_{n=0}^{N-1}(g_n^k)^2=1$ shart bilan normallangan xos funksiyalari.

(10)-(12) masalaning to‘la integrallanuvchi ekanligini ko‘rsatish uchun, bu masalaga ekvivalent bo‘lgan ushbu

$$\frac{d}{dt}J=[J,A]=JA-AJ\tag{13}$$

Laks tenglamasini tuzish yetarli.

1-lemma. *Agar* $A = A(t)$ *matritsa*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a_0 + d_{0,1} & \cdots & d_{0,N-2} & d_{0,N-1} \\ a_0 - d_{0,1} & 0 & \cdots & d_{1,N-2} & d_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -d_{0,N-2} & -d_{1,N-2} & \cdots & 0 & -a_{N-2} + d_{N-2,N-1} \\ -d_{0,N-1} & -d_{1,N-1} & \cdots & a_{N-2} - d_{N-2,N-1} & 0 \end{bmatrix},$$

ko'rinishda bo'lsa, u holda (10), (12) masala (13) Laks tenglamasiga ekvivalent bo'ladi, bu yerda $d_{i,j} = \sum_{k=1}^{N} g_i^k g_j^k$, $i = 0,1,...,N-2$, $j = 1,2,...,N-1$.

2-lemma. *Agar* $\{a_n(t), b_n(t)\}$ *funksiyalar (10)-(12) masalaning yechimi bo'lib,* $J = J(t)$ *bu yechimlar orqali (1) ko'rinishda aniqlangan Yakobi matritsasi bo'lsa, u holda* $J(t)$ *matritsaning* λ_k $(k = 1,2,...,N)$ *xos qiymatlari* t *ga bog'liq emas, ya'ni*

$$\lambda_k(t) = \lambda_k(0).$$

3-lemma. *Agar* $\{a_n(t), b_n(t)\}$ *funksiyalar (10)-(12) masalaning yechimi bo'lib,* $J = J(t)$ *bu yechimlar orqali (1) ko'rinishda aniqlangan Yakobi matritsasi bo'lsa, u holda* $J(t)$ *matritsaning* $\omega(\lambda;t)$ *rezolventa funksiyasi* t *vaqt bo'yicha ushbu*

$$\dot{\omega} = 2\left[(\lambda - b_0) - \sum_{k=1}^{N} g_0^k \sum_{i=1}^{N-1} g_i^k P_i\right]\omega - 2\left[1 - \sum_{k=1}^{N} g_0^k \sum_{i=1}^{N-1} g_i^k Q_i\right],$$

qonuniyat bo'yicha o'zgaradi. $\{P_n(\lambda,t)\}_{n=-1}^{N}$ *va* $\{Q_n(\lambda,t)\}_{n=-1}^{N}$ *funksiyalar*

$$\left(Ly\right)_n \equiv \hat{a}_{n-1} y_{n-1} + b_n y_n + \hat{a}_n y_{n+1} = \lambda y_n, \quad n \in \{0,1,...,N-1\}$$

tenglamaning

$$P_{-1}(\lambda,t) = 0,\ P_0(\lambda,t) = 1,\ Q_{-1}(\lambda,t) = -1,\ Q_0(\lambda,t) = 0$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi bo'lib, $\hat{a}_{-1} = \hat{a}_{N-1} = 1$, $\hat{a}_n = a_n$, $n \in \{0,1,...,N-2\}$.

4-lemma. *Agar* $\{a_n(t), b_n(t)\}$ *funksiyalar (10)-(12) masalaning yechimi bo'lib,* $J = J(t)$ *bu yechimlar orqali (1) ko'rinishda aniqlangan Yakobi matritsasi bo'lsa, u holda* $J(t)$ *matritsaning* $\beta_k(t)$ $(k = 1,...,N)$ *normallovchi o'zgarmaslari vaqt bo'yicha quyidagicha o'zgaradi,* $t \in (0,\infty)$*:*

$$\beta_k(t) = \frac{1}{S(t)} \beta_k(0) e^{2\lambda_k t},$$

bunda $S(t) = \sum_{k=1}^{N} \beta_k(0) e^{2\lambda_k t}$.

Bu paragrafning asosiy natijasi quyidagi teoremadan iborat.

2-teorema. *Agar* $\{a_n(t), b_n(t), g_n^1(t), g_n^2(t), ..., g_n^N(t)\}$, $(n = 0,1,..., N-1)$ *funksiyalar (10)-(12) masalaning yechimi bo'lsa, u holda* $J(t)$ *matritsaning spektral berilganlari quyidagi tenglamalarni qanoatlantiradi (*$t \in (0,\infty)$*)*

$$\lambda_k(t) = \lambda_k(0),$$

$$\beta_k(t) = \frac{1}{S(t)}\beta_k(0)e^{2\lambda_k t}, \ (k = 1,..., N).$$

Bu yerda $S(t) = \sum_{k=1}^{N}\beta_k(0)e^{2\lambda_k t}$.

Olingan natijalar $J(t)$ matritsa spektral berilganlarining vaqt bo'yicha evolyutsiyasini to'la aniqlaydi va (10)-(12) masalani teskari spektral masala yordamida yechish imkonini beradi.

2-misol. $N = 2$ bo'lganda (10) tenglamalar sistemasini ushbu

$$a_0(0) = \sqrt{3}, \ b_0(0) = 1, \ b_1(0) = -1$$

$$a_{-1}(t) = a_1(t) = 0, \ t > 0$$

boshlang'ich va chegaraviy shartlar bilan qaraymiz.

$J(0)$ matritsaning spektral berilganlarini topamiz:

$$\{\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -2, \beta_1(0) = \frac{3}{4}, \beta_2(0) = \frac{1}{4}\}.$$

2-teorema natijalaridan foydalanib, quyidagiga ega bo'lamiz

$$\lambda_1(t) = 2, \ \lambda_2(t) = -2 \ \ \beta_1(t) = \frac{3e^{4t}}{3e^{4t} + e^{-4t}}, \ \beta_2(t) = \frac{e^{-4t}}{3e^{4t} + e^{-4t}}.$$

Topilgan spektral berilganlar yordamida, (2) va (3) tengliklardan foydalanib quyidagilarni aniqlaymiz

$$D_{-1}(t) = 1, \ D_0(t) = 1, \ D_1(t) = \frac{48}{(3e^{4t} + e^{-4t})^2}, \ D_2(t) = 0,$$

$$\Delta_{-1}(t) = 0, \ \Delta_0(t) = \frac{2(3e^{4t} - e^{-4t})}{3e^{4t} + e^{-4t}}, \ \Delta_1(t) = 0.$$

Natijada, (5) va (6) tengliklardan qaralayotgan masalaning yechimi $a_n(t), b_n(t)$, $(n = 0,1)$ topiladi. Ular quyidagicha bo'ladi:

$$a_0(t) = \frac{4\sqrt{3}}{3e^{4t} + e^{-4t}}, \ b_0(t) = \frac{2(3e^{4t} - e^{-4t})}{3e^{4t} + e^{-4t}}, \ b_1(t) = -\frac{2(3e^{4t} - e^{-4t})}{3e^{4t} + e^{-4t}}.$$

$g_n^k(t)$ manba quyidagicha hisoblanadi:

$$g_0^1(t) = \pm\sqrt{\beta_1(t)}P_0(\lambda_1, t) = \pm\sqrt{\beta_1(t)} = \pm\sqrt{\frac{3e^{4t}}{3e^{4t} + e^{-4t}}},$$

$$g_0^2(t) = \pm\sqrt{\beta_2(t)}P_0(\lambda_2, t) = \pm\sqrt{\beta_2(t)} = \pm\sqrt{\frac{e^{-4t}}{3e^{4t} + e^{-4t}}},$$

$$g_1^1(t)=\pm\sqrt{\beta_1(t)}P_1(\lambda_1,t)=\pm\sqrt{\beta_1(t)}\,\frac{\lambda_1-b_0(t)}{a_0(t)}=\pm\frac{e^{-2t}}{\sqrt{3e^{4t}+e^{-4t}}},$$
$$g_1^2(t)=\pm\sqrt{\beta_2(t)}P_1(\lambda_2,t)=\pm\sqrt{\beta_2(t)}\,\frac{\lambda_2-b_0(t)}{a_0(t)}=\mp\frac{\sqrt{3}e^{2t}}{\sqrt{3e^{4t}+e^{-4t}}}.$$

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida quyidagi moslangan manbali kompleks qiymatli chekli Toda tenglamasi

$$\begin{cases} \dot{a}_n=a_n(b_{n+1}-b_n)+a_n\sum\limits_{k=1}^{N}\left((g_n^k)^2-(g_{n+1}^k)^2\right), \\ \dot{b}_n=2(a_n^2-a_{n-1}^2)-2\sum\limits_{k=1}^{N}g_n^k(a_ng_{n+1}^k-a_{n-1}g_{n-1}^k), \\ a_{n-1}g_{n-1}^k+b_ng_n^k+a_ng_{n+1}^k=\lambda_kg_n^k,\ k=1,...,N,\ n=0,1,...,N-1, \end{cases} \tag{14}$$

ushbu

$$a_n(0)=a_n^0,\, b_n(0)=b_n^0,\ \ n=0,1,...,N-1, \tag{15}$$
$$a_{-1}=a_{N-1}=0, \tag{16}$$

boshlang‘ich va chegaraviy shartlar bilan integrallangan. Bu yerda a_n^0, b_n^0 oldindan berilgan kompleks sonlar bo‘lib, ular quyidagi shartlarni qanoatlantiradi

1) $a_n^0\neq 0$ ($n=0,1,...,N-2$), $a_{N-1}^0=0$;

2) $J(0)$ matritsa N ta turlicha (kompleks) xos qiymatlarga ega.

Bu paragrafning asosiy natijasi quyidagi teoremadan iborat.

3-teorema. *Agar* $\{a_n(t), b_n(t), g_n^1(t), g_n^2(t),..., g_n^N(t)\}$, $(n=0,1,...,N-1)$ *funksiyalar (14)-(16) masalaning yechimi bo‘lsa, u holda* $J(t)$ *matritsaning spektral berilganlari quyidagi tenglamalarni qanoatlantiradi* $(t\in(0,t_1))$

$$\lambda_k(t)=\lambda_k(0),$$
$$\beta_k(t)=\frac{1}{S(t)}\beta_k(0)e^{2\lambda_kt},\ (k=1,...,N).$$

Bu yerda $S(t)=\sum\limits_{k=1}^{N}\beta_k(0)e^{2\lambda_kt}$ *bo‘lib,* t_1 *soni* $S(t)$ *funksiyaning eng kichik musbat ildizini bildiradi (agar musbat ildiz bo‘lmasa* t_1 *ixtiyoriy musbat son).*

Olingan natijalar $J(t)$ matritsa spektral berilganlarining vaqt bo‘yicha evolyutsiyasini to‘la aniqlaydi va (14)-(16) masalani teskari spektral masala yordamida yechish imkonini beradi.

Uchinchi bob **“Integral manbali umumiy Toda tenglamasini integrallash”**ga bag‘ishlangan.

Uchinchi bobning birinchi paragrafida diskret Shturm-Liuvill tenglamasi uchun to‘g‘ri va teskari spektral masalalar haqida zururiy ma’lumotlar keltirilgan.

Quyidagi

$$\left(Ly\right)_n\equiv a_{n-1}y_{n-1}+b_ny_n+a_ny_{n+1}=\lambda y_n,\ n\in\mathbb{Z}, \tag{17}$$

ikkinchi tartibli chekli ayirmali tenglamani qaraymiz. Bu yerda $\{y_n\}_{-\infty}^{\infty}$ - noma'lum funksiya, $\lambda = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$ - spektral parametr va a_n, b_n koeffitsiyentlar ushbu

$$a_n > 0,\ b_n \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{Z},\ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \left(\left| a_n - \frac{1}{2} \right| + \left| b_n \right| \right) < \infty \tag{18}$$

shartlarni qanoatlantiradi.

(18) shartlar bajarilganda (17) tenglamaning quyidagi

$$\varphi_n(z) = z^n + o(1),\ n \to \infty,\ |z| = 1,$$
$$\psi_n(z) = z^{-n} + o(1),\ n \to -\infty,\ |z| = 1,$$

asimptotikaga ega bo‘lgan yechimlarga ega bo‘ladi. Bu yechimlar Yost yechimlari deyiladi.

$|z|=1$ da $\{\varphi_n(z), \varphi_n(z^{-1})\}$ va $\{\psi_n(z), \psi_n(z^{-1})\}$ funksiyalar jufti (17) tenglamaning fundamental yechimlar juftini tashkil qiladi. Bundan

$$\psi_n(z) = \alpha(z)\varphi_n(z^{-1}) + \beta(z)\varphi_n(z)$$

tenglik o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi.

Ushbu $R(z) = -\dfrac{\beta(z^{-1})}{\alpha(z)}$, $|z|=1$ funksiya sochilish funksiyasi deb ataladi.

$\alpha(z)$ funksiya $|z|<1$ doira ichiga analitik davom qiladi va u yerda cheklita oddiy (karrasiz) $z_1, z_2, ..., z_N$ ildizga ega bo‘ladi va $\lambda_k = \dfrac{z_k + z_k^{-1}}{2}$, $k = 1, 2, ..., N$ sonlar L operatorning xos qiymatlari bo‘ladi. Bu xos qiymatlarga mos keluvchi $\left\{\xi_n^k\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$ xos vektorlar, ushbu $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} (\xi_n^k)^2 = 1$ shart bilan normallangam. Bu holda $\xi_n^k = B_k \varphi_n^k$, $k = 1, 2, ..., N$ bo‘ladi.

2-ta'rif. Ushbu $\{R(z), z_1, z_2, ..., z_N, B_1, B_2, ..., B_N\}$ jamlanmaga (17) tenglamaning sochilish nazariyasining berilganlari deyiladi.

Sochilish nazariyasining berilganlarini topish sochilish nazariyasining to‘g‘ri, sochlish nazariyasining berilganlari yordamida (17) tenglamaning a_n, b_n koeffitsiyentlarini aniqlash sochilish nazariyasining teskari masalasi deyiladi.

$\varphi_n(z)$ funksiya uchun

$$\varphi_n(z) = \sum_{m=n}^{\infty} K(n,m) z^m, \tag{19}$$

tasvir o‘rinli. (19) tasvirdagi $K(n,m)$ yadro ushbu

$$\chi(n,m) + F(n+m) + \sum_{n'=n+1}^{\infty} \chi(n,n') F(n'+m) = 0, \quad m > n,$$

$$(K(n,n))^{-2} = 1 + F(2n) + \sum_{n'=n+1}^{\infty} \chi(n,n') F(n'+n)$$

Gelfand-Levitan-Marchenko tenglamasining analogini qanoatlantiradi va a_n, b_n koeffitsiyentlar bilan

$$a_n = \frac{1}{2}\frac{K(n+1,n+1)}{K(n,n)}, \quad b_n = \frac{1}{2}\left(\frac{K(n,n+1)}{K(n,n)} - \frac{K(n-1,n)}{K(n-1,n-1)}\right)$$

tengliklar yordamida bog‘langan. Bu yerda

$$F(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=1} R(z) z^{n-1} dz + \sum_{k=1}^{N} B_k^2 z_k^n, \quad \chi(n,m) = \frac{K(n,m)}{K(n,n)}.$$

Uchinchi bobning ikkinchi paragrafida moslangan integral manbali Toda tipidagi tenglama uchun Koshi masalasi integrallanuvchi ekanligi ko‘rsatilgan.

Uchinchi bobning uchinchi paragrafida integral manbali umumiy Toda tenglamasini

$$\begin{cases} \dot{a}_n = a_n(G_{n+1,r+1} - G_{n,r+1}) + a_n \oint\limits_{|\mu|=1} \frac{1}{\mu}(f_{n+1}(\mu,t)g_{n+1}(\mu,t) - f_n(\mu,t)g_n(\mu,t))d\mu, \\ \dot{b}_n = H_{n+1,r+1} - H_{n,r+1} + a_n \oint\limits_{|\mu|=1} \frac{1}{\mu}(f_n(\mu,t)g_{n+1}(\mu,t) + f_{n+1}(\mu,t)g_n(\mu,t))d\mu - \\ -a_{n-1} \oint\limits_{|\mu|=1} \frac{1}{\mu}(f_n(\mu,t)g_{n-1}(\mu,t) + f_{n-1}(\mu,t)g_n(\mu,t))d\mu, \\ a_{n-1}f_{n-1} + b_n f_n + a_n f_{n+1} = \frac{\mu+\mu^{-1}}{2} f_n, \\ a_{n-1}g_{n-1} + b_n g_n + a_n g_{n+1} = \frac{\mu+\mu^{-1}}{2} g_n, \quad n \in Z, \end{cases} \tag{20}$$

ushbu

$$a_n(0) = a_n^0, \ b_n(0) = b_n^0, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{21}$$

boshlang‘ich shartlar bilan qaraymiz. Bu yerda

$$G_{n,j}(t) = \sum_{s=0}^{j} c_{j-s} < \delta_n, L(t)^s \delta_n >, \quad 0 \le j \le r+1, \ r \in \mathbb{Z}_+,$$

$$H_{n,j}(t) = \sum_{s=0}^{j} 2a_n(t) c_{j-s} < \delta_{n+1}, L(t)^s \delta_n > + c_j + 1, \ \ 0 \le j \le r+1,$$

$$\left(L(t)y\right)_n \equiv a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1},$$

$$< \delta_m, \delta_n > = \begin{cases} 0, \ m \ne n \\ 1, \ m = n, \end{cases}$$

bo‘lib, $c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}$ ixtiyoriy haqiqiy sonlar. $\{a_n^0\}_{-\infty}^{\infty}, \{b_n^0\}_{-\infty}^{\infty}$ quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1. $a_n^0 > 0, \ b_n^0 \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z},$

$$2. \sum_{n=-\infty}^{\infty} |n| \left(\left| a_n^0 - \frac{1}{2} \right| + \left| b_n^0 \right| \right) < \infty, \tag{22}$$

3. $\left(L(0)y\right)_n \equiv a_{n-1}(0)y_{n-1} + b_n(0)y_n + a_n(0)y_{n+1}$ operator $[-1;1]$ kesmadan tashqarida N ta $\lambda_k(0) = \dfrac{z_k(0) + z_k^{-1}(0)}{2}$, $k = 1,2,\ldots,N$ xos qiymatga ega.

(20) sistemada $\{a_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}, \{b_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$ funksiyalar va $\{f_n(\mu,t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{g_n(\mu,t)\}_{-\infty}^{\infty}$ vektor-funksiyalar noma‘lum bo‘lib, ular uchun barcha $t \geq 0$ va $|\mu| = 1$ da quyidagi asimptotikalar o‘rinli:

$$g_n(\mu,t) \sim p(\mu,t)\mu^n + q(\mu,t)\mu^{-n},\ n \to -\infty,$$

$$f_n(\mu,t) \sim r(\mu,t)\mu^n + s(\mu,t)\mu^{-n},\ n \to -\infty.$$

Bu yerda $p(\mu,t), q(\mu,t), r(\mu,t)$ va $s(\mu,t)$ berilgan uzluksiz funksiyalar bo‘lib, $|\mu| = 1$ da barcha nomanfiy t lar uchun, $\nu \in (0,1]$ daraja bilan Gyolder shartini qanoatlantiradi.

(20) tenglamalar sistemasida r o‘zgaruvchining qiymatini o‘zgartirish orqali turli tartibli integral manbali Toda tenglamasini hosil qilish mumkin. Masalan,

$r = 0$ bo‘lganda, $\begin{cases} \dot{a}_n = a_n(b_n - b_{n+1}) + A_n, \\ \dot{b}_n = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) + B_n,\ \ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

$r = 1$ bo‘lganda, $\begin{cases} \dot{a}_n = a_n(a_{n+1}^2 - a_n^2 + b_{n+1}^2 - b_n^2) + c_1 a_n(b_n - b_{n+1}) + A_n, \\ \dot{b}_n = 2a_n^2(b_n + b_{n+1}) - 2a_{n-1}^2(b_n + b_{n-1}) + 2c_1(a_{n-1}^2 - a_n^2) + B_n,\ \ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Uchinchi paragrafning asosiy natijasi quyidagi teoremadan iborat.

4-teorema. Agar $a_n(t)$, $b_n(t)$, $f_n(\mu,t)$, $g_n(\mu,t)$, $n \in \mathbb{Z}$ funksiyalar (20)-(22) masalaning yechimi bo‘lsa, u holda $\left(L(t)y\right)_n \equiv a_{n-1}(t)y_{n-1} + b_n(t)y_n + a_n(t)y_{n+1}$, tengliklar bilan aniqlanadigan $L(t)$ operator uchun sochilish nazariyasining berilganlari

$$\frac{dz_k}{dt} = 0,\ \ k = 1,2,\ldots,N\ , \tag{23}$$

$$\frac{\partial R(z,t)}{\partial t} = [\tilde{g}_r(z,0)(z - z^{-1}) + \frac{1}{z^2 - 1} v.p. \oint_{|\mu|=1} D(\mu,t)d\mu]R(z,t) +$$
$$+2\pi i(Q(z,t) + Q(z^{-1},t))R(z,t) + 4\pi i P(z^{-1}),\ \ z \neq \pm 1, \tag{24}$$

$$\frac{dB_k(t)}{dt} = \{(z_k - z_k^{-1})\tilde{g}_r(z_k,0) -$$
$$-\frac{1}{z_k^2 - 1}\oint_{|\mu|=1} \frac{(\mu + z_k)(\mu z_k - 1)}{\mu(\mu - z_k)}(b(\mu,t)c(\mu,t) + q(\mu,t)r(\mu,t))d\mu -$$
$$-\frac{1}{z_k^2 - 1}\oint_{|\mu|=1} \frac{(\mu - z_k)(\mu z_k + 1)}{\mu(\mu - z_k^{-1})}[a(\mu,t)d(\mu,t) + p(\mu,t)s(\mu,t)]d\mu\}B_k(t), \tag{25}$$

$k = 1,2,\ldots,N$, munosabatlar orqali aniqlanadi. Bu yerda $g_r(z,0)$ funksiya z o‘zgaruvchiga nisbatan ko‘phad,

$$D(\mu,t) = \left(q(\mu,t)r(\mu,t) + p(\mu,t)s(\mu,t)\right)\left[\frac{(\mu + z)(\mu z - 1)}{\mu(\mu - z)} + \frac{(\mu - z)(\mu z + 1)}{\mu(\mu - z^{-1})}\right],$$

$$P(\mu,t) = p(\mu,t)r(\mu,t) + q(\mu^{-1},t)s(\mu^{-1},t),$$
$$Q(\mu,t) = p(\mu,t)s(\mu,t) + q(\mu^{-1},t)r(\mu^{-1},t),$$
$$P(\mu^{-1},t) = -\overline{P(\mu,t)},\ \ Q(\mu^{-1},t) = -\overline{Q(\mu,t)},\ \ |\mu| = 1,\ t \ge 0\ ,$$
$$a(\mu,t) = p(\mu,t)\beta(\mu^{-1},t) + q(\mu,t)\alpha(\mu,t),$$
$$b(\mu,t) = p(\mu,t)\alpha(\mu^{-1},t) + q(\mu,t)\beta(\mu,t),$$
$$c(\mu,t) = r(\mu,t)\beta(\mu^{-1},t) + s(\mu,t)\alpha(\mu,t),$$
$$d(\mu,t) = r(\mu,t)\alpha(\mu^{-1},t) + s(\mu,t)\beta(\mu,t).$$

(23), (24) va (25) munosabatlar $L(t)$ operator uchun sochilish nazariyasining berilganlari evolyutsiyasini to‘la aniqlaydi. Bu esa (20)-(22) masalani sochilish nazariyasining teskari masalasi usulida yechish imkonini beradi.

Muallif o‘zining ilmiy rahbari, f.-m.f.d. Babajanov Bazar Atajanovichga doimiy e’tibori hamda dissertatsiya natijalarini muhokamasidagi qimmatli maslahatlari uchun samimiy minnatdorchilik bildiradi.

XULOSA

Dissertatsiya ishining birinchi bobi kompleks qiymatli chekli Toda tipidagi tenglama uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalani chekli Yakobi matritsasi uchun qo‘yilgan teskari spektral masala usuli yordamida integrallashga bag‘ishlangan.

Ikkinchi bobida esa moslangan manbali haqiqiy va kompleks qiymatli chekli Toda tenglamasi uchun qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masala chekli Yakobi matritsasi uchun teskari masala usulidan foydalanib yechilgan.

Dissertatsiya ishining uchinchi bobida moslangan integral manbali Toda tenglamasi hamda integral manbali umumiy Toda tenglamasi “tez kamayuvchi” funksiyalar sinfida to‘la integrallanuvchanligini isbotlangan.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

chekli kompleks Toda tipidagi tenglamaga qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masalaning to‘liq integrallanuvchanligi isbotlangan;

moslangan manbali haqiqiy chekli Toda tenglamasiga qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masala yechilgan;

moslangan manbali kompleks chekli Toda tenglamasiga qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masala yechilgan;

integral manbali Toda tipidagi tenglamani integrallanuvchanligi isbotlangan;

integral manbali umumiy Toda tenglamasi to‘liq integrallanuvchanligi isbotlangan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.12.2019.FM.55.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ПРИ УРГЕНЧСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

УРГЕНЧСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

РУЗМЕТОВ МУРОД МАРКСОВИЧ

ИНТЕГРИРОВАНИЕ УРАВНЕНИЯ ТОДЫ С САМОСОГЛАСОВАННЫМ ИСТОЧНИКОМ И ЕГО ОБОБЩЕНИЙ МЕТОДОМ ОБРАТНОЙ СПЕКТРАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Ургенч – 2024

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при министерстве Высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за № B2023.4.PhD/FM952.

Диссертация выполнена в Ургенчском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-mat.urdu.uz) и на Информационно-образовательном портале “ZiyoNet” (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Бабажанов Базар Атажанович** доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Яхшимуратов Алишер Бекчанович** доктор физико-математических наук
	Бабаджанова Айгул Камилджановна доктор философии физико-математических наук (PhD)
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный универс**

Защита диссертации состоится “____” ____________ ____года в _____ часов на заседании Научного совета PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 при Ургенчском государственном университете (Адрес: 220100, г.Ургенч, ул. Х. Алимджана, дом 14. Тел:(+99862) 224-66-11, факс: (+99862) 224-67-00, e-mail: ik-mat.urdu@umail.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Ургенчского государственного университета (зарегистрирована за №____). (Адрес: 220100, г.Ургенч, ул. Х. Алимджана, дом 14. Тел:(+99862) 224-66-11, факс: (+99862) 224-67-00).

Автореферат диссертации разослан “____” ____________ ____года.
(протокол рассылки №____ от “____” ____________ ____года).

Г.У. Уразбоев
Председатель Научного совета по присуждению ученой степени, д.ф-м.н.

А.А. Реймберганов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученой степени, к.ф-м.н.

А.Б. Яхшимуратов
Заместитель председателья Научного семинара при научном совете по присуждению ученой степени, д.ф-м.н.

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации.

Многие научные и практические исследования, проводимые в мировом масштабе, в большинстве случаев задачи математической физики и квантовой механики представляются математическими моделями, представленными дифференциально-разностными уравнениями. Нелинейные уравнения этого типа, такие как цепочка Тоды, дифференциально-разностное уравнение Шредингера и цепочка Абловица-Ладика, широко используются в таких областях, как квантовая механика, нелинейная оптика и физика плазмы. При интегрировании таких уравнений большое значение имеет использование методов прямых и обратных задач спектральной теории конечно-разностных операторов. Поэтому интегрирование дифференциально-разностных уравнений методом прямых и обратных задач спектральной теории разностных операторов остается одной из важных задач в этой области.

В настоящее время методы спектральной теории конечно-разностных операторов служат важным математическим инструментом при исследовании физических моделей. При исследовании процессов распространения волн, происходящих в областях физики плазмы, нелинейной оптики и ядерной физики, возникает необходимость учета дополнительных эффектов окружающей среды и необходимость изучения различной динамики солитонных волн. В качестве математической модели этих процессов рассматриваются начально-краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с самосогласованным источником. Некоторые решения этих уравнений представляют собой солитонные волны. Поэтому в задачи исследования входит поиск решения уравнения типа Тоды, начально-краевой задачи для уравнения Тоды с самосогласованным источником и задача Коши для обобщенного уравнения Тоды с самосогласованным источником.

В нашей стране особое внимание уделяется разработке и применению современных математических методов для решения прикладных задач математической физики, имеющих практическое и фундаментальное значение. В частности, внимание уделяется исследованию прямых и обратных спектральных задач теории рассеяния для дифференциальных и конечно-разностных операторов, а также практическим задачам дифференциальных уравнений в частных производных. В результате были получены значительные результаты по интегрированию начально-краевых задач для нелинейных эволюционных уравнений, имеющих практическое и фундаментальное значение, с использованием метода прямых и обратных спектральных задач. Проведение исследований на уровне международных стандартов в области математики, физики и современных методов математической физики является одной из основных задач научноисследовательских и высших учебных заведений[2]. В рамках реализации указа важное значение имеет развитие теорию прямых и обратных спектральных задач для дифференциальных и конечно-разностных операторов, изучение и исследование конечно-разностные уравнения с самосогласованными источниками.

Данная диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан» от 9 июля 2019 года, №-ПП-4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 7 мая 2020 года, №-УП-6097 «Об утверждении концепции развития науки до 2030 года» от 29 октября 2020 года, указах №-УП-6108 «О мерах по развитию сфер образования и воспитания, и науки в новый период развития Узбекистана» от 6 ноября 2020 года, №-УП-60 «О стратегии развития нового Узбекистана на 2022-2026 годы» от 28 января 2022 года а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Первые работа по спектральной теории операторов типа Штурма-Лиувилля были проведены Далембером, Эйлером, Лиувиллем, Штурмом и Д. Бернулли в рамках решения уравнения, описывающего колебания струны. Как хорошо известно, прямые задачи спектрального анализа состоят в изучении свойств спектра и собственных функций операторов, а также вопросов полноты и спектральных разложений. Обратные задачи сводятся к определению операторов по их спектральным характеристикам. Во второй половины XX века значительный вклад в изучение прямых задач спектрального анализа для обыкновенных дифференциальных операторов внесли работы А.Г. Костюченко, М.А. Наймарка, В.Б. Лидского, Ю.Т. Султанаева, В.А. Садовничего, М.К. Фаге, А.А. Шкаликова, А.П. Хромова и других ученых-математиков.

Основные достижения в теории обратных спектральных задач для обыкновенных дифференциальных операторов были получены в трудах Н.Левинсона, Л.А.Чудова, А.Н.Тихонова, В.А.Марченко, М.Г.Крейна, И.М.Гельфанда, Б.М.Левитана, Ю.М.Березанского, М.Г.Гасымова, И.Кея, Л.Д.Фаддеева, В.А.Садовничего, В.Э.Лянце, Ф.С.Рофе-Бекетова, Ю.Мозера, В.А.Юрко, А.Б.Хасанова и др.

Первоначальное исследование обратной задачи рассеяния для дискретного оператора Штурма-Лиувилля было проведено в работах К.

[2] Постановление Президента Республики Узбекистан №-ПП-4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 7 мая 2020 года

Кейса и М. Каца, а затем продолжено и развито в работах таких ученых, как С.В.Манаков, Н. Флашки, Е.М. Никишина, Г.Ш. Гусейнова, М.С. Эскина, В.Г.Тарнопольского и других. Прямая и обратная задача для дискретного оператора Хилла также активно изучаются в статьях М.Г. Крейна, Х.Хохштадта, Э. Дейта, С. Танаки, М. Тоды, Н.В. Жернакова, Г. Тешля, А.Б.Хасанова и других исследователей.

Дальнейшее развитие метода обратной задачи для дискретных операторов связано с их использованием в контексте дифференциально-разностных систем. Одной из важных таких систем является система уравнений, описывающая поведение одномерной цепочки частиц с экспоненциальным взаимодействием между ближайшими соседями. Эта система известна как цепочка Тоды, названная в честь Морикацу Тоды, который впервые нашел точное ее решение. Следовательно, метод обратной задачи рассеяния может быть применен для анализа этой системы, как это продемонстрировано в работах С.В. Манакова, Н. Флашки и А.Х.Ханмамедова, где показана эффективность использования задачи рассеяния для разностного оператора Штурма-Лиувилля при решении системы Тоды.

Исследование высшей цепочки Тоды с учетом возможности использования метода обратной задачи проводилось в работе В. Булла, Ф.Гестези, Х. Холдена и Г. Тешла.

В фундаментальных исследованиях В.К. Мельникова по нелинейным эволюционным уравнениям с самосогласованным источником были интегрированы уравнения КдФ с самосогласованным источником в классе быстроубывающих функций с использованием метода обратной задачи рассеяния. Китайскими математиками Синг Бяо Ху, Хун-Янь Ван, Да Цзюнь Чжан, Сяоцзюнь Лю, Юньбо Цзэн, Дэн Юань Чэнь были применены методы Хироты и преобразования Дарбу для решения разнообразных нелинейных эволюционных уравнений с самосогласованным источником. В частности, в работе Сяоцзюнь Лю, Юньбо Цзэн с использованием метода преобразования Дарбу были получены решения цепочки Тоды с самосогласованным источником.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа в соответствии с плановой тематикой научно-исследовательской работы кафедры "Прикладная математика и математическая физика" Ургенчского государственного университета и в рамках научно-исследовательского проекта ОТ-F4-04 (05)- “Приложения спектрального метода к решению матричных нелинейных эволюционных уравнений. Биомеханика сердечно-сосудистой системы” (2017-2020 гг.).

Целью исследования является решение начально-краевой задачи, поставленной для конечного комплекснозначного уравнения типа Тоды, решение начально-краевой задачи, поставленной для вещественного и комплекснозначного конечного уравнений Тоды с самосогласованным источником, методом обратной спектральной задачи. Интегрирование уравнения типа Тоды с интегральным источником и интегрирование общего уравнения Тоды с интегральным источником.

Задачи исследования. Решение начально-краевой задачи, поставленной для конечного комплекснозначного уравнения типа Тоды, методом обратной спектральной задачи;

решение начально-краевой задачи, поставленной для конечного вещественного уравнения Тоды с самосогласованным источником, методом обратной спектральной задачи;

решение начально-краевой задачи, поставленной для конечного комплекснозначного уравнения Тоды с самосогласованным источником, методом обратной спектральной задачи;

интегрирование уравнения типа Тоды с интегральным источником;

интегрирование уравнения Тоды высшего порядка с интегральным источником, методом обратной задачи рассеяния.

Объектом исследования являются дискретное уравнение Штурма-Лиувилля, уравнение Тоды, уравнение типа Тоды, уравнение Тоды с самосогласованным источником, уравнение типа Тоды с интегральным источником, уравнение Тоды высшего порядка с интегральным источником.

Предметом исследования обратные спектральные задачи для дискретного уравнения Штурма-Лиувилля, обратные спектральные задачи для матрицы Якоби и их применение к интегрированию нелинейных эволюционных уравнений с самосогласованным источником.

Методы исследования. В рамках диссертации используются методы теории уравнений с частными производными, функционального анализа и теории функций комплексного переменного.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

методом обратной задачи спектральной теории конечно-разностных операторов решена начально-краевая задача для конечно-комплексного уравнения типа Тоды;

найдена временная эволюция спектральных данных конечно-разностного оператора, коэффициенты которого являются решением начально-краевой задачи, наложенной на конечное вещественное уравнение Тоды с самосогласованными источниками и с помощью этих эволюций интегрируется вещественное конечное уравнение Тоды с самосогласованным источником;

метод обратной задачи спектральной теории конечно-разностных операторов применен для нахождения решения начального комплекснозначного уравнения Тоды с самосогласованным источником;

с помощью метода обратной задачи теории рассеяния доказана интегрируемость общих уравнений Тоды и уравнений типа Тоды с интегральным источником.

Практические результаты исследования. С помощью метода обратной задачи спектральной теории конечно-разностных операторов разработаны алгоритмы решения начально-краевой задачи для конечного комплекснозначного уравнения типа Тоды. Этот алгоритм был использован для решения начально-краевой задачи для конечного уравнения Тоды с самосогласованным источником.

Линейные дифференциальные уравнения, представляющие динамику изменяющихся во времени данных теории рассеяния для конечно-разностных операторов, использовались при интегрировании общих уравнений Тоды и уравнений типа Тоды с интегральным источником.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических выводов, а также применением методов математической физики, функционального анализа и теории интегрируемости для решения обратных спектральных задач, связанных с дифференциальными и разностными операторами, а также их применения к решению нелинейных эволюционных уравнений с самосогласованным источником.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования проявляется в их применимости в спектральной теории линейных операторов, физике твердого тела, моделях специализированных линий электропередач, гидродинамике и квантовой физике. Полученные научные результаты могут быть применены в математической физике для интегрирования нелинейных эволюционных уравнений.

Внедрение результатов исследования. На основе результатов, полученных при решении уравнения Тоды с самосогласованным источником и его обобщений методом обратной спектральной задачи:

алгоритм интегрирования общего уравнения Тоды с самосогласованным источником методом обратной задачи для дискретного уравнения Штурма-Лиувилля был использован в проекте РФФИ № 20 01 00293 «Качественные методы в задачах теории управления и теории дифференциальных игр с нефиксированным терминальным моментом» при решении задач управления системами, описываемыми дифференциальными уравнениями в частных производных (справка №1001-10430/32 Удмуртского государственного университета от 15 ноября 2023 года). Применение этих научных результатов позволило рассмотреть некоторые новые подходы к изучению взаимодействия между подзонами для специальных типов сверхпроводников;

интегрирование задачи Коши для уравнения типа Тоды с самосогласованным источником в классе быстроубывающих функций методом обратной спектральной задачи для дискретного уравнения Штурма-Лиувилля был использован для получения алгоритма построения источника для общего уравнения Тоды в классе быстроубывающих функций в научном проекте OT-F4-04 (05) - «Применения спектрального метода в решении матричных нелинейных эволюционных уравнений. Биомеханика сердечно-сосудистой системы» (справка №01-04/01-11/3077 Ургенчского государственного университета от 16 ноября 2023 года). Применение этих научных результатов позволило разработать алгоритм решения задачи Коши для матричного уравнения Кортевега-де Фриза с интегральным источником.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 12 научно-практических конференциях, в том числе 8 международных и 4 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 19 научных работ, из них 7 опубликованы в научных изданиях, рекомендованных ВАК при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторских диссертаций, в том числе опубликовано 5 статей в зарубежных журналах входящих Scopus.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объём диссертации составляет 114 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Первая глава диссертации называется **«Начально-краевая задача для конечного комплекснозначного уравнения типа Тоды»**, и в ее первом параграфе приводятся необходимые сведения касающиеся прямой и обратной спектральной задачи для конечной-комплекснозначной матрицы Якоби:

$$J=\begin{bmatrix} b_0 & a_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & b_1 & a_1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{N-3} & a_{N-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-3} & b_{N-2} & a_{N-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{N-2} & b_{N-1} \end{bmatrix}, \tag{1}$$

где $a_n, b_n \in \mathbb{C}, a_n \neq 0.$

Функция

$$\omega(\lambda)=-((R(\lambda)e_0,e_0)$$

называется резольвентной функцией матрицы J, где $R(\lambda)=(J-\lambda I)^{-1}$, $e_0=(1,0,...,0)^T$ и $(\cdot,\cdot)$ обозначает стандартное скалярное произведение в $\mathbb{C}^N$.

Обозначим через $\lambda_1,...,\lambda_p$ различные собственные значения матрицы J и через $m_1,...,m_p$ их кратности соответственно, так что $1 \le p \le N$ и $m_1+...+m_p=N.$

Можно показать, что функция $\omega(\lambda)$ разлагается на простые дроби

$$\omega(\lambda)=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m_k}\frac{\beta_{kj}}{(\lambda-\lambda_k)^j},$$

где β_{kj} – комплексные числа, однозначно определяемые матрицей J.

Определение 1. $\{\lambda_k,\beta_{kj}(j=1,...,m_k,\ k=1,...,p)\}$ называется спектральными данными для матрицы J. Для каждого $k\in\{1,...,p\}$ последовательность $\{\beta_{k1},...,\beta_{km_k}\}$ называется нормировочными постоянными матрицы J.

Нахождение спектральных данных называется прямой задачей, восстановление коэффициентов a_n, b_n по спектральным данным называется обратной задачей для матрицы J.

Приведем алгоритм восстановления коэффициентов a_n, b_n по спектральным данным $\{\lambda_k,\beta_{kj}(j=1,...,m_k,k=1,...,p)\}$. Сначала с помощью спектральных данных составим следующие величины

$$s_l=\sum_{k=1}^{p}\sum_{j=1}^{m_k}\binom{l}{j-1}\beta_{kj}\lambda_k^{l-j+1},\ l=0,1,2,.... \tag{4}$$

Здесь $\binom{l}{j-1}$ биномиальный коэффициент, и мы берем, $\binom{l}{j-1}=0$ если $j-1>l$. После этого используя s_l, введем следующие определители

$$D_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_n \\ s_1 & s_2 & \dots & s_{n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n} \end{vmatrix}, \quad n = 0,1,...,N, \tag{2}$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} s_0 & s_1 & \dots & s_{n-1} & s_{n+1} \\ s_1 & s_2 & \dots & s_n & s_{n+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ s_n & s_{n+1} & \dots & s_{2n-1} & s_{2n+1} \end{vmatrix}, \quad n = 0,1,...,N. \tag{3}$$

Здесь

$$D_n \neq 0, \ n \in \{0,1,...,N-1\} \text{ и } D_N = 0. \tag{4}$$

Коэффициенты a_n и b_n матрицы J определяются через спектральные данные следующим образом

$$a_n^2 = \frac{D_{n-1}D_{n+1}}{D_n}, \ n \in \{0,1,...,N-2\}, \ D_{-1} = 1, \tag{5}$$

$$b_n = \frac{\Delta_n}{D_n} - \frac{\Delta_{n-1}}{D_{n-1}}, \ n \in \{0,1,...,N-1\}, \ \Delta_{-1} = 0, \ \Delta_0 = s_l. \tag{6}$$

Пусть задан произвольный набор $\{\lambda_k, \beta_{kj}(j=1,...,m_k, k=1,...,p)\}$ комплексных чисел, где $\lambda_1,...,\lambda_p$, $(1 \le p \le N)$ – различны, $1 \le m_k \le N$ и $m_1 + ... + m_p = N$. Для того, чтобы этот набор был спектральным данным для некоторой матрицы Якоби J вида (1), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$\sum_{k=1}^{p} \beta_{k1} = 1$$

и (4).

Во втором параграфе первой главы проинтегрировано нелинейное конечное комплекснозначное эволюционное уравнение типа Тоды без источника.

Рассмотрим следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{a}_n = a_n(a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2) + a_n(b_{n+1}^2 - b_n^2), \\ \dot{b}_n = 2a_n^2(b_{n+1} + b_n) - 2a_{n-1}^2(b_n + b_{n-1}), \ n = 0,1,...,N-1 \end{cases} \tag{7}$$

с начальными

$$a_n(0) = a_n^0, \ b_n(0) = b_n^0, \ n = 0,1,...,N-1, \tag{8}$$

и краевыми условиями

$$a_{-1} = a_{N-1} = 0. \qquad (9)$$

Здесь a_n^0 и b_n^0 заданные комплексные числа такие, что

$$a_n^0 \neq 0, \ (n = 0,1,\ldots,N-2), \ a_{N-1}^0 = 0.$$

Основной результат этого параграфа включен в следующую теорему.

Теорема 1. *Если* $\{a_n(t), b_n(t)\}$ $(n = 0,1,\ldots,N-1)$ *является решением задачи (7)-(9), то спектральные данные матрицы* $J(t)$ *удовлетворяют следующим уравнениям* $(t \in (0,t_1))$

$$\lambda_k(t) = \lambda_k(0),$$

$$\beta_{kj}(t) = \frac{1}{S(t)} \sum_{s=j}^{m_k} \beta_{ks}(0) \left(\frac{(e^{2z^2 t})_z^{(s-j)}}{(s-j)!} \right) \Bigg|_{z=\lambda_k}, \ (j = 1,2,\ldots,m_k;\ k = 1,\ldots,p).$$

Здесь

$$S(t) = \sum_{k=1}^{p} \sum_{j=1}^{m_k} \beta_{kj}(0) \left(\frac{(e^{2z^2 t})_z^{(j-1)}}{(j-1)!} \right) \Bigg|_{z=\lambda_k}$$

и число t_1 *означает наименший положительный нуль функции* $S(t)$ *(если не существует положительного нуля, то* t_1 *любое положительное число).*

Полученные равенства полностью определяют временную эволюцию спектральных данных матрицы $J(t)$, что позволяет применить метод обратной спектральной задачи для нахождения решений задачи (7)-(9).

Пример 1. Рассмотрим применение теоремы 1 на следующем примере. При $N = 2$ рассмотрим систему уравнений (7) с такими начально-краевыми условиями

$$a_0(0) = ic, \ b_0(0) = \lambda_0 + c, \ b_1(0) = \lambda_0 - c,$$

$$a_{-1}(t) = a_1(t) = 0, \ t > 0,$$

где λ_0 и c – произвольные комплексные числа и $c \neq 0$.

Находим спектральные данные матрицы $J(0)$:

$$\lambda(0) = \lambda_0, \ \beta_{11}(0) = 1, \ \beta_{12}(0) = c.$$

Используя теорему 1, находим, что

$$\lambda(t) = \lambda_0, \ \beta_{11}(t) = 1, \ \beta_{12}(t) = \frac{c}{1 + 4\lambda_0 ct}.$$

Используя полученные спектральные данные и применяя уравнения (2) и (3), находим следующее

$$D_{-1}(t) = 1, \ D_0(t) = 1, \ D_1(t) = -\frac{c^2}{(1 + 4\lambda_0 ct)^2}, \ D_2(t) = 0,$$

$$\Delta_{-1}(t) = 0, \ \Delta_0(t) = \lambda_0 + \frac{c}{1 + 4\lambda_0 ct}, \ \Delta_1(t) = -\frac{2c^2\lambda_0}{(1 + 4\lambda_0 ct)^2}.$$

В результате из равенств (5) и (6) находим решение $a_n(t), b_n(t)$, $(n=0,1)$ рассматриваемой задачи:

$$a_0(t)=\frac{ic}{1+4\lambda_0 ct},\ b_0(t)=\lambda_0+\frac{c}{1+4\lambda_0 ct},\ b_1(t)=\lambda_0-\frac{c}{1+4\lambda_0 ct}.$$

Если $\lambda_0 c\notin\mathbb{R}$ или $\lambda_0 c\ge 0$, то $t\in[0,\infty)$. Если $\lambda_0 c<0$, то $t\in[0,-1/4\lambda_0 c)$.

Вторая глава называется **“Начально-краевая задача для конечного уравнения Тоды с самосогласованным источником”**, в первом параграфе которой представлен алгоритм решения начально-краевой задачи, поставленной для вещественного конечного уравнения Тоды с самосогласованным источником с помощью метода обратной задачи для матрицы Якоби.

Рассмотрим конечную цепочку Тоды с самосогласованным источником

$$\begin{cases}\dot a_n=a_n(b_{n+1}-b_n)+a_n\sum\limits_{k=1}^{N}\left((g_n^k)^2-(g_{n+1}^k)^2\right),\\ \dot b_n=2(a_n^2-a_{n-1}^2)-2\sum\limits_{k=1}^{N}g_n^k(a_n g_{n+1}^k-a_{n-1}g_{n-1}^k),\\ a_{n-1}g_{n-1}^k+b_n g_n^k+a_n g_{n+1}^k=\lambda_k g_n^k,\ k=1,...,N,\ n=0,1,...,N-1\end{cases}\tag{10}$$

при следующих начальных и граничных условиях

$$a_n(0)=a_n^0, b_n(0)=b_n^0,\ n=0,1,...,N-1,\tag{11}$$

$$a_{-1}=a_{N-1}=0,\tag{12}$$

с заданными действительными числами a_n^0 и b_n^0, удовлетворяющими условиям $a_n^0\ne 0$ $(n=0,1,...,N-2)$, $a_{N-1}^0=0$.

В системе (10) $\{a_n=a_n(t)\}_{n=0}^{N-1}$, $\{b_n=b_n(t)\}_{n=0}^{N-1}$ и $\{g_n^1(t), g_n^2(t),...,g_n^N(t)\}_{n=0}^{N-1}$ неизвестные функции, $g^k(t)=(g_0^k(t),g_1^k(t),...,g_{N-1}^k(t))^T$, $k=1,...,N$ означают собственные вектор-функции матрицы Якоби вида (1) соответствующие собственным значениям λ_k, $k=1,...,N$ и удовлетворяют следующим условиям нормировки

$$\sum_{n=0}^{N-1}(g_n^k)^2=1.$$

Чтобы показать полную интегрируемость задачи (10)-(12), достаточно найти уравнение Лакса

$$\frac{d}{dt}J=[J,A]=JA-AJ\tag{13}$$

которое эквивалентно системе (10), (12).

Лемма 1. *Если матрица* $A=A(t)$ *имеет вид*

$$A=\begin{bmatrix} 0 & -a_0+d_{0,1} & \cdots & d_{0,N-2} & d_{0,N-1} \\ a_0-d_{0,1} & 0 & \cdots & d_{1,N-2} & d_{1,N-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -d_{0,N-2} & -d_{1,N-2} & \cdots & 0 & -a_{N-2}+d_{N-2,N-1} \\ -d_{0,N-1} & -d_{1,N-1} & \cdots & a_{N-2}-d_{N-2,N-1} & 0 \end{bmatrix},$$

где $d_{i,j}=\sum_{k=1}^{N} g_i^k g_j^k$, $i=0,1,...,N-2,\ j=1,2,...,N-1$, *то задача (10), (12) эквивалентна уравнению Лакса (13).*

Лемма 2. *Пусть* $\{a_n(t),b_n(t)\}$ *– решение задачи (10)-(12) и* $J=J(t)$ *– матрица Якоби, определенная этим решением согласно (1). Тогда собственные значения* λ_k *(*$k=1,2,...,N$*) матрицы* $J(t)$ *не зависят от* t*:*

$$\lambda_k(t)=\lambda_k(0).$$

Лемма 3. *Пусть* $\{a_n(t),b_n(t)\}$ *– решение задачи (10)-(12) и* $J=J(t)$ *– матрица Якоби, определенная этим решением согласно (1). Тогда резольвентная функция* $\omega(\lambda,t)$ *матрицы* $J(t)$ *зависит от* t *следующим образом:*

$$\dot{\omega}=2\left[(\lambda-b_0)-\sum_{k=1}^{N} g_0^k \sum_{i=1}^{N-1} g_i^k P_i\right]\omega-2\left[1-\sum_{k=1}^{N} g_0^k \sum_{i=1}^{N-1} g_i^k Q_i\right],$$

где функции $\{P_n(\lambda,t)\}_{n=-1}^{N}$ *и* $\{Q_n(\lambda,t)\}_{n=-1}^{N}$ *решения уравнения*

$$(Ly)_n \equiv \hat{a}_{n-1}y_{n-1}+b_n y_n+\hat{a}_n y_{n+1}=\lambda y_n, \quad n\in\{0,1,...,N-1\},$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$P_{-1}(\lambda,t)=0,\ P_0(\lambda,t)=1,\ Q_{-1}(\lambda,t)=-1,\ Q_0(\lambda,t)=0,$$

где $\hat{a}_{-1}=\hat{a}_{N-1}=1$, $\hat{a}_n=a_n$, *для всех* $n\in\{0,1,...,N-2\}$.

Лемма 4. *Пусть* $\{a_n(t),b_n(t)\}$ *– решение задачи (10)-(12) и* $J=J(t)$ *– матрица Якоби, определенная этим решением согласно (1). Тогда для нормирующих чисел* $\beta_k(t)$ $(k=1,...,N)$ *матрицы* $J(t)$ *имеет место следующая эволюция по времени:*

$$\beta_k(t)=\frac{1}{S(t)}\beta_k(0)e^{2\lambda_k t}.$$

Здесь

$$S(t)=\sum_{k=1}^{N}\beta_k(0)e^{2\lambda_k t}.$$

Основной результат этого параграфа включен в следующую теорему.

Теорема 2. *Если* $\{a_n(t),\, b_n(t), g_n^1(t), g_n^2(t),..., g_n^N(t)\}$, $(n=0,1,...,N-1)$ *является решением задачи (10)-(12), то спектральные данные матрицы* $J(t)$ *удовлетворяют следующим уравнениям (*$t\in(0,\infty)$*):*

$$\lambda_k(t)=\lambda_k(0),$$

$$\beta_k(t)=\frac{1}{S(t)}\beta_k(0)e^{2\lambda_k t},\ (k=1,...,N).$$

Здесь $S(t)=\sum_{k=1}^{N}\beta_k(0)e^{2\lambda_k t}$.

Полученные равенства полностью определяют временную эволюцию спектральных данных матрицы $J(t)$, что позволяет применить метод обратной спектральной задачи для нахождения решений задачи (10)-(12).

Пример 2. При $N=2$ рассмотрим систему уравнений (10) с начально-граничными условиями

$$a_0(0)=\sqrt{3},\ b_0(0)=1,\ b_1(0)=-1,$$
$$a_{-1}(t)=a_1(t)=0,\ t>0.$$

Набор

$$\{\lambda_1=2, \lambda_2=-2, \beta_1(0)=\frac{3}{4}, \beta_2(0)=\frac{1}{4}\}$$

составляет спектральные данные матрицы $J(0)$. Используя теорему 2, находим

$$\lambda_1(t)=2,\ \lambda_2(t)=-2\ \ \beta_1(t)=\frac{3e^{4t}}{3e^{4t}+e^{-4t}},\ \beta_2(t)=\frac{e^{-4t}}{3e^{4t}+e^{-4t}}.$$

Используя полученные спектральные данные, применяя формулы (2) и (3), находим следующее

$$D_{-1}(t)=1,\ D_0(t)=1,\ D_1(t)=\frac{48}{(3e^{4t}+e^{-4t})^2},\ D_2(t)=0,$$

$$\Delta_{-1}(t)=0,\ \Delta_0(t)=\frac{2(3e^{4t}-e^{-4t})}{3e^{4t}+e^{-4t}},\ \Delta_1(t)=0.$$

В результате из формул (5) и (6) находим решение $a_n(t), b_n(t)$, $(n=0,1)$ рассматриваемой задачи.

$$a_0(t)=\frac{4\sqrt{3}}{3e^{4t}+e^{-4t}},\ b_0(t)=\frac{2(3e^{4t}-e^{-4t})}{3e^{4t}+e^{-4t}},\ b_1(t)=-\frac{2(3e^{4t}-e^{-4t})}{3e^{4t}+e^{-4t}}.$$

Далее вычислим источник $g_n^k(t)$:

$$g_0^1(t)=\pm\sqrt{\beta_1(t)}P_0(\lambda_1,t)=\pm\sqrt{\beta_1(t)}=\pm\sqrt{\frac{3e^{4t}}{3e^{4t}+e^{-4t}}},$$

$$g_0^2(t)=\pm\sqrt{\beta_2(t)}P_0(\lambda_2,t)=\pm\sqrt{\beta_2(t)}=\pm\sqrt{\frac{e^{-4t}}{3e^{4t}+e^{-4t}}},$$

$$g_1^1(t)=\pm\sqrt{\beta_1(t)}P_1(\lambda_1,t)=\pm\sqrt{\beta_1(t)}\frac{\lambda_1-b_0(t)}{a_0(t)}=\pm\frac{e^{-2t}}{\sqrt{3e^{4t}+e^{-4t}}},$$

$$g_1^2(t) = \pm\sqrt{\beta_2(t)}P_1(\lambda_2,t) = \pm\sqrt{\beta_2(t)}\,\frac{\lambda_2 - b_0(t)}{a_0(t)} = \mp\frac{\sqrt{3}e^{2t}}{\sqrt{3e^{4t}+e^{-4t}}}.$$

Во втором параграфе второй главы рассмотрим конечную комплекснозначную уравнению Тоды с самосогласованным источником

$$\begin{cases} \dot{a}_n = a_n(b_{n+1}-b_n) + a_n\sum_{k=1}^{N}\left((g_n^k)^2 - (g_{n+1}^k)^2\right), \\ \dot{b}_n = 2(a_n^2 - a_{n-1}^2) - 2\sum_{k=1}^{N} g_n^k(a_n g_{n+1}^k - a_{n-1}g_{n-1}^k), \\ a_{n-1}g_{n-1}^k + b_n g_n^k + a_n g_{n+1}^k = \lambda_k g_n^k,\ k=1,\dots,N,\ n=0,1,\dots,N-1 \end{cases} \quad (14)$$

при следующих начальных и граничных условиях

$$a_n(0) = a_n^0,\ b_n(0) = b_n^0,\ \ n = 0,1,\dots,N-1, \quad (15)$$

$$a_{-1} = a_{N-1} = 0, \quad (16)$$

с заданными комплексными числами a_n^0 и b_n^0 удовлетворяющих условиям

1) $a_n^0 \neq 0$ ($n = 0,1,\dots,N-2$), $a_{N-1}^0 = 0$;

2) Матрица Якоби $J(0)$ имеет только простые собственные значения.

Основной результат этого параграфа включен в следующую теорему

Теорема 3. *Если* $\{a_n(t), b_n(t), g_n^1(t), g_n^2(t),\dots, g_n^N(t)\}$, $(n = 0,1,\dots,N-1)$ *является решением задачи (14)-(16), то спектральные данные матрицы* $J(t)$ *удовлетворяют следующим уравнениям* $(t\in(0,t_1))$*:*

$$\lambda_k(t) = \lambda_k(0),$$

$$\beta_k(t) = \frac{1}{S(t)}\beta_k(0)e^{2\lambda_k t},\ (k=1,\dots,N).$$

Здесь $S(t) = \sum_{k=1}^{N}\beta_k(0)e^{2\lambda_k t}$ *и число* t_1 *означает наименший положительный нуль функции* $S(t)$ *(если не существует положительного нуля, то* t_1 *любое положительное число).*

Полученные результаты полностью определяют временную эволюцию спектральных данных матрицы $J(t)$ и позволяют решить задачу (14)-(16) с помощью обратной спектральной задачи.

Третья глава диссертации называется **“Интегрирование уравнения Тоды высшего порядка с интегральным источником”**.

В первом параграфе третьей главы даны необходимые сведения, касающиеся теории прямой и обратной задач рассеяния для дискретного уравнения Штурма-Лиувилля.

Рассмотрим разностное уравнение второго порядка

$$\left(Ly\right)_n \equiv a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1} = \lambda y_n,\ n\in\mathbb{Z}, \quad (17)$$

где $y=\{y_n\}_{-\infty}^{\infty}$ – искомое решение, $\lambda=\dfrac{z+z^{-1}}{2}$ – спектральный параметр и

$$a_n>0,\ b_n\in\mathbb{R},\ n\in\mathbb{Z},\ \sum_{n=-\infty}^{\infty}|n|\left(\left|a_n-\frac{1}{2}\right|+|b_n|\right)<\infty. \qquad (18)$$

При выполнении условия (18) уравнение (17) обладает решениями Йоста со следующими асимптотиками

$$\varphi_n(z)=z^n+o(1),\ n\to\infty,\ |z|=1,$$

$$\psi_n(z)=z^{-n}+o(1),\ n\to-\infty,\ |z|=1.$$

При $|z|=1$ пары $\{\varphi_n(z),\varphi_n(z^{-1})\}$ и $\{\psi_n(z),\psi_n(z^{-1})\}$ образуют фундаментальную систему решений уравнения (17). Поэтому

$$\psi_n(z)=\alpha(z)\varphi_n(z^{-1})+\beta(z)\varphi_n(z).$$

Функция рассеяния определяется с помощью равенства

$$R(z)=-\frac{\beta(z^{-1})}{\alpha(z)},\ |z|=1.$$

Функция $\alpha(z)$ аналитически продолжается во внутренность единичного круга $|z|<1$ и имеет там конечное число простых нулей $z_1,z_2,...,z_N$, причем $\lambda_k=\dfrac{z_k+z_k^{-1}}{2}$, $k=1,2,...,N$ есть собственное значение оператора L. Нормированным собственным вектором соответствующим этому собственному значению мы будем называть собственный вектор $\left\{\xi_n^k\right\}_{n=-\infty}^{\infty}$, удовлетворяющий условию $\sum_{n=-\infty}^{\infty}(\xi_n^k)^2=1$. Ясно что $\xi_n^k=B_k\varphi_n^k$, $k=1,2,...,N$.

Определение 2. Набор $\{R(z),z_1,z_2,...,z_N,B_1,B_2,...,B_N\}$ называется данным рассеяния для уравнения (17).

Нахождение данных рассеяния называется прямой задачей. Восстановление коэффициентов a_n, b_n по данным рассеяния называется обратной задачей для уравнения (17).

Для функции $\varphi_n(z)$ справедливо представление

$$\varphi_n(z)=\sum_{m=n}^{\infty}K(n,m)z^m. \qquad (19)$$

Ядро $K(n,m)$ в представлении (19), удовлетворяет аналогу уравнений Гельфанда-Левитана-Марченко

$$\chi(n,m)+F(n+m)+\sum_{n'=n+1}^{\infty}\chi(n,n')F(n'+m)=0,\quad m>n,$$

$$(K(n,n))^{-2}=1+F(2n)+\sum_{n'=n+1}^{\infty}\chi(n,n')F(n'+n),$$

и связан с коэффициентами a_n и b_n с помощью равенств

$$a_n = \frac{1}{2}\frac{K(n+1,n+1)}{K(n,n)}, \quad b_n = \frac{1}{2}\left(\frac{K(n,n+1)}{K(n,n)} - \frac{K(n-1,n)}{K(n-1,n-1)}\right).$$

Здесь

$$F(n) = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{|z|=1} R(z)z^{n-1}dz + \sum_{k=1}^{N} B_k^2 z_k^n, \quad \chi(n,m) = \frac{K(n,m)}{K(n,n)}.$$

Во втором параграфе третьей главы показано, что задача Коши для уравнения типа Тоды с интегральным источником интегрируема.

В третьем параграфе третьей главы рассматривается высшее уравнение Тоды с интегралным источником

$$\begin{cases} \dot{a}_n = a_n(G_{n+1,r+1} - G_{n,r+1}) + a_n \oint\limits_{|\mu|=1} \frac{1}{\mu}(f_{n+1}(\mu,t)g_{n+1}(\mu,t) - f_n(\mu,t)g_n(\mu,t))d\mu, \\ \dot{b}_n = H_{n+1,r+1} - H_{n,r+1} + a_n \oint\limits_{|\mu|=1} \frac{1}{\mu}(f_n(\mu,t)g_{n+1}(\mu,t) + f_{n+1}(\mu,t)g_n(\mu,t))d\mu - \\ -a_{n-1} \oint\limits_{|\mu|=1} \frac{1}{\mu}(f_n(\mu,t)g_{n-1}(\mu,t) + f_{n-1}(\mu,t)g_n(\mu,t))d\mu, \\ a_{n-1}f_{n-1} + b_n f_n + a_n f_{n+1} = \frac{\mu+\mu^{-1}}{2} f_n, \\ a_{n-1}g_{n-1} + b_n g_n + a_n g_{n+1} = \frac{\mu+\mu^{-1}}{2} g_n, \quad n \in Z, \end{cases} \tag{20}$$

при начальных условиях

$$a_n(0) = a_n^0, \; b_n(0) = b_n^0, \quad n \in \mathbb{Z}, \tag{21}$$

где

$$G_{n,j}(t) = \sum_{s=0}^{j} c_{j-s} < \delta_n, L(t)^s \delta_n >, \quad 0 \le j \le r+1, \; r \in \mathbb{Z}_+,$$

$$H_{n,j}(t) = \sum_{s=0}^{j} 2a_n(t)c_{j-s} < \delta_{n+1}, L(t)^s \delta_n > + c_j + 1, \;\; 0 \le j \le r+1,$$

$$\left(L(t)y\right)_n \equiv a_{n-1}y_{n-1} + b_n y_n + a_n y_{n+1},$$

$$< \delta_m, \delta_n > = \begin{cases} 0, \; m \ne n \\ 1, \; m = n, \end{cases}$$

$c_1, c_2, \ldots, c_{r+1}$ заданные произвольные действительные числа. Последовательности $\{a_n^0\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{b_n^0\}_{-\infty}^{\infty}$ удовлетворяют следующим свойствам:

1. $a_n^0 > 0, \; b_n^0 \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{Z},$

$$2. \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\, n \,| \left(\left| a_n^0 - \frac{1}{2} \right| + \left| b_n^0 \right| \right) < \infty, \tag{22}$$

3. Оператор $\left(L(0)y\right)_n \equiv a_{n-1}(0)y_{n-1} + b_n(0)y_n + a_n(0)y_{n+1}$ имеет ровно N собственных значений $\lambda_k(0) = \dfrac{z_k(0)+z_k^{-1}(0)}{2}$, $k = 1,2,\dots,N$, которые лежат вне интервала $[-1;1]$.

В системе (20) функциональные последовательности функций $\{a_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{b_n(t)\}_{-\infty}^{\infty}$, $\{f_n(\mu,t)\}_{-\infty}^{\infty}$ и $\{g_n(\mu,t)\}_{-\infty}^{\infty}$ – неизвестные вектор-функции, и для всех $t \ge 0$ и $|\mu| = 1$ выполняются следующие асимптотические свойства:

$$g_n(\mu,t) \sim p(\mu,t)\mu^n + q(\mu,t)\mu^{-n}, \ \ n \to -\infty,$$

$$f_n(\mu,t) \sim r(\mu,t)\mu^n + s(\mu,t)\mu^{-n}, \ \ n \to -\infty.$$

Здесь $p(\mu,t), q(\mu,t), r(\mu,t)$ и $s(\mu,t)$ – заданные непрерывные функции имеющие производные первого порядка по μ, и удовлетворяющие условие Гельдера с степенью $\nu \in (0,1]$ на $|\mu| = 1$ для всех неотрицательных t.

В системе (20) меняя r можно получить различные уравнения высшей цепочки Тоды. Например,

при $r = 0$, $\begin{cases} \dot{a}_n = a_n(b_n - b_{n+1}) + A_n, \\ \dot{b}_n = 2(a_{n-1}^2 - a_n^2) + B_n, \ \ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

при $r = 1$, $\begin{cases} \dot{a}_n = a_n(a_{n+1}^2 - a_n^2 + b_{n+1}^2 - b_n^2) + c_1 a_n(b_n - b_{n+1}) + A_n, \\ \dot{b}_n = 2a_n^2(b_n + b_{n+1}) - 2a_{n-1}^2(b_n + b_{n-1}) + 2c_1(a_{n-1}^2 - a_n^2) + B_n, \ \ n \in \mathbb{Z}. \end{cases}$

Основной результат этого параграфа включен в следующую теорему.

Теорема 4. Если функции $a_n(t)$, $b_n(t)$, $f_n(\mu,t)$, $g_n(\mu,t)$, $n \in \mathbb{Z}$ решение задачи (20)-(22), то данные рассеяния оператора, определяемые равенством

$$\left(L(t)y\right)_n \equiv a_{n-1}(t)y_{n-1} + b_n(t)y_n + a_n(t)y_{n+1},$$

задаются соотношениями

$$\frac{dz_k}{dt} = 0, \ \ k = 1,2,\dots,N, \tag{23}$$

$$\frac{\partial R(z,t)}{\partial t} = [\tilde{g}_r(z,0)(z - z^{-1}) + \frac{1}{z^2-1} v.p. \oint\limits_{|\mu|=1} D(\mu,t)d\mu]R(z,t) +$$
$$+2\pi i(Q(z,t) + Q(z^{-1},t))R(z,t) + 4\pi i P(z^{-1}), \ \ z \ne \pm 1, \tag{24}$$

$$\frac{dB_k(t)}{dt} = [(z_k - z_k^{-1})\tilde{g}_r(z_k,0) -$$
$$-\frac{1}{z_k^2-1}\oint\limits_{|\mu|=1} \frac{(\mu+z_k)(\mu z_k - 1)}{\mu(\mu - z_k)}(b(\mu,t)c(\mu,t) + q(\mu,t)r(\mu,t))d\mu - \tag{25}$$
$$-\frac{1}{z_k^2-1}\oint\limits_{|\mu|=1} \frac{(\mu-z_k)(\mu z_k + 1)}{\mu(\mu - z_k^{-1})}(a(\mu,t)d(\mu,t) + p(\mu,t)s(\mu,t))d\mu]B_k(t), k = 1,2,\dots,N,$$

здесь $g_r(z,0)$ полином от переменной z,

$$D(\mu,t) = \left(q(\mu,t)r(\mu,t) + p(\mu,t)s(\mu,t)\right)\left[\frac{(\mu+z)(\mu z-1)}{\mu(\mu-z)} + \frac{(\mu-z)(\mu z+1)}{\mu(\mu-z^{-1})}\right],$$

$$P(\mu,t) = p(\mu,t)r(\mu,t) + q(\mu^{-1},t)s(\mu^{-1},t),$$
$$Q(\mu,t) = p(\mu,t)s(\mu,t) + q(\mu^{-1},t)r(\mu^{-1},t),$$
$$P(\mu^{-1},t) = -\overline{P(\mu,t)},\ \ Q(\mu^{-1},t) = -\overline{Q(\mu,t)},\ \ |\mu| = 1,\ t \ge 0\ ,$$
$$a(\mu,t) = p(\mu,t)\beta(\mu^{-1},t) + q(\mu,t)\alpha(\mu,t),$$
$$b(\mu,t) = p(\mu,t)\alpha(\mu^{-1},t) + q(\mu,t)\beta(\mu,t),$$
$$c(\mu,t) = r(\mu,t)\beta(\mu^{-1},t) + s(\mu,t)\alpha(\mu,t),$$
$$d(\mu,t) = r(\mu,t)\alpha(\mu^{-1},t) + s(\mu,t)\beta(\mu,t).$$

Соотношения (23), (24) и (25) полностью определяют эволюцию данных рассеяния оператора $L(t)$, это позволяет методом обратной задачи рассеяния найти решение системы (20), (21).

Автор искренне благодарит своего научного руководителя д.ф.-м.н. Бабаджанова Базара Атаджановича за постоянное внимание и ценные советы при обсуждении результатов диссертации.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Первая глава диссертации посвящена интегрированию начально-краевой задачи для комплекснозначного конечного уравнения типа Тоды с методом обратной задачи для конечной матрицы Якоби.

Во второй главе методом обратной спектральной задачи для конечной матрицы Якоби решается начально-краевая задача для вещественного и комплекснозначного конечного уравнения Тоды с самосогласованным источником.

Третья глава диссертации посвящена полной интегрируемости общего уравнения Тоды с интегральным источником в классе «быстроубывающих» функций.

Основные результаты исследования заключаются в следующем:

доказано, что начально-краевая задача для конечного комплексного уравнения типа Тоды вполне интегрируема;

решена начально-краевая задача для вещественного конечного уравнения Тоды с самосогласованным источником;

решена начально-краевая задача для комплекснозначного конечного уравнения Тоды с самосогласованным источником;

доказана интегрируемость уравнения типа Тоды с интегральным источником;

доказано, что общее уравнение Тоды с интегральным источником вполне интегрируемо.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREE PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 URGENCH STATE UNIVERSITY

URGENCH STATE UNIVERSITY

RUZMETOV MUROD MARKSOVICH

INTEGRATION OF THE TODA EQUATION WITH A SELF-CONSISTENT SOURCE AND ITS GENERALIZATIONS BY THE INVERSE SPECTRAL PROBLEM METHOD

01.01.02 – Differential Equations and Mathematical Physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOFHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATEMATICAL SCIENCES

Urgench – 2024

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Comission at the Ministry of Higher education, science and innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2023.4.PhD/FM952.

Dissertation has been prepared at Urgench State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-mat.urdu.uz) and the “ZiyoNet” Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Babajanov Bazar Atajanovich** Doctor of Physical and Matematical Sciences
Official opponents:	**Yaxshimuratov Alisher Bekchanovich** Doctor of Physical and Matematical Sciences
	Babadajanova Aygul Kamilвjanovna Doctor of philosofhy (PhD) on Physical and Matematical Sciences
Leading organization:	**Samarkand State University**

Defense will take place “____” ___________ _____ at ____ the meeting of Scientific Council number PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 at Urgench State University. (Address: Kh.Alimdjan str.14, Urgench, 220100, Uzbekistan, Ph.: (+99862) 224-66-11, fax: (+99862) 224-67-00, e-mail: ik-mat.urdu@umail.uz).

Dissertation in possible to review in Information-resource centre at Urgench State University (is registred №____). (Address: Kh.Alimdjan str.14, Urgench, 220100, Uzbekistan, Ph.: (+99862) 224-66-11, fax: (+99862) 224-67-00, e-mail: ursubox@gmail.uz).

Abstract of dissertation sent out on “____” ____________ ____ year
(Mailing report №______ on “____”____________ ____ year)

G.U. Urazboev
Chairman of Scientific council on award of scientific degree, Dr.ph.m.s.

A.A. Reyimberganov
Scientific secretary of Scientific council on award of scientific degree, C.ph.m.s.

A.B. Yaxshimuratov
Vice chairman of Scientific seminar under scientific council on award of scientific degree, Dr.ph.m.s.

INTRODUCTION (abstract of the PhD dissertation)

The aims of research work are:

to solve an initial-boundary value problem for a finite complex-valued Toda-type equation, to solve an initial-boundary value problem posed for a real and complex-valued finite Toda equation with a self-consistent source by the inverse spectral method, to integrate the general Toda and the Toda-type equations with an integral source.

The object of the research work is the discrete Sturm-Liouville equation, the Toda equation, the Toda-type equation, the Toda-type equation with a self-consistent source, the Toda-type equation with an integral source, the higher order Toda equation with an integral source.

Scientific novelty of the research work consists of the followings:

By the method of inverse problem of spectral theory of finite-difference operators the initial boundary value problem for the finite-complex Toda type equation is solved;

The time evolution of spectral data of a finite-difference operator whose coefficients are the solution of the initial boundary value problem imposed on a finite real Toda equation with self-consistent sources is found and the real finite Toda equation with self-consistent sources is integrated using these evolutions;

The method of inverse problem of spectral theory of finite-difference operators is applied to find the solution of the initial complex Toda equation with self-consistent source;

The integrability of general Toda equations and Toda-type equations with an integral source is proved using the method of inverse problem of scattering theory.

Implementation of research results. Based on the results obtained by solving the Toda equation with a self-consistent source and its generalizations by the inverse spectral method:

the algorithm for integrating the general Toda equation with a self-consistent source using the inverse problem method for the discrete Sturm-Liouville equation was used in the RFBR project No. 20-01-00293 “Qualitative methods in problems of control theory and the theory of differential games with a non-fixed terminal moment” when solving problems of control of systems described by differential partial differential equations (Reference No. 1001-10430/32 of Udmurt State University, November 15, 2023). The application of these scientific results has allowed us to consider some new approaches to studying the interaction between subzones for special types of superconductors;

the method of integrating the Cauchy problem for a Toda-type equation with a self-consistent source in the class of rapidly decreasing functions by the method of the inverse spectral problem for the discrete Sturm-Liouville equation was used to obtain an algorithm for constructing a source for the general Toda equation in the class of rapidly decreasing functions in the scientific project OT-F4-04 (05) - “Application of the spectral method in solving matrix nonlinear evolution equations. Biomechanics of the cardiovascular system" (Reference No. 01-04/01-

11/3077 of Urgench State University, November 16, 2023). The application of these scientific results allowed to develop an algorithm for solving the Cauchy problem for the matrix Korteweg-de Vries equation with an integral source.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of three chapters, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation is 114 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
LIST OF PUBLISHED WORKS
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
I bo'lim (Part I; Часть I)

1. Babajanov B.A., Ruzmetov M.M., Babajanov A.B. On the integration of a Toda-type chain with an integral type source// Bulletin of the Institute of Mathematics, 2020, №1, pp. 15-26. (01.00.00, OAK Rayosatining 2019 yil 28 martdagi 263/7.1-son qarori)

2. Babajanov B.A., Ruzmetov M.M. On the Construction and Integration of a Hierarchy for the Periodic Toda Lattice with a Self-Consistent Source// The Bulletin of Irkutsk State University. Series Mathematics, 2021, v. 38, pp. 3-18. (№3, SiteScore 1.3)

3. Ruzmetov M.M. Integration of the finite complex Toda type lattice by the method of inverse spectral problem// Uzbek Mathematical Journal 2022, v. 66, issue 1, pp.149-160. (01.00.00, №6)

4. Babajanov B.A., Ruzmetov M.M., Sadullayev Sh.O. Integration of the finite complex Toda lattice with a self-consistent source// Partial Differential Equations in Applied Mathematics, 2023, 7C, 100510. (№3, SiteScore 3.4)

5. Babajanov B.A., Ruzmetov M.M., Sadullayev Sh.O. Solving a finite complex Toda type lattice by the method of inverse spectral problem// AIP Conference Proceedings 2023, v. 2781, 020023. (№3, SiteScore 0.7)

6. Babajanov B.A., Ruzmetov M.M. Solution of the Finite Toda Lattice with Self-Consistent Source// Lobachevskii Journal of Mathematics, 2023, v. 44, No. 7, pp. 2587-2600. (№3, SiteScore 1.5)

7. Babajanov B.A., Ruzmetov M.M. On the Integration of the Higher Order Toda Lattice with a Self-Consistent Integral Type Source// Contemporary Mathematics, 2023, v. 4, issue 4, pp. 684-701. (№3, SiteScore 0.7)

II bo'lim (Part II; Часть II)

8. Babajanov B.A., Ruzmetov M.M., Babajanov A.B. Integration of the Toda-type chain with an integral type source // Тезисы докладов международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики», 12-13 марта 2020 года, г. Фергана, с. 272-275.

9. Бабажанов Б.А., Рузметов М.М., Бабажанов А.Б. Иерархия цепочки Тоды с интегральным источником// Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения», 17-18 ноября 2020 г., г. Ташкент, том 1, с. 43-45.

10. Babajanov B.A., Ruzmetov M.M., Rajapov X.O. On the construction and integration of the Toda lattice hierarchy with an integral type source// Материалы научной конференции «Актуальные проблемы стохастического анализа», 20-21 февраля 2021 г., г. Ташкент, с. 206-209

11. Babajanov B.A., Ruzmetov M.M. On the integration of the Toda lattice hierarchy with a self-consistent source// Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых, «Саримсаковские чтения», 16-18 сентября 2021 г., г. Ташкент, с.183-185.

12. Babajanov B.A., Ruzmetov M.M. Integration of the finite complex Toda type lattice by the method of inverse spectral problem // Сборник докладов республиканской научно-практической конференции “Актуальные вопросы математики и информационных систем”, 12-13 ноября 2021 г., г. Ургенч, с. 50.

13. Babajanov B.A., Ruzmetov M.M. Integration of the finite complex Toda type lattice by the method of inverse spectral problem // Abstracts of the VII international scientific conference “Modern problems of applied mathematics and information technologies al-Khwarizmi 2021”, November 15-17, 2021, Fergana, p.113.

14. Babajanov B.A, Ruzmetov M.M. Integration of the finite complex Toda chain with a self-consistent source// “Actual problems of mathematics, mechanics and informatics” Proceedings of the International Scientific Conference, September 8–9, 2022, Karaganda, Kazakhstan, p. 88.

15. Babajanov B.A., Ruzmetov M.M. Integration of the finite complex Toda chain with a self-consistent source // Тезисы докладов научной конференции “Операторные алгебры, неассоциативные структуры и смежные проблемы”, 14–15 сентября 2022, Ташкент, Узбекистан, с. 172.

16. Babajanov B.A., Ruzmetov M.M. On the finite complex Toda chain with a self-consistent source // Abstracts of the international conference “Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics” (part I), September 23-24, 2022, Samarkand, p.170.

17. Babajanov B.A., Ruzmetov M.M., Gʻayibnazarova S.U. On the finite complex Toda chain with a self-consistent source// Abstracts of the II International forum «Computational and mathematical methods and modelling in high-tech manufacturing», November 9, 2022, Russia, Sankt-Petersburg, pp.73-76.

18. Babajanov B.A., Ruzmetov M.M. Integration of a finite complex Toda chain with a self-consistent source// Abstracts of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (TWMS Congress-2023), September 20-23, 2023, Kazakhstan, Turkestan, p.53.

19. Babajanov B.A., Ruzmetov M.M. Integration of the higher order Toda Lattice with a source// Abstracts of the 8 th international conference “Actual problems of applied mathematics and information technologies”-Al-Khwarizmi 2023, September 25-26, 2023, Samarqand, Uzbekistan, p. 186.