V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

ABDULLAEV OBIDJON XAYRULLAEVICH

KASR VA BUTUN TARTIBLI INTEGRAL-DIFFERENSIAL OPERATORLI ARALASH TIPDAGI YUKLANGAN TENGLAMALAR UCHUN LOKAL VA NOLOKAL MASALALAR

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

FIZIKA - MATEMATIKA FANLARI DOKTORI (DSc) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2024

UDK: 517.95

Doktorlik (DSc) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Content of Doctoral (DSc) Dissertation Abstract

Abdullayev Obidjon Xayrullayevich
Kasr va butun tartibli integral-differensial operatorli aralash tipdagi yuklangan tenglamalar uchun lokal va nolokal masalalar …... 3

Абдуллаев Обиджон Хайруллаевич
Локальные и нелокальные задачи для нагруженных уравнений смешанного типа с интегро-дифференциальными операторами целого и дробного порядка …………………………...…….. 29

Abdullaev Obidjon Khayrullaevich
Local and non-local problems for the mixed type loaded equations with integral-differential operator’s integer and fractional order …….…………….. 55

E’lon qilingan ishlar r o’yxati
Список опубликованных работ
List of published works ………………………………....................……... 59

V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MATEMATIKA INSTITUTI

ABDULLAEV OBIDJON XAYRULLAEVICH

KASR VA BUTUN TARTIBLI INTEGRAL-DIFFERENSIAL OPERATORLI ARALASH TIPDAGI YUKLANGAN TENGLAMALAR UCHUN LOKAL VA NOLOKAL MASALALAR

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

FIZIKA - MATEMATIKA FANLARI DOKTORI (DSc) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2024

Fizika-matematika fanlari doktori (DSc) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2022.3.DSc/FM199 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya V.I.Romanovskiy nomidagi matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida (http://kengash.mathinst.uz) va «Ziyonet» Axborot ta’lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy maslahatchi:	**Islomov Bozor** Fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Durdiev Durdimurod Qalandarovich** Fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Fayazov Kudratilla Sadriddinovich Fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Karimov Erkinjon To‘lqinovich Fizika-matematika fanlari doktori, katta ilmiy xodim
Yetakchi tashkilot:	**Rossiya fanlar akademiyasi Kabirdin-Balkar ilmiy markazi Tadbiqiy matematika va avtomatlashtirish instituti**

Dissertatsiya ximoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti xuzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2024-yil 10-sentyabr soat 16:00 dagi majlisda bo‘lib o‘tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet kuchasi, 9-uy. Tel.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I.Romanovskiy nomidagi matematika institutining Axborot-resur markazida tanishish mumkin (188- raqam bilan ro‘yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet kuchasi, 9-uy. Tel.: (+99871) 207-91-40.

Dissertatsiya avtoreferati 2024-yil 2-avgust kuni tarqatildi.

(2024-yil 2-avgustdagi 2- raqamli reestr bayonnomasi).

O‘. A. Roziqov
ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., akademik

J. K. Adashev
ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

A. A. Azamov
ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash huzuridagi Ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., akademik

KIRISH (doktorlik (DSc) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Insoniyat yashash tarzining intensiv o‘zgarishi, fanning deyarli barcha soxalarida olib borilayotgan tadqiqotlarning yanada jadallashishiga va kengayishiga olib keldi. Jahon miqyosida olib borilayotgan, amaliy xarakterga ega bo‘lgan deyarli barcha ilmiy-amaliy tadqiqotlar matematikaning turli sohalariga, xususan, aralash tipdagi xususiy xosilali differensial tenglamalar nazariyasi masalalarini yechishga keltiriladi. Matematik biologiya, matematik fizika, nolokal jarayonlarni va hodisalarni matematik modellashtirish hamda elastik qobiqlar nazariyasi masalalarini tadqiq qilish usullarida turli xil yuklangan differensial tenglamalar qo‘llaniladi. Bundan tashqari, yuklangan tenglamalar oddiy va xususiy xosilali differensial tenglamalar uchun lokal va nolokal masalalarni yechishning bir usuli sifatida ham ishlatiladi. Buning asosi sifatida, yuklangan differensial tenglamalar va siljishli chegaraviy masalalar orasida o‘rnatilgan uzviy bog‘liqlikni keltirish mumkin. Shuning asnosida yuklangan differensial tenglamalar nazariyasi so‘ngi o‘n yillikda rivojlanishning eng yuqori darajasiga chiqdi, shunga qaramasdan, bu nazariyani butun va kasr tartibli aralash tipdagi tenglamalar uchun yanada rivojlantirish muxim ahamiyat kasb ketib kelmoqda. Ayniqsa, chiziqli yoki chiziqsiz yuklamaga ega bo‘lgan aralash tipdagi tenglamalarni tadqiq qilishda mavjud klassik nazariya elementlarini to‘g‘ridan to‘g‘ri tadbiq qilib bo‘lmasligi, tenglamalardagi yuklamalar butun va kasr tartibli turli integral-differensial operatorlar orqali berilishi, tenglamalar uchun uzluksiz ulash shartli lokal masalalarni o‘z ichiga oluvchi integral ulash shartli nolokal to‘g‘ri va teskari masalalarni tadqiq qilish muhim vazifalardan biri bo‘lib kelmoqda.

Hozirgi kunda kasr tartibli differensial, integral va integral-differensial tenglamalarni o‘rganish, bunday tenglamalar uchun tadbiqiy xarakteri va dolzarblik nuqtai nazaridan kelib chiqib turli lokal va nolokal, to‘g‘ri va teskari masalalarni qo‘yish va ularni tadqiq qilish jaxon miqyosida intensiv rivojlanib borayotganligi sababli, kasr tartibli integral-differensial operatorlar qatnashgan aralash tipdagi tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalarni tadqiq qilish muhim axamiyatga ekanligini kursatadi. Xususan, chiziqli va chiziqsiz yuklamagan ega bo‘lgan kasr tartibli aralash tipdagi tenglamalar uchun umumlashgan (uzluksiz ulash shartli lokal masalalarni o‘z ichiga oluvchi) to‘g‘ri va teskari masalalarni qo‘yish, ularni tadqiq va taxlil qilish maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqiga ega bo‘lgan matematik fizika, matematik biologiya, uzluksiz muhit va fraktallar fizikasi dinamikasi yo‘nalishlariga e’tibor kuchaytirildi. Jumladan, oxirgi yillarda kasr va butun tartibli aralash tipdagi tenglamalar yo‘nalishida salmoqli natijalarga erishildi. «Differensial tenglamalar va matematik fizika, integral tenglamalar va dinamik sistemalar nazariyasi» fanlarining ustivor yo‘nalishlarida xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish matematika fanining asosiy vazifalari va faoliyat yo‘nalishlari etib belgilandi[1]. Qarorning ijrosini ta’minlashda ilmiy natijalardan ilm-fanning turdosh sohalarida foydalanish maqsadida chiziqli va chiziqsiz yuklamaga ega aralash tipdagi tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalarni tadqiq qilish muhim ahamiyatga ega.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947-son «O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha xarakatlar strategiyasi to‘g‘risida»gi Farmoni[1], 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-son «Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi va 2020 yil 7 maydagi PQ-4708-son «Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ–huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishi-ning ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. «Matematika, mexanika va informatika» ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi[2].

Kasr tartibli differensial, integral va integral-differensial operator qatnashgan tenglamalarni tadqiq qilish bo‘yicha dunyoning yetakchi ilmiy markazlari va oliy ta’lim muassasalari, jumladan, Ghent University (Belgiya), University of Santiago de Compastela (Ispaniya), University of Las Plamas de Gran Canaria (Ispaniya), Tadbiqiy matematika va avtomatlashtirish instituti (Rossiya), Qozog‘iston Respublikasi Milliy akademiyasi nazariy va tadbiqiy matematika instituti (Qozog‘iston), Anand International College of Engeineering (Hindiston), La Rochelle University (Fransiya), Cankaya University (Turkiya), Abay Qozoq Milliy pedagogika universiteti (Qozog‘iston), Boshqirdiston davlat universiteti, Belgorod davlat milliy tadqiqot universiteti, Belorus davlat universiteti, Voronej davlat universiteti, Kabardin-Balqor davlat universiteti, Qozon (Volga bo‘yi) federal universiteti, Moskva davlat universiteti, Rossiya Fanlar akademiyasining Matematika instituti, Novosibirsk davlat universiteti, Sibir federal universiteti, Samara davlat texnika universiteti, Samara davlat ijtimoiy va gumanitar fanlar akademiyasi, Rossiya FA Sibir bo‘limining Hisoblash matematikasi va matematik geofizika instituti, va boshqa xorijiy ilmiy muassasalarda keng qamrovli ilmiy tadqiqotlar olib borilmoqda.

Oxirgi yillarda butun va kasr tartibli differensial, integral-differensial operatorli klassik va aralash tipdagi tenglamalar uchun fundamental va amaliy

[1] O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017-yil 18-maydagi “O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy-tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi 292-son qarori.

[2] Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi: www.inderscience.com.jhome; www.springer.com.journal; www.link.springer.com/journal/10625 va boshqa shunga o‘xshash manbalar asosida ishlab chiqilgan.

xarakterga ega bo‘lgan turli chegaraviy masalalarni yechish bo‘yicha olib borilgan tadqiqotlar natijasida qator dolzarb natijalar olingan.

Jumladan, quyidagi ilmiy natijalar olingan: xarakteristik va noxarakteristik tip o‘zgarish chizig‘iga ega bo‘lgan aralash parabolik-giperbolik tipdagi yuklangan tenglamalarning modellari tadqiq qilingan, aralash tipdagi tenglama modeli sifatida turli chegaraviy masalalalar tadqiq qilingan va ularning yechimlari yaqqol ko‘rishda yozilgan (Rossiya FA Kabardin-Balqor ilmiy markazining Amaliy matematika va avtomatlashtirish instituti); aralash parabolik-giperbolik yuklangan tenglama uchun to‘g‘ri to‘rtburchak sohada chagaraviy va boshlang‘ich-chegaraviy masalalar yechimi yagonaligining zaruriy va yetarlilik shartlari topilgan (Boshqirdiston Respublikasi amaliy tadqiqotlar instituti), yuklangan elliptik-giperbolik tipdagi tenglama uchun lokal va nolokal masalalar yechimining yagonalik kretiriysi spektral analiz usullaridan foydalanib isbotlangan. Yechim mavjudligi esa biortogonal qatorlar yordamida ko‘rsatilgan (Samara davlat ijtimoiy va gumanitar fanlar akademiyasi), kasr tartibli integral-differensial operatorli yuklamaga ega klassik tipdagi tenglamalar uchun masalalar yechimlarining yagonaligi va mavjudligi isbotlangan (Qozog‘iston Respublikasi Milliy akademiyasi nazariy va tadbiqiy matematika instituti); kasr tartibli Riman-Liuvill va Kaputo hosilali diffuziya va to‘lqin tenglamalari uchun lokal va nolokal masalalarning yechimlari Grin funksiyalari orqali topilgan, echim yagonaligi mavjudligining zarur va etarli shartlari olingan (Rossiya FA Kabardin-Balqor ilmiy markazining Amaliy matematika va avtomatlashtirish instituti); chiziqli yuklamaga ega bulgan aralash tipdagi tenglamalar uchun noma’lum o‘ng tomonni (o‘ng tomon vaqtning funksiya bo‘lgan holda xam) topishga oid teskari masalalar yechimi mavjudligi va yagonligi isbotlangan (Boshqirdiston davlat universiteti Sterlitamak filiali), chiziqsiz yuklangan tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalarning bir qiymatli yechilishi o‘rganilgan (S.L.Sobolev nomidagi matematiki instituti RFA).

So‘ngi yillarda jahon miqyosida chiziqli va chiziqsiz yuklamaga ega bo‘lgan butun va kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarni tadqiq qilish va ular uchun tadbiqiy va fundamental xarakterga ega bo‘lgan chegaraviy masalalarni qo‘yish va ularni o‘rganish bo‘yicha bir qator izlanishlar olib borilmoqda, jumladan, turli ko‘rinishdagi yuklamaga ega bo‘lgan aralash tipdagi tenglamalar uchun uzluksiz va integral ulash shartli lokal va nolokal masalalarni tadqiq qilish; qo‘yilgan chegaraviy masalalarning yechimlarini oshkor ko‘rinishlarda topish; chiziqli va chiziqsiz yuklamaga ega bo‘lgan kasr tartibli xususiy xosilali tenglamalarni tadqiq etish kabi ustuvor yo‘nalishlarda ilmiy-tadqiqot ishlari olib borilmoqda.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Aralash tipdagi sodda tenglamalar o‘rganishni birinchi bo‘lib F.Trikomi boshlagan. Keyinchalik, M.CH.Chibrario, E.Xolmgren, S.Gellerstedt tomonidan buziladigan aralash tipdagi tenglamalar uchun ilk chegaraviy masalalarni tadqiq qilishgan. 1960 yilda A.V.Bitsadze tomonidan birinchi bo‘lib, aralash tipdagi ikki o‘zgaruvchili tenglama uchun korrekt qo‘yilgan masala tushunchasini ilgari surilgan. Shu tushunchani amalga oshirish niyatida, 1969 yilda A.M. Naxushev[3] tomonidan yangi turdagi masalalarni tadqiq qilingan. Bu masalalar keyinchalik siljishli chegaraviy masalalar deb nomlandi. Yuklangan xususiy hosilala differensial va integral-differensial tenglamalarni ilk bor 1976 yilda A.M.Naxushev[4] o‘rgangan hamda ularning to‘liq klassifikatsiyasini keltirgan va turli jarayonlarga tadbiqlarini aytib o‘tgan. SHundan so‘ng, bu ilmiy yo‘nalish V.A.Djenaliev, A.I. Kojanov, K.B.Sabitov, R.R.Ashurov, A.B. Xasanov, B.I.Islomov, O.S.Zikirov, S.Djamalov, A.X. Attaev, D.Kuryazov, U.Baltaeva, K.Xubiev va boshqalar tomonidan rivojlantirildi.

Aralash tipdagi tenglamalarning asosiy qismi uchun o‘rganiladigan siljishli chegaraviy masalalarda kasr tartibli integral, differensial va integral-differensial operatorlar va ularning xossalari muhim o‘rin tutadi. Shuni takidlab o‘tish joizki, fraktal ob’ektlarda fizika-biologik jarayonlarning nolokal matematik modellari asosida kasr tartibli yuklangan differensial tenglamalar yotadi. O‘z navbatida, xususiy xosilali differensial tenglamalar uchun siljishli masalalar, butun yoki kasr tartibli integral-differensial operatorli yuklamaga ega bo‘lgan differensial tenglamalarga keltiriladi. Yuklamaga ega bo‘lgan aralash tipdagi tenglamalarni tadqiq qilish jarayonida, klassik nazariyadagi mavjud ekstremum prinsiplari va mavjudlik teoremalari va usullarini to‘g‘ridan to‘g‘ri qo‘llab bo‘lmaydi.

Yuklangan tenglamalar uchun qaralayotgan masalalar yechimini yagonaligini isbotlash muxim hisoblanadi. Shu sababli, B. Islomov, U.Baltaevaning ishlarida qaralayotgan masalalarning barchasi Volterra tipidagi integral tenglamaga keltiriladi, bunday tenglamalar uchun yagonalik teoremasini alohida isbotlash talab etilmaydi. Qaralayotgan tenglama yechimining izi (ya’ni$u(x,0)$) biror butun yoki kasr tartibli integral, differensial yoki integral-differensial operatorlar bilan kelgan holatlarda, qo‘yilgan masala yechimining yagonaligi va mavjudligini isbotlash jarayonida, har bir operatorning ko‘rinishi va ulash shartlarini e’tiborga olish talab etiladi. Ushbu dissertatsiyada butun va kasr tartibli integral hamda integral-differensial operatorlar ko‘rinishidagi chiziqli va chiziqsiz yuklamaga ega bo‘lgan aralash tipdagi tenglamalar uchun integral ulash shartli to‘g‘ri va teskari masalalar tadqiq qilingan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti V.I.Romanovskiy nomli Matematika instituti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasidagi FA-F1-F002 raqamli «Tipi buziluvchi tenglamalar va aralash tipdagi tenglamalar uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalarning echilishi va spektral xossalari va ular bilan bog‘liq maxsus funksiyalarni tadqiq qilish», F4-FA-F010 raqamli «Xususiy hosilali va singulyar maxsusligi bo‘lgan differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar va erkin chegarali chiziqli bo‘lmagan masalalar» va OT-F4-88 raqamli «Ikkinchi va yuqori tartibli aralash tipdagi tenglamalar uchun

---

[3] А. М. Нахушев, Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения.// *Докл. АН СССР*, **187**:4 (1969), 736–739

[4] Нахушев А.М. О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. - 1976. - Т. 12. - № 1. - С. 103 - 108

to‘g‘ri va teskari masalalarning tatbiqlari» mavzusidagi fundamental loyihalari doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi butun va kasr tartibli operatorlar qatnashgan aralash tipdagi yuklangan tenglama uchun lokal va nolokal masalalarning yechimga egaligini tadqiq qilish metodlarini ishlab chiqish va mavjud metodlarini umumlashtirishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari quyidagilardan iborat:

kasr tartibli differensial, integral va integral-differensial operator ko‘rinishdagi yuklamaga ega bo‘lgan parabolik-giperbolik tenglamalar uchun uzluksiz va integral ulash shartli lokal hamda nolokal masalalarning yechimi mavjudligi va yagonaligini isbotlash;

yuklangan parabolik-giperbolik tenglama uchun lokal va nolokal shartli Gellersted masalasiga o‘xshash masalalarni qo‘yish, integral ulash va nolokal shartlarda qatnashayotgan koeffitsientlaring mumkin bo‘lgan barcha hollarini tahlil qilish;

chiziqsiz yuklangan parabolik-giperbolik tenglama uchun integral ulash shartli to‘gri masalalarni qo‘yish va qo‘yilgan masalalarning bir qiymatli yechilishini taminlaydigan sinfni aniqlash;

chiziqsiz yuklamaga ega bo‘lgan parabolik-giperbolik tenglamalar uchun lokal va nolokal chegaraviy shartli teskari masala yechimini yagonaligi va mavjudligini isbotlash.

umumiy ko‘rinishdagi yuklamaga ega bo‘lgan parabolik-giperbolik tenglamalar uchun chiziqsiz ulash shartli teskari masalalarning bir qiymatli yechilishini isbolash usulini ishlab chiqish.

buziladigan aralash tipdagi yuklangan tenglama uchun korrekt masalalar qo‘yish va berilgan funsiyalar uchun masalalar yechimining mavjudligi va yagonaligini ta’minlaydigan yetarlilik shartlarini aniqlash;

chiziqli va chiziqsiz yuklamaga ega bo‘lgan uchinchi tartibli parabolik-giperbolik tenglama uchun qo‘yilgan lokal va nolokal masalalar yechimining yagonaligi va mavjudligini isbotlash.

Tadqiqotning ob’ekti. Butun va kasr tartibli operatorlar qatnashgan chiziqli va chiziqsiz yuklamaga ega bo‘lgan aralash tipdagi tenglamalar.

Tadqiqotning predmeti. Kasr tartibli differensial va integral operatorlar, matematik fizika tenglamalari nazariyasi, chiziqsiz integral tenglamalar nazariyasi.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiyada matematik tahlil, oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalar usullari, maxsus funksiyalar nazariyasi, energiya integrali usuli, integral tenglamalar usuli va qisqartirib asklantirish prinsipi qo‘llanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

kasr tartibli integral, differensial yoki integral-differensial operatorlar ko‘rinishidagi yuklamaga ega bo‘lgan parabolik-giperbolik tenglama uchun qo‘yilgan masalalarning yechimi yagonaligi energiya integrali orqali va mavjudligi esa integral tenglamalar usuli orqali isbotlangan;

yuklangan parabolik-giperbolik tenglama uchun lokal va nolokal shartli Gellersted masalasiga o‘xshash masalalar qo‘yilgan va ularning bir qiymatli yechilishi Fredgolm va Volterra integral tenglamalar nazariyasiga asoslanib ko‘rsatilgan;

chiziqsiz yuklamaga ega bo‘lgan parabolik-giperbolik tenglama uchun integral ulash shartli to‘g‘ri va teskari masalalar yechimi yagonaligi va mavjudligini ta’minlaydigan funksiyalar sinfi aniqlangan.

buziladigan aralash tipdagi yuklangan tenglamalar uchun korrekt masalalar qo‘yilgan hamda gipergeometrik funksiya va Rimann-Liuvill operatorlar xossalaridan foydalanib, masalalar yechimining yagonaligi va mavjudligi isbotlangan;

chiziqli va chiziqsiz yuklamaga ega bo‘lgan uchinchi tartibli parabolik-giperbolik tenglama uchun lokal va nolokal masalalarning bir qiymatli yechilishi Volterra integral tenglamalar nazariyasiga asoslanib isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijasi kasr va butun tartibli integral-differensial operatorli aralash tipdagi yuklangan tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalarni tadqiq qilish, tenglamada qatnashayotgan yuklangan hadning chiziqli yoki chiziqsiz ekanligini hisobga olib, qo‘yilgan masalani yechishning usulini taklif etilganligidan iborat.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi yuklamaga ega bo‘lgan aralash tipdagi tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalarning echimlarini oshkor ko‘rinishlarda topishda va integral tenglamalar nazariyasi va qisqartirib akslantirish prinsipini tadbiq etishda matematik tahlil, matematik fizika va maxsus funksiyalar nazariyasi usullaridan qat’iy foydalanilganligi bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati ishda olingan natijalardan chiziqli va chiziqsiz yuklamaga ega bo‘lgan kasr tartibli aralash tipdagi tenglamalar nazariyasida foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati ularni kasr va butun tartibli yuklangan xususiy xosilali differensial tenglamalar bilan tavsiflanadigan amaliy masalalarga hamda chiziqsiz yuklangan aralash tipdagi tenglamalarga tatbiq etish bilan belgilanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Yuklangan aralash tipdagi va kasr tartibli parabolik-giperbolik tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalar bo‘yicha olingan natijalar asosida:

yuklangan tenglamalar uchun chegaraiy masalalarni tadqiq qilishda olingan natijalardan va ishlab chiqilgan usullardan 0213-2014-0002 raqamli «Ekstremal protsesslar matematik modellarining aralash tipdagi differensial tenglamalari uchun nolokal masalalar» va AAAA-A19-119013190078-8 raqamli «Asosiy va aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar va ularning dinamik sistemalarni modellashtirish va boshqaruv masalalariga tadbiqlari» mavzularidagi xorijiy loyihalarida aralash tipdagi tenglamalar uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalarning bir qiymatli echilishida foydalanilgan (Kabardin-Balqor ilmiy markazi qoshidagi Amaliy matematika va avtomatizatsiyalash institutining 2022 yil 16 sentyabdagi 54-sonli ma’lumotnomasi, Rossiya). Ilmiy natijalarning qo‘llanishi aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar yechimini yagonaligini isbotlash imkonini bergan;

chiziqsiz yuklamaga ega bo‘lgan parabolik-giperbolik tenglama uchun integral ulash shartli to‘g‘ri va teskari masalalar yechilish usulidan 0119U102369 raqamli «Ekstremal masalalarni va xususiy hosilali tenglamalarni tadqiq qilishning geometrik va analitik usullari» mavzusidagi xorijiy loyihasida xususiy xosilali differensial tenglamalarni analitik yechishda foydalanilgan (Ukraina milliy fanlar akademiyasi Matematika institutining 2022 yil 20 sentyabrdagi 49/160-02-7 sonli ma’lumotnomasi, Ukraina). Ilmiy natijaning qo‘llanilishi ekstremal masalalar orqali hosil bo‘lgan integral tenglamalarni bir qiymatli yechish imkonini bergan;

chiziqsiz yuklamaga ega bo‘lgan tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalardan hosil qilingan chiziqsiz integral tenglamalarni yechish usullaridan «Kasr tartibli analiz va integral tenglamalar» nomli ilmiy guruhi tomonidan kasr-tartibli integro-differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni yechishda (Las Palmas de Gran Kanariya universitetining 2022 yil 13 sentyabrdagi ma’lumotnomasi, Ispaniya). Ilmiy natijaning qo‘llanishi kasr tartibli turli sinfdagi differensial tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalarini tadqiq qilish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 13 ta xalqaro va 3 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 36 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 18 ta ilmiy maqola, jumladan, 14 tasi xorijiy va 4 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, beshta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Dissertatsiyaning hajmi 182 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi va muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, ob’ekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiyaning tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar berilgan.

Dissertatsiya kirish, 4 ta bob, xulosa va adabiyotlar ro‘yxatidan iborat bo‘lib, dastlabki bobi **“Kasr tartibli integral-differensial operatorlar qatnashgan yuklangan parabolik-giperbolik tenglama uchun lokal va nolokal masalalar”** deb nomlanib, uning birinchi paragrafida

$$
0=\begin{cases} u_{xx}-{}_C D_{0y}^{\alpha}u+p(x,y)\int\limits_x^1 (t-x)^{\beta-1}u(t,0)dt, & y>0 \\ u_{xx}-u_{yy}+q(x+y)\int\limits_{x+y}^1 (t-x-y)^{\gamma-1}u(t,0)dt, & y<0 \end{cases} \tag{1}
$$

tenglama uchun lokal va nolokal masala tadqiq qilingan, bu yerda $0<\alpha,\beta,\gamma<1$ va $p(x,y)$, $q(x+y)$ - berilgan funksiyalar,

$$
{}_C D_{0y}^{\alpha} f=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y (y-t)^{-\alpha} f'(t)dt, \tag{2}
$$

esa Kaputo ma’nosidagi α tartibli hosila.

Ω-orqali $y>0$ da $A_1A_2=\{(x,y):x=1,\, 0<y<h\}$, $B_1B_2=\{(x,y):x=0,\, 0<y<h\}$, $B_2A_2=\{(x,y):y=h,\ 0<x<1\}$ kesmalar bilan va $y<0$ da esa (1) tenglamaning $A_1C: x-y=1$, $B_1C: x+y=0$ xarakteristikalari bilan chegaralangan bir bog‘lamli sohani belgilaymiz, bu yerda $A_1(1;0)$, $A_2(1;h)$, $B_1(0;0)$, $B_2(0;h)$, $C\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$
\Omega^+=\Omega\cap(y>0),\ \Omega^-=\Omega\cap(y<0),
$$

$$
I=\{x:0<x<1\},\quad I_1=\left\{x:\frac{1}{2}<x<1\right\},\quad I_3=\{y:0<y<h\}.
$$

AT(Ω) masala. (1) tenglamaning $W_0=\{u(x,y):u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega^-),$ $u(x,y)\in AC[0,h]$ для $\forall x\in[0,1],\, u_{xx},\, {}_C D_{0y}^{\alpha}u\in C(\Omega^+),\ y^{1-\alpha}u_y\in C(\Omega^+\cup I),\ u_y\in C(\Omega^-\cup I)\}$ sinfga tegishli,

$$
u(1,y)=\varphi_1(y),\qquad u(0,y)=\varphi_2(y),\ y\in\overline{I}_3, \tag{3}
$$

$$
u(x,y)|_{A_1C}=\psi(x),\ \ x\in\overline{I_1}. \tag{4}
$$

chegaraviy va

$$
\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha}u_y(x,y)=\lambda u_y(x,-0),\ \ (x,0)\in A_1B_1 \tag{5}
$$

ulash shartlarini qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ yechimi topilsin, bu yerda $\lambda=const\neq 0$, $\varphi_i(y)$, $\psi(x)$ - berilgan funksiyalar bo‘lib, $\psi(1)=\varphi_1(0)$.

AT(Ω) masala yechimi yagonaligi energiya integral orqali mavjudligi esa integral tenglamalar usuli orqali isbotlanadi.

1-teorema. *Agar quyidagi*

$$
p(0,0)\le 0,\quad \frac{\partial p(x,0)}{\partial x}\le 0;\ \ \lambda q(0)\le 0,\ \lambda\left((x-1)q(x)\right)'\ge 0,
$$

shartlar o‘rinli bo‘lsa, u holda **AT(Ω)** *masala, bittadan ortiq yechimga ega emas.*

2-teorema. *Agar*

$$\varphi_1(y),\, \varphi_2(y) \in C\left(\overline{I_3}\right) \cap C^1\left(I_3\right), \quad \psi(x) \in C^1\left(\overline{I_1}\right) \cap C^3\left(I_1\right);$$

$$p(x,y) \in C\left(\overline{\Omega}^+\right) \cap C^1\left(\Omega^+\right),\; q(x+y) \in C\left(\overline{\Omega}^-\right) \cap C^1\left(\Omega^-\right);$$

shartlar o'rinli bo'lsa, u holda **AT(Ω)** *masalaning yechimi mavjud.*

Birinchi paragrafning ikkinchi qismida

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - {}_C D_{0y}^{\alpha} u + \sum\limits_{k=1}^{n} p_k(x,y) D_{x1}^{-\beta_k} u(x,0), & y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy} + \sum\limits_{k=1}^{n} q_k(x,y) D_{\xi 1}^{-\gamma_k} u(\xi,0), & y < 0 \end{cases} \tag{6}$$

tenglama qaraladi, bu yerda

$$D_{ax}^{-\beta_k} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\beta_k)} \int\limits_a^x (x-t)^{\beta_k - 1} f(t)dt, \quad k = \overline{1,n}$$

Rimann-Liuvill integral operatori bo'lib, $\xi = x + y$, $\alpha,\, \beta_k,\, \gamma_k = const$,
$0 < \alpha,\, \beta_k,\, \gamma_k < 1$ $(k = \overline{1,n})$ va $p_k(x,y)$, $q_k(x,y)$ $(k = \overline{1,n})$ - berilgan funksiyalar.

Ω sohada quyidagi nolokal masala qaraymiz.

NL(Ω) masala. (6) tenglamaning $W = \{u(x,y) : u(x,y) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega^-)$, $u(x,y) \in AC[0,h]$ для $\forall x \in [0,1], u_{xx}, {}_C D_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega^+),\; y^{1-\alpha} u_y \in C(\Omega^+ \cup I)$, $u_x, u_y \in C(\Omega^- \cup I)\}$ sinfga tegishli bo'lgan, (3) va

$$\frac{d}{dx} u\left(\theta(x)\right) = a_1(x) u_y(x,-0) + a_2(x) u_x(x,-0) + a_3(x) u(x,0) + a_4(x),\; x \in I_1,$$

nolokal chegaraviy shartlarni hamda quyidagi

$$\lim_{y \to +0} y^{1-\alpha} u_y(x,y) = \lambda_1(x) u_y(x,-0) + \lambda_2(x) u_x(x,-0) +$$

$$+\lambda_3(x) \int\limits_x^1 r(t) u(t,0) dt + \lambda_4(x),\; 0 < x < 1 .$$

integral ulash shartni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ yechimini toping, bu yerda $\theta(x) = \left(\frac{x+1}{2}, \frac{x-1}{2}\right)$, $0 < \alpha,\, \beta_k,\, \gamma_k < 1$ va $a_j(x)$, $\lambda_j(x)$ $(j = 1,2,3,4)$ - berilgan funksiyalar bo'lib, $\sum\limits_{j=1}^{3} a_j^2(x) \neq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{3} \lambda_j^2(x) \neq 0$.

3-teorema. *Agar* $2a_1(x) - 1 \neq 0$ *bo'lib, quyidagi*

$$\left(\frac{\lambda_3(x)}{r(x)}\right)' \geq 0,\; p_k'(x,0) \leq 0\;\; \forall x \in (0,1),\; \frac{\lambda_1(0) q_{1k}(0)}{2a_1(0) - 1} \geq 0,\; p_k(0,0) \leq 0,\; \frac{\lambda_3(0)}{r(0)} \geq 0;$$

$$\left(\frac{q_{1k}(x)\lambda_1(x)}{2a_1(x)-1}\right)' \geq 0,\ \frac{a_3(x)\lambda_1(x)}{2a_1(x)-1} \leq 0,\ \left(\frac{(1-2a_2(x))\lambda_1(x)}{2a_1(x)-1}+\lambda_2(x)\right)' \leq 0\ \ \forall x\in(0,1).$$

tengsizliklar o'rinli bo'lsa, u holda **NL(**Ω**)** *masala bittadan ortiq yechimga ega emas.*

4-teorema. *Agar* $2a_1(x)-1\neq 0$ *bo'lib,*

$$p_k(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}^+\right)\cap C^1\left(\Omega^+\right),\ q_k(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}^-\right)\cap C^1\left(\Omega^-\right),\ k=1,2,\dots n;$$

$$\varphi_i(y)\in C\left(\overline{I_3}\right)\cap C^1\left(I_3\right),\ (i=1,2);\ a_j(x),\lambda_j(x)\in C^1\left(\overline{I_1}\right)\cap C^2\left(I_1\right),\ (j=\overline{1,4})$$

shartlar o'rinli bo'lsa, u holda **NL(**Ω**)** *masalaning yechimi mavjud .*

1-izoh. *Agar* $a_1(x)=\dfrac{1}{2}\ \ \forall x\in[0,1]$ *bo'lsa, u holda* **NL(**Ω**)** *masala ekvivalent ravishda ikkinchi tur Volterra integral tenglamasiga keltiriladi.* **NL(**Ω**)** *masalaninig bir qiymatli echilishi Volterra integral tenglamalar nazariyasiga asoslanib isbotlanadi.*

Birinchi bobning ikkinchi paragrafida Erdeyi-Kober operatorli yuklangan parabolik-giperbolik tenglama uchun Ω sohada nolokal masala qo'yilgan va bu masala yechimi mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

Ω sohada quyidagi

$$0=\begin{cases} u_{xx}-{}_C D_{oy}^{\alpha}u+p(x,y)\left(I_\beta^{\gamma,\delta}u\right)x, & y>0 \\ u_{xx}-u_{yy}+q(\xi,\eta)\left(I_\beta^{\gamma,\delta}u\right)\eta, & y<0 \end{cases} \tag{7}$$

tenglamani qaraymiz, bu yerda ${}_C D_{oy}^{\alpha}$ – Kaputo ma'nosidagi kasr tartibli operatori bo'lib, u (2) formula orqali aniqlaniladi,

$$\left(I_\beta^{\gamma,\delta}u\right)x=\frac{\beta}{\Gamma(\delta)}x^{-\beta(\gamma+\delta)}\int_0^x\frac{t^{\beta(\gamma+1)-1}}{\left(x^\beta-t^\beta\right)^{1-\delta}}u(t,0)dt, \tag{8}$$

esa Erdeyi-Kober integral operatori, $\xi=x+y$, $\eta=x-y$, $0<\alpha,\ \beta,\gamma,\delta<1$, hamda $0<\gamma+\delta<1$.

NLEK masala. (11) tenglamaning W sinfga tegishli bo'lgan, (3) va

$$\frac{d}{dx}u\left(\theta_1(x)\right)=a_1(x)u_y(x,-0)+a_2(x)u_x(x,-0)+a_3(x)u(x,0)+a_4(x),\quad x\in I$$

chegaraviy shartlar hamda quyidagi

$$\lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}u_y(x,y)=\lambda_1(x)u_y(x,-0)+\lambda_2(x)u_x(x,-0)+$$

$$+\lambda_3(x)\int_0^x r(t)u(t,0)dt+\lambda_4(x)u(x,0)+\lambda_5(x),\ x\in I \tag{9}$$

integral ulash shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin, bu yerda $\theta_1(x)=\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)$, hamda $a_j(x),\ \lambda_j(x)\ \ (j=\overline{1,4})$ va $\lambda_5(x)$- berilgan funksiyalar bo‘lib, $\sum\limits_{j=1}^{4}\lambda_j^2(x)\neq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{3}a_k^2(x)\neq 0$.

Ushbu masalaning bir qiymatli yechilishi nolokal shartda qatnashayotgan koefffetsientlarning qiymatlariga bog‘liq bo‘lib, Fredgolm, Volterra yoki Abel integral tenglamasiga keltirib isbotlanadi. Dastlab, $1+2a_1(x^{1/\beta})\neq 0$ bo‘lgan holda quyidagi yagonalik teoremasi isbotlanadi:

5-teorema. *Agar quyidagi*

$$\frac{\lambda_3(1)}{r(1)}\geq 0,\ A(1)\geq 0,\ \ p(1,0)\leq 0,\ \ B'(x)\geq 0,\ \ C(x)\leq 0\ \ \forall x\in(0,1),$$

$$\left(\frac{A(x)}{x^{\gamma}}\right)'\leq 0,\ \left(\frac{p\left(x^{1/\beta},0\right)}{x^{2\gamma+\delta}}\right)'\geq 0,\ \ \left(x^{1-1/\beta}\,\frac{\lambda_3(x^{1/\beta})}{r(x^{1/\beta})}\right)'\leq 0\ \ \forall x\in(0,1),$$

shartlar o‘rinli bo‘lsa, u holda **NLEK** *–masala bittadan ortiq yechimga ega emas, bu yerda*

$$A(x)=\frac{Q(x)\lambda_1(x^{1/\beta})}{1+2a_1(x^{1/\beta})},\quad B(x)=\frac{1-2a_2(x^{1/\beta})}{1+2a_1(x^{1/\beta})}\lambda_1(x^{1/\beta})+\lambda_2(x^{1/\beta}),$$

$$C(x)=\frac{2a_3(x^{1/\beta})\lambda_1(x^{1/\beta})}{1+2a_1(x^{1/\beta})}+\lambda_4(x^{1/\beta}),\ Q(x)=-\frac{x^{-\gamma-\delta}}{2\Gamma(\beta)}\int\limits_0^{x^{1/\beta}}q\left(\xi,x^{1/\beta}\right)d\xi.$$

Aynan shu holda, qaralayotgan masala yechimining mavjudligi Fredgolm ikkichi tur integral tenglamasiga keltirilib isbotlanadi.

6-teorema. *Agar* $2a_1(x)+1\neq 0$ *va*

$$p(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}^{+}\right)\cap C^1\left(\Omega^{+}\right),\ \ q(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}^{-}\right)\cap C^1\left(\Omega^{-}\right),$$

$$\varphi_1(y),\varphi_2(y)\in C\left(\overline{I_3}\right)\cap C^1\left(I_3\right),\ \ a_j(x)\in C^1\left(\overline{I}\right)\cap C^2\left(I\right),\ (j=\overline{1,4})$$

shartlar bajarilsa, u holda **NLEK** *masalaning yechimi mavjud.*

2-izoh. *Agar* $a_1(x)=-\frac{1}{2},\ a_2(x)=\frac{1}{2}$ *va* $a_3(x)=0$, *u holda* **NLEK** *masala ekvivalent holda Abel integral tenglamasiga keltiriladi. Bu masalaning bir qiymatli yechimga ega ekanligi Abel integral tenglamasining bir qiymatli yechilishidan kelib chiqadi.*

Birinchi bobning uchinchi paragrafda, ushbu

$$0=\begin{cases}u_{xx}-{}_C D_{oy}^{\alpha}u+p(x,y)\left(I_{\beta}^{\gamma,\delta}u\right)x, & y>0\\ u_{xx}-u_{yy}+q(x,y)\left(I_{\beta}^{\gamma,\delta}u\right)\eta, & y<0\end{cases}\tag{10}$$

ko‘rinishdagi tenglama qaralgan, bu yerda $p(x,y)$, $q(x,y)$-berilgan funksiyalar, ${}_C D_{oy}^{\alpha} u$ va $\left(I_{\beta}^{\gamma,\delta} u\right)x$ lar esa mos ravishda Kaputo va Erdeyi-Kober operatorlari ((2) va (8) ga qarang), $\eta = x - y$, $0 < \alpha,\ \beta,\gamma,\delta < 1$ bo‘lib, $0 < \gamma + \delta < 1$.

Ω^{+} orqali, $y > 0$ da $A_1A_2 = \{(x,y):\ x = 1,\ 0 < y < h\}$, $B_1B_2 = \{(x,y):\ x = 0,\ 0 < y < h\}$, $B_2A_2 = \{(x,y):\ y = h,\ 0 < x < 1\}$ kesmalar bilan chegaralangan to‘g‘ri to‘rtburchakni, $\Omega_1 = \{A_1C_1E\}$ va $\Omega_2 = \{B_1C_2E\}$ lar bilan esa, $y < 0$ da (10) tenglamaning mos ravishda $A_1C_1 : x - y = 1,\ C_1E : x + y = l$ va $EC_2 : x - y = l$, $B_1C_2 : x + y = 0$ xarakteristikalari bilan chegaralangan sohalarni belgilaymiz, bu yerda $A_1(1;0)$, $A_2(1;h)$, $B_1(0;0)$, $B_2(0;h)$, $C_1\left(\frac{l+1}{2};\frac{l-1}{2}\right)$, $C_2\left(\frac{l}{2};\frac{-l}{2}\right)$, $E(l,0)$.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $\Omega^* = \Omega^{+} \cup \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup (A_1B_1)$, $\Omega^{-} = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $I = \{x : 0 < x < 1\}$, $I_1 = \{x : 0 < x < l\}$, $I_{21} = \left\{x : l < x < \frac{l+1}{2}\right\}$, $I_{22} = \left\{x : 0 < x < \frac{l}{2}\right\}$, $I_2 = \{x : l < x < 1\}$, $I_3 = \{y : 0 < y < h\}$.

Ushbu paragrafda (10) tenglama uchun Ω^* sohada Gellerstedt tipidagi lokal va nolokal masalalarning bir qiymatli yechilishi isbotlangan hamda bu masalalar uchun ham 5- va 6- teoremalarga o‘xshash teoremalar isbotlangan**.**

Dissertatsiyaning ikkinchi bobi chiziqsiz yuklamaga ega bo‘lgan parabolik-giperbolik tipdagi tenglama uchun lokal va nolokal masalalar yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlashga bag‘ishlangan bo‘lib, birinchi paragrafda

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - {}_C D_{0y}^{\alpha} u + f_1(x,y;u(x,0)), & y > 0 \\ u_{xx} - u_{yy} + f_2(x,y;u(x,0)), & y < 0 \end{cases} \tag{11}$$

tenglama uchun bitta tip o‘zgarish chizig‘iga ega bo‘lgan chekli Ω^* sohada Gellerstedta tipidagi lokal va nolokal masala quyilgan va bu masalalar bir qiymatli yechilishi isbotlangan.

AG₁(Ω^*) masala. (11) tenglamaning $W_1 = \{u(x,y) : u \in C(\overline{\Omega}^*) \cap C^2(\Omega^{-})$, $\forall x \in [0,1]$ uchun $u(x,y) \in AC[0,h]$, $u_{xx}, {}_C D_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega^{+})$, $y^{1-\alpha} u_y \in C(\Omega^{+} \cup I)$, $u_x, u_y \in C(\Omega^{-} \cup I)\}$ sinfga tegishli bo‘lgan (3) va

$$u(x,y)|_{EC_1} = \psi_1(x), \quad l \le x \le \frac{l+1}{2}, \tag{12}$$

$$u(x,y)|_{B_1C_2} = \psi_2(x), \quad 0 \le x \le \frac{l}{2}, \tag{13}$$

chegaraviy hamda (9) integral ulash shartlarini qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ yechimi topilsin, bu yerda $\psi_j(x)$, $(j = 1,2)$ - berilgan funksiyalar bo‘lib.

AG₂(Ω^*) masala. (11) tenglamaning W_1 sinfga tegishli bo‘lgan va A**G₁(Ω^*)** masaladagi (13) shartdan boshqa barcha shartlarini hamda

$$\frac{d}{dx}u\left(\frac{x}{2},\frac{-x}{2}\right)=a_1(x)u_y(x,-0)+a_2(x)u_x(x,-0)+a_3(x)u(x,0)+a_4(x),\ 0<x<1,$$

nolokal shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin, bu yerda $a_k(x)$, $\left(k=\overline{1,4}\right)$ - berilgan funksiyalar bo‘lib, $\sum_{k=1}^{3}a_k^2(x)\neq 0$.

A**G1**$(\Omega*)$ va **AG2**$(\Omega*)$ masalalar echimlarining yagonaligi energiya integrali usuli yordamida, mavjudligi esa chiziqsiz integral tenglamaga keltirilib ketma-ket yaqinlashish usuli orqali isbotlanadi.

AG2$(\Omega*)$ masala uchun olingan natijalarni keltiramiz.

Faraz qilaylik, $A_i(x)=\dfrac{(-1)^i\lambda_1(x)}{2(1+2a_1(x))^{2-i}}$ va $K_i(x,t)$ $(i=1,2)$ – berilgan funksiyalar orqali ifodalangan funksiyalar bo‘lib,

$$K_1(x,t)\in C\left([0,l]\times[0,l]\right)\cup C_{x,t}^{2,0}\left((0,l)\times(0,l)\right),$$
$$K_2(x,t)\in C\left([l,1]\times[l,1]\right)\cup C_{x,t}^{2,0}\left((l,1)\times(l,1)\right),$$
$$\left|K_i(x,t)\right|\le K_{0i},\ \left|\Gamma(\alpha)A_i(x)\right|\le\beta_i,\ K_{0i},\beta_i=const>0$$

bo‘lsin.

7-teorema. *Agar* $\varphi_1(y),\varphi_2(y)\in C\left(\overline{I_3}\right)\cap C^1\left(I_3\right)$, $\psi_i(x)\in C\left(\overline{I_{2i}}\right)\cap C^2\left(I_{2i}\right)$,

$$a_i(x)\in C^1\left(\overline{I}\right)\cap C^2\left(I\right),\ \lambda_k(x)\in C^1\left(\overline{I}\right)\cap C^2\left(I\right),\ i=\overline{1,4},k=\overline{1,5},$$
$$f_1(x,y,z)\in C\left(\overline{\Omega}^+\times R\right)\cap C_{x,y,z}^{0,1,0}(\Omega^+\times R),$$
$$f_2(x,y,z)\in C\left(\left(\overline{\Omega}_1\cup\overline{\Omega}_2\right)\times R\right)\cap C_{x,y,z}^{0,1,0}\left((\Omega_1\cup\Omega_2)\times R\right),$$

va $1+2a_1(x)\neq 0$ *bo‘lib, quyidagi* $\left|f_j(x,y,z)\right|\le m_j\cdot|z|,m_j=const>0$

$$\left|f_j(x,y,z_1)-f_j(x,y,z_2)\right|\le L_j\cdot\left|z_1-z_2\right|,\ (x,y)\in\begin{cases}\Omega^+ & npu\ j=1\\ \Omega^- & npu\ j=2,\end{cases}$$

$$\begin{cases}l\left(K_{01}+\dfrac{2l^2}{27}(L_1+\beta_1L_2)\right)<1\\ (1-l)\left(K_{02}+\dfrac{2(1-l)^2}{27}(L_1+\beta_2L_2)\right)<1\end{cases}$$

shartlar o‘rinli bo‘lsa, u holda **AG2**$(\Omega*)$ *masala bir qiymatli yechimga ega, bu yerda* $L_j=const>0$, $(j=1,2)$, $R=(-\infty,+\infty)$.

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida, ushbu

$$0=\begin{cases}u_{xx}-{}_CD_{oy}^{\alpha}u+f_1(x,y;u(x,0))\\ u_{xx}-u_{yy}+f_2(\xi,\eta;u(\xi,0))\end{cases}\tag{14}$$

tenglama uchun lokal va nolokal masala tadqiq qilingan, bu yerda ${}_C D_{0y}^{\alpha} f$ - α $(0<\alpha<1)$ kasr tartibli Kaputo operatori, $f_1(x,y;u(x,0))$, $f_2(\xi,\eta;u(\xi,0))$ - (14) tenglamaning chiziqli yuklangan hadlari (berilgan funksiyalar), $\xi = x + y$, $\eta = x - y$.

Ω^+ - bir bog‘lamli soha bo‘lib, $y>0$ da ushbu $A_1A_2 = \{(x,y):\ x=1,\ 0<y<h\}$ $B_1B_2 = \{(x,y):\ x=0,\ 0<y<h\}$, $B_2A_2 = \{(x,y):\ y=h,\ 0<x<1\}$ kesmalar bilan Ω^- esa $y<0$ da (14) tenglamaning $A_1C: x-y=1$ va $B_1C: x+y=0$ xarakteristikalar bilan chegaralangan xarakteristik uchburchak, bu yerda $A_1(1;0)$, $A_2(1;h)$, $B_1(0;0)$, $B_2(0;h)$, quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $\Omega = \Omega^+ \cup A_1B_1 \cup \Omega^-$, $\Omega_1 = \{A_1C_1E\}$, $\Omega_2 = \{B_1C_2E\}$, $\Omega_3 = \{C_1EC_2C\}$, $EC_2: x-y=l$ $EC_1: x+y=0$, bu yerda $C_1\left(\frac{l+1}{2};\frac{l-1}{2}\right)$, $C_2\left(\frac{l}{2};\frac{-l}{2}\right)$, $E(l,0)$.

(14) tenglama uchun Ω sohada quyidagi masalar taqiq qilingan.

L-masala. (14) tenglamaning

$$W_2 = \{u(x,y): u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega^- \setminus EC_1 \setminus EC_2),$$

$$u(x,y) \in AC[0,h] \text{ для } \forall x \in [0,1],\ u_{xx}, {}_C D_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega^+),\ y^{1-\alpha}u_y \in C(\Omega^+ \cup I),$$

$u_x, u_y \in C(\Omega^- \cup I)\}$ sinfga tegishli va (3), (12),(13) chegaraviy hamda

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha}u_y(x,y) = \lambda_1(x)u_y(x,-0) + \lambda_2(x)u_x(x,-0) +$$

$$+\lambda_3(x)\int_x^1 r(t)u(t,0)dt + \lambda_4(x)u(x,0) + \lambda_5(x),\ 0<x<1 \qquad (15)$$

integral ulash shartni qanoatlantiruvchi yechimini toping, bu yerda $\varphi_i(y),\ \psi(x),\ \lambda_k(x)$ -berilgan funksiyalar bo‘lib, $\sum_{k=1}^{4}\lambda_k^2(x) \neq 0$.

NL- masala. (14) tenglamaning W_2 sinfga tegishli va L-masalani (12) va (13) shartlardan boshqa barcha shartlarini hamda

$$\frac{d}{dx}u(\theta_1(x)) = a_1(x)u_y(x,0) + a_2(x)u_x(x,0) + a_3(x)u(x,0) + a_4(x), l<x<1;$$

$$\frac{d}{dx}u(\theta_2(x)) = b_1(x)u_y(x,0) + b_2(x)u_x(x,0) + b_3(x)u(x,0) + b_4(x), 0<x<l;$$

nolokal shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin, bu yerda $\theta_1(x)=\left(\frac{x+l}{2},\frac{l-x}{2}\right)$, $\theta_2(x)=\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)$ va $a_k(x)$, $b_k(x)$- berilgan funksiyalar bo‘lib, $\sum_{k=1}^{3}a_k^2(x)\neq 0,\ \sum_{k=1}^{3}b_k^2(x)\neq 0.$

Quyidagi funksiyani kiritamiz:

$$K(x,t)=\Gamma(\alpha)\left[L(x,t)(\lambda_1(t)+\lambda_2(t))\right]'+\Gamma(\alpha)\lambda_4(t)L(x,t)+$$

$$+\Gamma(\alpha)r(t)\int_0^t L(x,z)\lambda_3(z)dz,$$

bu yerda $L(x,t)=\begin{cases}(x-1)t, \ npu\ \ 0\le t\le x;\\ x(t-1),\ npu\ \ x\le t\le 1.\end{cases}$

Faraz qilaylik, $\lambda_3(x),\lambda_5(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1),\lambda_4(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\lambda_1(x),\lambda_2(x)\in C^1[0,1]$ bo‘lsin, u holda $\left|K(x,t)\right|\le k_0=const>0,$ $\left|\Gamma(\alpha)\lambda_1(x)\right|\le\lambda_{01}=const>0$ ga ega bo‘lamiz.

8-teorema. *Agar* $\varphi_1(y),\varphi_2(y)\in C\left(\overline{I_3}\right)\cap C^1\left(I_3\right)$, $\psi_i(x)\in C\left(\overline{I_{2i}}\right)\cap C^2\left(I_{2i}\right)$, $\lambda_1(x),\ \lambda_2(x)\in C^1[0,1]$, $\lambda_3(x),\lambda_5(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1),\ \ \lambda_4(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, $f_1(x,y;z)\in C\left(\overline{\Omega}^+\times R\right)\cap C^{0,1,0}_{x,y,z}\left(\overline{\Omega}^+\times R\right),\ f_2(\xi,\eta;z)\in C(\overline{\Omega}^-\times R)\cap C^{0,1,0}_{x,y,z}\left(\overline{\Omega}^-\times R\right)$ *bo’lib, quyidagi* $\left|f_j(x,y,z)\right|\le m_j\cdot|z|,m_j=const>0$

$$\left|f_j(x,y,z_1)-f_j(x,y,z_2)\right|\le l_j\cdot\left|z_1-z_2\right|,\ (x,y)\in\begin{cases}\Omega^+\ npu\ j=1\\ \Omega^-\ npu\ j=2,\end{cases}$$

$$0<k_0+\frac{1}{4}l_1+l_2\lambda_{01}\frac{l^2+(1-l)^2}{16}<1$$

shartlar o‘rinli bo‘lsa, u holda L-masala bir qiymatli yechimga ega.

Ushbu bobning uchinchi paragrafda, ushbu

$$f(x)=\begin{cases}u_{xx}-{}_C\,D^{\alpha}_{oy}u+p_1\left(x,y;u(x,0)\right),\ \ y>0\\ u_{xx}-u_{yy}+p_2\left(x,y;u(x,0)\right),\ \ \ y<0\end{cases}\qquad(16)$$

tenglama uchun Ω_l sohada birinchi va ikkinchi chegaraviy hamda chiziqsiz ulash shartli 2 ta masala qo‘yilgan va ularning bir qiymatli yechilishi isbotlangan, bu yerda $p_i\left(x,y,z\right)\ (i=1,2)$ – tenglamaning chiziqsiz yuklangan hadlari bo‘lib, uzluksiz funksiyalar.

IP$_1$(Ω) masala. (16) tenglama uchun Ω_l sohada shunday $\{f(x),u(x,y)\}$ funksiyalar juftligi topilsinki, bu funksiyalar quyidagi xossalarga ega bo‘lsin:

i) $f(x)\in C(0,l)\cap L_1(0,l)$;

ii) $u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_l)\cap C^2(\Omega_l^-)$, $u(x,y)\in AC[0,h]$ для $\forall x\in[0,l]$,

u_{xx}, ${}_C D_{oy}^{\alpha} u\in C\left(\Omega_l^+\right)$, $y^{1-\alpha}u_y\in C\left(\Omega_l^+\cup I\right)$, $u_x\in C\left(\overline{\Omega}_l^-\setminus I\right)$, $u_y\in C\left(\Omega_l^-\cup \overline{A_1C}\cup \overline{B_1C}\cup I\right)$;

iii) $\{f(x),u(x,y)\}$ funksiyalar jufti $\Omega^+\cup\Omega^-$ sohada (16) tenglamani qanoatlantiradi;

iv) $u(x,y)$ funksiya (3), $u(x,-x)=\psi(x), 0\le x\le \dfrac{l}{2}$ va

$$u_n(x,y)\Big|_{A_1C}=\psi_1(x),\ 0\le x\le\frac{l}{2};\ \ u_n(x,y)\Big|_{B_1C}=\psi_2(x),\ \frac{l}{2}\le x\le l,$$

chegaraviy, hamda

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha}u_y(x,y)=\lambda_1(x)u_y(x,-0)+\lambda_2(x)r\left(x,u(x,0)\right)+\lambda_3(x), 0<x<l$$

chiziqsiz ulash shartni qanoatlantiradi, bu yerda $\psi(x)$, $\psi_1(x)$, $\psi_2(x)$ va $\lambda_k(x)$ $(k=\overline{1,3})$ - berilgan funksiyalar bo‘lib, $\sum\limits_{k=1}^{2}\lambda_k^2(x)\ne 0$,

$$\varphi_i(y)\in C[0,h]\cap C^1(0,h)\ (i=1,2),\ \psi_1(x)\in C^1\left[0,\frac{l}{2}\right], \psi_2(x)\in C^1\left[\frac{l}{2},l\right] \tag{17}$$

$$\psi(x)\in C\left(\overline{I_{22}}\right)\cap C^2(I_{22}),\ \lambda_j(x)\in C\left[0,l\right]\cap C^1\left(0,l\right)\ (j=\overline{1,3}), \tag{18}$$

$$\psi_1\left(\frac{l}{2}\right)=\psi_2\left(\frac{l}{2}\right),\ \ \psi_1'\left(\frac{l}{2}\right)=-\psi_2'\left(\frac{l}{2}\right)\ . \tag{19}$$

$p_i(x,y,z)$ $(i=1,2)$, $r(x,z)-$ uzluksiz funksiyalar bo‘lib, z o‘zgaruvchi bo‘yicha Lipshits shartini qanoatlantirsin, ya’ni

$$|\,p_i(x,y,z_1)-p_i(x,y,z_2)\,|\le L_i\,|\,z_1-z_2\,|\ \ (i=1,2), \tag{20}$$

$$|\,r(x,z_1)-r(x,z_2)\,|\le L_3\,|\,z_1-z_2\,|, \tag{21}$$

bu yerda $L_1,L_2,L_3=const>0$.

Faraz qilaylik, $G(x,t)-$ funksiya

$$\begin{cases}\tau''(x)-\Gamma(\alpha)\lambda_1(x)\tau'(x)=0\\ \tau(0)=\tau(l)=0\end{cases}$$

masalaning Grin funksiyasi bo‘lsin, u holda (18) ga ko‘ra

$$|\,\Gamma(\alpha)\lambda_i(x)\,|\le\lambda_{0i},\ |\,G(x,t)\,|\le g_0,\ (i=1,2),$$

ga ega bo‘lamiz, bu yerda $\lambda_{0i},g_0=const>0$.

9-teorema. *Agar* $\left|p_i(x,y,z)\right| \le p_{0i}\left|z\right|\ (i=1,2),\ \left|r(x,z)\right| \le r_0\left|z\right|$ *bo'lib,* (17)-(21) *va* $lL^* g_0\left(1+\lambda^*+\dfrac{l(1+2\lambda^*)}{4}\right)<1$ *shartlar o'rinli bo'lsa, u holda* **IP2(Ω)** *masala bir qiymatli yechimga ega, bu yerda* $L^* = max\{L_1, L_2, L_3\}$, $\lambda^* = max\{\lambda_{01}, \lambda_{02}\}$.

3-izoh (16) *tenglama uchun* Ω *sohaning parabolik qismida ikkinchi chegaraviy shartlar berilgan,* *IP2(*Ω*) masalaga o'xshash masala ham tadqiq* qilingan. A*gar* $p_i(x,y,u(x;0))\ (i=1,2)$ *funksiyalar faqat x o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsa, u holda bu masalaning bir qiymatli yechilishi ekvivalent ravishda ikkinchi tur chiziqsiz Volterra integral tenglamasiga keltiriladi.*

Dissertatsiyaning uchinchi bobi, turli ko'rinishdagi yuklamaga ega bo'lgan buziladigan parabolik-giperbolik tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni tadqiq qilishga bag'ishlangan. **Uchinchi bobning birinchi paragrafida**, ushbu

$$0=\begin{cases} u_{xx} - {}_C D_{oy}^{\alpha} u + \sum\limits_{k=1}^{n} p_k\left(I_{\beta_{1k}}^{\gamma_{1k},\sigma_{1k}} u\right)x, & y>0 \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \sum\limits_{k=1}^{n} q_k\left(I_{\beta_{2k}}^{\gamma_{2k},\sigma_{2k}} u\right)\eta, & y<0 \end{cases} \qquad (22)$$

tenglama qaralgan, bu yerda ${}_C D_{oy}^{\alpha}$ va $I_{\beta}^{\gamma,\sigma}$ -mos ravishda Kaputo va Erdeyi-Kober operatorlari bo'lib, mos ravishda (2) va (4) formula bilan aniqlanadi, bundan tashqari $m, \alpha, \beta_{jk}, \gamma_{jk}, \sigma_{jk}, p_k, q_k = const,\quad 0<\alpha, \beta_{jk}, \gamma_{jk}, \sigma_{jk}<1,\quad m>0,$

$\delta = \dfrac{m}{2(m+2)},\ \eta = x + (1-2\delta)(-y)^{\frac{1}{1-2\delta}}$ bo'lib, $0<\gamma_{jk}+\sigma_{jk}<1,\ (j=1,2,\ k=\overline{1,n})$.

S -chekli bir bog'lamli soha bo'lib, $y>0$ da $A_1A_2=\{(x,y):\ x=1,\ 0<y<h\}$, $B_1B_2=\{(x,y):\ x=0,\ 0<y<h\}$, $B_2A_2=\{(x,y):\ y=h,\ 0<x<1\}$ kesmalar bilan, $y<0$ da esa (22) tenglamaning $A_1C: x+(1-2\delta)(-y)^{\frac{1}{(1-2\delta)}}=1,\ B_1C: x-(1-2\delta)(-y)^{\frac{1}{1-2\delta}}=0$ xarakteristikalari bilan chegaralangan soha, bu yerda $A_1(1;0), A_2(1;h), B_1(0;0)$, $B_2(0;h)$, $C\left(\dfrac{1}{2}; -\left(\dfrac{m+2}{4}\right)^{1-2\delta}\right)$.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $S^+ = S\cap\{y>0\}, S^- = S\cap\{y<0\}$, $I=\{x: 0<x<1\}, I_2=\left\{x: 0<x<\dfrac{1}{2}\right\},\ I_3=\{y: 0<y<h\}$.

Ushbu paragrafda (22) tenglama uchun quyidagi lokal masala yechimining mavjudligi va yagonali isbotlangan:

L(S) masala. (22) tenglamaning S sohadagi,

$$W_5=\{u(x,y): u\in C(\overline{S})\cap C^2(S^-),\, u(x,y)\in AC[0,h] \text{ для } \forall x\in[0,1],$$

$u_{xx},\, {}_C D_{0y}^{\alpha}u\in C(\Omega^+),\ y^{1-\alpha}u_y\in C(S^+\cup I), u_y\in C(S^-\cup I)\}$ sinfga tegishli bo‘lgan,

$$u(x,y)\Big|_{A_1A_2}=\varphi_1(y),\quad u(x,y)\Big|_{B_1B_2}=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h,$$

$$u(x,y)\Big|_{B_1C}=\psi(x),\quad x\in I_2.$$

chegaraviy shartlarni va

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha}u_y(x,y)=\lambda u_y(x,-0),\quad (x,0)\in A_1B_1$$

ulash shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin, bu yerda $\varphi_j(y),\ \psi(x)$ $(j=1,2)$ - berilgan funksiyalar, $\lambda=const>0$. Ushbu paragrafning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

10-teorema. *Agar $\lambda>0$ va*

$$0<\alpha,\beta_{jk},\gamma_{jk},\sigma_{jk}<1,\ 0<\gamma_{jk}+\sigma_{jk}<1,\ p_k<0,\ q_k<0,\ (j=1,2),\ k=1,2,...,n.$$

*tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, u holda **L(S) masala** bittadan ortiq yechimga ega emas.*

11-teorema. *Agar 12-teorema barcha shartlari va*

$$\varphi_j(y)\in C(\overline{I_3})\cap C^1(I_3),\ \psi(x)\in C^1(\overline{I_2})\cap C^2(I_2),$$

*o‘rinli bo‘lsa, u holda **L(S) masala** yechimi mavjud.*

Uchinchi bobning ikkinchi paragrafida Atangana-Baleanu operatori qatnashgan buziladigan parabolik-giperbolik tipdagi, ushbu

$$0=\begin{cases} u_{xx}-{}_C\, D_{oy}^{\alpha}u+\sum\limits_{k=1}^{n}p_k(x,y)\,{}^{AB}I_x^{\beta_k}u(x,0), & y>0\\ (-y)^m u_{xx}-u_{yy}+\sum\limits_{k=1}^{n}q_k(x,y)\,{}^{AB}I_{\eta}^{\gamma_k}u(\eta,0), & y>0\end{cases}$$

tenglama uchun **L(S) masala** ga o‘xshash, birinchi va ikkinchi chegaraviy shartli masalalarning bir qiymatli yechilishi isbotlangan, bu yerda

$${}^{AB}I_x^{\alpha}u(x)=\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}u(x)+\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int_0^x(x-t)^{\alpha-1}u(t)\,dt,$$

Atangano-Baleano integral operatori, $B(\alpha)$ esa $B(0)=B(1)=1$ shartni qanoatlantiruvchi normallangan funksiya, $\alpha,\ \beta_k,\ \gamma_k,\ m=const,$ $m>0,$ $0<\alpha,\ \beta_k,\gamma_k<1\ \left(k=\overline{1,n}\right),\ \eta=x+\dfrac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}.$

Ushbu bobning uchinchi paragrafida chiziqsiz yuklamaga ega bo‘lgan, ushbu

$$0=\begin{cases} u_{xx}-{}_C\, D_{oy}^{\alpha}u+f_1(x,y,u(x,0)), & y>0\\ (-y)^m u_{xx}-u_{yy}+f_2(x,y,u(x,0)), & y>0\end{cases}\tag{23}$$

tenglama uchun S sohada quyidagi masala tadqiq qilingan:

L₁(S) masala. (23) tenglamaning ***S*** sohadagi $W_6 = \{ u : u \in C(\overline{S}) \cap C^2(S^-)$,

$$u(x,y) \in AC[0,h] \text{ для } \forall x \in [0,1], u_x \in C\left(\overline{S}^+ \setminus \overline{B_2 A_2}\right), u_{xx}, {}_C D_{oy}^{\alpha} u \in C(S^+),$$

$$y^{1-\alpha} u_y \in C(S^+ \cup I), u_x, u_y \in C(S^- \cup I) \} \text{ sinfga tegishli bo‘lgan,}$$

$$u_x(1,y) = \varphi_1(y),\ 0 \le y < h, \quad u_x(0,y) = \varphi_1(y),\ 0 \le y < h \ ,$$

$$u\left(x, -\left(\frac{x}{1-2\delta}\right)^{1-2\delta}\right) = \psi(x),\ x \in I_2$$

chegaraviy, hamda (9) integral ulash shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin, bu yerda $\varphi_i(y)$ $(i = 1,2)$, $\psi(x)$ -berilgan funksiyalar.

Asosiy natija quyidagidan iborat:

12-teorema. *Agar* $0 < \alpha < 1$, *va quyidagi*

$$f_1(x,y,z) \in C\left(\overline{S}^+ \times R\right) \cap C_{x,y,z}^{0,1,0}\left(S^+ \times R\right),\ f_2(x,y,z)) \in C\left(\overline{S}^- \times R\right) \cap C_{x,y,z}^{0,1,0}\left(S^- \times R\right),$$

$$\left| f_i(x,y,z_1) - f_i(x,y,z_2) \right| \le L_i \,|\, z_1 - z_2 \,|\ , \ \left| f_i(x,y,z) \right| \le f_{0i} \cdot |z|,\ f_{0i} = const > 0,\ (i = 1,2)\ ,$$

$$\varphi_i(x) \in C[0,h] \cap C^1(0,h) \ \ (j = 1,2), \quad \psi(x) \in C(\overline{I_2}) \cap C^2(I_2)\ ,$$

$$\lambda_j(x) \in C[0,1] \cap C^1(0,1) \ \ (j = 1,2,5), \quad r(x) \in C[0,1] \cap C^1(0,1)\ ,$$

$$\lambda_3(x) \in C^1[0,1] \cap C^3(0,1), \quad \lambda_4(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$$

shartlar o‘rinli bo‘lsa, u holda ***L₁(S) masala*** *bir qiymatli yechimga ega.*

Masalaning bir qiymatli yechilishi chiziqsiz Volterra integral tenglamasiga keltirilib isbotlangan.

Dissertatsiyaning **«Parabolo-giperbolik operatorli uchinchi tartibli yuklangan tenglamalar uchun chegaraviy masalalar»** deb nomlangan **to‘rtinchi bobi**da chiziqli va chiziqsiz yuklamaga ega bo‘lgan uchinchi tartibli parabolik-giperbolik tenglama uchun lokal va nolokal masalalar qo‘yilgan va ularning yechimi mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

Mazkur bobning birinchi paragrafida ushbu ,

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c \right) Lu = 0 \tag{24}$$

uchinchi tartibli tenglama Ω sohada qaralgan bo‘lib, bu yerda

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - {}_C D_{0y}^{\alpha} u + \sum\limits_{k=1}^{n} p_k(x,y) D_{0x}^{\beta_k} u(x,0),\ (x,y) \in \Omega_1 \\ L_2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \sum\limits_{l=1}^{m} q_l(x,y) D_{0x}^{\gamma_l} u(x,0),\ (x,y) \in \Omega_2 \end{cases}$$

${}_C D_{ay}^{\alpha}$ - mos ravishda Kaputo ma’nosidagi differensial operator (2),

$$D_{0x}^{\beta_k} f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(-\beta_k)} \int\limits_a^x (x-t)^{-1-\beta_k} f(t)dt, & \beta_k < 0, \\ \dfrac{d}{dx} D_{ax}^{\beta_k - 1} f(x), & 0 < \beta_k < 1 \end{cases}$$

esa Rimann-Liuvill ma'nosidagi integro-differensial operatorlar, bu yerda a,b,c va $\alpha, \beta_k, \gamma_l$ -berilgan sonlar bo'lib, $0 < \alpha < 1;\ \beta_k, \gamma_l < 1,\ a \neq 0$.

(24) tenglama ikkinchi tartibli parabolik-giperbolik operatorga, a, b va c koeffitsientlarga bog'liq bo'lgan birinchi tartibli xususiy xosilali operator ta'sir qilishdan hosil bo'lgan uchinchi tartibli tenglama bo'lgani uchun, masalaning korrekt qo'yilishi a, b va c koeffitsientlarga bog'liq bo'ladi. Shuning uchun, masalalarni qo'yishdan oldin, a, b va c koeffitsientlarni turli holatlariga bog'liq bo'lgan quyidagi chegaraviy shartlarni keltiramiz:

$$u(0,y) = \varphi_1(y),\ u(1,y) = \varphi_2(y),\ 0 \le y \le h, \tag{25}$$

$$u_{xx}(0,y) = \varphi_3(y),\ 0 \le y \le h, \tag{26}$$

$$u_{xx}(1,y) = \varphi_4(y),\ 0 \le y \le h, \tag{27}$$

$$\frac{d}{dx} u\left(\theta(x)\right) = a_1(x)u_y(x,-0) + a_2(x)u_x(x,-0) + a_3(x)u(x,0) + a_4(x),\ 0 \le x < 1, \tag{28}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{AC} = \psi_1(x),\ 0 \le x \le \frac{1}{2}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{BC} = \psi_2(x),\ \frac{1}{2} \le x \le 1, \tag{30}$$

Bu yerda n-ichki normal, $\theta(x) = \left(\dfrac{x}{2}, -\dfrac{x}{2}\right)$, $\varphi_j(y),\ a_j(x), (j = \overline{1,4}),\ \psi_i(x)(i = \overline{1,2})$ - berilan funksiyalar.

1-ta'rif. $u(x,y)$ funksiya (24) tenglamaning regulyar yechimi deyiladi, agar $u(x,y)$ funksiya $\Omega \setminus I$ sohada (24) tenglamani qanoatlantirib, ushbu

$$u_{xxx}, u_{yxx}, {}_C D_{0y}^{\alpha} u_x, \frac{\partial}{\partial y}\left({}_C D_{0y}^{\alpha} u\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{0x}^{\beta} u\right), \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{0x}^{\beta} u\right) \in C(\Omega_1),$$

$$u_{xxx}, u_{yxx}, u_{xyy}, u_{yyy}, \frac{\partial}{\partial y}\left(D_{0x}^{\gamma} u\right), \frac{\partial}{\partial x}\left(D_{0x}^{\gamma} u\right) \in C(\Omega_2)$$

shartlar o'rinli bo'lsa.

I-masala. $0<\frac{b}{a}\leq 1$ shartni qanoatlantiruvchi barcha a va b (c-ixtiyoriy) lar uchun (24) tenglamaning $\Omega\setminus I$ sohadagi $W_7=\{u: u\in C(\bar{\Omega})\cap C^1(\overline{\Omega_2}\setminus\overline{BC}),$

$u(x,y)\in AC[0,h]$ для $\forall x\in[0,1],\, u_{xx}\in C(\Omega_1\cup AA_0),\, {}_C D_{0y}^{\alpha}u\in C(\Omega_1),$

$u_y, u_x\in C(\Omega_2\cup I),\, y^{1-\alpha}u_y\in C(\Omega_1\cup I)\}$ sinfga tegishli bo‘lgan (25), (26), (28), (29) va

$$\lim_{y\to+0} {}_C D_{0y}^{\alpha}u(x,y)=\lambda_1(x)u_y(x,-0)+\lambda_2(x)u_x(x,-0)+\lambda_3(x)u(x,-0)+$$

$$+\lambda_4(x)\int_0^x r(t)u(t,0)dt+\lambda_5(x), \tag{31}$$

integral ulash shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ yechimi topilsin, bu yerda $\lambda_i(x)$ $(i=\overline{1,5})$ -berilgan funksiyalar bo‘lib, $\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^2(x)\neq 0.$

I-masala ekvivalent ravishda ikkinchi tur Volterra integral tenglamasiga keltiriladi va uning bir qiymatli yechilishi integral tenglamalar nazariyasiga asoslanib isbotlanadi.

13-teorema. *Agar quyidagi shartlar o‘rinli bo‘lsa*

$$\varphi_1(y)\in C^2(0,h)\cap C^1[0,h],\varphi_2(y),\varphi_3(y)\in C^1(0,h)\cap C[0,h],\lambda_5(x)\in C[0,1],$$

$$a_i(x),\lambda_i(x)\in C^1[0,1]\;(i=1,4),\; p_k(x,y)\in C(\bar{\Omega}_1)\cap C^1(\Omega_1),\; q_l(x,y)\in C(\bar{\Omega}_2)\cap C^1(\Omega_2),$$

$$\psi_1(x)\in C^2\left(0,\frac{1}{2}\right)\cap C^1\left[0,\frac{1}{2}\right],\psi_2(x)\in C^2\left(\frac{1}{2},1\right)\cap C^1\left[\frac{1}{2},1\right],$$

u holda I-masala bir qiymatli yechimga ega.

a va b koeffitsientlar uchun mumkin bo‘lgan boshqa hollarda quyidagi masalalar tadqiq qilingan.

II-masala. $1\leq b/a<+\infty$ shartni qanoatlantiruvchi barcha a va b koeffitsientlar uchun (24) tenlamaning $\Omega\setminus I$ soxadagi W_4 sinfga tegishli bo‘lgan hamda I-masaladagi barcha shartlarni va (30) shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

III-masala. $-\infty<b/a<-1$ shartni qanoatlantiruvchi barcha a va b koeffitsientlar uchun (24) tenlamaning $\Omega\setminus I$ soxadagi

$W_8 = \{u : u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega_2}),\ \forall x \in [0,1]\ uchun\ u(x,y) \in AC[0,h],\ va\ {}_C D_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega_1),$ $u_{xx} \in C(\Omega_1 \cup BB_0),\ u_y, u_x \in C(\Omega_2 \cup I),\ y^{1-\alpha} u_y \in C(\Omega_1 \cup I)\}$ sinfga tegishli bo‘lgan, (26) shartdan boshqa **II-masala**ning barcha shartlarni va (27) shartni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

IV-masala. $-1 \le b/a < 0$ shartni qanoatlantiruvchi barcha a va b lar uchun (24) tenglamaning $\Omega \setminus I$ sohadagi $W_9 = \{u : u \in C(\bar{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega_2} \setminus \overline{AC}),$ $u(x,y) \in AC[0,h]$ для $\forall x \in [0,1]$, ${}_C D_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega_1)$, $u_{xx} \in C(\Omega_1 \cup BB_0)$, $u_y, u_x \in C(\Omega_2 \cup I)$, $y^{1-\alpha} u_y \in C(\Omega_1 \cup I)\}$ sinfga tegishli bo‘lgan, hamda (29) shartdan boshqa **III-masala**ning barcha shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin.

II-IV masalalar uchun ham 15-teoremaga o‘xshash teoremalar keltirilgan va isbotlangan.

To‘rtinchi bobning uchinchi paragrafida parabolik-giperbolik operatorli chiziqsiz yuklamaga ega bo‘lgan uchinchi tartibli tenglama uchun integral ulash shartli nolokal masalaning bir qiymatli echilishi isbotlangan.

Bu paragrafning birinchi qismida, $0 < \frac{b}{a} \le 1$ shartni qanoatlantiruvchi a va b koeffitsientlar uchun nolokal masala (ya’ni V-masala) o‘rganilgan. Ikkinchi qismida esa a va b koeffitsientlarning boshqa hollari uchun korrekt masalalar qo‘yilgan va tadqiq qilish usullariga to‘talib o‘tilgan.

Ushbu

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x} + b\frac{\partial}{\partial y} + c\right) Lu = 0, \qquad (32)$$

bu yerda a, b va c -haqiqiy o‘zgarmaslar bo‘lib, $a^2 + b^2 \ne 0$,

$$Lu \equiv \begin{cases} L_1 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - {}_C D_{0y}^{\alpha} u + f_1(x,y;u(x,0)),\ (x,y) \in \Omega_1 \\ L_2 u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f_2(x,y;u(x,0)),\ (x,y) \in \Omega_2. \end{cases}$$

${}_C D_{ay}^{\alpha}$- Kaputo differensial operatori $(0 < \alpha < 1)$, $f_i(x,y,z)$ $(i = 1,2)$ – (32) tenglamaning chiziqsiz yuklangan hadlari.

V-masala. $0 < \frac{b}{a} \le 1$ shartni qanoatlantiruvchi a va b koeffitsientlar uchun (32) tenglamaning $\Omega \setminus I$ sohadagi W_9 sinfga tegishli, (25), (26), (28) va (29) chegaraviy shartlarni va (31) integral ulash shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ yechimi topilsin.

Ushbu paragrafning asosiy natijasi quyidagi teoremadan iborat:

14- teorema. *Agar* $0<\dfrac{b}{a}\le 1$ *va ushbu*

$$\varphi_1(y)\in C^2(0,h)\cap C^1[0,h],\quad \varphi_2(y),\varphi_3(y)\in C^1(0,h)\cap C[0,h];$$

$$a_j(x)\in C\left[0,1\right]\cap C^2\left(0,1\right),\quad \lambda_j(x),\lambda_5(x)\in C\left[0,1\right]\cap C^1\left(0,1\right)\quad (j=1,4);$$

$$\psi_1(x)\in C^2\left(0,\frac{1}{2}\right)\cap C^1\left[0,\frac{1}{2}\right],\ f_i(x,y,z)\in C(\overline{\Omega}_i\times R)\cap C^{0,1,0}_{x,y,z}(\Omega_i\times R),(i=1,2);$$

$$\left|f_i(x,y,z)\right|\le f_{0i}\cdot\left|z\right|,\ \left|f_i(x,y,z_1)-f_i(x,y,z_2)\right|\le L_i\left|z_1-z_2\right|,\quad (i=1,2).$$

shartlar o‘rinli bo‘lsa, u holda V-masala yechimi mavjud va yagona, bu yerda $f_{0i},L_i=const>0,\quad (i=1,2)$.

a va b koeffitsientlar uchun mumkin bo‘lgan quyidagi:

$$1<b/a<+\infty,\ -\infty<b/a<-1 \text{ va } -1\le b/a<0$$

holatlarda ham, II-IV masalalarga o‘xshash korrekt masalalar qo‘yilgan va ularning bir qiymatli yechilishi isbotlangan.

XULOSA

Dissertatsiya ishi butun va kasr tartibli integral-differensial operatorli yuklangan aralash tipdagi tenglamalar uchun lokal va nolokal masalalarni tadqiq qilishga bag‘ishlangan.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1. Yuklangan parabolik-giperbolik tenglamada qatnashayotgan kasr tartibli integral, differensial va integral-differensial operatorlarning turiga qarab, energiya integralini qo‘llash orqali, qo‘yilgan masalalar yechimining yagonaligi isbotlangan, yechimning mavjudligi esa integral tenglamalar usuli yordamida ko‘rsatilgan.

2. Lokal va nolokal shartli Gellersted masalasiga o‘xshash masalalar yechimi bir qiymatli echilishi Fredgolm va Volterra integral tenglamalar nazariyasiga asoslanib ko‘rsatildi. Integral ulash va nolokal shartda qatnashayotgan koeffitsientlarning mumkin bo‘lgan barcha hollarida quyilgan masalalarning bir qiymatli yechilishi isbotlangan;

3. Chiziqsiz yuklamaga ega bo‘lgan parabolik-giperbolik tenglama uchun integral ulash shartli to‘g‘ri masalalar yechimi yagonaligi va mavjudligini ta’minlaydigan, berilgan funksiyalarning bo‘sh bo‘lmagan sinfi aniqlangan.

4. Chiziqsiz yuklangan kasr tartibli parabolik-giperbolik tenglama uchun, to‘g‘ri to‘rtburchak va xarakteristik uchburchakdan iborat chekli sohada lokal hamda nolokal chegaraviy shartli teskari masalalar yechimining yagonaligi va mavjudligi isbotlangan.

5. Umumiy ko‘rinishdagi yuklamaga ega bo‘lgan parabolik-giperbolik tipdagi tenglama uchun chiziqsiz integral ulash shartli teskari masalaning bir qiymatli yechilishi qisqartirib akslantirish prinsipi yordamida integral tenglamalar usuli orqali ko‘rsatilgan.

6. Buziladigan aralash tipdagi yuklangan tenglamalar uchun korrekt masalalar qo‘yildi hamda gipergeometrik funksiya va Rimann-Liuvill operatorlar xossalaridan foydalanib, masalalar yechimining yagonaligi va mavjudligini ta’minlaydigan shartlar topilgan;

7. Chiziqli va chiziqsiz yuklamaga ega bo‘lgan uchinchi tartibli parabolik-giperbolik tenglama uchun korrekt masalalar qo‘yilgan, va ularning bir qiymatli yechilishi Volterra integral tenglamalar nazariyasiga asoslanib isbotlangan.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati ularni kasr va butun tartibli yuklangan xususiy xosilali differensial tenglamalar bilan tavsiflanadigan amaliy masalalarga hamda chiziqsiz yuklangan aralash tipdagi tenglamalarga tatbiq etish bilan belgilanagan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

АБДУЛЛАЕВ ОБИДЖОН ХАЙРУЛЛАЕВИЧ

ЛОКАЛЬНЫЕ И НЕЛОКАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ НАГРУЖЕННЫХ УРАВНЕНИЙ СМЕШАННОГО ТИПА С ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ЦЕЛОГО И ДРОБНОГО ПОРЯДКА

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
ДОКТОРА (DSc) ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

ТАШКЕНТ–2024

Тема докторской (Doctor of Science) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за B2022.3.DSc/FM199.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовского АН РУз.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу http://kengash.mathinst.uz и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу www.ziyonet.uz.

Научный консультант:	**Исломов Бозор** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Дурдиев Дурдимурод Каландарович** доктор физико-математических наук, профессор
	Фаязов Кудратилла Садриддинович доктор физико-математических наук, профессор
	Каримов Экинжон Тулкинович доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	**Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН**

Защита диссертации состоится 10 го сентября 2024 г. в 16:00 часов на заседании научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz , Website: www.mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (регистрационный номер 188). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская. Тел.: (+99871)-207-91-40).

Автореферат диссертации разослан 2 го августа 2024 г.

(протокол рассылки № 2 от 2 го августа 2024 г.).

У.А.Розиков
Председатель Научного совета
по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., академик

Ж.К.Адашев
Ученый секретарь Научного совета
по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

А.Азамов
Председатель Научного семинара
при Научном совете по присуждению
ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Интенсивные изменения в образе жизни человечества привели к ускорению и расширению исследований практически во всех областях науки. Практически все научно-практические исследования прикладного характера, проводимые на мировом уровне, сводятся к различным разделам математики, в частности к решению задач теории дифференциальных уравнений смешанного типа. Различные нагруженные дифференциальные уравнения используются в математической биологии, математической физике, математическом моделировании нелокальных процессов и явлений, прикладных задачах теории упругих оболочек. Более того, нагруженные уравнения также используются как способ решения локальных и нелокальных задач для обыкновенных и специальных дифференциальных уравнений. Установленная интегральная связь между нагруженными дифференциальными уравнениями и задачами со смешением служат в качестве основания. Благодаря этому, теория нагруженных дифференциальных уравнений достигла наивысшего уровня развития в последнее десятилетие, однако все большее значение приобретает дальнейшее развитие этой теории для уравнений смешанного типа целого и дробного порядка. В частности, при исследовании уравнений смешанного типа с линейными или нелинейными нагрузками, элементы существующей классической теории не могут быть непосредственно применены. Поэтому, исследования прямых и обратных задач с интегральными условиями склеивания для уравнений в частных производных с линейными или нелинейными нагрузками было одной из важных задач.

В настоящее время изучение дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений дробного порядка учитывая их актуальность в прикладных задачах интенсивно развиваются на глобальном уровне. Это показывает, важность исследования прямых и обратных задач для нагруженных уравнений смешанного типа с интегро-дифференциальными операторами дробного и целого порядка. Постановка корректных локальных и нелокальных задач с интегральными условиями склеивания для уравнений смешанного типа с линейной или нелинейной нагрузкой и их исследования является одним из целевых научных исследований.

В нашей стране большое внимание уделяется направлениям математической физики, математической биологии, динамики сплошной среды и фрактальной физики, имеющим научное и практическое применение фундаментальных наук. В частности, в последние годы достигнуты значительные результаты в направлении уравнений смешанного типа дробного и целого порядка. В качестве основных задач и направлений деятельности математики определено проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «дифференциальные уравнения и математическая физика, интегральные уравнения и теория динамических систем». Важно исследовать прямые и обратные задачи для уравнений смешанного типов целого и дробного порядка с линейными и нелинейными нагрузками, чтобы использовать научные результаты в смежных областях науки для обеспечения реализации решения.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях №ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В. И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан» и №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», и в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации[1]. Научные исследования по изучению уравнений с участием дробно-дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных операторов и прямых и обратных задач таким уравнениям ведутся в крупных научных центрах и высших учебных заведениях мира, в частности: в Ghent University (Бельгия), University of Santiago de Compastela (Испания), University of Las Plamas de Gran Canaria (Испания), Anand International College of Engeineering (Ҳиндистон), La Rochelle University (Франция), Cankaya University (Туркия), Башкирском государственном университете, Белгородском государственном национальном исследовательском университете, Белорусском государственном университете, Воронежском государственном университете, Кабардино-Балкарском государственном университете, Казанском (Приволжском) федеральном университете, Московском государственном университете, Математическом институте Российской академии наук, Новосибирском государственном университете, Сибирском федеральном университете, Самарском государственном техническом университете, Институте вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, Институте прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, Институте математики и математического моделирования Национальной академии наук Казахстана.

В последние годы в результате научно-исследовательских работ по решению различных краевых задач фундаментального и прикладного характера для классических и смешанных уравнений с дифференциальными и интегро-дифференциальными операторами получены ряд актуальных результатов.

В частности, были получены следующие научные результаты: разработана

[1] Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации: International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations, www.inderscience.com.jhome; Boundary value problems, www.link.springer.com.journal; Journal of Ellipric and Parabolic Equations, www.springer.com.journal; Journal of Partial Differential Equations, www.global-sci.org.jpde; Дифференциальные уравнения, www.link.springer.com/journal/10625, также были использованы и другие источники .

теория решения краевых задач для уравнения смешанного типа (Туринском университете, Италия); доказан принцип максимума для эллиптико-гиперболического уравнения (Московский государственный университет, Математический институт Российской академии наук); исследованы нелокальные задачи для уравнения смешанного эллиптико-гиперболического типа (Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, Московский, Новосибирский, Самарский государственные университеты); исследованы модели нагруженных уравнений смешанного параболо-гиперболического типа с характеристическими и не характеристическими линиями изменения, исследованы различные краевые задачи как модель уравнения смешанного типа, а их решения записаны в простой форме (Кабардино-Болгарский научный центр Российского института прикладной математики и автоматизации им. Ф.А.), найдены необходимые и достаточные условия единственности решений краевых и начально-краевых задач в прямоугольной области для смешанного параболо-гиперболического нагруженного уравнения (Институт прикладных исследований Республики Башкортостан); доказано существование решения прямых задача с помощью биортогональных рядов (Самарская государственная академия социально-гуманитарных наук); по уравнениям в частных производных дробного порядка в мире получен ряд результатов, в частности, изучены свойства интегро-дифференциальных операторов и их обобщений, построены решения задач Коши и первой краевой задачи, исследованы свойства специальных функций, связанных с этими задачами (Институт математики и механики АН Республики Армении); доказана единственность и существование решений задач для уравнений классического типа с интегро-дифференциальной операторной нагрузкой дробного порядка (Институт теоретической и прикладной математики НАН РК); получены фундаментальные решения диффузионно-волнового уравнения, решена задача Коши, построены численные решения (Свободный университет Берлина, Брауншвейгский технический университет, Германия; Болонский университет, Италия; Технический университет в Кошице, Словакия), построено фундаментальное решение в терминах специальной функции Райта, получены решения задачи Коши с помощью фундаментальных функций, получены необходимые и достаточные условия существования и единственности решения краевых задач для уравнений в частных производных с интегро-дифференциальными операторами Римана-Лиувилля, Капуто, Джрбашяна-Нерсесяна, дробных операторов континуального порядка (Беларусский государственный университет, Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарскоого научного центра Российской академии наук); через функции Грина построена решения задач для диффузионных и волновых уравнений с производными Римана-Лиувилля и Капуто, получены необходимые и достаточные условия существования единственности решения (ИПМА РАН., Кабардино-Болгарский научный центр); доказано существование и единственность решения обратных задач, связанных с нахождением неизвестной правой части (даже если правая часть является функцией времени) для уравнений смешанного типа с линейной нагрузкой (Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета), изучены однозначные решения прямой и обратной задач для нелинейных нагруженных уравнений (Институт математики им. С.Л. Соболева РФА); найдены достаточные условия существования решения прямых и обратных задач для уравнений с двумя и многими переменными (Университет Рошель, Франция); найдены условия разрешимости начальных и краевых задач нелинейных уравнений дробного порядка, имеющие большие прикладные значения (Университет Сантьяго-де-Компостела, Испания), и др.

На сегодняшний день в мире выполняется ряд научных исследований по таким приоритетным направлениям, как исследование уравнений в частных производных целого и дробного порядка с линейными и нелинейными нагрузками, а также постановке и исследование прямых и обратных задач прикладного и фундаментального характера. В частности, изучение локальных и нелокальных прямых задач с интегральным условием склеивания для уравнений смешанного типа с линейными нагрузками разного видов; нахождение решений поставленных краевых задач в явных видах, исследование однозначной разрешимости обратных задач для параболо-гиперболического уравнения с нелинейными нагрузками и т.д.

Степень изученности проблемы. Известно, что Ф.Трикоми первым изучил простые уравнения смешанного типа. Позднее, М.Ч. Чибрарио, Э. Холмгрен, С. Геллерстедт исследовали первые краевые задачи для вырождающегося уравнений смешанного типа. В 1960 году А.В. Бицадзе впервые выдвинул понятие о корректной постановке задачи для уравнения с двумя переменными смешанного типа. Для реализации этой концепции в 1969 г. А.М. Нахушев[2] предложил исследовать краевые задачи нового типа. Позднее эти задачи были названы задачами со смешением. Принятое сейчас в научной литературе общее определение нагруженных уравнений было дано в 1976 г. А.М. Нахушевым[3]. В краевых задачах со смешением для многих уравнений смешанного типа важную роль играют интегральные, дифференциальные и интегро-дифференциальные операторы дробного порядка и их свойства. Первоначальные результаты, связанные с применением операторов интегро-дифференцирования в теории дифференциальных уравнений, принадлежат армянским учёным М.М. Джарбашяну и А.Б. Нерсесяну, которые исследовали однозначную разрешимость задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором обобщенного интегро-дифференцирования Римана-Лиувилля, а решение выражается с помощью специальных функций типа Миттаг-Леффлера. М.М. Джарбашян также исследовал свойства функции Миттаг-Леффлера, а также первую краевую задачу в случае, когда порядок уравнения меньше двух.

R. Gorenflo, F. Mainardi, А. Килбас и А. В.Псху исследовали задачу Коши для диффузионно-волнового уравнения с операторами дробного дифференцирования

[2] А. М. Нахушев, Новая краевая задача для одного вырождающегося гиперболического уравнения.// *Докл. АН СССР*, 187:4 (1969), 736–739

[3] А.М. Нахушев О задаче Дарбу для одного вырождающегося нагруженного интегро дифференциального уравнения второго порядка // Дифференц. уравнения. - 1976. - Т. 12. - № 1. - С. 103 - 108

в смысле Римана-Лиувилля и Капуто, имеющие большие значения при построении математических моделей в процессах диффузии. А.В.Псху изучил диффузионно-волновое уравнение с оператором Джарбашяна-Нерсесяна, а также построил фундаментальное решение и доказал однозначную разрешимость задачи Коши. Способы численных решений задач для обыкновенных уравнений дробного порядка использованы в работах K.Diethem, а для уравнений в частных производных дробного порядка - в работах I.Podlubny, O.P. Agrawal.

Следует отметить, что фрактальные объекты, основанные на нелокальных математических моделях физических и биологических процессов, содержат нагруженные уравнения с дробными производными. В свою очередь, краевые задачи со смешением для дифференциальных уравнений с частными производными сводятся к нагруженным дифференциальным уравнениям с интегро-дифференциальными операторами целого или дробного порядка. В процессе исследования уравнений смешанного типа с нагрузкой, существующие принципы экстремума и теоремы существования, а также методы классической теории не могут быть применены напрямую. Важно доказать единственность решения рассматриваемых задач для нагруженных уравнений. Связи с этим в работах У.И.Балтаевой рассмотривались краевые задачи для нагруженных уравнений, приводящимися к интегральным уравнениям Вольтерра, т.е. не требовалась отдельно доказывать единственность решения ранее исследованных задач.

В тех случаях, когда след решения рассматриваемого уравнения (т.е. $u(x,0)$) входить в интегральные, дифференциальные или интегро-дифференциальные операторы целого или дробного порядка, подбирается индивидуальный способ доказательства единственности и существования решения поставленной заданной задачи, с учетом вида каждого оператора и условий склеивания.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ ФА-Ф1-Ф002 «Исследования разрешимости и спектральных свойств краевых задач для вырождающихся уравнений и уравнений смешанного типа и связанных с ними специальных функций», Ф4-ФА-Ф010 «Краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными с сингулярными особенностями и нелинейные задачи со свободной границей», ОТ-Ф4-88 «Исследования прямых и обратных задач для уравнений смешанного типа второго и высокого порядков» Института Математики им. В.И.Романовского АН Республики Узбекистан.

Целью исследования разработка методов исследования разрешимости локальных и нелокальных задач для нагруженных уравнений смешанного типа с интеро-дифференциальными операторами целого и дробного порядка и обобщение существующих методов

Задачи исследования, решаемые в данной работе:

определение классов заданных функций обеспечивающие существования и единственности решений краевых задач с непрерывным и интегральным условиями склеивания для параболо-гиперболического уравнения с линейной нагрузкой;

установление метода доказательство однозначной разрещимости нелокальных задач для параболо-гиперболического уравнения с нагрузкой в видах дифференциального, интегрального и интегро-дифференциального оператора дробного порядка, а также сравнить и проанализировать полученные результаты;

доказательство локальной разрешимости обратных задач с непрерывным и интегральным условиями склеивания для уравнения параболо-гиперболического типа с линейными и нелинейными нагрузками.

определение достаточных условий обеспечивающие единственность и существования решения прямых задач для параболо-гиперболического уравнения с нелинейной нагрузкой;

решение краевых задач для нагруженного уравнения смешанного типа с вырождающимся гиперболическим оператором и доказательство существование и единственности решения поставленных задач;

корректная постановка и доказательство однозоначной разрешимости задач для параболо-гиперболических уравнений третьего порядка с линейной и нелинейной нагрузкой;

Объект исследования. Нагруженные уравнения смешанного типа с интегро-дифференциальными операторами целого и дробного порядка.

Предмет исследования. Дифференциальные и интегралные операторы дробного порядка, теория специальных функций, теория уравнений математической физики, теория линейных и нелинейных интегральных уравнений.

Методы исследования. В диссертации использованы методы математического анализа, теории обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, теории специальных функций, интегралов энергии, метод интегральных уравнений, а также принцип сжимающих отображений.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

методом интегралов энергии доказана единственность решения поставленных задач для параболо-гиперболических уравнений с нагрузками в видах интегрального, дифференциального и интегро-дифференциального оператора дробного порядка, а существование решения доказано методом интегральных уравнений;

поставлены задачи типа Геллерстедта с локальными и нелокальными условиями для нагруженного параболо-гиперболического уравнения и показано их однозначная разрешимость на основе теории интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра;

установлены классы заданных функций и условия на данные, позволяющие однозначную разрешимость прямых и обратных задач для уравнений параболо-гиперболического типа с линейными и нелинейными нагрузками;

поставлены корректные задачи для вырождающегося нагруженных уравнений смешанного типа, также используя свойств гипергеометрической функции и оператора Римана-Лиувилля доказаны единственность и существование решения поставленных задач

на основе теории интегральных уравнений Вольтерра доказана однозначная разщимость локальных и нелокальных задач для параболо-гиперболических уравнений третьего порядка с линейной и нелинейной нагрузкой.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

исследование прямых и обратных задач для нагруженных уравнений смешанного типа с интегро-дифференциальными операторами дробного и целого порядка заключается в предложении метода решения поставленной задачи с учетом того, что нагруженный член, участвующий в уравнении, является линейным или нелинейным.

изученные прямых и обратных задач с нелокальными краевыми и интегральными условиями склеивания для нагруженных уравнений смешанного типа с дифференциальными и интегро-дифференциальными операторами целого и дробного порядка эффективно используются при моделировании процессов, которые связаны с динамикой почвенной влаги, грунтовой воды и биологии.

Достоверность результатов исследования подтверждается строгим использованием методов математического анализа, математической физики, теории специальных функций и интегральных уравнений, нахождения явных решений краевых задач и исследования вопросов разрешимости линейных и нелинейных интегральных уравнений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть использованы в теории нагруженных дифференциальных уравнений в частных производных.

Практическое значение результатов, полученных в диссертационной работе, определяется их приложениями к прикладным задачам, описываемых нагруженными дифференциальными и интегро-дифференциальными уравнениями, а также к теории обратных задач для нагруженных уравнений смешанного типа.

Внедрение результатов исследования. Результаты, связанные с прямыми и обратными задачами для уравнений смешанного типа с линейной и нелинейной нагрузкой, были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

из результатов, полученных при исследовании краевых задач для нагруженных уравнений, и разработанной методики использованы при однозначном решении краевых задач для уравнений смешанного типа в между народных проектах № 0213-2014-0002 «Нелокальные задачи для дифференциальных уравнений смешанного типа математических моделей экстремальных процессов» и № АААА-А19-119013190078-8 «Краевые задачи для уравнений основного и смешанного типа и их применение к задачам моделирования и управления динамическими системами» (Справочник № 54 от 16 сентября 2022 г., Институт прикладной математики и автоматизации КБНЦ РАН. Россия). Применение научных результатов позволило доказать единственность решения краевых задач для уравнений смешанного типа;

из методов решения прямых и обратных задач с интегральным условием скливания для параболо-гиперболического уравнения с нелинейной нагрузкой были использованы в зарубежном проекте №0119U102369 «Геометрические и аналитические методы исследования экстремальных задач и уравнений с частными производными» при аналитических решениях интегральных уравнений и исследованиях экстремальных задач для дифференциальных уравнений в частных производных (Справка Института Математики Национальной Академии Наук Украины за номером 49/160-02-7 от 20 сентября 2022 г., Украина). Применение научного результата позволило однозначно решить интегральные уравнения, образованные экстремальными задачами;

из методов решения нелинейных интегральных уравнений, образованных из прямых и обратных задач для уравнений с нелинейными нагрузками, были использованы при изучения однозначной разрешимости начально краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений дробного порядка, исследователями научной группы «Дробный анализ и интеральные уравнения» университета Лас Пальмас де Гран Канариа (Справка университета Лас Пальмас де Гран Канариа. 13 сентябр 2022 г., Испания). Использование научного результата позволило исследовать прямые и обратные задачи для различных классов дифференциальный уравнений с дробной производной.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационного исследования обсуждались на 13 международных и 3 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертационного исследования опубликовано 36 научных работ, из них 18 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора наук, в том числе, из них 14 опубликованы в зарубежных журналах и 4 в республиканских научных изданиях.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 182 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссер-тации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскры-та теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации которая называется «**Локальные и нелокальные задачи для нагруженных параболо-гиперболических уравнений с интегро-дифференциальными операторами дробного порядка**» посвящена изучению однозначной разрещимости локальных и нелокальных краевых задач для нагруженных параболо-гиперболических уравнений с дифференциальными, интегральными и интегро-дифференциальными операторами дробного порядка. В первом параграфе доказано единственность и существование решения локальной и нелокальной задачи для уравнения

$$0=\begin{cases} u_{xx}-{}_C D_{0y}^{\alpha}u+p(x,y)\int\limits_x^1 (t-x)^{\beta-1}u(t,0)dt, \ при \ y>0 \\ u_{xx}-u_{yy}+q(x+y)\int\limits_{x+y}^1 (t-x-y)^{\gamma-1}u(t,0)dt, \ при \ y<0 \end{cases} \tag{1}$$

где $0<\alpha,\beta,\gamma<1$, $p(x,y)$, $q(x+y)$ -заданные функции, и ${}_C D_{0y}^{\alpha} f$ - дифференциальный оператор в смысле Капуто дробного порядка α :

$${}_C D_{0y}^{\alpha} f=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^y (y-t)^{-\alpha} f'(t)dt. \tag{2}$$

Пусть, Ω - конечная область, ограниченная сегментами: $A_1A_2=\{(x,y):x=1,$ $0<y<h\}$, $B_1B_2=\{(x,y):x=0,0<y<h\}$, $B_2A_2=\{(x,y):y=h,0<x<1\}$ при $y>0$ и характеристиками: $A_1C:x-y=1$; $B_1C:x+y=0$ уравнения (1) при $y<0$, где $A_1(1;0)$, $A_2(1;h)$, $B_1(0;0)$, $B_2(0;h)$, $C\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Введем обозначения: $\Omega^+=\Omega\cap(y>0)$, $\Omega^-=\Omega\cap(y<0)$, $I=\{x:0<x<1\}$, $I_1=\left\{x:\frac{1}{2}<x<1\right\}$, $I_3=\{y:0<y<h\}$.

Задача АТ(Ω). Найти решение уравнения (1) из класса функций $W_0=\{u(x,y):u(x,y)\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega^-),\ u(x,y)\in AC[0,h]$ для $\forall x\in[0,1]$, $u_{xx},{}_C D_{0y}^{\alpha}u\in C(\Omega^+),\ y^{1-\alpha}u_y\in C(\Omega^+\cup I),\ u_y\in C(\Omega^-\cup I)\}$ удовлетворяющее краевым условиям

$$u(1,y)=\varphi_1(y),\ u(0,y)=\varphi_2(y),\ y\in\overline{I}_3; \tag{3}$$

$$u(x,y)|_{CA_1}=\psi(x),\ x\in\overline{I_1} \tag{4}$$

и условие склеивания

$$\lim_{y\to+0} y^{1-\alpha}u_y(x,y)=\lambda u_y(x,-0),\ (x,0)\in B_1A_1 \tag{5}$$

где $\lambda=const\neq 0$, $\varphi_i(y)$, $\psi(x)$ - заданные функции, причем $\psi(1)=\varphi_1(0)$.

Теорема 1. *Если выполняются неравенства*

$$p(0,0)\le 0,\ \ \lambda q(0)\le 0,\ \lambda\big((x-1)q(x)\big)'\ge 0,\ \frac{\partial p(x,0)}{\partial x}\le 0\ \ \forall x\in(0,1),$$

то задача **АТ(Ω)** *не может иметь более одного решения.*

Теорема 2. *Если имеют места условия*

$$\varphi_1(y),\varphi_2(y)\in C\left(\overline{I_3}\right)\cap C^1\left(I_3\right),\ \ \psi(x)\in C^1\left(\overline{I_1}\right)\cap C^3\left(I_1\right);$$

$$p(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}^{+}\right)\cap C^{1}\left(\Omega^{+}\right),\ q(x+y)\in C\left(\overline{\Omega}^{-}\right)\cap C^{1}\left(\Omega^{-}\right);$$

то решение задачи **AT(Ω)** *существует.*

В этом же параграфе для уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-{}_C\,D_{0y}^{\alpha}u+\sum\limits_{k=1}^{n}p_k(x,y)D_{x1}^{-\beta_k}u(x,0), & y>0\\ u_{xx}-u_{yy}+\sum\limits_{k=1}^{n}q_k(x,y)D_{\xi 1}^{-\gamma_k}u(\xi,0), & y<0\end{cases} \tag{6}$$

в области Ω поставлена нелокальная задача с интегральным условием склеивания, а также доказано единственность и существование решения задачи, где $p_k(x,y)$, $q_k(x,y)$ $(k=\overline{1,n})$ - заданные функции, $\xi=x+y$,

$$D_{ax}^{-\beta}f=\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^x(x-t)^{\beta-1}f(t)dt,$$

интегральный оператор Римана-Лиувилля дробного порядка β, $\alpha,\ \beta_k,\ \gamma_k=const$ причем $0<\alpha,\ \beta_k,\ \gamma_k<1$ $(k=\overline{1,n})$.

Задача NL(Ω). Требуется найти решение уравнение (6) из класса функций $W=\left\{u:u\in C(\overline{\Omega})\cap C^{2}(\Omega^{-}),\ u(x,y)\in AC[0,h]\ \text{для}\ \forall x\in[0,1],\ \ u_{xx},{}_C D_{0y}^{\alpha}u\in C(\Omega^{+}),\right.$ $\left. y^{1-\alpha}u_y\in C(\Omega^{+}\cup I),\ u_x,u_y\in C(\Omega^{-}\cup I)\right\}$ удовлетворяющее краевым условиям (3) и

$$\frac{d}{dx}u\left(\theta(x)\right)=a_1(x)u_y(x,-0)+a_2(x)u_x(x,-0)+a_3(x)u(x,0)+a_4(x),\ x\in I,$$

и интегральную условию склеивания

$$\lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}u_y(x,y)=\lambda_1(x)u_y(x,-0)+\lambda_2(x)\int_x^1 r(t)u(t,0)dt+\lambda_3(x)u_x(x,-0)+\lambda_4(x),\ \ x\in I$$

где $0<\alpha,\beta_k,\gamma_k<1$, $\theta(x)=\left(\dfrac{x+1}{2},\dfrac{x-1}{2}\right)$ и $a_j(x),\lambda_j(x)$ $(j=\overline{1,4})$ - заданные функции, причем $\sum\limits_{j=1}^{3}a_j^2(x)\neq 0$, $\sum\limits_{j=1}^{3}\lambda_j^2(x)\neq 0$.

Теорема 3. Если $2a_1(x)-1\neq 0,\ r(x)\neq 0$ *и имеют места неравенства*

$$\frac{\lambda_1(0)q_{1k}(0)}{2a_1(0)-1}\geq 0,\ p_k(0,0)\leq 0,\ \frac{\lambda_2(0)}{r(0)}\geq 0,\left(\frac{\lambda_2(x)}{r(x)}\right)'\geq 0,\ p_k'(x,0)\leq 0\ \ \forall x\in(0,1),$$

$$\left(\frac{q_{1k}(x)\lambda_1(x)}{2a_1(x)-1}\right)'\geq 0,\ \frac{a_3(x)\lambda_1(x)}{2a_1(x)-1}\leq 0,\ \left(\frac{(1-2a_2(x))\lambda_1(x)}{2a_1(x)-1}+\lambda_3(x)\right)'\leq 0\ \ \ \forall x\in(0,1),$$

то задача **NL(Ω)** *не может иметь более одного.*

Теорема 4. *Если* $2a_1(x)-1\neq 0$*, и выполняются условия*

$$p_k(x,y)\in C\left(\overline{\Omega^+}\right)\cap C^1\left(\Omega^+\right),\ q_k(x,y)\in C\left(\overline{\Omega^-}\right)\cap C^1\left(\Omega^-\right)\ (k=\overline{1,n}),$$

$$\varphi_i(y)\in C\left(\overline{I_3}\right)\cap C^1\left(I_3\right)\ (i=1,2),\ a_j(x),\lambda_j(x)\in C^1\left(\overline{I}\right)\cap C^2\left(I\right)\ \ (j=\overline{1,4}),$$

то решение задачи **NL(**Ω**)** *существует.*

Замечание 1. *Задача* ***NL(***Ω***)*** *при* $a_1(x)=\dfrac{1}{2}$ *эквивалентным образом сведется к интегральному уравнению Вольтерра второго рода. Однозначная разрешимость задачи доказывается основываясь к теории интегральных уравнений Вольтерра.*

Во втором параграфе главы один, в области Ω доказано единственность и существование решения нелокальной задачи с интегральным условием склеивания для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с интегральным оператором Эрдейи-Кобера

$$0=\begin{cases}u_{xx}-{}_C D_{oy}^{\alpha}u+p(x,y)\left(I_{\beta}^{\gamma,\delta}u\right)x, & y>0\\ u_{xx}-u_{yy}+q(\xi,\eta)\left(I_{\beta}^{\gamma,\delta}u\right)\eta, & y<0\end{cases}\tag{7}$$

где $\xi=x+y$, $\eta=x-y$, ${}_C D_{oy}^{\alpha}$ – дифференциальный оператор Капуто который определяется по формуле (2), а

$$\left(I_{\beta}^{\gamma,\delta}u\right)x=\frac{\beta}{\Gamma(\delta)}x^{-\beta(\gamma+\delta)}\int_0^x\frac{t^{\beta(\gamma+1)-1}}{\left(x^{\beta}-t^{\beta}\right)^{1-\delta}}u(t,0)dt,\tag{8}$$

интегральный оператор Эрдейи-Кобера, $\alpha,\ \beta,\gamma,\delta=const$, причем $0<\alpha,\ \beta,\gamma,\delta<1,\ 0<\gamma+\delta<1.$

Задача NLEK. Найти решение уравнения (7) из класса функций W, удовлетворяющее краевым условиям (3),

$$\frac{d}{dx}u\left(\theta_1(x)\right)=a_1(x)u_y(x,-0)+a_2(x)u_x(x,-0)+a_3(x)u(x,0)+a_4(x),\quad x\in I$$

и интегральное условие склеивания

$$\lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}u_y(x,y)=\lambda_1(x)u_y(x,-0)+\lambda_2(x)u_x(x,-0)+\lambda_3(x)\int_0^x r(t)u(t,0)dt+$$

$$+\lambda_4(x)u(x,0)+\lambda_5(x),\ x\in I\tag{9}$$

где $\theta_1(x)=\left(\dfrac{x}{2},-\dfrac{x}{2}\right)$ и $a_j(x),\ \lambda_j(x)\ (j=\overline{1,4})$, $\lambda_5(x)$- заданные функции, причем $\sum\limits_{j=1}^{4}\lambda_j^2(x)\neq 0,\ \ \sum\limits_{k=1}^{3}a_k^2(x)\neq 0$.

Учитывая все возможные случаи коэффициентов нелокальной условии, однозначная разрешимость задачи **NLEK** доказывается сведением к интегральному уравнению Фредгольма, Вольтерра или Абеля. Сперва доказывается теорема единственности в случае $1+2a_1(x^{1/\beta})\neq 0$.

Теорема 5. *Если выполняются следующие неравенства*

$$\frac{\lambda_2(1)}{r(1)}\geq 0,\ A(1)\geq 0,\ \ p(1,0)\leq 0,\ \ B(x)\geq 0,\ C(x)\leq 0\quad \forall x\in(0,1),$$

$$\left(\frac{A(x)}{x^{\gamma}}\right)'\leq 0,\ \left(\frac{p(x^{1/\beta},0)}{x^{2\gamma+\delta}}\right)'\geq 0,\ \left(x^{1-1/\beta}\frac{\lambda_2(x^{1/\beta})}{r(x^{1/\beta})}\right)'\leq 0\quad \forall x\in(0,1),$$

то задача **NLEK** *не может иметь более одного решения, где*

$$A(x)=\frac{Q(x)\lambda_1(x^{1/\beta})}{1+2a_1(x^{1/\beta})},\quad B(x)=\frac{1-2a_2(x^{1/\beta})}{1+2a_1(x^{1/\beta})}\lambda_1(x^{1/\beta}),\quad C(x)=\frac{2a_3(x^{1/\beta})\lambda_1(x^{1/\beta})}{1+2a_1(x^{1/\beta})},$$

$$Q(x)=-\frac{x^{-\gamma-\delta}}{2\Gamma(\beta)}\int_0^{x^{1/\beta}}q\left(\xi,x^{1/\beta}\right)d\xi.$$

Теорема 6. *Если* $2a_1(x)+1\neq 0$ *и имеют место условия*

$$p(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}^{+}\right)\cap C^1\left(\Omega^{+}\right),\ q(x,y)\in C\left(\overline{\Omega}^{-}\right)\cap C^1\left(\Omega^{-}\right),$$

$$\varphi_1(y),\varphi_2(y)\in C\left(\overline{I_3}\right)\cap C^1\left(I_3\right),\ a_j(x)\in C^1\left(\overline{I}\right)\cap C^2\left(I\right),\ (j=\overline{1,4})$$

то решение задачи **NLEK** *существует.*

Замечание 2. *Если* $a_1(x)=-\dfrac{1}{2}$, $a_2(x)=\dfrac{1}{2}$ *и* $a_3(x)=0$, *то задача* **NLEK** *эквивалентным образом сведется к интегральному уравнению Абеля. Однозначная разрешимость задачи следует из однозначной разрешимости интегрального уравнения Абеля.*

В третьем параграфе первой главы рассмотрено уравнение

$$0=\begin{cases}u_{xx}-{}_C D_{oy}^{\alpha}u+p(x,y)\left(I_{\beta}^{\gamma,\delta}u\right)x, & при\ \ y>0\\ u_{xx}-u_{yy}+q(x,y)\left(I_{\beta}^{\gamma,\delta}u\right)\eta, & при\ \ y<0\end{cases}\tag{10}$$

где ${}_C D_{oy}^{\alpha}u$ и $\left(I_{\beta}^{\gamma,\delta}u\right)x$ - оператори в смысле Капуто и Эрдейи-Кобера соответственно (см (2) и (4)), $\eta=x-y$, $0<\alpha,\ \beta,\gamma,\delta<1$, причем $0<\gamma+\delta<1$.

Через Ω^{+} обозначим область, ограниченная отрезками $A_1A_2=\{(x,y):\ x=1,\ 0<y<h\}$, $B_1B_2=\{(x,y):\ x=0,\ 0<y<h\}$ и $B_2A_2=\{(x,y):\ y=h,\ 0<x<1\}$, а через $\Omega_1=\{A_1C_1E\}$ и $\Omega_2=\{B_1C_2E\}$ обозначим характеристические треугольники ограниченные соответственно характеристиками $A_1C_1:x-y=1$, $C_1E:x+y=l$ и $EC_2:x-y=l$, $B_1C_2:x+y=0$ уравнения (10) при $y<0$, где $A_1(1;0)$, $A_2(1;h)$, $B_1(0;0)$, $B_2(0;h)$, $C_1\left(\dfrac{l+1}{2};\dfrac{l-1}{2}\right)$, $C_2\left(\dfrac{l}{2};\dfrac{-l}{2}\right)$, $E(l,0)$.

Введем обозначения: $\Omega^{*}=\Omega^{+}\cup\Omega_1\cup\Omega_2\cup\left(A_1B_1\right)$, $I=\{x:0<x<1\}$,

$I_1=\{x:0<x<l\}$, $\quad I_2=\{x:l<x<1\}$, $I_{21}=\left\{x:l<x<\frac{l+1}{2}\right\}$, $\quad I_{22}=\left\{x:0<x<\frac{l}{2}\right\}$,

$I_3=\{y:0<y<h\}$.

В этом параграфе исследованы задачи типа Геллерстедта с локальными и нелокальными краевыеми условиями для уравнения (10) в облати $\Omega*$. Для этих задач доказаны аналогичные теоремы как теорема 5 и теорема 6.

Вторая глава диссертации которая называется **«Прямые и обратные задачи для параболо-гиперболических уравнений с нелинейной нагрузкой»** состоящееся из три параграфов посвящен к изучению прямых и обратных задач с локальными и нелокальными краевыми условиями для нагруженных параболо-гиперболических уравнений с дробно-дифференциальным оператором Капуто.

В первом параграфе рассматривается уравнение

$$0=\begin{cases} u_{xx}-{}_C D_{0y}^{\alpha}u+f_1(x,y;u(x,0)),\ при\quad y>0\\ u_{xx}-u_{yy}+f_2(x,y;u(x,0)),\ при\quad y<0\end{cases}\tag{11}$$

в конечной области $\Omega*$, где $f_i(x,y,z)$ $(i=1,2)$- заданные функции. Для уравнения (11) в области $\Omega*$ поставлена аналог задачи Геллерстедта а также доказано существование и единственность решения этой задачи.

Задача AG₁($\Omega*$). Найти решение уравнения (11) в классе

$W_1=\{u:u\in C(\overline{\Omega}^*)\cap C^2(\Omega^-),\ u(x,y)\in AC[0,h]$ для $\forall x\in[0,1]$,

$u_{xx},{}_C D_{0y}^{\alpha}u\in C(\Omega^+),\quad y^{1-\alpha}u_y\in C(\Omega^+\cup I),\quad u_x,u_y\in C(\Omega^-\cup I)\}$ удовлетворяющее краевым условиям (3),

$$u(x,y)|_{EC_1}=\psi_1(x),\quad l\le x\le\frac{l+1}{2},\tag{12}$$

$$u(x,y)|_{B_1C_2}=\psi_2(x),\ 0\le x\le\frac{l}{2},\tag{13}$$

и интегральную условию склеивания (9) где $\psi_j(x)$ $(j=1,2)$ - заданные функции.

Задача AG₂($\Omega*$). Требуется найти решение уравнения (11) из класса фукнций W_1 удовлетворяющие всем условиям задачи A**G₁($\Omega*$)** кроеме (13) которое заменяется на нелокальное условие

$$\frac{d}{dx}u\left(\frac{x}{2},\frac{-x}{2}\right)=a_1(x)u_y(x,-0)+a_2(x)u_x(x,-0)+a_3(x)u(x,0)+a_4(x),\ 0<x<l,$$

где $a_k(x)$, $\left(k=\overline{1,4}\right)$ -заданные функции, причем $\sum_{k=1}^{3}a_k^2(x)\ne 0$.

Приведем результаты для задачи **AG₂($\Omega*$).**

Пусть, $A_i(x)=\dfrac{(-1)^i\lambda_1(x)}{2(1+2a_1(x))^{2-i}}$ и $K_i(x,t)$ $(i=1,2)$ – известная функция которая зависеть от заданных, причем

$$K_1(x,t)\in C\left([0,l]\times[0,l]\right)\cup C^{2,0}_{x,t}\left((0,l)\times(0,l)\right),$$

$$K_2(x,t)\in C\left([l,1]\times[l,1]\right)\cup C^{2,0}_{x,t}\left((l,1)\times(l,1)\right),$$

$$\left|K_i(x,t)\right|\le K_{0i},\ \left|\Gamma(\alpha)A_i(x)\right|\le\beta_i,\ K_{0i},\beta_i=const>0\ .$$

Тогда имеет место,

Теорема 7. *Если* $\varphi_1(y),\varphi_2(y)\in C\left(\overline{I_3}\right)\cap C^1\left(I_3\right)$,

$$\psi_i(x)\in C\left(\overline{I_{2i}}\right)\cap C^2\left(I_{2i}\right)\ (i=1,2),$$

$$a_i(x)\in C^1\left(\bar{I}\right)\cap C^2\left(I\right),\ \lambda_k(x)\in C^1\left(\bar{I}\right)\cap C^2\left(I\right)\ ,\ i=\overline{1,4}\,,k=\overline{1,5}\,,$$

$$1+2a_1(x)\ne 0\,,\ f_1(x,y,z)\in C\left(\bar{\Omega}^+\times R\right)\cap C^{0,1,0}_{x,y,z}(\Omega^+\times R),$$

$$f_2(x,y,z)\in C\left(\left(\bar{\Omega}_1\cup\bar{\Omega}_2\right)\times R\right)\cap C^{0,1,0}_{x,y,z}\left((\Omega_1\cup\Omega_2)\times R\right),$$

и выполняются условия $\left|f_j(x,y,z)\right|\le m_j\cdot\left|z\right|,m_j=const>0$

$$\left|f_j(x,y,z_1)-f_j(x,y,z_2)\right|\le L_j\cdot\left|z_1-z_2\right|,\ (x,y)\in\begin{cases}\Omega^+\ \text{при}\ j=1\\ \Omega^-\ \text{при}\ j=2,\end{cases}$$

$$\begin{cases} l\left(K_{01}+\dfrac{2l^2}{27}(L_1+\beta_1L_2)\right)<1\\ (1-l)\left(K_{02}+\dfrac{2(1-l)^2}{27}(L_1+\beta_2L_2)\right)<1\end{cases}$$

то, задача **AG$_2$(Ω *)** *однозначно разрешима, где* $L_j=const>0\,,(j=1,2)$, $R=(-\infty,+\infty)$.

В параграфе главы два изучены разрешимости локальных и нелокальных краевых задач для уравнения параболо-гиперболического типа

$$0=\begin{cases}u_{xx}-{}_CD^{\alpha}_{oy}u+f_1(x,y;u(x,0))\\ u_{xx}-u_{yy}+f_2(\xi,\eta;u(\xi,0))\end{cases}\tag{14}$$

где ${}_CD^{\alpha}_{0y}f$ -дифференциальный оператор Капуто порядка $0<\alpha<1$, $f_1(x,y;u(x,0))$, $f_2(\xi,\eta;u(\xi,0))$ - нелинейные нагрузки уравнения (14) (известные функции), $\xi=x+y,\ \eta=x-y$.

Пусть, Ω^+ - область, ограченная сегментами: $A_1A_2=\{(x,y):\ x=1,\ 0<y<h\}$ $B_1B_2=\{(x,y):\ x=0,\ 0<y<h\}$, $B_2A_2=\{(x,y):\ y=h,\ 0<x<1\}$ при $y>0$, а Ω^- -характеристический треугольник ограниченные соответственно, характеристиками $A_1C:x-y=1$ и $B_1C:x+y=0$ уравнения (14) при $y<0$, где

$A_1(1;0)$, $A_2(1;h)$, $B_1(0;0)$, $B_2(0;h)$, Введем обозначения: $\Omega = \Omega^+ \cup A_1B_1 \cup \Omega^-$, $\Omega_1 = \{A_1C_1E\}$, $\Omega_2 = \{B_1C_2E\}$ и $\Omega_3 = \{C_1EC_2C\}$, $EC_2 : x - y = l$ $EC_1 : x + y = 0$,

где $C_1\left(\frac{l+1}{2};\frac{l-1}{2}\right)$, $C_2\left(\frac{l}{2};\frac{-l}{2}\right)$, $E(l,0)$.

Для уравнения (14) в области Ω изучаются следующие локальные (задача L) и нелокальные (задача NL) задачи

Задача L. Найти решение $u(x,y)$ уравнения (14) из класса функций

$$W_2 = \{u(x,y) : u \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega^- \setminus EC_1 \setminus EC_2),\ u(x,y) \in AC[0,h] \text{ для } \forall x \in [0,1],$$
$$u_{xx},\ {}_CD_{0y}^{\alpha}u \in C(\Omega^+),\ y^{1-\alpha}u_y \in C(\Omega^+ \cup I),\ u_x, u_y \in C(\Omega^- \cup I)\}$$

Удовлетворящее граничным условиям (3), (12),(13) и интегральное условие склеивания:

$$\lim_{y \to +0} y^{1-\alpha}u_y(x,y) = \lambda_1(x)u_y(x,-0) + \lambda_2(x)u_x(x,-0) +$$
$$+\lambda_3(x)\int_x^1 r(t)u(t,0)dt + \lambda_4(x)u(x,0) + \lambda_5(x),\ 0 < x < 1 \tag{15}$$

где $\varphi_i(y)$, $\psi(x)$, $\lambda_k(x)$ -заданные функции, причем $\sum_{k=1}^{4}\lambda_k^2(x) \neq 0$.

Задача NL. Найти решение уравнения (14) из класса функций W, удовлетворяющих всем условиям задачи L, кроме (12) и (13), которые заменены на

$$\frac{d}{dx}u(\theta_1(x)) = a_1(x)u_y(x,0) + a_2(x)u_x(x,0) + a_3(x)u(x,0) + a_4(x), l < x < 1;$$

$$\frac{d}{dx}u(\theta_2(x)) = b_1(x)u_y(x,0) + b_2(x)u_x(x,0) + b_3(x)u(x,0) + b_4(x), 0 < x < l;$$

где $\theta_1(x) = \left(\frac{x+l}{2}, \frac{l-x}{2}\right)$, $\theta_2(x) = \left(\frac{x}{2}, -\frac{x}{2}\right)$ и $a_k(x)$, $b_k(x)$ -заданные функции,

такие что $\sum_{k=1}^{3} a_k^2(x) \neq 0$, $\sum_{k=1}^{3} b_k^2(x) \neq 0$.

Введем следующую функцию:

$$K(x,t) = \Gamma(\alpha)\left[L(x,t)(\lambda_1(t) + \lambda_2(t))\right]' + \Gamma(\alpha)\lambda_4(t)L(x,t) +$$
$$+\Gamma(\alpha)r(t)\int_0^t L(x,z)\lambda_3(z)dz,$$

где $L(x,t)=\begin{cases}(x-1)t, \; при \;\; 0\le t\le x;\\ x(t-1), \; при \;\; x\le t\le 1.\end{cases}$

Пусть, $\lambda_3(x),\lambda_5(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1),\lambda_4(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\lambda_1(x),\lambda_2(x)\in C^1[0,1]$ тогда, имеем $\left|K(x,t)\right|\le k_0=const>0,\; \left|\Gamma(\alpha)\lambda_1(x)\right|\le\lambda_{01}=const>0$.

Теорема 8. *Если.* $\varphi_1(y),\varphi_2(y)\in C\left(\overline{I_3}\right)\cap C^1\left(I_3\right)$, $\psi_i(x)\in C\left(\overline{I_{2i}}\right)\cap C^2\left(I_{2i}\right)$,

$$\lambda_1(x),\lambda_2(x)\in C^1[0,1],\; \lambda_3(x),\lambda_5(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1),\lambda_4(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1),$$

$$f_1(x,y;z)\in C\left(\overline{\Omega}^+\times R\right)\cap C^{0,1,0}_{x,y,z}\left(\overline{\Omega}^+\times R\right),\; f_2(\xi,\eta;z)\in C(\overline{\Omega}^-\times R)\cap C^{0,1,0}_{x,y,z}\left(\overline{\Omega}^-\times R\right),$$

и выполняются неравенста $\left|f_j(x,y,z)\right|\le m_j\cdot\left|z\right|, m_j=const>0$

$$\left|f_j(x,y,z_1)-f_j(x,y,z_2)\right|\le l_j\cdot\left|z_1-z_2\right|,\,(x,y)\in\begin{cases}\Omega^+ \; при \; j=1\\ \Omega^- \; при \; j=2,\end{cases}$$

$$0<k_0+\frac{1}{4}l_1+l_2\lambda_{01}\frac{l^2+(1-l)^2}{16}<1,$$

то задача L однозначно разрешима.

Обратные задачи для параболо-гиперболических уравнений в основном рассматривались в прямоугольных областях. Отметим работы К.Б.Сабитова, Сидирова, Мелишева, Б.Кадыркулова, Б. Исломова и дрг.

В третьем параграфе главы 2 поставлены и изучены обратные задачи с нелинейным интегральным условием склеивания для уравнения

$$f(x)=\begin{cases}u_{xx}-{}_C\,D^{\alpha}_{oy}u+p_1\left(x,y;u(x,0)\right), \;\; y>0\\ u_{xx}-u_{yy}+p_2\left(x,y;u(x,0)\right), \;\; y<0\end{cases} \tag{16}$$

где $p_i\left(x,y,z\right)$ $(i=1,2)$ – непрерывные нелинейные нагрузки уравнения.

Задча-IP$_2$(Ω). Требуется найти пару функций $\left\{f(x),u(x,y)\right\}$ для уравнения (16) в области Ω, со следующими свойствами:

i) $f(x)\in C(0,l)\cap L_1(0,l)$;

ii) пара функций $\left\{f(x),u(x,y)\right\}$ удовлетворяет уравнение (16) в области $\Omega^+\cup\Omega^-$,

iii) $u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_l)\cap C^2(\Omega_l^-),\;\; u(x,y)\in AC[0,h]$ для $\forall x\in[0,l]$,

$$u_{xx},\,{}_C D^{\alpha}_{oy}u\in C\left(\Omega_l^{\,+}\right),\, y^{1-\alpha}u_y\in C\left(\Omega_l^{\,+}\cup I\right), u_x\in C\left(\overline{\Omega}_l^{\,-}\setminus I\right), u_y\in C\left(\Omega_l^{\,-}\cup\overline{A_1C}\cup\overline{B_1C}\cup I\right);$$

iv) $u(x,y)$ удовлетворят краевым условиям (3), $u(x,-x)=\psi(x), 0\le x\le\frac{l}{2}$,

$$u_n(x,y)\Big|_{A_1C}=\psi_1(x),\; 0\le x\le\frac{l}{2};\;\; u_n(x,y)\Big|_{B_1C}=\psi_2(x),\,\frac{l}{2}\le x\le l,$$

и нелинейное условие склеивания

$$\lim_{y\to+0}y^{1-\alpha}u_y(x,y)=\lambda_1(x)u_y(x,-0)+\lambda_2(x)r\left(x,u(x,0)\right)+\lambda_3(x),0<x<l$$

где $\psi(x)$, $\psi_i(x)$ $(i=1,2)$, $\lambda_k(x)$ $(k=\overline{1,3})$ - заданные функции, причем $\sum_{k=1}^{2}\lambda_k^2(x)\neq 0$,

$$\varphi_i(y)\in C[0,h]\cap C^1(0,h)\ (i=1,2),\ \psi_1(x)\in C^1\left[0,\frac{l}{2}\right],\psi_2(x)\in C^1\left[\frac{l}{2},l\right],\qquad(17)$$

$$\psi(x)\in C\left(\overline{I_{1l}}\right)\cap C^2(I_{1l}),\ \lambda_j(x)\in C\left(\overline{I_l}\right)\cap C^1\left(I_l\right),(j=\overline{1,3}),\qquad(18)$$

$$\psi_1\left(\frac{l}{2}\right)=\psi_2\left(\frac{l}{2}\right),\ \psi_1'\left(\frac{l}{2}\right)=-\psi_2'\left(\frac{l}{2}\right).\qquad(19)$$

Препологаяем, что $p_i(x,y,z)$ $(i=1,2)$, $r(x,z)$ – непрерывные функции, причем удовлетворяют условию Липщица по z, т.е.

$$|\,p_i(x,y,z_1)-p_i(x,y,z_2)\,|\leq L_i\,|\,z_1-z_2\,|,(i=1,2),\qquad(20)$$

$$|\,r(x,z_1)-r(x,z_2)\,|\leq L_3\,|\,z_1-z_2\,|,\qquad(21)$$

где $L_1,L_2,L_3=const>0.$

Пусть, $G(x,t)$ – функция Грина задачи $\begin{cases}\tau''(x)-\Gamma(\alpha)\lambda_1(x)\tau'(x)=0\\ \tau(0)=\tau(l)=0\end{cases}$, тогда в силу

(18), получим

$$|\,\Gamma(\alpha)\lambda_i(x)\,|\leq\lambda_{0i},\ |\,G(x,t)\,|\leq g_0,\ (i=1,2),\ \text{где } \lambda_{0i},g_0=const>0.$$

Теорема 9. *Если выполняются условия* (17)-(21) *и* $\left|p_i(x,y,z)\right|\leq p_{0i}\left|z\right|$ $(i=1,2)$, $\left|r(x,z)\right|\leq r_0\left|z\right|$, $lL^*g_0\left(1+\lambda^*+\dfrac{l(1+2\lambda^*)}{4}\right)<1$, *то задача* **IP2**$(\Omega)$ *однозначно разрешима, где* $L^*=max\{L_1,L_2,L_3\}$, $\lambda^*=max\{\lambda_{01},\lambda_{02}\}$.

Замечание 3. *Для уравнения (16) в области* Ω *исследовано аналогичная задача со вторым краевым условием на параболической части области. Однозначная разрешимость этой задачи сведется к нелийному интегральному уравнению Вольтерра второго рода в случае, если фукция* $p_i(x,y,z)$ $(i=1,2)$ *не зависеть от* y *, т.е.* $p_i(x,y,z)\equiv p_i(x,z))$ $(i=1,2)$.

Третья глава диссертации с названием “**Краевые задачи для вырождающихся параболо-гиперболических уравнений с линейной и нелинейной нагрузкой**” посвящена к исследованию краевых задач для вырождающегося параболо-гиперболических уравнений с линейной и нелиненой нагрузкой.

В первом параграфе главы три доказано единственность и существование решения краевой задачи для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения, нагруженные слагаемые которые даются через операторов Эрдейи-Кобера:

$$
0=\begin{cases} u_{xx} - {}_C D_{oy}^{\alpha} u + \sum\limits_{k=1}^{n} p_k \left(I_{\beta_{1k}}^{\gamma_{1k},\sigma_{1k}} u \right) x, & y>0 \\ (-y)^m u_{xx} - u_{yy} + \sum\limits_{k=1}^{n} q_k \left(I_{\beta_{2k}}^{\gamma_{2k},\sigma_{2k}} u \right) \eta, & y<0 \end{cases} \qquad (22)
$$

где ${}_C D_{oy}^{\alpha}$ и $I_{\beta}^{\gamma,\sigma}$ - соответственно дифференциальные и интегральные операторы Капуто и Эрдейи-Кобера (см (2) и (8)), $\eta = x + (1-2\delta)(-y)^{\frac{1}{1-2\delta}}$, $\delta = \frac{m}{2(m+2)}$ ($m = const > 0$), $\alpha,\ \beta_{jk},\ \gamma_{jk},\ \sigma_{jk},\ p_k,\ q_k = const$, причем $0<\alpha,\ \beta_{jk},\ \gamma_{jk},\ \sigma_{jk}<1$, $0<\gamma_{jk}+\sigma_{jk}<1$, $(j=1,2,\ k=\overline{1,n})$.

S-конечная область ограниченная, при $y>0$ отрезками $A_1A_2 = \{(x,y):\ x=1,\ 0<y<h\}$, $B_1B_2 = \{(x,y):\ x=0,\ 0<y<h\}$, и $B_2A_2 = \{(x,y):\ y=h,\ 0<x<1\}$, а при $y<0$ характеристиками $A_1C: x+(1-2\delta)(-y)^{\frac{1}{(1-2\delta)}}=1$ и $B_1C: x-(1-2\delta)(-y)^{\frac{1}{1-2\delta}}=0$ уравнения (22), где $A_1(1;0), A_2(1;h), B_1(0;0)$, $B_2(0;h)$, $C\left(\frac{1}{2};-\left(\frac{m+2}{4}\right)^{1-2\delta}\right)$. Введем обозначения: $S^+ = S\cap\{y>0\}, S^- = S\cap\{y<0\}, I=\{x:0<x<1\}, I_2 = \left\{x:0<x<\frac{1}{2}\right\}$, $I_3 = \{y:0<y<h\}$.

В этом парагрфе доказано однозначная разрешимость следующей локальной задачи для уравнения (22) в области S:

Задача L(S). Найти решение уравнения (22) в области S из класса $W_5 = \{u(x,y): u\in C(\overline{S})\cap C^2(S^-), u(x,y)\in AC[0,h]$ для $\forall x\in[0,1]$, $u_{xx}, {}_C D_{0y}^{\alpha} u \in C(\Omega^+),\ y^{1-\alpha}u_y \in C(S^+\cup I), u_y\in C(S^-\cup I)\}$ удовлетворяющие краевым условиям,

$$
u(x,y)\Big|_{A_1A_2} = \varphi_1(y), \quad u(x,y)\Big|_{B_1B_2} = \varphi_2(y),\ 0\le y\le h,
$$

$$
u(x,y)\Big|_{B_1C} = \psi(x), \quad x\in I_2.
$$

и условие склеивания $\lim\limits_{y\to+0} y^{1-\alpha}u_y(x,y) = \lambda u_y(x,-0)$, $(x,0)\in A_1B_1$, где $\varphi_j(y)$, $\psi(x)$ $(j=1,2)$ -заданные функции, $\lambda = const > 0$. Основные результаты **параграфа 3.1**., следующие:

Теорема 10. Если $\lambda > 0$ *и имеют места неравества*

$$
0<\alpha,\beta_{jk},\gamma_{jk},\sigma_{jk}<1,\ 0<\gamma_{jk}+\sigma_{jk}<1,\ p_k<0,\ q_k<0,\ \ j=1,2,\ \ k=\overline{1,n}
$$

то, задача ***L(S)*** *неможет иметь более одного решения.*

Теорема 11. Если выпольняются все условия теорема *12 и*

$$\varphi_j(y)\in C\left(\overline{I_3}\right)\cap C^1(I_3),\ \psi(x)\in C^1\left(\overline{I_2}\right)\cap C^2(I_2),$$

*то, решение задачи **L(S)** существует.*

В параграфе 3.2 доказаны однозначная разрешимость краевых задач типа задачи ***L(S)*** с первыми, так и со вторыми краевыми условиями на параболической области для уравнения

$$0=\begin{cases} u_{xx}-{}_C\ D_{oy}^{\alpha}u+\sum\limits_{k=1}^{n}p_k(x,y)^{AB}\,I_x^{\beta_k}u(x,0),\ при\quad y>0\\ (-y)^m u_{xx}-u_{yy}+\sum\limits_{k=1}^{n}q_k(x,y)^{AB}\,I_\eta^{\gamma_k}u(\eta,0),\quad при\quad y>0\end{cases}$$

с интегральным оператором Атангано-Балеано

$${}^{AB}I_x^{\alpha}u(x)=\frac{1-\alpha}{B(\alpha)}u(x)+\frac{\alpha}{B(\alpha)\Gamma(\alpha)}\int\limits_0^x(x-t)^{\alpha-1}u(t)\,dt,$$

где $B(\alpha)$-нормированная функция удовлетворяющий условиям $B(0)=B(1)=1$, а $\eta=x+\dfrac{2}{m+2}(-y)^{\frac{m+2}{2}}$ и $\alpha,\ \beta_k,\ \gamma_k,\ m=const$, причем $m>0,\ 0<\alpha,\ \beta_k,\gamma_k<1,\ k=\overline{1,n}$

В третьем параграфе этой главы в области S, поставлена и изучена краевая задача со вторым краевым условиям на параболической части области для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелинейной нагрузкой вида

$$0=\begin{cases}u_{xx}-{}_C\ D_{oy}^{\alpha}u+f_1(x,y,u(x,0)),\qquad y>0\\ (-y)^m u_{xx}-u_{yy}+f_2(x,y,u(x,0)),\qquad y>0\end{cases}\tag{23}$$

где $m=const>0$, $f_i(x,y,z)\ (i=1,2)$ – заданные нелинейные нагруженные части уравнения (23).

Задача L_1(S). Требуется найти решение уравнения (23) в области ***S***, из класса $W_6=\Big\{u:u\in C\left(\overline{S}\right)\cap C^2\left(S^-\right),\ \ u(x,y)\in AC[0,h]$ для $\forall x\in[0,1]$,

$$u_x\in C\left(\overline{S}^+\setminus\overline{B_2A_2}\right),u_{xx},\ {}_CD_{oy}^{\alpha}u\in C\left(S^+\right),y^{1-\alpha}u_y\in C\left(S^+\cup I\right),u_x,u_y\in C\left(S^-\cup I\right)\Big\}$$

удовлетворяющее краевым условиям,

$$u_x(1,y)=\varphi_1(y),\ 0\le y<h,\ \ u_x(0,y)=\varphi_1(y),\ 0\le y<h\ ,$$

$$u\left(x,-\left(\frac{x}{1-2\delta}\right)^{1-2\delta}\right)=\psi(x),\ x\in I_2$$

и интегральное условие склеивания (9), где $\varphi_i(y)\ (i=1,2),\ \psi(x)$ -заданные функции. Основным результатом этого параграфа является следующая,

Теорема 12. *Если* $0<\alpha<1$, *и имеют места условия*

$$f_1(x,y,z)\in C\left(\overline{S}^+\times R\right)\cap C_{x,y,z}^{0,1,0}\left(S^+\times R\right),\ f_2(x,y,z))\in C\left(\overline{S}^-\times R\right)\cap C_{x,y,z}^{0,1,0}\left(S^-\times R\right),$$

$$\left|f_i(x,y,z_1)-f_i(x,y,z_2)\right|\le L_i\,|z_1-z_2|;\left|f_i(x,y,z)\right|\le f_{0i}\cdot|z|,\ f_{0i}=const>0\ (i=1,2),$$

$$\varphi_i(x)\in C[0,h]\cap C^1(0,h)\ \ (j=1,2),\quad \psi(x)\in C(\overline{I_2})\cap C^2(I_2)\ ,$$
$$\lambda_j(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)\ \ (j=1,2,5),\quad r(x)\in C[0,1]\cap C^1(0,1)\ ,$$
$$\lambda_3(x)\in C^1[0,1]\cap C^3(0,1),\quad \lambda_4(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$$
*то, задача **L₁(S)** однозначо разрешимо.*

Большинство задач, изучаемых в конечных областях, рассматриваются для уравнений второго порядка, что обязательно связано с применяемыми методами и моделируемыми процессами. Однако бурное развитие науки и техники в последние годы может привести к моделированию некоторых процессов приводящиеся к уравнениям третьего порядка. Исследование краевых для нагруженных уравнений третьего порядка смешанного типа, в свою очередь, позволяет расширить области моделирования процессов.

Четвертая глава, которая называется **«Краевые задачи для нагруженных уравнений третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором»** посвящена постановке и изучению локальных и нелокальных задач для уравнений теретьего порядка с линейной и нелинейной нагрузкой.

В первом параграфе главы четыре, исследовано нелокальная задача для нагруженного параболо-гиперболического уравнения третьего порядка в области Ω.

Введем обозначение: $\Omega_1=\Omega\cap\{y>0\}$, $\Omega_2=\Omega\cap\{y<0\}$, $I=\{x:0<x<1\}$.

Рассмотрим уравнение

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)Lu=0 \tag{24}$$

в области Ω, где

$$Lu\equiv\begin{cases}L_1u=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-{}_CD_{0y}^{\alpha}u+\sum\limits_{k=1}^{n}p_k(x,y)D_{0x}^{\beta_k}u(x,0),\ (x,y)\in\Omega_1\\ L_2u=\dfrac{\partial^2u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2u}{\partial y^2}+\sum\limits_{l=1}^{m}q_l(x,y)D_{0x}^{\gamma_l}u(x,0),\ (x,y)\in\Omega_2\end{cases}$$

и ${}_CD_{ay}^{\alpha}$ – дифференциальный оператор дробного порядка в смысле Капуто, а

$$D_{0x}^{\beta_k}f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Gamma(-\beta_k)}\int\limits_a^x(x-t)^{-1-\beta_k}f(t)dt,\quad \beta_k<0,\\ \dfrac{d}{dx}D_{ax}^{\beta_k-1}f(x),\ \ 0<\beta_k<1\end{cases}$$

интегро-дифференциальный оператор Римана-Лиувилля, a,b,c и α,β_k,γ_l - заданные постоянные, причем $0<\alpha<1;\ \beta_k,\gamma_l<1,\ a\neq 0$.

Так как уравнение (24) является уравнением третьего порядка, в котором дифференциальный оператор первого порядка с коэффициентами a, b и c

действует на параболо-гиперболический оператор второго порядка, на корректную постановку краевых задач существенное влияние оказывают коэффициенты a, b и c.

По этому, введем некоторые граничные условия, которые будут использованы при постановке задачи с учетом возможных случаев для коэффициентов a и b:

$$u(0,y)=\varphi_1(y),\ u(1,y)=\varphi_2(y),\ 0\le y\le h, \tag{25}$$

$$u_{xx}(0,y)=\varphi_3(y),\ 0\le y\le h, \tag{26}$$

$$u_{xx}(1,y)=\varphi_4(y),\ 0\le y\le h, \tag{27}$$

$$\frac{d}{dx}u\left(\theta(x)\right)=a_1(x)u_y(x,-0)+a_2(x)u_x(x,-0)+a_3(x)u(x,0)+a_4(x),\ \ 0\le x<1, \tag{28}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{AC}=\psi_1(x),\ 0\le x\le \frac{1}{2}, \tag{29}$$

$$\frac{\partial u}{\partial n}|_{BC}=\psi_2(x),\ \frac{1}{2}\le x\le 1, \tag{30}$$

здесь n-внутренный нормал, $\theta(x)=\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)$, $\varphi_j(y),\ a_j(x),(j=\overline{1,4})$, $\psi_i(x)$ $(i=\overline{1,2})$ - заданные функции.

Определение 1. Функция $u(x,y)$ называется регулярным решением уравнения (24), если $u(x,y)$ удовлетворяет уравнение (24) в области $\Omega\setminus I$, и

$$u_{xxx},u_{yxx},{}_C D_{0y}^{\alpha}u_x,\frac{\partial}{\partial y}\left({}_C D_{0y}^{\alpha}u\right),\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{0x}^{\beta}u\right),\frac{\partial}{\partial y}\left(D_{0x}^{\beta}u\right)\in C(\Omega_1),$$

$$u_{xxx},u_{yxx},u_{xyy},u_{yyy},\frac{\partial}{\partial x}\left(D_{0x}^{\gamma}u\right),\frac{\partial}{\partial y}\left(D_{0x}^{\gamma}u\right)\in C(\Omega_2).$$

Задача I. Пусть для коэффициентов a и b имеет место неравенство $0<\frac{b}{a}\le 1$. Требуется найти регулярное решение $u(x,y)$ уравнения (24) в области $\Omega\setminus I$ из класса функций $W_7=\left\{u(x,y):u\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\overline{\Omega_2}\setminus\overline{BC}),\right.$ $u(x,y)\in AC[0,h]$ для $\forall x\in[0,1]$, $u_{xx}\in C(\Omega_1\cup AA_0)$, ${}_C D_{0y}^{\alpha}u\in C(\Omega_1)$, $u_y,u_x\in C(\Omega_2\cup I)$, $\left.y^{1-\alpha}u_y\in C(\Omega_1\cup I)\right\}$ удовлетворяющее краевым условиям (25), (26), (28), (29) и интегральную условию склеивания:

$$\lim_{y\to+0} {}_C D_{0y}^{\alpha} u(x,y) = \lambda_1(x)u_y(x,-0) + \lambda_2(x)u_x(x,-0) + \lambda_3(x)u(x,-0) +$$

$$+\lambda_4(x)\int_0^x r(t)u(t,0)dt + \lambda_5(x), \qquad (31)$$

где $\lambda_i(x)$ $(i=\overline{1,5})$ - заданные функции, причем $\sum_{i=1}^{4}\lambda_i^2(x)\neq 0$.

Задача I эвивалентным образом сводится к интеграольному уравнению Вольтерра второго рода, однозначная разрешимость которого следует из теории интегральных уравнений.

Теорема 13. Если $0<\dfrac{b}{a}\le 1$ и имеют места условия,

$$\varphi_1(y)\in C^2(0,h)\cap C^1\left[0,h\right], \varphi_2(y), \varphi_3(y)\in C^1(0,h)\cap C\left[0,h\right], \lambda_5(x)\in C\left[0,1\right],$$

$$a_i(x),\lambda_i(x)\in C^1\left[0,1\right]\ (i=1,4),\ p_k(x,y)\in C(\overline{\Omega}_1)\cap C^1(\Omega_1),\ q_l(x,y)\in C(\overline{\Omega}_2)\cap C^1(\Omega_2),$$

$$\psi_1(x)\in C^2\left(0,\frac{1}{2}\right)\cap C^1\left[0,\frac{1}{2}\right], \psi_2(x)\in C^2\left(\frac{1}{2},1\right)\cap C^1\left[\frac{1}{2},1\right],$$

то задача I однозначно разрешимо.

Для других возможных случаев коэффициентов a и b поставлены и исследованы следующие задачи.

Задача II. Найти регулярное решение уравнения (24) в области $\Omega\setminus I$ из класса функций W_4 удовлетворяющее всем условиям задачи I, и условие (30) для всех $1\le b/a<+\infty$.

Задача III. Найти регулярное решение уравнения (24) в области $\Omega\setminus I$ из класса функций $W_8=\left\{u: u\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\overline{\Omega_2}),\ u(x,y)\in AC[0,h] \text{ для } \forall x\in[0,1],\right.$ ${}_C D_{0y}^{\alpha}u\in C(\Omega_1),\ u_{xx}\in C(\Omega_1\cup BB_0),\ u_y,u_x\in C(\Omega_2\cup I),\ \left. y^{1-\alpha}u_y\in C(\Omega_1\cup I)\right\}$ для всех $-\infty<b/a<-1$, удовлетворяющие всем условиям задачи **II**, кроме (26) которое заменяется на (27).

Задача IV. Требуется найти решение $u(x,y)$ уравнения (24) в области $\Omega\setminus I$ из класса функций $W_9=\left\{u: u\in C(\overline{\Omega})\cap C^1(\overline{\Omega_2}\setminus\overline{AC}),\right.$ $u(x,y)\in AC[0,h]$, для $\forall x\in[0,1]$, ${}_C D_{0y}^{\alpha}u\in C(\Omega_1)$, $u_{xx}\in C(\Omega_1\cup BB_0)$, $u_y,u_x\in C(\Omega_2\cup I)$, $\left. y^{1-\alpha}u_y\in C(\Omega_1\cup I)\right\}$ для всех $-1\le b/a<0$, удовлетворяющее всем условиям задачи **III**, кроме (29).

Сформулированы и доказаны аналогичные теоремы как теорема 13, для задач II-IV.

Второй параграф главы четыре посвящен доказательству однозначной разрешимости нелокальных задач с интегральным условием склеивания для одного класса уравнения третьего порядка с параболо-гиперболическим оператором, включающим дробную производную Капуто и нелинейные нагрузки содержащее след решения $u(x,0)$.

В первой части данного параграфа сформулирована нелокальная задача (т.е. Задача V.) с интегральным условием склеивания (31), в случае $0<\frac{b}{a}\le 1$,

Вторая часть параграфа посвящена к корректной постановки и изучению других нелокальных задач постановка которых связаны с другими возможными случаями коэффициентов a и b. Излагается подробное исследование нелокальной Задачи VI. Далее, в виде замечаний описываются ход исследования других поставленных задач.

Рассмотрим уравнение

$$\left(a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\right)Lu=0\,, \tag{32}$$

где a, b и c действительные постоянные, причем $a^2+b^2\neq 0$,

$$Lu\equiv\begin{cases} L_1u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-{}_C\,D_{0y}^{\alpha}u+\ f_1(x,y;u(x,0)),\ (x,y)\in\Omega_1 \\ L_2u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\ f_2(x,y;u(x,0)),\ (x,y)\in\Omega_2. \end{cases}$$

${}_C D_{ay}^{\alpha}$ -дифференциальный оператор Капуто порядка $(0<\alpha<1)$, $f_i(x,y,z)$ $(i=1,2)$ – нелинейные нагрузки уравнения (32).

Задача V. Найти регулярное решение уравнения (32) в области $\Omega\setminus I$ из класса функций W_4 удовлетворяющее всем условиям задачи I для всех $0<\frac{b}{a}\le 1$.

Основным результатом параграфа 2 главы 4 является следующая теорема:

Теорема 14. Если $0<\frac{b}{a}\le 1$ и выполняются условия

$$\varphi_1(y)\in C^2(0,h)\cap C^1[0,h],\quad \varphi_2(y),\varphi_3(y)\in C^1(0,h)\cap C[0,h];$$

$$a_j(x)\in C\left[0,1\right]\cap C^2\left(0,1\right),\quad \lambda_j(x),\lambda_5(x)\in C\left[0,1\right]\cap C^1\left(0,1\right)\quad (j=1,4);$$

$$\psi_1(x)\in C^2\left(0,\frac{1}{2}\right)\cap C^1\left[0,\frac{1}{2}\right],\quad f_i(x,y,z)\in C(\overline{\Omega}_i\times R)\cap C_{x,y,z}^{0,1,0}(\Omega_i\times R),\quad (i=1,2);$$

$$\left|f_i(x,y,z)\right|\le\ f_{0i}\cdot\left|z\right|,\ \ |\ f_i(x,y,z_1)-\ f_i(x,y,z_2)\,|\le L_i\,|\,z_1-z_2\,|,\quad (i=1,2).$$

то задача V однозначно разрешима, где $f_{0i},L_i=const>0,\quad (i=1,2)$.

В других возможных случаев коэффициентов a и b, как

$$1 < b/a < +\infty,\quad -\infty < b/a < -1 \text{ и } -1 \le b/a < 0$$

сформулированы корректные задачи аналогичные задачам II-IV, и доказаны однозначная разрешимость этих задач.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

По теме диссертации получены следующие основные результаты:

1. Методом интегралов энергии доказано единственность решения в тех задачах, когда след решения (т.е. $u(x,0)$) попадает в интегральные, дифференциальные или интегро-дифференциальные операторы дробного порядка, а так же приведена теорема существования;

2. Поставлены аналоги задачи Геллерстеда, с локальными и нелокальными условиями для нагруженного параболо-гиперболического уравнения. Показано их однозначная разрешимость на основе теории интегральных уравнений Фредгольма и Вольтерра, также анализированы всевозможные случаи коэффициентов, участвующих в нелокальных условиях.

3. Доказана единственность и существование решения прямых локальных и нелокальных задач с интегральным условием склеивания для уравнения параболо-гиперболического типа с нелинейной нагрузкой;

4. Установлены классы заданных функций и условия на данные, позволяющие однозначное разрещимость обратных задач для уравнения параболо-гиперболического типа с линейными и нелинейными нагрузками;

5. Доказано однозначная разрешимость обратных задач с нелийным условием скливания для параболо-гиперболического уравнения с нагрузкой общего вида.

6. С использованием свойств гипергеометрической функции и оператора Римана-Лиувилля, показаны единственность и существование решения задач для вырождающегося нагруженных уравнений смешанного типа;

7. Поставлены корректные задачи для параболо-гиперболических уравнений третьего порядка с линейной и нелинейной нагрузкой, а также доказаны их однозначная разрешимость методом интегральных уравнений;

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

INSTITUTE OF MATHEMATICS

ABDULLAEV OBIDJON KHAYRULLAEVICH

LOCAL AND NON-LOCAL PROBLEMS FOR LOADED MIXED TYPE EQUATIONS WITH INTEGRO-DIFFERENTIAL OPERATORS INTEGER AND FRACTIONAL ORDER

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics

DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT–2024

The theme of dissertation of doctor of science (DSc) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number B2022.3.DSc/FM199

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific consultant:	**Bozor Islomov** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Durdimurod Durdiev** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Kudratilla Fayazov Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Erkinjon Karimov Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher
Leading organization:	**Institute of Applied Mathematics and Automation Kabardino- Balkarian Scientific Center RAS**

Defense will take place September 10, 2024 at 16:00 at the meeting of Scientific council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics (Address: University str., Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)- 207-91-40). E-mail:uzbmath@umail.uz , Website: www.mathinst.uz

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre of V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics (is registered № 188) (Address: University str., Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)- 207-91-40). E-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Abstract of dissertation sent out on August 2, 2024.

(mailing report № 2 on August 2, 2024).

U.A. Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Academician

J.K. Adashev
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Senior researcher

A.A. Azamov
Chairman of Scientific seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Academician

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The aim of the research work is development of methods for studying the solvability of local and nonlocal problems for loaded equations of mixed type with integro-differential operators of integer and fractional order and generalization of existing methods

The object of the research work is loaded mixed type equations with integro-differential operators' integer and fractional order.

Scientific novelty of the research work is as follows:

the uniqueness of the solution to the problems posed for parabolic-hyperbolic equations with loads in the forms of an integral, differential and integro-differential operator of fractional order was proven by the method of energy integrals, and the existence of a solution was proven by the method of integral equations;

problems of Gellerstedt type with local and nonlocal conditions for a loaded parabolic-hyperbolic equation are posed and their unique solvability is established based on the theory of Fredholm and Volterra integral equations;

classes of given functions and conditions on data are established that allow uniquevocal solvability of direct and inverse problems for equations of parabolic-hyperbolic type with linear and nonlinear loads;

correct problems were posed for degenerate loaded equations of mixed type, also using the properties of the hypergeometric function and the Riemann-Liouville operator, the uniqueness and existence of a solution to the problems posed was proved

based on the theory of Volterra integral equations, the unambiguous separability of local and nonlocal problems for third-order parabolic-hyperbolic equations with linear and nonlinear loads is proven.

Implementation of the research results. Results related to direct and inverse problems for mixed type equations with linear and non-linear loading have been used in the following research projects:

from the obtained results in the study of boundary value problems for loaded equations and the developed methodology were used in the uniqueness of solution of boundary value problems for equations of mixed type in international projects No. 0213-2014-0002 "Nonlocal problems for differential equations of mixed type of mathematical models of extremal processes" and No. AAAA-A19-119013190078-8 "Boundary value problems for equations of basic and mixed type and their application to problems of modeling and control of dynamic systems" (Reference book No. 54 dated September 16, 2022, Institute of applied mathematics and automation KBSC RAS, Russia). The application of scientific results made it possible to prove the uniqueness of the solution to boundary value problems for equations of mixed type;

of the methods for solving direct and inverse problems with an integral gluing condition for a parabolic-hyperbolic equation with a nonlinear load were used in the foreign project No. 0119U102369 “Geometric and analytical methods for studying extremal problems and partial differential equations” for analytical solutions of integral equations and studies of extremal problems for partial differential equations (Certificate of the Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine, number 49/160-02-7 dated September 20, 2022, Ukraine). The application of the scientific result made it possible to uniquely solve integral equations formed by extremal problems;

from methods for solving nonlinear integral equations formed on the basis of direct and inverse problems for evolution with nonlinear theories, studies of the unique solvability of initial boundary value problems for nonlinear differential methods of fractional order were used, researchers from the scientific group “Fractional Analysis and International Equations” of the University of Las Palmas de Grand Canaria (Certificate from the University of Las Palmas de Gran Canaria. September 13, 2022, Spain). The use of scientific results includes direct and inverse problems for various classes of the differential method with fractional derivatives.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, four chapters, conclusion and titles of used literature. The full volume of the thesis is 182 pages.

E‘LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS
I bo‘lim (I часть; part I)

1. Sadarangani K., Abdullaev O.Kh. Non-local problems with integral gluing condition for loaded mixed type equations involving the Caputo fractional derivative. // Electronic Journal of Differential Equations. –2016. –Vol.16(164). –P. 1–10. (3. Scopus, IF=0.908).
2. Sadarangani K., Abdullaev O.Kh. A non-local problem with discontinuous matching condition for loaded mixed type equation involving the Caputo fractional derivative. // Advances in Difference Equations. –2016. –Vol.1(241). (3. Scopus, IF=3.702).
3. Абдуллаев О.Х. О задаче для вырождающегося уравнения смешанного типа с операторами Капуто и Эрдели-Кобера дробного порядка. // Украинский математический журнал. –2019. –Т.71(6). –Стр.723-738. (3. Scopus IF=0.389).
4. Abdullaev O.Kh., Agarwal P. A nonlocal problem with integral gluing condition for a third-order loaded equation with parabolic-hyperbolic operator involving fractional derivatives. // Mathematical Methods in the Applied Sciences. –2020. –Vol.43(6). –P. 3716-3726. (3. Scopus IF=0.702).
5. Abdullaev O.Kh. Some problems for the degenerate mixed type equation involving caputo and Atangana-Baleanu operators fractional order. // Progress in Fractional Differentiation and Applications. –2020. –Vol.6(2). –P. 101-114. (3. Scopus IF=0.515).
6. Islomov B., Abdullaev O.Kh. Gellerstedt type problem for the loaded parabolic-hyperbolic type equation with caputo and Erdelyi–Kober operators of fractional order. // Russian Mathematics. –2020, –Vol. 64(10). –P. 29–42. (3. Scopus IF=0.343).
7. Исломов Б., Абдуллаев О.Х. О нелокальных задач для уравнения третьего порядка с оператором Капуто и нелинейной нагруженной частью. //Уфимский математический журнал. -Т13(3).-2021. -С. 44-56. (3. Scopus IF=0.44).
8. Abdullaev O.Kh. Solvability of BVPs for the Parabolic-hyperbolic type equation with non-linear loaded term. // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. –2021. –Vol.14(2). –P.1-11. (3. Scopus IF=0.267).
9. Abdullaev O.Kh. Gellerstedt type problem with integral gluing condition for a mixed type equation with non-linear loaded term.// Lobachevskii Journal of Mathematics. –2021, –Vol. 42(3). –P. 479–489. (3. Scopus IF=0.378).
10. Абдуллаев О.Х. Об одной задаче для уравнения параболо-гиперболического типа дробного порядка с нелинейной нагруженной частью.// Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. –2021. –Т. 25(1). –С. 7–20. (3. Scopus, IF=0.323).

11. Abdullaev O.Kh. Non-Local Problem For A Loaded Parabolic-Hyperbolic Equation Involving Caputo And Erdelyi-Kober Operators.//Global and stochastic analysis. Special Issue “Modern problems of equations of mathematical physics and its applications”, -2022. -V.9(2).-P. 53–65. (3. Scopus, IF=0.144).
12. Sadarangani K., Abdullaev O.Kh. About a problem for loaded parabolic-hyperbolic type equation with fractional derivatives. // International Journal of Differential Equations. –2016. ijde/ 2016/ 9815796/.(3. Scopus, IF=0.32).
13. Abdullaev O.Kh. Solvability of a non–local problem with integral gluing condition for mixed type equation with Erdelyi–Kober operators.// Fractional differential calculus. –2017. –V.7(2). –P. 371–383. (3. Scopus, IF=0.261).
14. Abdullaev O.Kh., Matchanova A.A. Non-local boundary value problems for a loaded parabolic-hyperbolic type equation of third order involving Caputo operator.// Bulletin of the Insttute of Mathematics. –2018. (5). –P. 36-42.
15. Abdullaev O.Kh. Analog of the Gellerstedt problem for the mixed type equation with integral-differential operators fractional order. // Uzbek Mathematical Journal.–2019, No 3, –P. 4-18.
16. O. Kh. Abdullaev On a problem for the degenerating parabolic-hyperbolic equation involves Caputo derivative fractional order and non-linear terms.// Uzbek Mathematical Journal. –2021. –V.65(1). –P. 5-16.
17. Абдуллаев О.Х. Обратные задачи для параболо-гиперболического уравнения с нелинейной нагрузкой. // Бюллетен института математики. –2022. –V. 5(3). –P. 184-194.
18. Абдуллаев О.Х. Нелокальная задача с интегральным условием склеивания для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с дробной производной Капуто.// Дифференциальные уравнения, 2023, том 59, № 3, с. 350–357

II bo‘lim (II часть, II part)

1. Abdullaev O.Kh. On a problem for the loaded mixed type equation with fractional derivative.// Bulletin of the Kamchatka Regional Association Educational and Scientific Center (KRASEC). Physicsal and Mathematicsal Sciences. –2016. –V.12(1). –P. 7-14.
2. Абдуллаев О. Х. Об одной задаче для уравнения параболо-гиперболического типа с нелинейной нагруженной частью.// Итоги науки и техники. Серия «Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры»., –2020. – том 176. –С. 121–128.
3. Abdullaev O.Kh. Kurbanova F. About a problem for parabolic-hyperbolic type equation involving Erdelyi-Kober operator.// Abstracts of the V international conference “Modern problems of applied mathematics and information technology –Al-Khorezmiy 2016”. Bukhara. -p.111
4. Abdullaev O.Kh. Kurbanova F. One a problem for parabolic-hyperbolic type equation involving Erdelyi-Kober operator.// Transection of the V international

conference “Modern problems of applied mathematics and information technology –Al-Khorezmiy 2016”. Bukhara. -V-2. -pp.330-333.

5. Abdullaev O.Kh. Non-local problem with integral gluing condition for a loaded mixed type equation fractional order.// VIII Международной конференции по математическому моделированию. г.Якутск. 4-8 июля. 2017 г. –С.23
6. Абдуллаев О.Х. Об одной задаче для уравнения смешанного типа дробного порядка. // Материалы международная конференции «Математика в современном мире». Новосибирск. 14-19 августа 2017 г. – С.184.
7. Абдуллаев О. Х., Матчанова А. О постановке краевых задач для одного класса уравнений третьего порядка смешанного типа с оператором Капуто. // Международная научная конференция “Актуальные проблемы прикладной математики”, г.Нальчик, 22-26 май 2018 г. –С.230.
8. Abdullaev O.Kh. Dusanova U. One a problem with integral gluing condition for the mixed type equation fractional order.//Международная научная конференция “Математический анализ и его приложение к современной математической физике” г.Самарканд. 17-20 сентябрь 2018 г.-С.39.
9. Абдуллаев О. Х. Об одной задаче для уравнения смешанного типа с интегро-дифференциальными операторами дробного порядка. // Узбекско-российская научная конференция “Неклассические уравнения математической физики и их приложения”. г.Ташкент.24-26 октябрь 2019г.-С.87-89.
10. Абдуллаев О.Х. Об одной задаче для уравнения параболо-гиперболического типа с нелинейной нагруженной части. // Тезисы докладов международной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смешанные раздели математики». Фергана. 12-13 март.2020 г. –С. 25-28.
11. Б.Исломов., О.Х.Абдуллаев. Об одной нелокальной задаче для уравнения третьего порядка с оператором Капуто и нелинейной нагруженной частью. // X Международная конференция по математическому моделированию, посвященной 75-летию Владимира Николаевича Врагова». Якутск. 27 июля – 01 августа 2020 г. –С.36-37.
12. Abdullaev O.Kh., Cabada A. Uniqueness of solution of a parabolic-hyperbolic type equation with non-linear loaded term. // Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения». Ташкент. 17–18 ноября 2020 г. – С. 440-443.
13. Абдуллаев О.Х. Об одной задаче для уравнения смешанного типа с нелинейной нагруженной части. // «Математиканинг замонавий масалалари: муаммолар ва ечимлар» Республика илмий анжумани. Термез. 21-23 октябр 2020 й. –Б. 233-234.
14. Абдуллаев О.Х., Бахриддинова Н. Об одной задаче для нагруженного параболо-гиперболического уравнения с двумя линиями изменения типа

и дробного дифференцирования. «Annual International April Mathematical Conference – 2021». Almaty. 5-8 April 2021 y. –P. 10-11.

15. Абдуллаев О.Х., Матчанова А.А. Об одной нелокальной задаче для нагруженного уравнения смешанного типа с оператором Капуто.// «Annual International April Mathematical Conference – 2021». Almaty. 5-8 April 2021 y. –P. 11-12.
16. Абдуллаев О. Х. Нелокальная задача для нагруженного параболо–гиперболического уравнения с двумя линиями изменения типа.// Республиканская научная конференция «Глобаллашув даврида математика ва амалий математиканинг долзарб масалалари». Ташкент. ТГТУ, 2021 г. –С. 209-211.
17. Абдуллаев О.Х. Обратная задача для параболо-гиперболического уравнения с нелинейной нагрузкой.// «Annual International April Mathematical Conference – 2022». Almaty. 6-8 April 2022 y. –P 53-54.
18. Абдуллаев О.Х. Обратная задача для параболо-гиперболического уравнения с нелинейной нагрузкой. // «Амалий математика ва ахборот технологияларининг замонавий муаммолари». Халқаро илмий-амалий анжуман. Бухоро. 12-13 май 2022 й. – Б.186-187

Avtoreferat «O‘zbekiston matematika jurnali » jurnali tahririyatida
2024 yil 1-iyulda tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar
o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 3,5. Adadi 100 dona. Buyurtma № 33/24.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.