O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM,
FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI
TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

MIRSABUROVA GULBAXOR MIRAXMATOVNA

SINGULYAR KOEFFITSIYENTLI GELLERSTEDT TENGLAMASI UCHUN KOMBINATSIYALASHGAN LOKAL VA NOLOKAL SHARTLILI CHEGARAVIY MASALALAR

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2024

UDK: 517.956

Fizika – matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико – математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical – mathematical sciences

Mirsaburova Gulbaxor Miraxmatovna
Singulyar koeffitsiyentli Gellerstedt tenglamasi uchun kombinatsiyalashgan lokal va nolokal shartlili chegaraviy masalalar.. 3

Мирсабурова Гулбахор Мирахматовна
Комбинированные задачи с локальными и нелокальными краевыми условиями для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом.. 20

Mirsaburova Gulbaxor Miraxmatovna
Combined problems with local and nonlocal boundary conditions for the Gellerstedt equation with a singular coefficient………………….............. 38

E’lon qilingan ishlar ro‘yxati
Список опубликованных работ
List of published works ……………………………...………….......... 42

**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM,
FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI
TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI**

MIRSABUROVA GULBAXOR MIRAXMATOVNA

SINGULYAR KOEFFITSIYENTLI GELLERSTEDT TENGLAMASI UCHUN KOMBINATSIYALASHGAN LOKAL VA NOLOKAL SHARTLILI CHEGARAVIY MASALALAR

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

TOSHKENT – 2024

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida № B.2024.2.PhD/FM498 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya ishi Termiz davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida (www.ik-fizmat.nuu.uz) va “Ziyonet” Axborot ta’lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Ro‘ziyev Menglibay Xoltojibayevich** fizika-matematika fanlari doktori, katta ilmiy xodim
Rasmiy opponentlar:	**Ashurov Ravshan Radjabovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Urinov Axmadjon Kushakovich fizika-matematika fanlari doktori, professor
Ye**takchi tashkilot:**	**Samarqand davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 raqamli Ilmiy kengashning 2024 yil “___”_________ soat ____ dagi majlisida bo‘lib o‘tadi (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy. Tel.: (+99878) 227-12-24, faks: (+99878) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan O‘zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (___ raqami bilan ro‘yxatga olingan) (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy. Tel.: (+99878) 246-02-24).

Dissertatsiya avtoreferati 2024 yil “____” _______________kuni tarqatildi.
(2024 yil “____” ___________ dagi _______ raqamli reestr bayonnomasi).

A. Sadullayev
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi,
f.-m. f. d., akademik

R. M. Jo‘rayev
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash ilmiy kotibi,
f.-m. f. f. d. (PhD)

Sh.A.Alimov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash huzuridagi
ilmiy seminar raisi,
f.-m. f. d., akademik

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyati. Jahonda ilmiy va amaliy xususiyatga ega bo‘lgan ayrim matematik modellarni o‘rganish, ko‘plab buziluvchan giperbolik va aralash tipdagi differensial tenglamalarni tadqiq etishga olib keladi. Ma’lumki, buziluvchan giperbolik va aralash tipdagi tenglamalar uchun qo‘yilgan klassik masalalarni **singulyar koeffitsiyentli buziluvchan giperbolik tipdagi tenglamalar (SKBGTT)** va **singulyar koeffitsiyentli aralash tipdagi tenglamalar (SKATT)** uchun noklassik holda ta’riflash va ularni o‘rganish ilmiy tadqiqotlarda yetakchi o‘rinlardan birini egallamoqda. Ayniqsa, hozirgi vaqtda jahonning aksariyat ilmiy maktablarida SKBGTT va SKATT uchun kombinatsiyalashgan lokal va nolokal shartlarga ega bo‘lgan chegaraviy masalalarning tadqiqi zamonaviy matematikaning dolzarb yo‘nalishlaridan biri bo‘lib hisoblanmoqda. Lokal va nolokal chegaraviy masalalar nazariyasi texnika va tabiatda, jumladan, gazlar dinamikasi, neft qatlamlari holati, yer osti suvlarini filtrlash, murakkab tuzilishga ega obyektlarda issiqlik va massa almashinishi, o‘tkazgichda elektr tebranishlari, g‘ovakli muhit bilan o‘ralgan kanallarda suyuqlik harakati, aerodinamika va boshqa hodisalarni matematik modellashtirishda muhim ahamiyatga ega.

Jahon amaliyotida SKBGTT va SKATT uchun lokal va nolokal shartlili kombinatsiyalashgan chegaraviy masalalarni tadqiq etish borasida qator ilmiy tadqiqotlar olib borilgan. Ushbu masalalarni tadqiqi yadroning nosingulyar qismida sonli parametr bo‘lgan va shu bilan birga tenglamaning o‘ng tomoni nofredgolm operatoridan iborat bo‘lgan Trikomining singulyar integral tenglamalariga olib kelib o‘rganiladi. Bu turdagi tenglamalar yangi tipdagi singulyar integral tenglamalar bo‘lganligi sababli, ular uchun maqsadli ilmiy tadqiqotlarni olib borish muhim ahamiyatga ega, shu jumladan; singulyar koeffitsiyentli tenglamalar uchun tenglamaning tipi o‘zgaradigan chizig‘i atrofida tenglama yechimi va uning hosilasi qiymatlarini chegaralangan yoki chegaralanmagan bo‘lishini aniqlash; kombinatsiyalashgan lokal va nolokal shartlili chegaraviy masalalarni o‘rganish; tenglamalarning kichik hadlari oldidagi koeffitsiyentlari qabul qiladigan qiymatlariga qarab korrekt masalalarni qo‘yish va ularni tadqiq etish, yangi tipdagi singulyar integral tenglamalarni regulyarizatsiyalash algoritmini ishlab chiqish, yangi ko‘rinishdagi Furye integrallarini kompleks analizning qoldiqlar nazariyasi yordamida hisoblash. Yuqorida qayd etilgan yo‘nalishlarda olib borilgan ilmiy izlanishlar tadqiqot ishining dolzarbligini belgilaydi.

Respublikamizda matematik-fizika, matematik-biologiya, suyuqlik va gaz dinamikasi, yer osti va usti suvlari dinamikasi, aerodinamika kabi fundamental fanlarni rivojlantirish yuzasidan keng qamrovli chora-tadbirlar amalga oshirilib, muayyan natijalarga erishilmoqda. “Algebra va uning tadbiqlari, differensial tenglamalar va ularning tadbiqlari, nochiziqli sistemalar va matematik modellashtirish, dinamik sistemalar va ularni modellashtirish, stoxastik analiz, tibbiy-biologik informatika, hisoblash matematikasi” fanlarining ustuvor yo‘nalishlarida xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqot ishlari ko‘lamini kengaytirish, ularning natijadorligi va amaliy ahamiyatini oshirish matematika fanining faoliyat yo‘nalishlari va muhim vazifalari sifatida belgilab berilgan.[1] Ushbu vazifalarni amalga oshirishda, xususan, SKATT va SKBGTT nazariyasini rivojlantirish hamda ular uchun kombinatsiyalashgan lokal va nolokal masalalarni o‘rganish muhim ahamiyat kasb etmoqda.

Mazkur dissertatsiya ishining mavzusi va tadqiqot obyekti O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-4947-son Farmonida, 2017-yil 17-fevraldagi “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2789 sonli va 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708 sonli Qarorlarda, shuningdek, fundamental fanga oid boshqa me’yoriy-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarga mos keladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur dissertatsiya Respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi.

Aralash tipdagi tenglamalar uchun dastlabki fundamental tadqiqotlar italyan matematigi F.Trikomi tomonidan bajarilgan. Keyinchalik buziluvchan giperbolik, elliptik va aralash tipdagi tenglamalar nazariyasi bilan bog‘liq muammolar E.Xolmgren, S.Gellerstedt, I.Frankl, S.Moreves, G.Karatoprakliyev, M.Protter va MDHga a’zo mamlakatlar olimlaridan A.V.Bitsadze, A.A.Samarskiy, V.I.Jegalov, A.M.Naxushev, S.G.Mixlin, Yu.V.Devingtal, K.I.Babenko, M.M.Smirnov, V.F.Volkodavov, M.M.Meredov, A.I.Kojanov, S.P.Pulkin, K.B.Sabitov, T.Sh.Kalmenov, N.Yu.Kapustin, Ye.I.Moiseyev, S.M.Ponamarev, A.P.Soldatov, O.A.Repin, A.N.Zarubin, A.A.Polosin, A.V.Psxu, A.I.Kojanov, M.A.Sadibekov, A.S.Berdishev, R.S.Xayrullin va boshqalarning fundamental tadqiqot ishlarida yoritilgan.

Aralash tipdagi tenglamalar nazariyasini takomillashtirish borasida mamlakatimiz olimlaridan M.S.Salohiddinov, T.D.Jurayev, Sh.A.Alimov, R.R.Ashurov, S.Abdinazarov, A.K.Urinov, J.O.Taxirov, B.Islomov, A.Xasanov, O.R.Xolmuxamedov va boshqalar salmoqli ilmiy natijalarga erishgan.

Ilmiy ishlar soni ko‘p bo‘lishiga qaramay, singulyar koeffitsientli Gellerstedt tenglamasi uchun kombinatsiyalashgan lokal va nolokal shartlili chegaraviy masalalar yetarlicha o‘rganilmagan. Shu nuqtai nazardan, mazkur dissertatsiya ishi mavzusini tanlash uning maqsad va vazifalarini belgilashda asos sifatida xizmat qildi.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan Oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi.

---

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta`lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-son qarori

Dissertatsiya tadqiqoti Termiz davlat universiteti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasidagi Ф-4-32: (2012-2016) “Singulyar koeffitsiyentli Gellerstedt tenglamasi uchun Trikomi, siljishli masalalar va Bitsadze-Samarskiy shartlarini bir ta’rifda birlashtirgan masalalarning korrektligini o‘rganish” fundamental loyihasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi quyidagilardan iborat**:**

SKBGTT uchun chegaraviy xarakteristika va unga parallel ichki xarakteristikalarda Bitsadze-Samarskiy shartlili masalani korrektligini isbotlash;

SKATT uchun bir ta’rifda Trikomi va ichki xarakteristikalarda siljishli masalalarni birlashtirgan masalani bir qiymatli yechilishini isbotlash;

SKATT uchun Trikomi sharti xarakteristikada to‘liq berilmagan hamda buzilish chizig‘ida Frankl shartiga o‘xshash shartlili masala yechimining mavjudligi va yagonaligini isbotlash.

Tadqiqotning vazifalari:

SKBGTT uchun Bitsadze-Samarskiy tipdagi yangi korrekt masalalarni ta’riflash va tadqiq qilish;

bir necha siljishli funksional tenglamalarni yechish algoritmini ishlab chiqish, yechim izlanadigan sinfni muhimligini ko‘rsatuvchi kontr misol tuzish;

SKATT uchun bir ta’rifda lokal va nolokal masalalar shartlarini birlashtiruvchi masalalarni o‘rganish;

SKATT uchun Trikomi sharti chegaraviy xarakteristika bo‘lagida berilgan va buzilish chizig‘ining kesmasida Frankl shartiga o‘xshash shartlili masalani korrektligini aniqlash;

noxarakteristik qismi nofredgolm integral operatorli, hamda yadroning nosingulyar qismi sonli parametrga ega bo‘gan Trikomi singulyar integral tenglamasini regulyarizatsiyalash algoritmini ishlab chiqish.

Tadqiqotning obyekti SKBGTTlar, SKATTlar va yadrolarining nosingulyar qismida sonli parametr bo‘lgan, hamda o‘ng tomoni nofredgolm integral operatorlari bo‘lgan singulyar integral tenglamalar.

Tadqiqotning predmeti SKBGTT va SKATT uchun kombinatsiyalashgan lokal va nolokal masalalardan iborat.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiya ishida maqsadga erishishimiz uchun quyidagi usullardan foydalanilgan:

bir necha siljishli funksional tenglamalarni yechish uchun ketma-ket yaqinlashish va iteratsiyalash metodlarining kombinatsiyalashtirilgan usulidan;

ekstremum prinsipi va Zarembo-Jiro prinsipidan;

ekstremum nuqtasida yechimning lokal xossasidan;

yadroning “nosingulyar” qismida sonli parametr bo‘lgan F.Trikomi integral tenglamasini regulyarizatsiyalash uchun S.G.Mixlin tomonidan takomillashtirilgan Karlemanning regulyarizatsiyalash usulidan;

Viner-Xopf integral tenglamasini regulyarizatsiyalash;

yangi Furye integrallarini hisoblashda qoldiqlar nazariyasidan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

SKBGTT uchun izlanayotgan yechimning qiymatlarini chegaraviy va unga parallel bir necha ichki xarakteristikalarda bog‘lovchi Bitsadze-Samarskiy shartlili masala birinchi marta tadqiq qilingan;

funksional tenglama yechimi izlanadigan sinfning muhimligi kontr misol yordamida ko‘rsatilgan;

bir necha siljishga ega bo‘lgan funksional tenglama ketma-ket yaqinlashish va iteratsiya metodlarning kombinatsiyalashgan metodi yordamida yechilgan;

F.Trikomi masalasi va A.M.Naxushevning ichki xarakteristikada siljishli masalasi bir masalada ta’riflanib birinchi marta o‘rganilgan;

S.G.Mixlin tomonidan takomillashtirilgan Karlemanning regulyarizatsiyalash metodi yordamida o‘ng tomonida nofredgolm operatori bo‘lgan singulyar integral tenglamalar Viner-Xopf integral tenglamasiga olib kelingan;

SKATT uchun Trikomi sharti xarakteristikada to‘liq berilmagan va buzilish chizig‘ida Frankl shartiga o‘xshash shartlili masala yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremalar isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

ketma-ket yaqinlashish va iteratsiyalash metodlarining kombinatsiyalashtirilgan metodi yordamida bir necha siljishli funksional tenglamani yechish algoritmi qurilgan;

S.G.Mixlin metodi yordamida sonli parametrli Trikomi integral tenglamasini yechimi oshkor formula ko‘rinishida topilgan;

analitik funksiyalar nazariyasining qoldiqlar nazariyasi yordamida Furye integrallarini hisoblash algoritmi qurilgan va natijada ba’zi bir xosmas integrallar hisoblangan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi kombinatsiyalangan ketma-ket yaqinlashish va iteratsiya usuli, xususiy hosilali differensial tenglamalar, analitik funksiyalar va integral tenglamalar nazariyasi usullaridan foydalanib, deduktiv xulosalar qabul qilinganligi hamda teoremalarning qat’iy va to‘liq isbotlanganligi bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati ushbu ishda olingan ilmiy natijalardan giperbolik va aralash tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasida foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

Dissertatsiya ishida olingan natijalarning amaliy ahamiyati, ilmiy natijalarni giperbolik va aralash tipdagi tenglamalar orqali ifodalanadigan fizik, texnik va biologik jarayonlarni matematik modelini o‘rganishda tatbiq etilishi mumkinligi bilan asoslanadi.

Tadqiqot ishlarning joriy qilinishi. Singulyar koeffitsiyentli Gellerstedt tenglamasi uchun kombinatsiyalashgan lokal va nolokal shartlili chegaraviy masalalarni tadqiq qilish bo‘yicha olingan natijalar asosida:

singulyar integral tenglamalarni regulyarizatsiya qilish uchun ishlab chiqilgan usullaridan 2017-2020-yillarga mo‘ljallangan “Ikkinchi va yuqori tartibli aralash tipdagi tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalarning tadqiqi” mavzusidagi

№OT-Ф4-88-sonli loyihada aralash tipdagi tenglamalar uchun lokal va nolokal chegaraviy masalalarni yechishda foydalanilgan (O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti, 2024-yil 26-martdagi 2/132-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, elliptik-giperbolik tipdagi tenglamalari uchun ba’zi nolokal chegaraviy masalalarning bir qiymatli yechilishini isbotlash imkonini bergan;

singulyar koeffitsiyentli Gellerstedt tenglamasi uchun Bitsadze-Samarskiy shartlili masala, F.Trikomi masalasi va A.M Naxushev masalalarini bir qiymatli yechimga ega bo‘lishi haqidagi yakuniy teoremalar xulosalaridan bajarilishi 2019-2021-yillarga mo‘ljallangan “Asosiy va aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar va ularni boshqaruv masalalari hamda dinamik sistemalarni modellashtirishga qo‘llash” mavzusidagi NIOKTP AAAA-A19-119013190078-8 sonli va 2022-2024 yillarga mo‘ljallangan “Asosiy va aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy va boshqaruv masalalari va ularni taqsimlangan parametrli sistemalarni tadqiq etishda qo‘llash” mavzusidagi NIOKTP 122041800029-5-sonli loyihalarda foydalanilgan. Pirovard natijada yuklangan buziluvchi tenglamalar va aralash turdagi tenglamalar uchun lokal va nolokal chegaraviy masalalar va siljishli masalalarni tahlil qilish va tadqiq etishga imkoniyat yaratdi. (Rossiya Fanlar Akademiyasi Kabardin-Balkar ilmiy markazi amaliy matematika va avtomatlashtirish instituti, 2024-yil 10-fevraldagi 01-13/10-1-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo‘llanilishi, elliptik-giperbolik tipdagi tenglamalari uchun ba’zi nolokal chegaraviy masalalarning bir qiymatli yechilishini isbotlash imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari Farg‘ona davlat universiteti Matematik analiz va differensial tenglamalar kafedrasining “Differensial tenglamalar va unga turdosh matematik sohalarning dolzarb muammolari” ilmiy seminarida, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V. I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining “Differensial tenglamalar va matematik fizika tatbiqlari” ilmiy seminarida, Termiz davlat universitetining Matematik analiz hamda Algebra va geometriya kafedralari qo‘shma ilmiy seminarida, mazkur tadqiqot natijalari 8 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan 4 ta Xalqaro va 4 ta Respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 17 ta ilmiy ish chop etilgan, ulardan 9 tasi O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining falsafa doktori (PhD) dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etishga tavsiya qilingan nashrlarda, shulardan 6 tasi xorijiy va 3 tasi Respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 118 betdan iborat.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida o‘tkazilgan tadqiqotlarning dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning Respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dssertatsiyaning **“Singulyar koeffitsiyentli giperbolik tipdagi tenglama uchun Bitsadze-Samarskiy masalasi”** deb nomlanuvchi birinchi bobida buziluvchan singulyar koeffitsiyentli giperbolik tipdagi tenglama uchun izlanayotgan funksiyaning qiymatini chegaraviy va ichki xarakteristikalarda bog‘lovchi Bitsadze- Samarskiy shartlili masalaning korrektligi o‘rganilgan.

Ushbu bobning birinchi paragrafida Γ_1 masalaning qo‘yilishi keltirilgan.

D soha xOy tekisligining $y<0$ yarim tekisligida yotuvchi va

$$-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0 / y)u_y = 0, \tag{1}$$

tenglamaning uchlari $A(-1,0)$ va $B(1,0)$ nuqtalardan chiquvchi xarakteristikalari hamda $y=0$ o‘qining AB kesmasi bilan chegaralangan bir bog‘lamli sohasi bo‘lsin. Bu erda m-musbat o‘zgarmas son, $\beta_0 \in (-m/2, 1)$.

AB kesmada $E_1 = E_1(c_1,0)$ va $E_2 = E_2(c_2,0)$ nuqtalarni belgilaymiz, bunda $-1 < c_1 < c_2 < 1$. $I=(-1,1)$, $y=0$ o‘qining intervali bo‘lsin, $\overline{I}$ kesmada quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $p_k(x) \in C^2(\overline{I}),\ k=1,2$ funksiyani qaraymiz:

1^0. $p_k(x)-$bu $\overline{I}=[-1,1]$ kesma nuqtalaridan iborat to‘plamni, $[c_k,1]$, $k=1,2$ nuqtalar to‘plamiga mos ravishda akslantiruvchi diffeomorfizmdan iborat;

2^0. Ushbu $p_2(x) > p_1(x) > x$, $\forall x \in \overline{I} \setminus \{1\}$, $p_k(-1)=c_k$, $p_k(1)=1$ munosabatlar o‘rinli.

Misol sifatida $p_k(x) = b_k x + a_k$, $k=1,2$ chiziqli funksiyalar keltirilgan, bu erda $a_k + b_k = 1, a_k - b_k = c_k$.

Ushbu belgilashlarni kiritamiz

$$\theta(x_0) = \frac{x_0-1}{2} - i\left[\frac{m+2}{4}(1+x_0)\right]^{\frac{2}{m+2}},\ \theta_k^*(p_k(x_0)) = \frac{p_k(x_0)+c_k}{2} - i\left[\frac{m+2}{4}(p_k(x_0)-c_k)\right]^{\frac{2}{m+2}},$$

bu erda $\theta_0(x_0)$ va $\theta_k^*(p_k(x_0))$ mos ravishda (1) tenglamaning $(x_0,0)$ va $(p_k(x_0),0)$ nuqtalaridan chiquvchi xarakteristikalarining AC va E_kB_k xarakteristikalar bilan kesishish nuqtalarining affikslari.

Γ_1 ***masala.*** D sohada (1) tenglamaning quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ yechimi topilsin:

$$u(x,0) = \tau(x),\ x \in \overline{I}, \tag{2}$$

$$u[\theta_0(x)] = \mu_1 u[\theta^*{}_1(p_1(x))] + \mu_2 u[\theta^*{}_2(p_2(x))] + \rho(x),\ x \in \overline{I}, \tag{3}$$

bu erda $p_k(x)=b_k x+a_k,\ k=1,2$ chiziqli funksiyalar $\mu_1,\ \mu_2$ - berilgan musbat sonlar va $\tau(x)\ ,\rho(x)\in C^2(\overline{I})$ ma'lum funksiyalar, shu bilan birga

$$\rho(-1)=\rho'(-1)=\rho''(-1)=0,\ \tau(-1)=\tau'(-1)=\tau''(-1)=0,$$
$$\tau(c_k)=\tau'(c_k)=\tau''(c_k)=0,\ k=1,2. \tag{4}$$

$u(x,y)$ funksiya $\overline{D}$ sohada uzluksiz bo'lgani uchun, (3) shartdan $x=-1$ bo'lganda ushbu $\tau(-1)=\mu_1\tau(c_1)+\mu_2\tau(c_2)+\rho(-1)$ muvofiqlashtiruvchi shart o'rinli bo'ladi.

Birinchi bobning ikkinchi paragrafida Γ_1 masala $\beta_0\in(-m/2,1)$ holida o'rganilgan. Ushbu paragrafning asosiy natijasi ushbu teoremadan iborat:

1-teorema. *Agar (4) va ushbu*

$$\delta_1+\delta_2<1, \tag{5}$$

shartlar bajarilsa, u holda Γ_1 *masala bir qiymatli yechiladi. Bu yerda* $\delta_k=\mu_k b_k^{1-2\beta}$, $\beta=(m+2\beta_0)/2(m+2)$, $k=1,2$.

Shakli o'zgargan Koshi masalasi yechimining integral ifodasidan foydalanib (3) shartga asosan ekvivalent ravishda ushbu

$$v(x)=\mu_1 b_1^{1-2\beta}v(p_1(x))+\mu_2 b_2^{1-2\beta}v(p_2(x))+F(x) \tag{6}$$

ikki siljishli funksional tenglamani hosil qilamiz. (6) funksional tenglamaning yechimini $x=1$ nuqtada chegaralangan funksiyalar sinfidan izlaymiz, yechimlarning bu sinfi muhimdir, agar bu shartdan voz kechsak, u holda Γ_1 masala nokorrekt bo'lishi mumkin.

Bu funksional tenglamaning yechimini topishda kombinatsiyalashgan ketma-ket yaqinlashish va iteratsiyalar metodidan foydalanilgan. Buning uchun ushbu

$$v_j(x)=\mu_1 b_1^{1-2\beta}v_j(\lambda(x))+\mu_2 b_2^{1-2\beta}v_{j-1}(r(x))+F(x),\ x\in I,$$

rekurrent munosabatdan foydalanilgan, bu yerda $\lambda(x)=p_1(x),\ \ r(x)=p_2(x)$ bundan $v_0(x),v_1(x),v_2(x),...,v_j(x),...$ ketma-ketlik hadlari hosil qilinadi. $v_0(x)$ni ushbu $v_0(x)=\delta_1 v_0(\lambda(x))+F(x)$ funksional tenglamaning yechimi deb qabul qilamiz. Bu funksional tenglama iteratsiya usulida yechiladi:

Birinchi bobning uchinchi paragrafida esa Γ_1 masala (1) tenglama uchun parametrning $\beta_0=-m/2$ qiymatida hamda $p_k(x_0),k=1,2$ chiziqli funksiya bo'lmagan holda o'rganilgan.

Bu hol uchun quyidagi teorema o'rinli:

2-teorema. *Agar ushbu* $\delta_1+\delta_2<1$ *shart bajarilsa, u holda* Γ_1 *masala bir qiymatli yechiladi. Bu erda* $\delta_1=\max\limits_{x\in\overline{I}}\left|\mu_1 p_1'(x)\right|$ *,* $\delta_2=\max\limits_{x\in\overline{I}}\left|\mu_2 p_2'(x)\right|$.

Birinchi bobning to'rtinchi paragrafida Γ_2 masalasi o'rganilgan.

Γ_2 **masala.** D sohada (1) tenglamaning quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D)$ yechimi topilsin:

$$u(x,0)=\tau(x),\ \ x\in\overline{I},$$

$$D_{-1,x}^{1-\beta}u\left[\theta_0(x)\right]=\sum_{k=1}^{l}\mu_k(x)D_{-1,x}^{1-\beta}u\left[\theta_k^*(\mathrm{p}_k(x))\right]+\rho(x),\quad x\in\overline{I}.$$

Bu erda $p_k(x)=b_kx+a_k,\ k=1,2,...,l$ chiziqli funksiyalar, $\mu_k(x),\rho(x)-$ berilgan funksiyalar.

Shuni ta'kidlaymizki, bu yerda AB kesmada l ta nuqta qaraladi: $E_k(\mathrm{c}_k,0)$, $-1<\mathrm{c}_1<c_2<...<c_l<1$.

Γ_2 masalasi Darbu formulasi yordamida l ta siljishli funksional tenglamani yechishga olib kelinadi:

$$\nu(x)=\sum_{k=1}^{l}b_k^{1-2\beta}\mu_k(x)\nu(p_k(x))+F(x),\quad x\in\overline{I}.$$

Ushbu paragrafning asosiy natijasi:

3-teorema. Γ_2 *masalasi ushbu:* $q_1+q_2+...q_l<1$, $\rho(-1)=\rho'(-1)=\rho''(-1)=0$, $\tau(-1)=\tau'(-1)=\tau''(-1)=0$, *shartlar bajarilganda bir qiymatli yechimga ega bo'ladi, bu yerda* $q_k=\max\left|b_k^{1-2\beta}\mu_k(x)\right|,\ k=\overline{1,l}$.

Dissertatsiyaning **"Singulyar koeffitsiyentli Gellerstedt tenglamasi uchun Trikomi shartlili va ichki xarakteristikalarda siljishli shartlili kombinatsiyalashgan masala"** nomli **ikkinchi bobida** singulyar koeffitsiyentli Gellerstedt tenglamasi uchun chegaraviy xarakteristika ixtiyoriy ravishda ikki bo'lakka bo'linib, birinchi bo'lakda Trikomi sharti, ikkinchi bo'lak esa lokal shartdan ozod qilinib, uning o'rniga ichki xarakteristikalarda siljishli shart berilgan masala yechimining yagonaligi va mavjudligi haqidagi teoremalar isbot qilingan.

Ikkinchi bobning birinchi paragrafida singulyar koeffitsiyentli Gellerstedt tenglamasi uchun chegaraviy xarakteristikada Trikomi shartlili va ichki xarakteristikalarda siljishli TB masalasi qo'yilgan.

Ω soha xOy tekisligining chekli va bir bog'lamli sohasi bo'lib, u $y>0$ yarim tekislikda yotuvchi va uchlari $A(-1,0)$ va $B(1,0)$ nuqtalarda bo'lgan $\sigma_0: x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}=1$ normal chiziq bilan, $y<0$ yarim tekislikda esa

$$(signy)|y|^m u_{xx}+u_{yy}+(\beta_0/y)u_y=0,\quad m>0,\ -m/2<\beta_0<1,\qquad (7)$$

tenglamaning AC va BC xarakteristikalari bilan chegaralangan bo'lsin.

Ω^+ va Ω^- orqali Ω sohaning mos ravishda $y>0$ va $y<0$ yarim tekisliklardagi qismlarini belgilaymiz, C_0 va C_1 orqali esa (7) tenglamaning AC va BC xarakteristikalarining $E(c,0)$ nuqtadan chiquvchi xarakteristikalar bilan kesishish nuqtalarini belgilaymiz, bu yerda $c\in I=(-1,1)$ $y=0$ o'qining intervali, shu bilan birga D_0 va D_1 orqali EC_1 va BC_1 xarakteristikalarining $E_1(c_1,0)$ nuqtadan chiquvchi xarakteristikalar bilan kesishish nuqtalarini belgilaymiz, bu yerda $-1<c<c_1<1$.

$[c_1,1]$ kesma nuqtalaridan iborat to‘plamni $[c,c_1]$ kesmaga akslantiradigan $q(x)=\rho-kx$ diffeomorfizmni qaraymiz, bu yerda $\rho=c_1(1-c)/(1-c_1)$, $k=(c_1-c)/(1-c_1)$ va $q(c_1)=c_1$, $q(1)=c$ munosabatlar o‘rinli.

TB **masala.** Ω sohada quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ funksiya topilsin:

1) $u(x,y)\in C^2(\Omega^+)$ va Ω^+ sohada (7) tenglamani qanoatlantirsin;
2) $u(x,y)$ funksiya Ω^- sohada (7) tenglamaning R_1 sinfga tegishli umumlashgan yechimidan iborat;
3) AB buzilish chizig‘ida ushbu ulanish sharti bajariladi

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\ x\in I\setminus\{c,c_1\}, \tag{8}$$

bu limitlar $x\to\pm1,\ x\to c,\ x\to c_1$ nuqtalarda $1-2\beta$ dan kichik tartibdagi maxsuslikka ega bo‘lishi mumkin, bu erda $\beta=(m+2\beta_0)/2(m+2),\ \beta\in(0,1/2)$;

4) quyidagi shartlarni bajarsin

$$u(x,y)=\varphi(x),\ (x,y)\in\bar{\sigma}_0, \tag{9}$$

$$u(x,y)\,|_{AC_0}=\psi_0(x),\ x\in[-1,(c-1)/2], \tag{10}$$

$$a_0u[\theta_0^*(x)]+b_0u[\theta_1^*(q(x))]=\psi_1(x),\ x\in[c_1,1], \tag{11}$$

$$u(q(x),0)-u(x,0)=f(x),\quad c_1\le x\le 1, \tag{12}$$

bu yerda a_0,b_0 berilgan sonlar bo‘lib, $a_0^2+b_0^2\neq0$. $\theta_0^*(x_0)$ va $\theta_1^*(x_0)-$ mos holda E_1D_1 va E_1D_0 xarakteristikalarning, $M(x_0,0)$, $M(q(x_0),0)$ nuqtalardan chiquvchi xarakteristikalar bilan kesishish nuqtalari affikslari, bunda $x_0\in[c_1,1]$, $q(x_0)\in[c,c_1]$, $\varphi(x)\in C^{0,\alpha}(\bar{I})$, $\psi_0(x)\in C^{1,\alpha}[-1,(c-1)/2]$, $\psi_1(x),f(x)\in C^{1,\alpha}[c_1,1]$, $\psi_0(-1)=0$, $f(c_1)=0$, $\varphi(x)=(1-x^2)\tilde{\varphi}(x)$, $\tilde{\varphi}(x)\in C^{0,\alpha}(\bar{I})$ munosabatlar o‘rinli. Agar $c=1$ bo‘lsa TB masalasi Trikomi masalasiga aylanadi.

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida TB masalasi yechimining yagonaligi isbotlangan.

4-teorema. (A.V.Bitsadzening ekstremum prinsipiga o‘xshash prinsip). *Ushbu* $\psi_0(x)\equiv0,\psi_1(x)\equiv0,f(x)\equiv0,$

$$a_0\ge0,\ b_0\ge0,\ \ a_0^2+b_0^2\neq0 \tag{13}$$

shartlar bajarilganda, TB masalaning yechimi o‘zining eng katta musbat qiymatlarini (EKMUSQ) va eng kichik manfiy qiymatlarini (EKMANQ) yopiq $\bar{\Omega}^+$ *sohaning* $\bar{\sigma}_0$ *chizig‘ida erishadi.*

Ω^- sohada (7) tenglama uchun shakli o‘zgargan Koshi boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi masala yechimini beruvchi Darbu formulasidan foydalanib, (10) va (11) shartlarga ko‘ra, mos ravishda, ushbu munosabatlarni hosil qilamiz

$$\nu(x)=\gamma D_{-1,x}^{1-2\beta}\tau(x)+\psi_3(x),\quad -1<x<c, \tag{14}$$

$$a_0\nu(x)+b_0k^{1-2\beta}\nu(q(x))=\gamma(a_0+b_0)D_{c,x}^{1-2\beta}\tau(x)=\psi_2(x),\qquad c_1<x<1, \tag{15}$$

bu yerda

$$\gamma = 2\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)((m+2)/4)^{2\beta} / \Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta).$$

4-teorema (14) va (15) munosabatlarga va (8) ulanish shartiga asosan, Zaremba-Jiro prinsipi, kasr tartibli differensial operator uchun ekstremem prinsiplarini qo‘llab standart metod yordamida isbotlanadi.

Bu teoremadan TB masala yechimining yagonaligi kelib chiqadi.

Ikkinchi bobning uchinchi paragrafida TB masalasi yechimining mavjudligi isbotlangan.

5-teorema. *(13) shart va ushbu* $\beta_0 > (1-m)/3$ *tengsizlik bajarilganda, TB masala bir qiymatli yechiladi.*

Bu teoremani isbotlashda, TB masalasi $\tau_0(x) = \tau(x),\ \ x \in (-1,c),\ \ \tau_1(x) = \tau(x),$ $x \in (c_1,1)$ noma’lum funksiyalarga nisbatan ekvivalent ravishda singulyar integral tenglamalar sistemasini tadqiq qilishga keltirilgan.

Ω^+ sohadan I intervalga keltirilgan $\tau(x)$ va $\nu(x)$ noma’lum funksiyalar orasidagi ushbu munosabatni keltiramiz:

$$\nu(x) = -k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}\left\{\frac{\tau(1)}{(1-x)^{1-2\beta}} + \frac{\tau(-1)}{(1+x)^{1-2\beta}} + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{1}\frac{(x-t)\tau'(t)dt}{|x-t|^{2-2\beta}} - (2\beta-1)\int_{-1}^{1}\frac{\tau(t)dt}{(1-xt)^{2-2\beta}}\right\} + \Phi(x),\ x \in I. \qquad (16)$$

Trikomi sharti (10) asosida hosil qilingan (14) munosabatdan, (16) tenglikka ko‘ra $\nu(x)$ ni yo‘qotib, ushbu singulyar integral tenglamani hosil qilamiz:

$$\tau_0(x) - \lambda\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt}\right)\tau_0(t)dt = g_0(x), \qquad x \in (-1,c), \qquad (17)$$

bu yerda

$$g_0(x) = \lambda k\int_{c_1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+q(t)}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau_1(t)dt}{q(t)-x} + L_1[\tau_1] + F_5(x), \quad x \in (-1,c). \qquad (18)$$

(18) ifodadagi birinchi integral operator yadrosi $(x,t) = (c,1)$ (bu erda $q(1) = c$) nuqta birinchi tartibli ajratilgan maxsuslikka ega va shu sababli bu integral operator ajratib olingan. (17) ifodani $\tau_0(x)$ noma’lum funksiyaga nisbatan Trikomining singulyar integral tenglamasi sifatida qarash mumkin va uning o‘ng tomoni faqat $\tau_1(x)$ ga bog‘liq.

1-lemma. *Agar* $g_0(x),\ x \in (-1,c)$ *funksiya Gyolder shartini qanoatlantirsa va* $g_0(x) \in L_p(-1,c),\ p > 1$ *bo‘lsa, u holda (17) tenglamaning yechimi* $H(-1,c)$ *funksiyalar sinfida, ya’ni* $(1+x)^{2\beta-1}\tau_0(x)$ *funksiya* $(-1,c)$ *intervalning* $x = c$ *o‘ng chetki nuqtasida chegaralangan, kesmaning* $x = -1$ *chap chetki nuqtasida esa chagaralanmagan funksiyalar sinfida*

$$\tau_0(x) = \cos^2(\alpha\pi)g_0(x) +$$

$$+\frac{\sin(2\alpha\pi)}{2\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{(c-x)(1+x)^2}{(c-t)(1+t)^2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-cx}{1-ct}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)g_0(t)dt,$$
$$x\in(-1,c), \qquad (19)$$

formula orqali ifodalanadi. Bu yerda $\alpha=(1-2\beta)/4$.

(19) yechimga (18) ifodadan $g_0(x)$ ning qiymatini qo‘yib, standart hisoblashlardan so‘ng $\tau_0(x)$ va $\tau_1(x)$ o‘rtasida ushbu tenglamani hosil qilamiz

$$\tau_0(x)=\int_{c_1}^{1}K(x,t)\tau_1(t)dt+L_3[\tau_1]+F_6(x)\ \ x\in(-1,c), \qquad (20)$$

bu yerda $K(x,t)$-regulyar yadro, $L_3[\tau_1]$-regulyar operator, $F_6(x)$-ma’lum funksiyalar.

Endi $\tau_0(x)$ va $\tau_1(x)$ noma’lum funksiyalar o‘rtasidagi ikkinchi singulyar integral tenglamani keltirib chiqaramiz, buning uchun (16) tenglikka ko‘ra (15) munosabatdan $v(x)$ ni yo‘qotib, (20) ni hisobga olib ushbu ikkinchi singulyar integral tenglamani hosil qilamiz

$$\tau_1(x)-\lambda\int_{c_1}^{1}\left(\frac{x-c_1}{t-c_1}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-xt}\right)\tau_1(t)dt=g_1(x),\quad x\in(c_1,1), \qquad (21)$$

bu yerda

$$g_1(x)=\lambda ak^{2\beta}\int_{c_1}^{1}\left(\frac{x-c_1}{t-c_1}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau_1(t)dt}{x-q(t)}-\lambda bk^{1-2\beta}\int_{c_1}^{1}\left(\frac{x-c_1}{t-c_1}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau_1(t)dt}{t-q(x)}+$$
$$+L^*[\tau_1]+F_3(x),\quad x\in(c_1,1). \qquad (22)$$

Shuni qayd etamizki, $g_1(x)$ dagi birinchi ikkita integral operatorlar $(x,t)=(c_1,c_1)$ nuqtada yakkalangan birinchi tartibli maxsuslikka ega, shuning uchun ham ular ajratib yozilgan, bu yerda $q(c_1)=c_1$, $L^*[\tau_1]-$regulyar operator, $F_3(x)-$ ma’lum funksiya.

2-lemma. *Agar* $g_1(x)$, $x\in(c_1,1)$ *funksiya Gyolder shartini qanoatlantirsa va* $g_0(x)\in L_p(c_1,1), p>1,$ *bo‘lsa, u holda (21) tenglamaning yechimi* $H(c_1,1)$ *funksiyalar sinfida, ya’ni* $(x-c_1)^{2\beta-1}\tau_1(x)$ *funksiya* $(c_1,1)$ *intervalning* $x=c_1$ *chap chetki nuqtasida chegaralanmagan, kesmaning* $x=1$ *o‘ng chetki nuqtasida esa chegaralangan funksiyalar sinfida*

$$\tau_1(x)=\cos^2(\alpha\pi)g_1(x)+$$
$$+\frac{\sin(2\alpha\pi)}{2\pi}\int_{c_1}^{1}\left(\frac{x-c_1}{t-c_1}\right)^{3\alpha}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{2\alpha}\left(\frac{1-c_1t}{1-c_1x}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-xt}\right)g_1(t)dt,\quad x\in(c_1,1), \qquad (23)$$

formula orqali ifodalanadi.

(23) yechimga (22) tenglikdan $g_1(x)$ funksiya qiymatini olib borib qo‘ysak, ushbu Viner-Xopf integral tenglamasini hosil qilamiz

$$\rho(y)=\int_0^{\infty}K(y-t)\rho(t)dt+R_2[\rho]+M_2(y),\quad 0<y<\infty, \tag{24}$$

bu yerda $\rho(y)=\tau_1[c_1+(1-c_1)e^{-y}]e^{(3\alpha-(1/2))y}$, $R_2[\rho]=R_1(\rho)e^{(3\alpha-(1/2))y}$ - regulyar operator, $M_2(y)=M_1(y)e^{(3\alpha-(1/2))y}$ - ma'lum funksiya,

$$K(x)=\lambda\cos(\alpha\pi)\left[\frac{ak^{1-3\alpha}}{ke^{x/2}+e^{-x/2}}-\frac{bk^{3\alpha}}{e^{x/2}+ke^{-x/2}}\right].$$

$K(x)$ yadro uzluksiz defferensiallanuvchi va cheksizlikda ko'rsatkichli tartibda kamayuvchi. $\beta_0>(1-m)/3$ bo'lganda $3\alpha-1/2<0$, bundan esa $R_2[\rho]$ va $M_2(y)$ larning $y\to+\infty$ da ko'rsatkichli tartibda kamayuvchi ekanligi kelib chiqadi. (24) integral tenglama indeksi 0 ga teng. Bundan esa (24) tengalmaga Furye almashtirishini qo'llab, analitik funksiyalar nazariyasining Riman masalasiga kelamiz va o'z navbatida bu masala yechimi uchun Fredgolmning 2-tur integral tenglamasi hosil qilinadi. Oxirgi tenglamaning bir qiymatli yechimining mavjudligi, TB masalasi yechimning yagonaligidan kelib chiqadi.

Dissertatsiyaning **"Singulyar koeffitsiyentli aralash tipdagi tenglama uchun chegaraviy xarakteristikada to'liq berilmagan Trikomi shartlili va buzilish chizig'ida Frankl shartiga o'xshash shartlili masala haqida"** deb nomlangan uchinchi bobi noma'lum funksiyaning qiymati chegaraviy xarakteristikaning bir qismida berilgan, buzilish chizig'ining AB kesmasi bo'yicha kesimning turli qirg'oqlarida Frankl shartiga o'xshash shartlili bir masalaning korrektligi o'rganilgan.

Uchinchi bob birinchi paragrafida TF **masalasi ta'riflangan.** D^+ ва D^- bilan D sohaning $y>0$ ва $y<0$ yarim tekisliklardagi qismlarini, C_0 orqali esa (7) tenglamaning $E(c,0)$ nuqtadan chiquvchi xarakteristikasining AC xarakteristika bilan kesishish nuqtalarini belgilaymiz. Bunda $c\in I=(-1,1)$, $y=0$ o'qining intervali.

Ushbu $p(x)\in C^1[-1,c]$ funksiyani kiritamiz. Bu funksiya $[-1,c]$ kesmani $[c,1]$ kesmaga akslantiruvchi diffeomorfizm bo'lsin, $p'(x)<0,\ p(-1)=1,\ p(c)=c.$

Bunday funksiyaga misol sifatida quyidagi chiziqli funksiyani keltiramiz: $p(x)=\delta-kx,$ bu yerda $k=(1-c)/(1+c),\ \delta=2c/(1+c)$.

TF **masala.** D sohada quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y)$ funksiya topilsin:

1) $u(x,y)$ funksiya yopiq $\overline{D}^-$ va $\overline{D}^+$ sohalarning har birida uzluksiz;
2) $u(x,y)$ funksiya $C^2(D^+)$ sinfga tegishli va D^+ sohada (7) tenglamani qanoatlantiradi;
3) $u(x,y)$ funksiya D^- sohada (7) tenglamaning R_1 sinfga tegishli umumlashgan yechimi;
4) AB parabolik buzilish chizig'ida ushbu umumiy ulanish sharti bajariladi

$$u(x,-0)=a(x)u(x,+0)+a_0(x),\ x\in\overline{I}, \tag{25}$$

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=b(x)\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}+b_0(x),\quad x\in I\setminus\{c\},\tag{26}$$

bu limitlar $x\to\pm1,\ x\to c$ da $1-2\beta$ dan kichik tartibdagi maxsuslikka ega bo‘lishi mumkin, bu erda $\beta=(m+2\beta_0)/2(m+2)\in(0,1/2)$, $a(x),\ b(x),\ a_0(x),\ b_0(x)-$ berilgan uzuksiz differensiallanuvchi funksiyalar;

5) ushbu shartlar bajariladi

$$u(x,y)\big|_{\sigma_0}=\varphi(x),\qquad -1\le x\le1,\tag{27}$$

$$u(x,y)\big|_{AC_0}=\psi(x),\qquad -1\le x\le(c-1)/2,\tag{28}$$

$$u(p(x),-0)=\mu(x)u(x,+0)+f(x),\qquad -1\le x\le c,\tag{29}$$

(25)-(29) shartlarda berilgan $a_0(x), a(x), b_0(x), b(x), \varphi(x), \psi(x), \mu(x), f(x)-$ uzuksiz differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lib, $\varphi(x)$ uchun quyidagi talab o‘rinli:

$$\varphi(x)=(1-x^2)\tilde{\varphi}(x),\qquad -1\le x\le1.$$

Uchinchi bob ikkinchi paragrafida *TF* masala (7) tenglamadagi β_0 parametrning $-m/2<\beta_0<1$ holi uchun o‘rganilgan.

TF masalaning yechimi uchun A.V.Bitsadzening ekstremum prinsipiga o‘xshash quyidagi prinsip o‘rinli ekanligi ko‘rsatilgan.

6-teorema. *Ushbu* $\psi(x)\equiv0, f(x)\equiv0, a_0(x)\equiv b_0(x)\equiv0$,

$$a'(x)\ge0, a(x)>0,\quad b(x)>0,\quad 0<\mu_1(x)<1,\tag{30}$$

shartlar bajarilsa, TF masalasining yechimi $\overline{D}^+$ *sohada o‘zining eng katta musbat qiymatini va eng kichik manfiy qiymatini faqat* $\overline{\sigma_0}$ *normal chiziq nuqtalarida qabul qiladi, bu yerda* $\mu_1(x)=\mu(x)/a(p(x))$.

Natija. *(30) shart bajarilsa, TF masala bittadan ortiq yechimga ega bo‘lmaydi.*

7-teorema. *Agar ushbu*

$$\lambda\pi\, k^{(1/2)-\alpha}\cos\alpha\pi<1\tag{31}$$

shart bajarilsa, TF masala bir qiymatli yechimga ega, bunda $\lambda=\cos\beta\pi/\pi(1+\sin\beta\pi)$.

Bu teoremani isbotlash uchun *TF* masala noma’lum $\tau(x)=u(x,0)$ funksiyaga nisbatan ushbu Trikomining singulyar integral tenglamasiga ekvivalent ravishda keltirilgan

$$\tau(x)-\lambda\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)\tau(t)\,dt=g_0(x)\ ,\ x\in(-1,c),\tag{32}$$

bu yerda

$$g_0(x)=-\lambda k\int_{-1}^{c}\frac{p'(s)\tau(s)ds}{p(s)-x}+R[\tau]+F_1(x),\qquad x\in(-1,\mathrm{c}),\tag{33}$$

$R[\tau]$- regulyar operator, $F_1(x)$- berilgan funksiya.

(33) ifodaning o‘ng tomonidagi birinchi integral ostidagi ifoda $x=c,\, s=c,$ $(p(c)=c)$ nuqtada birinchi tartibli yakkalangan maxsuslikka ega, shuning uchun bu integral operator alohida ajratib yozilgan.

(32) tenglamaning yechimini, $(1+x)^{2\beta-1}\tau(x)$ funksiya $x=c$ nuqtada chegaralangan va $x=-1$ nuqtada $1-2\beta$ dan kichik tartibli cheksizlikka aylanishi mumkin bo‘lgan $H(-1,c)$ Gyolder funksiyalar sinfida izlaymiz.

(32) tenglamaning yechimi $h(c)$ sinfda

$$\tau(x)=\cos^2\alpha\pi\, g_0(x)+$$

$$+\frac{\sin 2\alpha\pi}{2\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{(c-x)(1+x)^2}{(c-t)(1+t)^2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-cx}{1-ct}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)g_0(t)dt,\; x\in(-1,c) \quad (34)$$

orqali ifodalanadi, bu yerda $\alpha=(1-2\beta)/4$.

$g_0(x)$ning (33) ifodasini (34) munosabatga qo‘yib, ushbu

$$\rho(y)=\lambda k^{1-\alpha}\cos\alpha\pi\int_0^{\infty}K(y-t)\rho(t)dt+R_4[\rho]+F_3(y) \quad y\in[0,+\infty) \qquad (35)$$

Viner-Xopf integral tenglamasiga ega bo‘lamiz. Bu yerda $\rho(y)=\tau[c+(1-c)e^{-y}]e^{(\alpha-(1/2))y}$ $R_4(\rho)=R_3[\tau]e^{(\alpha-(1/2))y}-$ regulyar operator, $F_3(y)=F_2(x)e^{(\alpha-(1/2))y}$ $-$berilgan funksiya.

$K(x)$ funksiya uzluksiz va cheksizlikda eksponensial tartibda kamayadi. $\alpha\in(0,1/4)$ bo‘lganda $\alpha-1/2$ ifoda manfiy bo‘lgani sababli, $R_4[\rho]$ operator va $F_3(y)$ funksiya cheksizlikda ko‘rsatkichli tartibda kamayuvchi bo‘ladi.

(35) integral tenglama Furye almashtirishi orqali Rimanning chegaraviy masalasiga keltirilib, (31) shartga asosan bir qiymatlili ravishda Fredgolmning ikkinchi tur integral tenglamasiga olib kelinadi va oxirgi tenglamaning bir qiymatli yechilishi TF masalasi yechimining yagonaligidan kelib chiqadi.

Uchinchi bobning uchinchi paragrafida TF masala (7) tenglama uchun β_0 parametrining $\beta_0=-m/2$ holi uchun o‘rganilgan.

XULOSA

Ushbu dissertatsiya ishi singulyar koeffitsiyentli buziluvchan giperbolik tipdagi tenglama uchun Bitsadze-Samarskiy masalasini, singulyar koeffisiyentli Gellerstedt tenglamasi uchun F.Trikomi va A.M.Naxushevning siljishli masalalari shartlarini bir masala ta’rifida birlashtirgan masalani, Trikomi sharti xarakteristikada to‘liq berilmagan, buzilish chizig‘ida esa Frankl shartiga o‘xshash shart berilgan masalaning korrektligini isbotlashga bag‘ishlangan.

Dissertatsiya barcha natijalari yangi va ular quyidagilardan iborat:

SKBGTT uchun izlanayotgan yechimning qiymatlarini chegaraviy va unga parallel ikki ichki xarakteristikalardagi qiymatlari bilan bog‘lovchi Bitsadze-Samarskiy shartlili masala birinchi marta tadqiq qilingan;

funksional tenglama yechimi izlanadigan sinfning muhimligi kontr misol yordamida ko‘rsatilgan;

bir necha siljishga ega bo‘lgan funksional tenglama ketma-ket yaqinlashish va iterasiya metodlarning kombinatsiyalashgan metodi yordamida yechilgan;

F.Trikomi masalasi va A.M.Naxushevning ichki xarakteristikada siljishli masalasi bir masalada ta’riflanib, birinchi marta o‘rganilgan;

S.G.Mixlin tomonidan takomillashtirilgan Karlemanning regulyarizatsiyalash metodi yordamida o‘ng tomonida nofredgolm operatori bo‘lgan singulyar integral tenglamalar Viner-Xopf integral tenglamasiga olib kelingan;

SKATT uchun Trikomi sharti xarakteristikada to‘liq berilmagan va buzilish chizig‘ida Frankl shartiga o‘xshash shartlili yangi masala yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremalar isbotlangan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ
ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И ИННОВАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ТЕРМЕЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

МИРСАБУРОВА ГУЛБАХОР МИРАХМАТОВНА

КОМБИНИРОВАННЫЕ ЗАДАЧИ С ЛОКАЛЬНЫМИ И НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ГЕЛЛЕРСТЕДТА С СИНГУЛЯРНЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ – 2024

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан под номером № B.2024.2.PhD/FM498.

Диссертация выполнена в Термезском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (http://www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Рузиев Менглибай Холтожибаевич** доктор физико-математических наук, старший научный сотрудник
Официальные оппоненты:	**Ашуров Равшан Раджабович** доктор физико-математических наук, профессор
	Уринов Ахмаджон Кушакович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____» _____________2024 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана имена Мирзо Улугбека. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99878)227-12-24, факс: (+99878) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99878) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2024 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2024 года).

А. Садуллаев
Председатель научного совета по присуждению ученых степеней, д. ф.-м. н., академик

Р. М. Жураев
Ученый секретарь научного совета по присуждению ученых степеней, д. ф. ф.-м. н. (PhD)

Ш.А.Алимов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д. ф.-м. н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Во всем мире в научных и практических исследованиях зачастую многие математические модели, часто приводятся к исследованию вырождающихся гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. Актуальными являются исследования нестандартно поставленных задач для **вырождающегося гиперболического уравнения с сингулярными коэффициентами (ВГУССК) и уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами (УСТССК),** которые обобщают классические задачи для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа. В настоящее время во многих мировых научных школах исследование краевых задач с комбинированными локальными и нелокальными условиями для ВГУССК и для УСТССК является одним из основных научных направлений современной математики. Теория локальных и нелокальных краевых задач играет важную роль в технике и природе, в частности: в газовой динамике, процессах состояния и разработок нефтяных пластов, фильтрации грунтовых вод, переноса тепла и массы в объекте, имеющем сложное строение, электрических колебаний в проводах, движения жидкости в канале, окруженном пористой средой, аэродинамике и в других процессах, явлениях.

Во всем мире проведен и проводится ряд научных исследований для краевых задач с комбинированными локальными и нелокальными условиями для ВГУССК и для УСТССК в практических приложениях. Исследование этих задач сводится к исследованию нестандартных сингулярных интегральных уравнений Трикоми с числовым параметром в несингулярной части ядра и нефредгольмовым оператором в правой части уравнения. Это новый тип сингулярных интегральных уравнений, который мало исследован, в связи с этим одной из важных задач являются целевые научные исследования в этом направлении, в том числе: для уравнений с сингулярными коэффициентами определение свойств ограниченности или неограниченности значений решения уравнения и его производных в окрестности линии изменения его типа; исследование комбинированных краевых задач с локальными и нелокальными условиями; постановка и изучение корректных задач в зависимости от значений коэффициентов при младших членах уравнения, разработка алгоритма регуляризации сингулярных интегральных уравнений нового типа, вычисление интегралов Фурье нового вида с помощью теории вычетов комплексного анализа. Необходимость научные исследований в вышеуказанных направлениях определяют актуальность диссертации.

В нашей республике особое внимание уделяется широкомасштабной работе по развитию фундаментальных наук, в том числе математической физики, математической биологии, исследований динамики жидкости и газа, динамики подземных и надземных вод, аэродинамики и достигнуты определенные результаты. Основными задачами и направлениями деятельности математической науки являются: исследования на уровне международных стандартов по таким приоритетным направлениям, «Алгебра и ее приложения, дифференциальные уравнения и их приложения, математическое моделирование нелинейных систем, динамические системы и их приложения, стохастический анализ, медико-биологическая информатика, вычислительная математика»[2]. В целях решения паставленных задач приоритетными являются развитие теории УСТССК и ВГУССК, а также исследования для них комбинированных локальных и нелокальных задач.

Тема и объект исследования данной диссертации соответствуют задачам, определенным в Указе Президента Республики Узбекистан №УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в постановлениях ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, связанных с фундаментальной наукой.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Первые фундаментальные исследования для уравнения смешанного типа были выполнены итальянским математиком Ф.Трикоми. После этой работы теория задач для вырождающихся гиперболических, эллиптических уравнений и уравнений смешанного типа развивалась в фундаментальных исследованиях зарубежных ученых Э.Холмгрена, С.Геллерстедта, И.Франкля, С.Моревеца, Г.Каратопраклиева, М.Проттера и ученых СНГ А.В.Бицадзе, А.А.Самарского, В.И.Жегалова, А.М.Нахушева, С.Г.Михлина, Ю.Д.Девингтаrange, К.И.Бабенко, М.М.Смирнова, В.Ф.Волкодавова, М.М.Мередова, А.И.Кожанова, С.П.Пулькина, К.Б.Сабитова, Т.Ш.Кальменова, Н.Ю.Капустина, Э.И.Моисеева, С.М.Понамарева, А.П.Солдатова, О.А.Репина, А.Н.Зарубина, А.А.Полосина, А.В.Псху, А.И.Кожанова, М.А.Садыбекова, А.С.Бердышева, Р.С.Хайруллина и других.

В развитие теории краевых задач для уравнений с частными производными существенные результаты внесли ученые нашей республики М.С.Салахитдинов, Т.Д.Жураев, Ш.А.Алимов, Р.Р.Ашуров, С.Абдиназаров, А.К.Уринов, Ж.О.Тахиров, Б.Исломов, А.Хасанов, О.Р.Холмухамедов.

Несмотря на большое количество работ для гиперболических уравнений и уравнений смешанных типов, задачи с комбинированными

[2] Постановления Президента Республики Узбекистан от 7 мая 2020 года № ПП-“ О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики”.

локальными и нелокальными условиями для ВГУССК и УСТССК остаются мало изученными. С этой точки зрения, являются обоснованными выбор темы диссертации, цели и задачи диссертации.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научных исследований по фундаментальному проекту Ф–4–32: (2012-2016) «Изучение корректности задач, объединивших в одной формулировке условия задачи Трикоми, задач со смещением и условием Бицадзе - Самарского для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом» Термезского государственного университета.

Целью исследования являются:

доказательство корректности задачи с условием Бицадзе –Самарского на граничной и на параллельных ей внутренних характеристиках для ВГУССК ;

доказательство однозначной разрешимости задачи, объединавшей в одной формулировке задачу Трикоми и задачу со смещением на внутренних характеристиках для УСТССК;

доказательство теорем существования и единственности решения задачи с недостающим условием Трикоми на характеристике и аналогом условия Франкля на линии вырождения для УСТССК.

Задачи исследования:

-Формулировка и исследование новых корректных задач типа задачи Бицадзе-Самарского для ВГУССК.

-Разработка алгоритма решения функциональных уравнений с несколькими сдвигами, построение контрпримера, подчеркивающего важность класса, где ищется решение.

-Исследование задачи, объединившей в одной формулировке условия локальных и нелокальных задач для УСТССК.

-Для уравнения УСТССК исследование корректности задачи с условием Трикоми на куске граничной характеристики и аналогом условия Франкля на отрезке линии вырождения уравнения.

-Разработка алгоритма регуляризации неклассического сингулярного интегрального уравнения Трикоми с нефредгольмовым интегральным оператором в нехарактеристической части уравнения и с числовым параметром в «несингулярной» части ядра.

Объектом исследования являются ВГУССК, УСТССК и сингулярные интегральные уравнения с числовым параметром в «несингулярной» части ядра и нефредгольмовым оператором в правой части уравнения.

Предметом исследования являются комбинированные локальные и нелокальные задачи для ВГУССК и УСТССК.

Методы исследования. Для достижения цели и решения поставленных задач используются:

-комбинированный метод последовательных приближений и метод итераций для решения функциональных уравнений с несколькими смещениями;

-принцип экстремума, принцип Заремба-Жиро;

-метод регуляризации Карлемана, развитый С.Г.Михлиным для регуляризации сингулярного интегрального уравнения Ф. Трикоми с числовым параметром в несингулярной части ядра;

-регуляризации интегрального уравнения Винера-Хопфа;

- используется теория вычетов при вычислении новых интегралов Фурье.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

Для ВГУССК впервые исследуются задачи с условием Бицадзе - Самарского связывающим значения искомой функции на граничной и параллельной ей нескольких внутренних характеристиках.

Приведен контрпример, указывающий на существенность класса, в котором ищется решение функционального уравнения.

Комбинированным методом последовательных приближений и итераций решено функциональное уравнение с несколькими сдвигами.

Впервые сформулированы и исследованы в одной формулировке задача Ф. Трикоми и задача А.М. Нахушева со смещением на внутренних характеристиках.

Методом регуляризации Карлемана, развитым С.Г.Михлиным, полученные сингулярные интегральные уравнения с нефредгольмовым оператором в правой части сведены к интегральному уравнению Винера-Хопфа.

Доказаны теоремы существования и единственности решения задачи с недостающим условием Трикоми на характеристике и аналогом условия Франкля на отрезке вырождения для УСТССК.

Практические результаты исследования состоят в следующем:

комбинированным методом последовательных приближений и итераций разработан алгоритм решения функционального уравнения с несколькими смещениями и решены функциональные уравнения указанного типа;

методом С.Г.Михлина найдены формулы в явном виде дающие решение сингулярного интегрального уравнения Ф.Трикоми с числовым параметром;

используя с помощью теории вычетов из теории аналитических функций обоснован алгоритм вычисления интегралов Фурье, в силу чего вычислены некоторые несобственные интегралы.

Достоверность результатов исследования: обоснована принятыми математическими дедуктивными выводами, с использованием методов теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории аналитических функций и интегральных уравнений, комбинированным методом последовательных приближений и итераций, а также строгими и полными математическими доказательствами теорем.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов диссертации обоснована тем, что ее результаты могут служить для дальнейшего развития теории краевых задач для гиперболических уравнений и уравнений смешанного типа теории уравнений с частными производными.

Практическая значимость результатов диссертации обоснована тем, что ее результаты могут быть использованы при изучении физических, технических и биологических процессов, математическая модель которых описывается уравнениями гиперболического и смешанного типов.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты исследования по комбинированным задачам с локальными и нелокальными краевыми условиями для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом внедрены в следующие научно – исследовательские проекты:

разработанные методы регуляризации сингулярных интегральных уравнений, использованы при решении локальных и нелокальных краевых задач для уравнений смешанного типа в проекте №ОТ-Ф4-88 на тему «Исследования прямых и обратных задач для уравнений смешанного типа второго и высокого порядков» за 2017-2020 гг. (Институт математики имени В.И.Романовского АН Республики Узбекистан, справка о внедрении №2/132 от 26.03.2024 г.). Применение этих научных результатов позволило доказать однозначную разрешимость некоторых нелокальных краевых задач для уравнений эллиптико-гиперболического типов;

заключения теорем по разрешимости задачи с условием Бицадзе-Самарского, задачи Ф.Трикоми и задачи А.М.Нахушева для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом использованы при решении локальных и нелокальных краевых задач и задач со смещением для нагруженных вырождающихся уравнений для гиперболического и смешанного типа в проекте МНИОКТР АААА-А19-119013190078-8 «Краевые задачи для уравнений основных и смешанных типов, их применение к задачам управления и моделированию динамических систем» за 2019-2021 гг. и НИОКТР 122041800029-5 «Краевые задачи и задачи управления для основных и смешанного типов уравнений и их применение к исследованию систем с распределёнными параметрами» за 2022-2024 гг. (Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, справка о внедрении №01-13/10-1 от 10.02.2024 г.). В результате это позволило анализировать исследование локальных и нелокальных краевых задач, и задач со смещением для нагруженных вырождающихся уравнений для гиперболического и смешанного типа.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертации обсуждались на семинаре Ферганского государственного университета «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и смежных математических областей» при кафедре «Математический анализ и дифференциальные уравнения», на семинаре «Дифференциальные уравнения и математическая физика», Института математики имени В. И. Романовского

АН РУз, на объединённом научном семинаре «Дифференциальные уравнения и математическая физика», кафедр «Математический анализ», «Алгебра и геометрия» Термезского государственного университета, а также основное содержание диссертации доложено на 8 научно-практических конференциях: 4 международных и 4 республиканских.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 17 научных работ, из них 9 опубликованы в журналах, входящих в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на соискание ученой степени доктора философии (PhD): 6 опубликованы в зарубежных журналах, 3 в республиканских научных изданиях.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы и составляет 118 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, раскрыта степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объекты и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, обоснована теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **“Задача Бицадзе-Самарского для вырождающегося гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом”**, доказан корректность задачи с условием Бицадзе-Самарского, связывающим значения искомого решения на граничной и внутренних характеристиках.

В первом параграфе этой главы приводится постановка задачи Γ_1.

Пусть $D-$конечная односвязная область плоскости xOy, лежащая в полуплоскости $y<0$ и ограниченная характеристиками AC и BC уравнения

$$-(-y)^m u_{xx} + u_{yy} + (\beta_0 / y)u_y = 0, \quad y < 0 \tag{1}$$

и отрезком AB оси $y=0$, где $A = A(-1,0), B = B(1,0)$, $m-$положительная постоянная, $\beta_0 \in (-m/2,\ 1)$.

На отрезке AB отметим точки $E_1 = E_1(c_1,0)$ и $E_2 = E_2(c_2,0)$, где $-1 < c_1 < c_2 < 1$. Пусть $I = (-1,1)-$ интервал оси $y=0$, на $\bar{I}$ рассмотрим функции $p_k(x) \in C^2(\bar{I}), k = 1,2$ со следующими свойствами:

1^0. $p_k(x)-$это диффеоморфизмы из множества точек отрезка $\bar{I} = [-1,1]$ на множество точек отрезков $[c_k,1]$, $k = 1,2$;

2^0. $p_2(x) > p_1(x) > x$, $\forall x \in \bar{I} \setminus \{1\}$, $p'_k(x) > 0$ $\quad p_k(-1) = c_k$, $p_k(1) = 1$.

В качестве примера таких функций приведены линейные функции $p_k(x)=b_k x+a_k$, $k=1,2$, где $a_k+b_k=1$, $a_k-b_k=c_k$.

Введем обозначения

$$\theta(x_0)=\frac{x_0-1}{2}-i\left[\frac{m+2}{4}(1+x_0)\right]^{\frac{2}{m+2}},\quad \theta^*{}_k(p_k(x_0))=\frac{p_k(x_0)+c_k}{2}-i\left[\frac{m+2}{4}(p_k(x_0)-c_k)\right]^{\frac{2}{m+2}},$$

где $\theta(x_0)$ и $\theta^*{}_k(p_k(x_0))$, соответственно, аффиксы точек пересечения характеристик уравнения (1), исходящих из точек $(x_0,0)$ и $(p_k(x_0),0)$, с характеристиками AC и C_kB_k .

Задача Γ_1**.** *Найти в области* D *регулярное решение* $u(x,y)\in C(\overline{D})\cap C^2(D)$ *уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(x,0)=\tau(x),\ x\in\bar{I}; \qquad (2)$$

$$u[\theta_0(x)]=\mu_1 u[\theta^*{}_1(p_1(x))]+\mu_2 u[\theta^*{}_2(p_2(x))]+\rho(x),\ x\in\bar{I}, \qquad (3)$$

где $p_k(x)=b_k x+a_k$, $k=1,2$ линейные функции, μ_1,μ_2*-некоторые положительные постоянные. Заданные функции-* $\tau(x)$, $\rho(x)\in C^2(\bar{I})$*, причем*

$$\begin{gathered}\rho(-1)=\rho'(-1)=\rho''(-1)=0,\ \tau(-1)=\tau'(-1)=\tau''(-1)=0\\ \tau(c_k)=\tau'(c_k)=\tau''(c_k)=0,\ k=1,2.\end{gathered} \qquad (4)$$

В силу непрерывности решения $u(x,y)$, в замкнутой области $\overline{D}$ из условия (3) при $x=-1$ следует естественное условие согласованности $\tau(-1)=\mu_1\tau(c_1)+\mu_2\tau(c_2)+\rho(-1)$.

Заметим, что условие (3) является аналогом условия Бицадзе – Самарского, связывающего значения искомого решения $u(x,y)$ на граничной характеристике AC и на внутренних характеристиках, E_1B_1 и E_2B_2 . Если $\mu_1=\mu_2=0$ тогда задача Γ_1 превращается в задачу Дарбу.

Во втором параграфе первой главы задача Γ_1 решена для случая $\beta_0\in(-m/2,1)$.

Теорема 1. *Задача* Γ_1 *при выполнении условий (4) и*

$$\delta_1+\delta_2<1 \qquad (5)$$

однозначно разрешима, где $\delta_k=\mu_k b_k^{1-2\beta}$, $\beta=(m+2\beta_0)/2(m+2)$, $k=1,2$.

Эта теорема с помощью интегрального представления решения видоизмененной задачи Коши в области D доказывается эквивалентным сведением задачи Γ_1 к решению следующего функционального уравнения с двумя сдвигами

$$v(x)=\mu_1 b_1^{1-2\beta}v(p_1(x))+\mu_2 b_2^{1-2\beta}v(p_2(x))+F(x). \qquad (6)$$

Решение функционального уравнения (6) будем искать в классе функций ограниченных в точке $x=1$, где этот класс решений существен, если отказаться от этого требования задача Γ_1 будет некорректной.

Для решения функционального уравнения (6) использован комбинированный метод последовательных приближений и итераций.

Для построения членов последовательности $v_0(x), v_1(x), v_2(x), ..., v_j(x)$ использован рекуррентное соотношение

$$v_j(x) = \mu_1 b_1^{1-2\beta} v_j(\lambda(x)) + \mu_2 b_2^{1-2\beta} v_{j-1}(r(x)) + F(x), \quad x \in I$$

где $\lambda(x) = p_1(x), r(x) = p_2(x)$.

В качестве $v_0(x)$ принято решение следующего функционального уравнения

$$v_0(x) = \delta_1 v_0(\lambda(x)) + F(x),$$

это функциональное уравнение решается методом итерации.

В третьем параграфе первой главы задача Γ_1 исследована для значения параметра $\beta_0 = -m/2$ и в случае, когда $p_k(x_0), k = 1,2$-нелинейная функция.

Основным результатом этого параграфа является.

Теорема 2. *Задача* Γ_1 *при выполнении неравенства (5) однозначно разрешима, где* $\delta_1 = \max_{x \in \bar{I}} |\mu_1 p_1'(x)|$, $\delta_2 = \max_{x \in \bar{I}} |\mu_2 p_2'(x)|$.

В четвертом параграфе исследована задача Γ_2.

Задача Γ_2**.** *Найти в области* D *решение* $u(x, y) \in C(\overline{D}) \cap C^2(D)$ *уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$u(x,0) = \tau(x), \ x \in \overline{I},$$

$$D_{-1,x}^{1-\beta} u\left[\theta_0(x)\right] = \sum_{k=1}^{l} \mu_k(x) D_{-1,x}^{1-\beta} u\left[\theta_k^*(p_k(x))\right] + \rho(x), \ \ x \in \overline{I},$$

где $D_{-1,x}^{1-\beta}-$ *оператор дробного дифференцирования,* $p_k(x) = b_k x + a_k$.

Заметим, что здесь на отрезке AB рассматриваются $l-$точек, $E_k(c_k, 0)$, $-1 < c_1 < c_2 < ... < c_l < 1$, $\tau(x), \rho(x) -$ заданные функции.

Задача Γ_2 с помощью формулы Дарбу эквивалентно сводится к решению функционального уравнения с l сдвигами

$$v(x) = \sum_{k=1}^{l} b_k^{1-2\beta} \mu_k(x) v(p(x)) + F(x), \quad x \in \overline{I}.$$

Основным результатом этого параграфа является

Теорема 3. *Задача* Γ_2 *при выполнении условий* $q_1 + q_2 + \dots q_l < 1$ $\rho(-1) = \rho'(-1) = \rho''(-1) = 0$, $\tau(-1) = \tau'(-1) = \tau''(-1) = 0$, *однозначно разрешима, где* $q_k = \max\left|b_k^{1-2\beta} \mu_k(x)\right|$.

Во второй главе диссертации, названной «**Комбинированная задача с условием Трикоми и условием смещения на внутренних характеристиках для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом**», доказаны теоремы единственности и существования решения задачи для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом в смешанной области, когда граничная характеристика произвольным образом разбивается на два куска и на первом куске характеристики задаётся условие Трикоми, а второй кусок освобожден от локального условия и это недостающее условие Трикоми заменено условием смещения на внутренних характеристиках.

В параграфе один главы два дается постановка задачи ТВ с условиями Трикоми на граничной характеристике и смещения на внутренних характеристиках.

Пусть $\Omega-$ конечная односвязная область плоскости xOy, ограниченная при $y>0$ нормальной кривой $\sigma_0: x^2+4(m+2)^{-2}y^{m+2}=1$, с концами в точках $A(-1,0)$ и $B(1,0)$, а при $y<0-$характеристиками AC и BC уравнения

$$(signy)\left|y\right|^m u_{xx}+u_{yy}+\frac{\beta_0}{y}u_y=0, \quad m>0, -m/2<\beta_0<1. \qquad (7)$$

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω, лежащие, соответственно в полуплоскостях $y>0$ и $y<0$, а через C_0 и C_1, соответственно, точки пересечения характеристик AC и BC с характеристикой, исходящей из точки $E(c,0)$, где $c\in I=(-1,1)$-интервал оси $y=0$, а через D_0 и D_1 обозначим точки пересечения характеристик EC_1и BC_1 с характеристикой, исходящей из точки $E_1(c_1,0)$, где $-1<c<c_1<1$.

Пусть $q(x)=\rho-kx$, где $\rho=c_1(1-c)/(1-c_1)$, $k=(c_1-c)/(1-c_1)$, линейный диффеоморфизм из множества точек отрезка $[c_1,1]$ во множество точек отрезка $[c,c_1]$, причем $q(c_1)=c_1, q(1)=c.$

Задача *ТВ*. *Требуется найти в области* Ω *функцию* $u(x,y)$, *удовлетворяющую условиям:*

1) $u(x,y)\in C^2(\Omega^+)$ *и удовлетворяет уравнению (1) в области* Ω^+*;*

2) $u(x,y)$ *является обобщенным решением класса* R_1 *в области* Ω^-*;*

3) на интервале вырождения имеет место следующее условие сопряжения

$$\lim_{y\to-0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\lim_{y\to+0}y^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y},\ x\in I\setminus\{c,c_1\}, \qquad (8)$$

причем эти пределы при $x=\pm1, x=c, x=c_1$ *могут иметь особенности порядка ниже выше* $1-2\beta$, *где* $\beta=(m+2\beta_0)/2(m+2)$;

4) выполнены

$$u\Big|_{\sigma_0}=\varphi(x), \qquad -1\le x\le 1, \qquad (9)$$

$$u(x,y)\Big|_{AC_0}=\psi_0(x), \quad -1\le x\le (c-1)/2, \qquad (10)$$

$$a_0u[\theta_0^*(x)]+b_0u[\theta_1^*(q(x))]=\psi_1(x), \quad c_1\le x\le 1, \qquad (11)$$

$$u(q(x),0)-u(x,0)=f(x),\ x\in[c_1,1], \qquad (12)$$

где a_0,b_0- *некоторые постоянные, причем* $a_0^2+b_0^2\ne 0.$ $\theta_0^*(x_0)$, $\theta_1^*(q(x_0))-$ *аффиксы точек пересечения характеристик* E_1D_1 *и* E_1D_0 *с* *характеристиками, исходящими из точек* $M(x_0,0)$, $M(q(x_0),0)$, *соответственно, где* $x_0 \in [c_1,1]$, $q(x_0)\in[c,c_1]$. *Заданные функции* $\varphi(x)\in C^{0,\alpha}(\bar I)$, $\psi_0(x)\in C^{1,\alpha}[-1,(c-1)/2]$, $\psi_1(x), f(x)\in C^{1,\alpha}[c_1,1]$, *причем* $\psi_0(-1)=0$, $f(c_1)=0$, $\psi_1(c_1)=0$, $\varphi(x)=(1-x^2)\varphi(x)$, $\varphi(x)\in C^{0,\alpha}(\bar I)$. *Если* $c=1$ *то задача* TB *переходит в задачу Трикоми.*

Во втором параграфе главы два доказана единственность решения задачи TB **.**

Имеет место следующая

Теорема 4. *(Аналог принципа экстремума А. В. Бицадзе). Решение* $u(x,y)$ *задачи* TB*, при выполнении условий:* $\psi_0(x)\equiv 0, \psi_1(x)\equiv 0,\ f(x)\equiv 0,$

$$a_0\ge 0,\ \ b_0\ge 0,\ \ a_0^2+b_0^2\ne 0 \qquad (13)$$

своего наибольшего положительного значения (НПЗ) или наименьшего отрицательного значения (НОЗ) в замкнутой области $\overline{\Omega^+}$ *достигает на* $\overline{\sigma_0}$.

В области Ω^- используя формулу Дарбу, дающую решение видоизмененной задачи Коши для уравнения (7),

$$u(x,0)=\tau(x),\quad x\in\bar I;\quad \lim_{y\to -0}(-y)^{\beta_0}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),\ \ x\in I,$$

в силу условий (10) и (11), соответственно, имеем

$$\nu(x)=\gamma D_{-1,x}^{1-2\beta}\tau(x)+\psi_3(x),\quad -1<x<c, \qquad (14)$$

$$a_0\nu(x_0)+b_0k^{1-2\beta}\nu(q(x_0))=\gamma(a_0+b_0)D_{c,x_0}^{1-2\beta}\tau(x)+\psi_2(x),\qquad c_1<x<1, \quad (15)$$

где

$$\gamma=2\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)((m+2)/4)^{2\beta}/\Gamma(\beta)\Gamma(1-2\beta).$$

С использованием условия сопряжения (8) и с применением принципа Заремба-Жиро, принципа экстремума для операторов дробного дифференцирования, на основе соотношений (14) и (15) теорема 4 доказывается стандартным методом.

Из этой теоремы следует единственность решения задачи TB .

В третьем параграфе главы два доказано существование решения задачи TB .

Теорема 5. *При выполнении условия (13) и* $\beta_0>(1-m)/3$ *задача* TB *однозначно разрешима.*

Задача эквивалентным образом сводится к исследованию системы сингулярных интегральных уравнений относительно неизвестных функций $\tau_0(x)=\tau(x)$, где при $x\in(-1,c)$ и $\tau_1(x)=\tau(x)$ при $x\in(c_1,1)$.

Приведем хорошо известное соотношение между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенное на I из области Ω^+ :

$$\nu(x) = -k_2(1-\beta_0)\frac{m+2}{2}\left\{\frac{\tau(1)}{(1-x)^{1-2\beta}} + \frac{\tau(-1)}{(1+x)^{1-2\beta}} + \right.$$

$$\left. + \int_{-1}^{1}\frac{(x-t)\tau'(t)dt}{|x-t|^{2-2\beta}} - (2\beta-1)\int_{-1}^{1}\frac{\tau(t)dt}{(1-xt)^{2-2\beta}}\right\} + \Phi(x),\ x\in I. \qquad (16)$$

Из (14) в силу (16), исключая $\nu(x)$, получим следующее сингулярное интегральное уравнение:

$$\tau_0(x) - \lambda\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt}\right)\tau_0(t)dt = g_0(x), \quad x\in(-1,c), \qquad (17)$$

где

$$g_0(x) = \lambda k\int_{c_1}^{1}\left(\frac{1+x}{1+q(t)}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau_1(t)dt}{q(t)-x} + L_1[\tau_1] + F_5(x), \quad x\in(-1,c). \qquad (18)$$

Ядро первого интегрального оператора из (18) в точке $(x,t)=(c_1,c_1)$ (где $q(c_1)=c_1$) имеет изолированную особенность первого порядка, по этому этот оператор выделен отдельно. Уравнение (17) можно рассматривать как сингулярное интегральное уравнение Трикоми относительно неизвестной функции $\tau_0(x)$, и его правая часть зависит только от $\tau_1(x)$.

Лемма 1. *Если $g_0(x)$ удовлетворяет условию Гёльдера при $x\in(-1,c)$ и $g_0(x)\in L_p(-1,c)$, $p>1$, то решение уравнения (17) в классе функций Гёльдера H, в котором $(1+x)^{2\beta-1}\tau_0(x)$ функция ограничена при $x=c$ и может быть неограниченной в точке $x=-1$, выражается формулой*

$$\tau_0(x) = \cos^2(\alpha\pi)g_0(x) +$$

$$+\frac{\sin(2\alpha\pi)}{2\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{(c-x)(1+x)^2}{(c-t)(1+t)^2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-cx}{1-ct}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{1}{1-xt}\right)g_0(t)dt,$$

$$x\in(-1,c), \qquad (19)$$

где $\alpha=(1-2\beta)/4$.

Подставляя выражение для $g_0(x)$ из (18) в решение (19), получим следующее соотношение между неизвестными функциями $\tau_0(x)$ и $\tau_1(x)$

$$\tau_0(x) = \int_{c_1}^{1}K(x,t)\tau_1(t)dt + L_3[\tau_1] + F_6(x)\ \ x\in(-1,c), \qquad (20)$$

здесь $K(x,t)$-регулярное ядро, $L_3[\tau_1]$-регулярный оператор, $F_6(x)$-известная функция.

Теперь введем второе сингулярное интегральное уравнение между неизвестными функциями $\tau_0(x)$ и $\tau_1(x)$ для этого из (15), в силу (16), исключая $\nu(x)$, получим сингулярное интегральное уравнение

$$\tau_1(x)-\lambda\int_{c_1}^{1}\left(\frac{x-c_1}{t-c_1}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-xt}\right)\tau_1(t)dt=g_1(x),\qquad x\in(c_1,1),\tag{21}$$

$$g_1(x)=\lambda ak^{2\beta}\int_{c_1}^{1}\left(\frac{x-c_1}{t-c_1}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau_1(t)dt}{x-q(t)}-\lambda bk^{1-2\beta}\int_{c_1}^{1}\left(\frac{x-c_1}{t-c_1}\right)^{1-2\beta}\frac{\tau_1(t)dt}{t-q(x)}+$$
$$+L^*[\tau_1]+F_3(x),\quad x\in(c_1,1).\tag{22}$$

Заметим, что первые два интегральных оператора в $g_1(x)$ имеют изолированные особенности первого порядка в точке $(x,t)=(c_1,c_1)$ (где $q(c_1)=c_1$), поэтому эти операторы выделены отдельно. $L^*[\tau_1]-$регулярное ядро, $F_3(x)-$ известная фунция.

Лемма 2. *Если* $g_1(x)$ *удовлетворяет условию Гёльдера при* $x\in(c_1,1)$ *и* $g_1(x)\in L_p(c_1,1), p>1,$ *то решение уравнения (21) в классе функций* $H\ (c_1,1)$ *в котором функция* $(x-c_1)^{2\beta-1}\tau_1(x)$ *ограничена при* $x=1$ *и может быть неограниченной при* $x=c_1$, *выражается формулой*

$$\tau_1(x)=\cos^2(\alpha\pi)g_1(x)+$$
$$+\frac{\sin(2\alpha\pi)}{2\pi}\int_{c_1}^{1}\left(\frac{x-c_1}{t-c_1}\right)^{3\alpha}\left(\frac{1-x}{1-t}\right)^{2\alpha}\left(\frac{1-c_1t}{1-c_1x}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{a}{1-xt}\right)g_1(t)dt,\qquad x\in(c_1,1).\tag{23}$$

Подставляя выражение для $g_1(x)$ из (22) в решение (23), получим следующее интегральное уравнение Винера-Хопфа

$$\rho(y)=\int_0^{\infty}K(y-t)\rho(t)dt+R_2[\rho]+M_2(y),\quad 0<y<\infty,\tag{24}$$

где $\rho(y)=\tau_1[c_1+(1-c_1)e^{-y}]e^{(3\alpha-1/2)}$, $R_2[\rho]=R_1(\rho)e^{(3\alpha-(1/2))y}$-регулярный оператор, $M_2(y)=M_1(y)e^{(3\alpha-(1/2))y}$-известная функция,

$$K(x)=\lambda\cos(\alpha\pi)\left[\frac{ak^{1-3\alpha}}{ke^{x/2}+e^{-x/2}}-\frac{bk^{3\alpha}}{e^{x/2}+ke^{-x/2}}\right].$$

Ядро $K(x)$ непрерывно-дифференцируемо и убывает на бесконечности показательного порядка. Так как $\beta_0>(1-m)/3$, отсюда следует, что $3\alpha-1/2<0$. Значит, $R_2[\rho]$ и $M_2(y)$ убывают на бесконечности показательного порядка. Индекс интегрального уравнения (24) равен нулю. Применяя преобразования Фурье к уравнению (24), приходим к задаче Римана из теории аналитических функций, решение этой задачи сводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которого следует из единственности решения задачи TB.

Третья глава диссертации, названная **«Об одной задаче с недостающим условием Трикоми на граничной характеристике и аналогом условия Франкля на отрезке вырождения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом»**, посвящена исследованию корректности задачи TF, где часть характеристики AC освобождена от краевого условия Трикоми и это недостающее условие Трикоми эквивалентно заменено нелокальным условиям Франкля на разных частях краев разреза вдоль отрезка вырождения AB.

В первом параграфе главы три дается постановка задачи TF**.** Рассмотрим уравнение (7) в конечной односвязной области D комплексной плоскости $z = x + iy$, ограниченной нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2} y^{m+2} = 1$ с концами в точках $A = A(-1,0)$, $B = B(1,0)$ и характеристиками AC и BC уравнения (7).

Обозначим через D^+ и D^- части области D, лежащие, соответственно, в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, а через C_0 точки пересечения характеристики AC с характеристикой, исходящей из точки $E(c,0)$, где $c \in I = (-1,1)$–интервал оси $y = 0$.

Пусть $p(x) \in C^1[-1,c]$–диффеоморфизм из множества точек отрезка $[-1,c]$ на множество точек отрезка $[c,1]$, причем $p'(x) < 0$, $p(-1) = 1$, $p(c) = c$. В качестве примера такой функции приведем линейную функцию $p(x) = \delta - kx$, где $k = (1-c)/(1+c)$, $\delta = 2c/(1+c)$.

Задача TF**.** *Требуется найти в области* D *функцию* $u(x,y)$*, удовлетворяющую следующим условиям:*

1) $u(x,y)$ *- непрерывна в каждой из замкнутых областей* $\bar{D}^+$ *и* $\bar{D}^-$*;*

2) $u(x,y) \in C^2(D^+)$ *и удовлетворяет уравнению (7) в этой области;*

3) $u(x,y)$ *в области* D^- *является обобщенным решением в классе* R_1*;*

4) на отрезке AB *-линии параболического вырождения уравнения (7) выполняются общие условия склеивания*

$$u(x,-0) = a(x)u(x,+0) + a_0(x), \quad x \in \bar{I}\,; \tag{25}$$

$$\lim_{y \to -0} (-y)^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} = b(x) \lim_{y \to +0} y^{\beta_0} \frac{\partial u}{\partial y} + b_0(x), \quad x \in I \setminus \{c\}, \tag{26}$$

где $a(x), b(x), a_0(x), b_0(x)$ *- заданные непрерывно - дифференцируемые функции на* $\bar{I}$*, причем* $a(x) \neq 0, b(x) \neq 0, \ \forall x \in \bar{I}, \ a_0(-1) = 0,$ *а пределы (26) при* $x = \pm 1$, $x = c$ *могут иметь особенности порядка ниже* $1 - 2\beta$*, где* $\beta = (m + 2\beta_0)/2(m+2)$*;*

5) выполняются

$$u(x,y)\big|_{\sigma_0} = \varphi(x), \qquad -1 \le x \le 1; \tag{27}$$

$$u(x,y)\big|_{AC_0} = \psi(x), \qquad -1 \le x \le (c-1)/2\,; \tag{28}$$

$$u(p(x),-0) = \mu(x)u(x,+0) + f(x), \quad -1 \le x \le c; \tag{29}$$

где $\varphi(x), \psi(x), \mu(x), f(x)$ *– достаточно гладкие функции, причем*

$$\varphi(x) = (1-x^2)\tilde{\varphi}(x), \qquad -1 \le x \le 1.$$

Во втором параграфе главы три задача TF рассмотрена в случае $-m/2 < \beta_0 < 1$**.**

Для задачи TF аналогом принципа экстремума А.В.Бицадзе является

Теорема 6. *Решение задачи* TF *при* $\psi(x)\equiv 0, f(x)\equiv 0, a_0(x)\equiv b_0(x)\equiv 0$ *и*

$$a'(x)\geq 0, a(x)>0, \quad b(x)>0, \quad 0<\mu_1(x)<1, \tag{30}$$

свой положительный максимум и отрицательный минимум в замкнутой области $\bar{D}^+$ *достигает только в точках кривой* σ_0.

Следствие. *Задача* TF *при выполнении неравенств (30) имеет не более одного решения.*

Теорема 7. *Задача* TF *при выполнении условия*

$$\lambda\pi k^{\frac{1}{2}-\alpha}\cos\alpha\pi<1 \tag{31}$$

однозначно разрешима, где $\lambda=\cos\beta\pi/\pi(1+\sin\beta\pi)$.

При доказательстве этой теоремы задача TF эквивалентно сведена к исследованию следующего сингулярного интегрального уравнения Трикоми относительно неизвестной функции $\tau(x)=u(x,+0),\ x\in(-1,c)$:

$$\tau(x)-\lambda\int_{-1}^{c}\left(\frac{1+x}{1+t}\right)^{1-2\beta}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)\tau(t)\,dt=g_0(x)\ ,\ x\in(-1,c), \tag{32}$$

$$g_0(x)=-\lambda k\int_{-1}^{c}\frac{\tau(s)ds}{p(s)-x}+R[\tau]+F_1(x), \quad x\in(-1,\mathrm{c}), \tag{33}$$

где $R[\tau]-$ регулярный оператор, $F_1(x)-$ известная функция.

Первый интегральный оператор правой части (33) не является регулярным, так как подынтегральное выражение в точке $(x,t)=(c,c)$ (где $p(c)=c$) имеет изолированную особенность первого порядка, поэтому это оператор выделен отдельно.

Решение сингулярного интегрального уравнения (32) будем искать в классе функций Гёльдера $H(-1,\mathrm{c})$, в котором функция $(1+x)^{2\beta-1}\tau(x)$ ограничена в точке $x=c$ и допускает особенность порядка ниже $1-2\beta$ в точке $x=-1$, т.е. в классе $h(c)$.

Решение уравнения (32) в классе $h(c)$ выражается формулой

$$\tau(x)=\cos^2\alpha\pi\, g_0(x)+$$

$$+\frac{\sin 2\alpha\pi}{2\pi}\int_{-1}^{c}\left(\frac{(c-x)(1+x)^2}{(c-t)(1+t)^2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1-cx}{1-ct}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)g_0(t)dt,\ x\in(-1,c), \tag{34}$$

здесь $\alpha=(1-2\beta)/4$. Подставляя $g_0(x)$ из (33) в (34), получим уравнение Винера-Хопфа вида

$$\rho(y)=\lambda k^{1-\alpha}\cos(\alpha\pi)\int_{0}^{\infty}K(y-t)\rho(t)dt+R_4[\rho]+F_3(y) \quad y\in[0,+\infty), \tag{35}$$

где $\rho(y)=\tau[c+(1-c)e^{-y}]e^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)y}$, $R_4(\rho)=R_3[\tau]e^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)y}-$регулярный оператор, $F_3(y)=F_2(x)e^{\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)y}-$ известная функция.

Функция $K(x)$ непрерывна и имеет экспоненциальный порядок убывания на бесконечности. В силу $\alpha \in (0,1/4)$, значение $\alpha - 1/2$ отрицательно, следовательно, оператор $R_4[\rho]$ и функция $F_3(y)$ также имеют показательный порядок убывания на бесконечности.

Уравнение (35) с помощью преобразования Фурье приводится к краевой задаче Римана и, в силу (31), однозначно приводится к интегральному уравнению Фредгольма второго рода, однозначная разрешимость которого следует из единственности решения задачи TF.

В третьем параграфе главы три задача TF исследована в случае $\beta_0 = -m/2$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертационная работа посвящена доказательству корректности задачи Бицадзе-Самарского для вырождающегося гиперболического уравнения и задачи объединившей в одной формулировке постановки задачи Трикоми и задачи со смещением А.М. Нахушева для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом. Исследованы задачи с недостающими условиями Трикоми на характеристике и аналогом условия Франкля на отрезке вырождения.

Все результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

Для ВГУССК впервые исследуется задачи с условием Бицадзе – Самарского, связывающий значения искомой функции на граничной и параллельной ей на нескольких внутренних характеристиках одного семейства.

Приведен контрпример, указывающий на существенность класса, в котором ищется решение функционального уравнения.

Комбинированным методом последовательных приближений и итераций решено функциональное уравнение с несколькими сдвигами.

Впервые постановки задач Ф. Трикоми и А.М. Нахушева со смещением на внутренних характеристиках объединены в одной формулировке.

Методом регуляризации Карлемана, развитым С.Г.Михлиным, полученные сингулярные интегральные уравнения с нефредгольмовым оператором в правой части сведены к интегральному уравнению Винера-Хопфа.

Доказаны теоремы существования и единственности решения новой задачи с недостающим условием Трикоми на характеристике и аналогом условия Франкля на отрезке вырождения для УСТССК.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

MINISTRY OF HIGHER EDUCATION, SCIENCE AND INNOVATION OF THE REPUBLIC OF UZBEKISTAN

TERMEZ STATE UNIVERSITY

MIRSABUROVA GULBAXOR MIRAXMATOVNA

COMBINED PROBLEMS WITH LOCAL AND NON-LOCAL BOUNDARY CONDITIONS FOR THE GELLERSTEDT EQUATION WITH A SINGULAR COEFFICIENT

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT
OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent– 2024

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) was registered at the Supreme Attestation Commission under the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under № B.2024.2.PhD/FM498.

The dissertation has been prepared at the Termez State University.
The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-fizmat.nuu.uz) and the "Ziyonet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisors: **Ruziev Menglibay Kholtojibaevich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, senior researcher

Official opponents: **Ashurov Ravshan Radjabovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
Urinov Axmadjon Kushakovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

Leading organization: **Samarkand State University**

Defense will take place «____» _____________2024 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek. (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99878) 227-12-24, fax: (+99878) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99878) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2024
(Mailing report № ___________on «____» _______________2024)

A.Sadullaev
Chairman of scientific council on awarding of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician

R.M.Juraev
Scientific secretary of Scientific Council on awarding of scientific degrees,PhD in Math. And Physics

Sh.A.Alimov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on awarding of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, akademik.

INTRODUCTION (abstract of the dissertation of Doctor of Philosophy (PhD))

The Purpose of the study is: to proof of the unique solvability of the boundary value problem and the problem with a shift on internal characteristics for the equations of mixed type with singular coefficients;

To proof of existence and uniqueness theorems for the solution of the problem with the missing Tricomi condition on the characteristic and an analogue of the Frankl condition on the degeneracy line for the equations of mixed type with singular coefficients.

The scientific novelty of the study is as follows:

For the degenerate hyperbolic equation with singular coefficients, for the first time, problems with the Bitsadze-Samarsky condition connecting the values of the desired function on the boundary and several internal characteristics parallel to it are studied.

A counter example is given that indicates the importance of the class in which the solution to the functional equation is sought.

A functional equation with several shifts was solved using a combined method of successive approximations and iterations.

For the first time, the problem of F. Tricomi and the problem of A. M. Nakhushev with a displasement on internal characteristics were formulated and studied in one formulation.

Using the Carleman regularization method, developed by S.G. Mikhlin, the resulting singular integral equations with a non-Fredholm operator on the right side are reduced to the Wiener-Hopf integral equation.

Existence and uniqueness theorems for the solution of the problem with the missing Tricomi condition on the characteristic and an analogue of the Frankl condition on the degeneracy interval for the equations of mixed type with singular coefficients are proved.

Implementation of the research results.

The obtained results on combined problems with local and nonlocal boundary conditions for the Gellerstedt equation with singular coefficient are implemented in the following research projects:

The developed methods of regularization of non-standard singular integral equations are used in solving boundary value problems for mixed type equations with singular coefficient in the project №OT-F4-88 on the theme "Investigations of direct and inverse problems for mixed type equations of second and high orders" for 2017-2020 (Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky, Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, certificate of implementation №2/344 from 04.09.2023). As a result, the unambiguous solvability of some nonlocal boundary value problems for Gellerstedt equations with singular coefficient is proved;

conclusions of theorems on the solvability of the problem with the Bitsadze-Samarsky condition, the problem of F. Tricomi and the problem of A.M. Nakhushev for the Gellerstedt equation with a singular coefficient were used to solve local and non-local boundary value problems and problems with displacement for loaded degenerate equations for hyperbolic and mixed type in NIOCTR project AAAA-A19-119013190078-8 “Boundary value problems for equations of basic and mixed types, their application to control problems and modeling of dynamic systems” for 2019-2021 and NIOKTR 122041800029-5 “Boundary value problems and control problems for basic and mixed types of equations and their application to the study of systems with distributed parameters” for 2022-2024. (Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, certificate of implementation No. 01-13/10-1 dated 02/10/2024). As a result, this made it possible to analyze the study of local and nonlocal boundary value problems and problems with displacement for loaded degenerate equations for hyperbolic and mixed types.

Scope and structure of the dissertation. The dissertation consists of 118 pages including an introduction, three chapters, a conclusion and a list of references.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (I часть; I part)

1. Мирсабурова Г.М. Задача с локальными и нелокальными краевыми условиями на характеристиках для одного класса уравнений смешанного типа. // Узбекский математический журнал. 2010. № 2. С.89-96. **(01.00.00; №6)**
2. Мирсабурова Гулбахор М. Задача типа задачи Бицадзе-Самарского для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений. // Узбекский математический журнал. 2010. № 3. С. 66-74. **(01.00.00; №6)**
3. Мирсабурова Г.М. Объединенная задача Трикоми и задача со смещением для уравнения Геллерстедта. // Известия вузов. Математика. 2012. № 9. С. 32-46. (**Scopus, IF=0,45)**
4. Мирсабурова Г.М. Комбинированная задача с условиями Трикоми и Франкля для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом. // Известия вузов. Математика. 2013. № 7. С. 16-30. (**Scopus, IF=0,45)**
5. Мирсабурова Г.М. Задача Бицадзе-Самарского с недостающим условием смещения для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом. // Дифференциальные уравнения. 2014 т. 50, №4.С. 658-669. (**Scopus, IF= 0,661)**
6. Мирсабурова Г.М. Задача с нелокальными условиями для уравнений смешанного типа. // Известия вузов. Математика. 2014 № 10. С. 35-42. (**Scopus, IF=0,45)**
7. Мирсабурова Г.М. Комбинированная задача с условием Трикоми и условием смещения на внутренних характеристиках для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом. //Дифференциальные уравнения. 2015 т. 51, № 5. С. 621-634. (**Scopus, IF= 0,661)**
8. Мирсабурова Г.М. Задача с аналогом условия Бицадзе-Самарского для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений.// Известия вузов. Математика. 2022. № 10. С. 54-59. (**Scopus, IF= 0,661)**
9. Рузиев М.Х., Мирсабурова Г., Маматмуминов Д. Задача с аналогом условия Бицадзе-Самарского для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений.// Бюллетень института Математики. 2024. 7(1). С.103-112 . **(01.00.17; №17)**

II bo‘lim (II часть; II Part)

1. Мирсабурова Г.М. Задача Бицадзе-Самарского для одного класса вырождаюшихся гиперболических уравнений. //III Международная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Нальчик. 5-6 декабря. 2006 года, стр 198-200.
2. Мирсабурова Г.М. Задача с условием Франкля на отрезке линии вырождения для одного класса уравнений смешанного типа. // Тезисы докладов Международной конференции посвященная 100-летию со дня рождения академика Илъи Несторовича Векуа, “Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения”, Новосибирск 28-2 июня 2007 года, стр 234-235.
3. Мирсабурова Г.М. Задача Трикоми-Нахушева. // Тезисы докладов Международной конференции посвященная 100-летию со дня рождения Льва Семёновия Понтрягина, “Дифференциальные уравнения и топология” Москва. 17-22 июня 2008 года, стр 162-163.
4. Мирсабурова Г.М. Композиция интегралов с подвижными и неподвижными интегрируемыми особенностями.//Ўзбекистон Республикаси Фанлар Академияси В.И.Романовский номидаги Математика институти. Алгебра ва анализнинг долзарб масалалари мавзусидаги республика илмий-амалий анжумани материаллари тўплами. 2-қисм 2022 йил 18-19 ноябрь, 134-135 бетлар.
5. Мирсабурова Г.М. Задача с аналогом условия Бицадзе-Самарского для одного класса вырождающихся гиперболических уравнений. “Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения” Международная научная конференция Ташкент, 23-25 ноября 2023 года, стр 96-98.
6. Mirsaburova G.M. Buzuluvchan giperbolik turdagi tenglamalarning bir sinfi uchun Bitsadze-Samarskiy masalasi. Surxondaryo viloyati pedagoglarni yangi metodiklarga o‘rgatish milliy markazi “Aniq va tabiiy fanlarni o‘qitishda zamonaviy yondashuv: muammo va echimlar” mavzusida xalqaro ilmiy-amaliy konferensiya materiallari, 2023 yil 30-may Termiz, 373-374 бетлар.
7. Мирсабурова Г.М. Задачи Бицадзе-Самарского для вырождающегося гиперболического уравнения с сингулярным коэффициентом.// Минестерство высшего образования, науки и инноватsiй Республики Узбекистан Каршинский государственный университет. Тезисы докладов Республиканской научно-практической конференции на тему “Современные проблемы и перспективы прикладной математики” 24-25 мая 2024 год. –Карши, 2024 год. стр.467-468.
8. Мирсабурова Г.М. Комбинированная задача с условием Трикоми и условием смещения на внутренних характеристиках для уравнения

Геллерстедта с сингулярным коэффициентом. // Сборник материалов Республиканской научной конференции “Актуальные проблемы прикладной математики, математического моделирования и информатики” 24-25 мая, 2024 год . -Нукус, 2024 год. стр. 140-142.