**SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

**SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT
UNIVERSITETI**

TOSHTURDIYEV ABDIXURAYRA MUXAMMADIYEVICH

SFERIK, SILINDRIK VA NUQTAVIY POTENSIALLI DISKRET SHRYODINGER OPERATORLARINING SPEKTRI

01.01.01 – matematik analiz

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

Samarqand – 2024

UDK: 517.984

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of the doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

TOSHTURDIYEV ABDIXURAYRA MUXAMMADIYEVICH

SFERIK, SILINDRIK VA NUQTAVIY POTENSIALLI DISKRET SHRYODINGER OPERATORLARINING SPEKTRI

01.01.01 – matematik analiz

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Samarqand – 2024

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiya mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2023.4.PhD/FM940 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengashning veb-sahifasida (www.samdu.uz) va «Ziyonet» Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Abdullayev Janikul Ibragimovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Kuliyev Komil Danaboyevich** fizika-matematika fanlari doktori, dotsent
	Yaxshiboyev Maxmadiyor Umirovich fizika-matematika fanlari doktori, dotsent
Yetakchi tashkilot:	**Buxoro davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi Samarqand davlat universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 raqamli Ilmiy kengashning 2024 yil «28» 09 soat 10 dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 140104, Samarqand sh., Universitet xiyoboni, 15-uy. Tel.: (+99866)231–06–32, faks: (+99866) 235–19–38, , e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertatsiya bilan Samarqand davlat universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (86 raqam bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 140104, Samarqand sh., Universitet xiyoboni, 15-uy. Tel.: (+99866) 231–06–32, faks: (+99866) 235–19–38.)

Dissertatsiya avtoreferati 2024 yil «16» 09 kuni tarqatildi.
(2024 yil «16» 09 dagi 2 raqamli reestr bayonnomasi).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI • SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI • O'ZBEKISTON

A.S. Soleev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, fizika-matematika fanlari doktori, professor

A.M. Xalxo'jayev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, fizika-matematika fanlari doktori, professor

S.N. Laqaev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi, fizika-matematika fanlari doktori, akademik

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyligi. Jahonda olib borilayotgan ko‘plab ilmiy va amaliy tadqiqotlarda Hilbert fazosida aniqlangan chiziqli va uzluksiz o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlarning spektral xossalarini o‘rganishga alohida ahamiyat berilmoqda. Kvant zarrachalar sistemasiga mos diskret Shryodinger operatorlari (hamiltonianlari) qattiq jismlar fizikasi, yuqori energiyali sistemalar fizikasi va ultrasovuq optik sistemalar fizikasi kabi turli sohalarga oid eksperiment natijalarini nazariy jihatdan asoslashda asosiy mexanizmlardan biri bo‘lib kelmoqda. Hozirgi kunda rivojlangan mamlakatlarda zarrachalarning erkin harakatini tavsiflovchi Louren-Tyoplis o‘rama tipidagi operatorlar hamda zarrachalarning juft-jufti bilan ta’siri yoki potensial maydon ta’sirini tavsiflovchi ko‘paytirish operatorlari yig‘indisidan tashkil topgan operatorlar spektral nazariyasi fizik modellarning keng sinfida muhim o‘rin tutmoqda. Bu borada zarrachalar sistemasiga mos hamiltonianlar xos funksiyalar yordamida to‘liq tavsiflanganligi uchun ushbu hamiltonianlarning spektral xossalari bilan bog‘liq masalalarni tadqiq qilishga alohida e’tibor qaratilmoqda.

Jahonda bir, ikki va uch o‘lchamli panjaralarda ikki va uch zarrachali sistemalarga mos diskret Shryodinger operatorlarining spektral xossalarini tadqiq qilishga qaratilgan ilmiy tadqiqotlar olib borilmoqda. Ushbu yo‘nalishda rivojlangan davlatlarining ilmiy-tadqiqot institutlarida ultrasovuq atomlar uchun Feshbax rezonanslarini o‘rganishga oid tadqiqotlar ustuvor hisoblanmoqda. Shuningdek bo‘sag‘a effekti matemetik fizikadagi o‘ta muhim hodisa – Efimov effekti (uch o‘lchamli fazoda) hamda super – Efimov effekti (ikki o‘lchamli antisimmetrik fazolarda) uchun asos bo‘ladi. Bu borada uch o‘lchamli panjarada Shryodinger operatorlari uchun ta’sir doimiysining bo‘sag‘a qiymatlari hamda muhim spektrdan yuqorida yotuvchi xos qiymatlar mavjudligini isbotlash, xos qiymatlarning aniq sonini topish va ta’sir doimiysining bo‘sag‘a qiymatlari atrofida yaqinlashuvchi yoyilmalar olish, operatorning bo‘sag‘a xos qiymatlari hamda bo‘sag‘a rezonanslarini o‘rganish bo‘yicha tadqiqotlarni rivojlantirish dolzarb vazifalardan hisoblanmoqda.

Respublikamizda panjaradagi ikki zarrachali sistema energiyasiga mos keladigan Shryodinger operatorlarining muhim va diskret spektrlarini o‘rganish va amaliyotda qo‘llash bo‘yicha keng ko‘lamli chora-tadbirlar amalga oshirilmoqda. “Algebra va uning tatbiqlari, differensial tenglamalar va ularning tatbiqlari, chiziqlimas tizimlar, dinamik tizimlar va ularning tatbiqlarini matematik modellashtirish, stoxastik tahlil, tibbiy-biologik informatika, hisoblash matematikasi[1]” fanlarining ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish matematika fanining asosiy vazifalari va faoliyat yo‘nalishlari etib belgilangan. Jumladan, panjaradagi ikki zarrachali

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori.

sistemaga mos Shryodinger operatorlarining xos qiymat va xos funksiyalarini topish ya’ni mikrodunyoda ma’lum bir holatlarda zarrachalar sistemasining energiyasini hisoblash, qo‘yilgan vazifalarni bajarishda katta ahamiyatga ega.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi PF-4947-son “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmoni, 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora tadbirlari to‘g‘risida” gi va 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-sonli “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. «Matematika, mexanika va informatika» ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Klassik mexanikada muhim dinamik xarakteristikalar sifatida moddiy nuqtaning koordinatasi, uning tezligi, energiyasi kabi kattaliklar tanlab olinadi. Kvant mexanikasida esa zarrachaning tezligi, uning impulsi bilan almashtiriladi, energiya esa impulslar orqali ifodalangan bo‘ladi. Klassik mexanikada sistemaning kelgusidagi holatini oldindan to‘la to‘kis aytib bera olsak, kvant mexanikasida esa sistemaning holati to‘la tavsiflangan bo‘lganda ham uning keyingi vaqt momentlaridagi qiymatlari asosan bir qiymatli bo‘lmaydi. Shu sababli kvant mexanikasi zarrachaning kelajakdagi vaziyatini oldindan aytib bera olmaydi. Boshlang‘ich holati ma‘lum bo‘lgan zarracha ustida o‘tkazilgan keyingi o‘lchashlar har xil natijalarga olib kelishi mumkin. Kvant mexanikasining vazifasi ana shu o‘lchashlarda u yoki bu natijaning qanday ehtimol bilan olinishini aniqlashdan iborat.

Ikki zarrachali operatorlar xos qiymatlarining paydo bo‘lish tabiati parametrning kichik qiymatlari uchun birinchi marta R.A. Minlos, S.N. Lakaev va R.A. Minlos, Sh.S. Mamatovlar tomonidan o‘rganilgan. d **-** o‘lchamli panjara $\mathbb{Z}^d$ da harakatlanayotgan ikki zarrachali sistema Hamiltoniani H ning bog‘langan holatlarini o‘rganish, Shryodinger operatorlari oilasi $H(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^d$ (bu yerda $\mathbf{k}$ sistemaning to‘la kvaziimpulsi) ning xos qiymat va xos funksiyalarini o‘rganish masalasiga keltirish birinchi bo’lib R.A. Minlos, S.N. Lakaev, A.I. Mogilnerlarning ishlarida uchraydi. Bundan tashqari $H(\mathbf{k})$ operatorning xos funksiyalari sistema Hamiltoniani H ning bog‘langan holatlari, xos qiymatlari esa bog‘langan holatga mos energiyaning qiymati sifatida talqin qilinishi asoslangan.

Agar $H(0)$ operator muhim spektrining bo‘sag‘asi xos qiymat yoki rezonans bo‘lsa, u holda barcha $\boldsymbol{k} \in \mathbb{T}^d$ da $H(\boldsymbol{k})$ Shryodinger operatorning diskret spektri bo‘sh emasligi uch o‘lchamli panjarada S. Albeverio, S.N. Lakaevlar so‘ngra ixtiyoriy d – o‘lchamli panjarada S.N. Lakaev va A.M. Xalxo‘jayevlar tomonidan isbotlangan. J.I. Abdullayevning ishlarida bir va ikki o‘lchamli panjaralarda ikki zarrachali Shryodinger operatorining xos qiymatlari qo‘zg‘alishlari hisoblangan. M.I. Muminov, S.K. Ghoshal, J.I. Abdullayev, I.A. Ikromovlarning ishlarida $d-$ o‘lchamli panjaradagi Shryodinger operatorining xos qiymatlari chekliligi isbotlangan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilayotgan oliy ta’lim yoki ilmiy-tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Samarqand davlat universiteti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq №SMat-05 raqamli “Matematik analiz va uning zamonaviy matematik fizikaga tadbiqi” mavzusida olib borilayotgan majmuali ilmiy ishlar doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi uch o‘lchamli panjarada sferik va simmetrik potensiallarda Shryodinger operatorining spektral xossalarini tadqiq qilishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

uch o‘lchamli panjarada ikki fermionli sistema energiyasiga mos Shryodinger operatoriga nisbatan invariant qism fazolari mavjudligini isbotlab, sferik simmetrik potensialli Shryodinger operatorining invariant qism fazolardagi xos funksiyalari uchun ifodalar olish;

invariant qism fazolar usulidan foydalanib sferik potensialli diskret Shryodinger operatorining xos qiymatlari soni va karraliklarini hisoblash, hamda bu xos qiymatlar uchun λ^2 aniqlikda asimptotik formulalar olish;

uch o‘lchamli panjarada potensial tashuvchisi cheksiz silindr shaklidagi to‘plamdan iborat bo‘lgan Shryodinger operatorining cheksiz ko‘p invariant qism fazolari mavjudligi isbotlanib, bu operatorning invariant qism fazolarda yotuvchi xos funksiyalari topilgan va bu xos funksiyalarga mos xos qiymatlarni hisoblash;

diskret Shryodinger operatorining cheksiz invariant qism fazolarida yotuvchi cheksiz xos funksiyalari mavjudligidan foydalanib Shryodinger operatorining xos qiymatlari soni cheksizligi va bu xos qiymatlarning potensialga qo‘yilgan shartlarda muhim spektr tubiga intilish tezligini aniqlash.

Tadqiqot ob’ekti uch o‘lchamli panjarada ikki fermionli sistema energiyasiga mos Shryodinger operatorlaridan iborat.

Tadqiqot predmeti uch o‘lchamli panjarada maxsus potensiallar bilan qaralgan Shryodinger operatorlarining spektral tahlilidan iborat.

Tadqiqot usullari. Dissertatsiya ishida matematik analiz, funksional analiz, chiziqli algebra, o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlarning spektral nazariyasi, invariant qism fazolar, integral tenglamalarni yechish usullari hamda qo‘zg‘alishlar nazariyasi elementlaridan foydalanildi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

uch o‘lchamli panjarada ikki fermionli sistema energiyasiga mos Shryodinger operatoriga nisbatan invariant qism fazolari mavjudligi isbotlanib, sferik simmetrik potensialli Shryodinger operatorining invariant qism fazolardagi xos funksiyalari uchun ifodalar olingan;

invariant qism fazolar usulidan foydalanib Shryodinger operatorining xos qiymatlari soni va karraliklari aniq hisoblangan hamda bu xos qiymatlar uchun λ^2 aniqlikda asimptotik formulalar olingan;

uch oʻlchamli panjarada potensial tashuvchisi cheksiz silindr shaklidagi toʻplamdan iborat boʻlgan Shryodinger operatorining cheksiz koʻp invariant qism fazolari mavjudligi isbotlanib, bu operatorning invariant qism fazolarda yotuvchi xos funksiyalari topilgan va bu xos funksiyalarga mos xos qiymatlar aniq hisoblangan;

diskret Shryodinger operatorining cheksiz invariant qism fazolarida yotuvchi cheksiz xos funksiyalari mavjudligidan foydalanib Shryodinger operatorining xos qiymatlari soni cheksizligi va bu xos qiymatlarning potensialga qoʻyilgan monoton kamayuvchilik shartida muhim spektr tubiga intilish tezligi aniqlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

uch oʻlchamli panjarada sferik potensialli Shryodinger operatorining muhim spektrdan tashqaridagi xos qiymatlari soni, karraliklari topilgan va bu xos qiymatlarga mos xos funksiyalar uchun ifodalar olingan;

invariant qism fazolar va oʻz-oʻziga qoʻshma operatorlar nazariyasi usullaridan foydalanib silindrik potensialli diskret Shryodinger operatorining xos qiymatlari cheksizligi isbotlanib, bu xos qiymatlarning muhim spektr tubiga intilish tezligi topilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi matematik analiz, funksional analiz, oʻz-oʻziga qoʻshma operatorlar spektral nazariyasi, integral tenglamalarni yechish usullari, Birman-Shvinger prinsipidan foydalanilganligi hamda qatʼiy matematik mulohazalarni qoʻllash bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati shundan iboratki, oʻz-oʻziga qoʻshma operatorlar spektral nazariyasida, elastiklik nazariyasi va qattiq jismlar fizikasida panjaradagi ikki zarrachali sistemaga mos Shryodinger operatorlarining spektrlari hamda xos qiymati mavjudligini koʻrsatish bilan bogʻliq masalalarni hal etishda foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati olingan ilmiy natijalarning qattiq jismlar fizikasi, elastiklik nazariyasi va kvant mexanikasida eksperimental tadqiqotlar oʻtkazish va qoʻllashga nazariy asos sifatida xizmat qilishi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Sferik, silindrik va nuqtaviy potensialli diskret Shryodinger operatorlarining spektriga oid natijalar asosida:

panjaradagi ikki zarrachali sistema energiyasiga mos Shryodinger operatori diskret spektri va invariant qism fazolariga oid ilmiy natijalardan yetakchi xorijiy jurnallarda (Lobachevskii Journal of Mathematics, Volume 43, 16 February 2023, pages 3079–3090. Volume 44, 28 October 2023, pages 2781–2789. Volume 44, 12 July 2023 pages 1241–1250. Journal of Physics: Conference Series, 2021 J. Phys. Conf. Ser. 2070 012023. DOI 10.1088/1742-6596/2070/1/012023) Shryodinger operatorlarining diskret spektrini tadqiq qilishda invariant qism fazolar usulidan foydalanilgan. Ilmiy natijalarning qo‘llanilishi diskret Shryodinger operatorlarining xos qiymatlarini invariant qism fazolarda alohida tadqiq qilish imkonini bergan;

panjaradagi ikki zarrachali Shryodinger operatori diskret spektri va invariant qism fazolariga oid natijalar Qozog‘iston respublikasi Xoja Ahmad Yassaviy nomidagi Xalqaro qozoq-turk universitetining № AP09259074 sonli “Kasr tartibli differensial tenglamalar yechimlarini qurish usullari, boshlang‘ich va chegaraviy masalalarning yechilish usullari” mavzusidagi loyihada (Qozog‘iston respublikasi Xoja Ahmad Yassaviy nomidagi Xalqaro qozoq-turk universitetining 2024 yil 12-martdagi 04/844 son ma’lumotnomasi) birlik sharda karrali involyutsiyali nolokal Laplas tenglamasi uchun chegaraviy masalaning xos funksiyalari va xos qiymatlariga aniq ko‘rinish olishda hamda bu xos funksiyalarning to‘laligi haqidagi natijalarni olishda foydalanilgan. Ilmiy natijalarning qo‘llanilishi birlik shardagi umumlashgan Helmgols operatorining spektral xossalarini aniqlash ya’ni uning xos qiymatlari va xos funksiyalarini topish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Ushbu tadqiqot natijalari 6 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan, 2 ta xalqaro va 4 ta respublika anjumanlarida muhokamadan o‘tgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha 20 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiyalar asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 6 ta maqola, jumladan, 3 tasi xorijiy va 3 tasi Respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat bo‘lib, dissertatsiyaning hajmi 93 betni tashkil etadi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, ob’ekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar berilgan.

Dissertatsiyaning **“Dastlabki tushunchalar”** deb nomlanuvchi birinchi bobida asosiy natijalarni bayon qilish uchun zarur bo‘lgan belgilashlar, ta’riflar, tushunchalar va asosiy teoremalar keltirilgan. Panjarada harakatlanayotgan zarracha koordinatasiga mos K hamda potensial energiyasiga mos V operatorlarning spektral proyektorlari qurilgan. Zarracha energiyasiga mos H operatorning koordinatali va impulsli tasvirlari, sistema energiyasining taqsimotlari va ma’lum statsionar holatlardagi taqsimot funksiyasi keltirib chiqarilgan.

Dissertatsiyaning **“Sferik simmetrik potensialli ikki fermionli sistemaga mos Shryodinger operatori spektri”** deb nomlanuvchi ikkinchi bobida uch o‘lchamli panjarada ikki fermionli sistema energiyasiga mos $H(\boldsymbol{k})$ Shryodinger operatori, sferik simmetrik (potensial tashuvchisi markazi koordinata boshida radiusi $r = 2$ bo‘lgan shar) potensial bilan qaralgan. Potensialga qo‘yilgan shartlarda $H(\boldsymbol{k})$ operatorning xos qiymatlari soni, karraliklari va asimptotikalari haqidagi asosiy teoremalar invariant qism fazolar usulidan samarali foydalangan holda isbotlangan.

Quyidagi belgilashlardan foydalanamiz: $\mathbb{Z}^3 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\ -$ uch o‘lchamli panjarani, $\ell_2(\mathbb{Z}^3)$ bilan esa $\mathbb{Z}^3$ da aniqlangan kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalar fazosini belgilaymiz.

$$\ell_2((\mathbb{Z}^3)^2) = \ell_2(\mathbb{Z}^3) \otimes \ell_2(\mathbb{Z}^3),$$
$$\ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2) = \{f \in \ell_2((\mathbb{Z}^3)^2) : f(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) = -f(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_1})\}.$$

Faraz qilaylik $\mathbb{T}^3 = (-\pi, \pi]^3$ uch o‘lchamli tor, hamda $L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ sifatida $(\mathbb{T}^3)^2$ da aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalarning Hilbert fazosini belgilaymiz. Keyin esa $L_2((\mathbb{T}^3)^2)$ fazoning antisimmetrik funksiyalaridan tashkil topgan qism fazosini quyidagicha belgilaymiz:

$$L_2^{as}((\mathbb{T}^3)^2) = \{f \in L_2((\mathbb{T}^3)^2) : f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = -f(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)\}.$$

Ikki fermionli sistemaning to‘la energiyasiga mos $\widehat{H}$ operator $\ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2)$ Hilbert fazosida fermionlarning kinetik energiyasiga mos operator $\widehat{H}_0$ hamda, potensial energiyasiga mos $\widehat{\mathrm{V}}$ operatorlar yig‘indisi shaklida ifodalanadi:

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{V}. \qquad (1)$$

$\widehat{H}_0$ operator $\ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2)$ Hilbert fazosida quyidagicha aniqlanadi:

$$\widehat{H}_0 = -\frac{1}{2m}\Delta_1 - \frac{1}{2m}\Delta_2.$$

Bu yerda, m zarrachaning massasi (fermionlar uchun $m = 1$ deb hisoblaymiz), $\Delta_1 = \Delta \otimes I$ va $\Delta_2 = I \otimes \Delta$, ko‘rinishda bo‘lib, I birlik operator, Δ panjaradagi standart Laplas operatori quyidagicha aniqlanadi:

$$(\Delta\psi)(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{3} [\psi(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j) + \psi(\mathbf{x} - \mathbf{e}_j) - 2\psi(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3, \quad \psi \in \ell_2(\mathbb{Z}^3),$$

bunda $\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0)$ va $\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ lar $\mathbb{Z}^3$ dagi birlik vektorlar.

Zarrachalarning o‘zaro ta’sir energiyasiga mos $\widehat{\mathrm{V}}$ operatorning ψ funksiyaga ta’siri

$$(\hat{V}\psi)(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) = \hat{v}(\mathbf{x_1} - \mathbf{x_2})\psi(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}), \quad \psi \in \ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2).$$

ko‘rinishda aniqlanadi. Potensial $\hat{v}$ ga quyidagi shartlar qo‘yiladi:

$$\hat{v}(-n) \geq 0 \qquad va \quad \hat{v} \in \ell_1(\mathbb{Z}^3) \tag{2}$$

Faraz qilaylik, $\hat{v}$ potensial

$$\hat{v}(\mathbf{x}) = \begin{cases} v_+(\mathbf{x}), & agar \quad |\mathbf{x}| \leq 2, \\ 0, & agar \quad |\mathbf{x}| \geq 3, \end{cases} \tag{3}$$

bunda $|\mathbf{x}| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$, $v_+ : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ bo‘lib, quyidagi shartlarni qanoatlantiradigan monoton kamayuvchi funksiya bo‘lsin

$$v_+(0) > v_+(1) > v_+(2) > 0, \quad v_+(|\mathbf{x}|) = 0, \; |\mathbf{x}| \geq 3. \tag{4}$$

$\hat{v}$ potensialning tashuvchisi

$$D = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3 : \quad |\mathbf{x}| \leq 2\}$$

ko‘rinishdagi shardan iborat. Har bir $\psi \in \ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2)$ uchun $\psi(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$ tenglik o‘rinli, shu sababli $\hat{v}$ funksiyaning nol nuqtadagi qiymatini ixtiyoriy tanlash mumkin. Bu yerda $\hat{v}(0) = 0$ deb olingan.

1-lemma. *Faraz qilaylik $\hat{v}$ potensialga qo’yilgan (2) va (3) shartlar bajarilsin. U holda (1) tenglik yordamida aniqangan $\widehat{H}$ operator $\ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2)$ fazoda chegaralangan o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘ladi.*

Energiya operatori $\widehat{H}$ ning koordinatali tasviridan impulsli tasviriga Furye almashtirishi orqali o‘tiladi:

$$\mathcal{F} : \ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2) \to L_2^{as}((\mathbb{T}^3)^2).$$

Bu yerda

$$(\mathcal{F}\hat{f})(k_1, k_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^3} \hat{f}(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{m}) e^{i(\boldsymbol{n}, k_1) + i(\boldsymbol{m}, k_2)}$$

ko‘rinishda aniqlangan Furye operatori.

Energiya operatori $H = \mathcal{F}\widehat{H}\mathcal{F}^{-1} = H_0 + \mathrm{V}$, unitar operatorlar oilasi $U_{\mathbf{s}}, \mathbf{s} \in \mathbb{Z}^3$ bilan o‘zaro o‘rin almashinuvchan bo‘ladi. Bu yerda $U_{\mathbf{s}}$ siljitish operatori quyidagicha aniqlanadi:

$$(U_{\mathbf{s}} f)(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) = \exp(-i(\mathbf{s}, \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2)) f(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2), \quad f \in L_2^{as}((\mathbb{T}^3)^2).$$

$U_{\mathbf{s}}$ va H operatorlar quyidagicha to‘g‘ri integralga yoyiladi,

$$U_{\mathbf{s}} = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus\, U_{\mathbf{s}}(\mathbf{k})\, \mathrm{d}\mathbf{k}, \quad H = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus\, \widetilde{H}(\mathbf{k})\, \mathrm{d}\mathbf{k}.$$

Bu yerda, $U_{\mathbf{s}}(\mathbf{k})$ operator $L_2^{as}(F_{\mathbf{k}}), F_{\mathbf{k}} = \{(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2) \in \mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3 : \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}\}$ fazoda aniqlangan $\exp(-i(\mathbf{s}, \mathbf{k}))$ funksiyaga ko‘paytirish operatoridir.

H energiya operatorining $L_2^{as}(F_{\mathbf{k}})$ fazodagi qatlam operatorlari $\widetilde{H}(\mathbf{k})$, Shryodinger operatori deb ataluvchi $H(\mathbf{k}) := H_0(\mathbf{k}) + \mathrm{V}$ operatorga unitar ekvivalent bo‘ladi.

Agar $\hat{v}$ potensial (3) ko‘rinishda bo’lsa u holda $H(\mathbf{k})$ Shryodinger operatori $L_2^o(\mathbb{T}^3) := \{f \in L_2(\mathbb{T}^3) : f(-\mathbf{p}) = -f(\mathbf{p})\}$ Hilbert fazosida quyidagicha aniqlanadi:

$$(H(\mathbf{k})f)(\mathbf{p}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})f(\mathbf{p}) + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{T}^3} v(\mathbf{p}-\mathbf{s})f(\mathbf{s})d\mathbf{s}.$$

Bu yerda

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = 6 - 2\cos\frac{k_1}{2}\cos p_1 - 2\cos\frac{k_2}{2}\cos p_2 - 2\cos\frac{k_3}{2}\cos p_3. \tag{5}$$

Fermionlarning o‘zaro ta’sir energiyasiga mos V qo‘zg‘alish operatori $L_2^o(\mathbb{T}^3)$ fazoda

$$(2\pi)^{-\frac{3}{2}}v(\mathbf{p}-\mathbf{s}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}(\mathcal{F}\hat{v})(\mathbf{p}-\mathbf{s}),$$

yadroli integral operator bo‘ladi, ya’ni

$$(\mathrm{V}f)(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi^3}\int_{\mathbb{T}^3} [v_+(1)\sum_{j=1}^{3} \sin p_j \sin s_j + v_+(2)\sum_{j=1}^{3} \sin 2p_j \sin 2s_j +$$

$$+2v_+(2)\sum_{1\le i<j\le 3} (\cos p_i \cos s_i \sin p_j \sin s_j + \sin p_i \sin s_i \cos p_j \cos s_j)]f(\mathbf{s})d\mathbf{s}.$$

Har bir $\mathbf{k} \in (-\pi,\pi)^3$ da $H_0(\mathbf{k})$ operator xos qiymatlarga ega emas, bu operatorning spektri $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ funksiyaning qiymatlar sohasidan iborat:

$$\sigma(H_0(\mathbf{k})) = [\mathrm{m}(\mathbf{k}), \mathrm{M}(\mathbf{k})],$$

ya’ni

$$m(\mathbf{k}) := \min_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^3} \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}), \qquad M(\mathbf{k}) := \max_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^3} \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}).$$

V operatorning spektri faqat $\{0,\ v_+(1),\ v_+(2)\}$ xos qiymatlardan iborat bo‘ladi.

Faraz qilaylik, $L_2^-(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}) : f(-p) = -f(p)\}$ fazo $\mathbb{T}$ da aniqlangan barcha toq funksiyalardan tashkil topgan qism fazo va $L_2^+(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}) : f(-p) = f(p)\}$ esa juft funksiyalardan tashkil topgan qism fazo bo‘lsin.

Quyidagi fazolarni kiritamiz:

$$\mathcal{H}_{123} := L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}), \quad \mathcal{H}_1 := L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}),$$

$$\mathcal{H}_2 := L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}), \quad \mathcal{H}_3 := L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}).$$

Bu fazolar $L_2^o(\mathbb{T}^3)$ fazoning qism fazolari bo‘ladi va ularning to‘g‘ri yig‘indisi $L_2^o(\mathbb{T}^3)$ fazoni qoplaydi, ya’ni

$$L_2^o(\mathbb{T}^3) = \mathcal{H}_{123} \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3. \tag{6}$$

2-lemma. *Har bir $\boldsymbol{k} \in \mathbb{T}^3$ da $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ va $\mathcal{H}_{123}$ qism fazolar $H(\boldsymbol{k})$ operatorga nisbatan invariantdir.*

(6) yoyilma va 2-lemmadan quyidagi yoyilma kelib chiqadi.

$$H(\mathbf{k}) = H_1(\mathbf{k}) \oplus H_2(\mathbf{k}) \oplus H_3(\mathbf{k}) \oplus H_{123}(\mathbf{k}) \tag{7}$$

Bu yerda $H_{123}(\mathbf{k})$ va $H_\alpha(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) + V_\alpha$ operatorlar $H(\mathbf{k})$ operatorning mos ravishda $\mathcal{H}_{123}$ va $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha = 1,2,3$ invariant qism fazolardagi qismlaridir (sujeniesidir). Bunda $H_{0(\alpha)}(\mathbf{k}) := H_0(\mathbf{k})$ (5) ko‘rinishda aniqlangan $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ funksiyaga ko‘paytirish operatori.

Integral V operatorning $\mathcal{H}_\alpha$ fazodagi qismi V_α ning f funksiyaga ta’siri quyidagicha:

$$(V_\alpha f)(\mathbf{p}) = \frac{2v_+(1)}{(2\pi)^3}\sin p_\alpha \int_{\mathbb{T}^3} \sin s_\alpha f(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \frac{2v_+(2)}{(2\pi)^3}\sin 2p_\alpha \int_{\mathbb{T}^3} \sin 2s_\alpha f(\mathbf{s})d\mathbf{s} +$$
$$+\frac{4v_+(2)}{(2\pi)^3}\sin p_\alpha \int_{\mathbb{T}^3} \sin s_\alpha\left[\cos p_\beta \cos s_\beta + \cos p_\gamma \cos s_\gamma\right] f(\mathbf{s})d\mathbf{s}. \qquad (8)$$

(7) tenglikka ko‘ra $H(\mathbf{k})$ operator spektrini o‘rganish masalasi $H_{123}(\mathbf{k})$ va $H_1(\mathbf{k}), H_2(\mathbf{k}), H_3(\mathbf{k})$ operatorlarning spektrini o‘rganish masalasiga keldi.

1-teorema. *Ixtiyoriy $\boldsymbol{k} \in \mathbb{T}^3$ da quyidagi tenglik o‘rinli:*

$$\sigma(H_{123}(\boldsymbol{k})) = \sigma(H_0(\boldsymbol{k})).$$

(8) tenglikdan ko‘rinadiki V_1, V_2 va V_3 operatorlar unitar ekvivalent.

3-lemma. *Agar, $\boldsymbol{k}_\lambda = (\pi - 2\lambda, \pi - 2\lambda, \pi - 2\lambda)$ bo‘lsa, u holda $H_1(\boldsymbol{k}_\lambda)$, $H_2(\boldsymbol{k}_\lambda)$ va $H_3(\boldsymbol{k}_\lambda)$ operatorlar unitar ekvivalentdir.*

Shu sababli faqat $H_1(\mathbf{k}_\lambda)$ operatorning spektrini o‘rganish bilan cheklanamiz.

V_1 integral operatorning yadrosi $V_1(\mathbf{p}, \mathbf{q})$, p_2 va p_3 argumentlarga nisbatan simmetrik bo‘lganligi uchun, yana invariant qism fazolar mavjudligini ko‘rsatamiz. Shu maqsadda quyidagi belgilashlarni kiritamiz: $\mathcal{H}_1$ fazoni simmetrik $\mathcal{H}_1^s := \{f \in \mathcal{H}_1 : f(p_1, p_2, p_3) = f(p_1, p_3, p_2)\}$ va antisimmetrik $\mathcal{H}_1^{as} := \{f \in \mathcal{H}_1 : f(p_1, p_2, p_3) = -f(p_1, p_3, p_2)\}$ qism fazolar to‘g‘ri yig‘indisi shaklida yozib olamiz:

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^s \oplus \mathcal{H}_1^{as}.$$

4-lemma. *$\mathcal{H}_1^{as}$ va $\mathcal{H}_1^s$ qism fazolar $H_1(\boldsymbol{k}_\lambda)$ operatorga nisbatan invariantdir.*

$H_1(\mathbf{k}_\lambda)$ operatorning $\mathcal{H}_1^s$ va $\mathcal{H}_1^{as}$ fazolardagi qismlarini mos ravishda $H_1^s(\mathbf{k}_\lambda)$ va $H_1^{as}(\mathbf{k}_\lambda)$ bilan belgilaymiz va

$$C^{as} = \frac{1}{4\pi^3}\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 p_1(\cos p_2 - \cos p_3)^2}{3 + \cos p_1 + \cos p_2 + \cos p_3} d\mathbf{p} \approx 0{,}178224.$$

belgilash kiritamiz.

2-teorema. *Faraz qilaylik $\lambda \in (0, \pi)$ bo‘lsin.*

a) Agar $v_+(2) \cdot C^{as} < \sin\lambda$ bo‘lsa, u holda $H_1^{as}(\boldsymbol{k}_\lambda)$ operator $H(\boldsymbol{k}_\lambda)$ operator muhim spektridan tashqarida xos qiymatlarga ega emas.

b) Agar $v_+(2) \cdot C^{as} = \sin\lambda$ bo‘lsa, u holda muhim spektrning o‘ng cheti $M(\boldsymbol{k}_\lambda)$ soni $H_1^{as}(\boldsymbol{k}_\lambda)$ operator uchun xos qiymat bo‘ladi.

c) Agar $v_+(2) \cdot C^{as} > \sin\lambda$ bo‘lsa u holda $H_1^{as}(\boldsymbol{k}_\lambda)$ operator $H(\boldsymbol{k}_\lambda)$ operator muhim spektridan tashqarida yagona oddiy xos qiymatga ega.

3-teorema. *Shunday $\delta > 0$ son mavjudki ixtiyoriy $\lambda \in (0, \delta)$ uchun $H_1^s(\boldsymbol{k}_\lambda)$ operator $H(\boldsymbol{k}_\lambda)$ operator muhim spektridan tashqarida uchta har xil oddiy xos qiymatlarga ega.*

(7) to‘g‘ri yoyilma hamda 2- va 3-teoremalardan quyidagi natija kelib chiqadi.

4-teorema. *Shunday $\delta > 0$ son mavjudki ixtiyoriy $\lambda \in (0, \delta)$ uchun $H(\boldsymbol{k}_\lambda)$ operator muhim spektrdan tashqarida 4 ta uch karrali xos qiymatlarga ega. Bu xos qiymatlar uchun quyidagi asimptotik formulalar o'rinli:*

$$z_1(\lambda) = 6 + v_+(1) + \frac{5}{v_+(1) - v_+(2)}\lambda^2 + O(\lambda^4), \quad \lambda \to 0$$

$$z_2(\lambda) = 6 + v_+(2) + \frac{2}{v_+(2)}\lambda^2 + O(\lambda^4), \ \lambda \to 0$$

$$z_{3,4}(\lambda) = 6 + v_+(2) + \frac{11v_+(1) - 16v_+(2)}{2v_+(2)[v_+(1) - v_+(2)]}\lambda^2$$

$$\pm \frac{\sqrt{[9v_+(2) - 4v_+(1)]^2 + v_+^2(1) - v_+^2(2)}}{2v_+(2)[v_+(1) - v_+(2)]}\lambda^2 + O(\lambda^4), \quad \lambda \to 0$$

Dissertatsiyaning uchinchi bobi **"Silindrik potensialli ikki fermionli sistemaning bog'langan holatlari"** deb nomlangan bu bobda ikki fermionli sistema energiyasiga mos $H(\mathbf{k})$ Shryodinger operatori

$$\hat{v}(\mathbf{n}) = \hat{v}(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} \bar{v}(|\mathbf{n}|), & agar \quad |n_1| + |n_2| \leq 1 \\ 0, & agar \quad |n_1| + |n_2| \geq 2, \end{cases} \tag{9}$$

potensial bilan qaralgan. Bu yerda $|\mathbf{n}| = |n_1| + |n_2| + |n_3|$, $\bar{v}: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$\bar{v}(1) > \bar{v}(2) > \cdots > 0 \quad va \quad \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}^2(n) < \infty. \tag{10}$$

$$supp\ \hat{v} = D = \{\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 : n_3 \in \mathbb{Z}, \quad |n_1| + |n_2| \leq 1\}.$$

$H(\mathbf{k})$ Shryodinger operatori $L_2^o(\mathbb{T}^3)$ Hilbert fazosida quyidagicha aniqlanadi:

$$H(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - \mathrm{V}.$$

Qo'zg'almas $H_0(\boldsymbol{k})$ operator (5) ko'rinishdagi $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$ funksiyaga ko'paytirish operatori. Integral V operatorning $f \in L_2^o(\mathbb{T}^3)$ elementga ta'siri quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$(\mathrm{V}f)(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \Bigg[\bar{v}(1) \sum_{i=1}^{3} \sin p_i \sin q_i$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}(n+1) \sum_{i=1}^{2} (2\cos np_3 \cos nq_3 \sin\ p_i \sin q_i) +$$

$$+ 2\sin np_3 \sin nq_3 \cos p_i \cos q_i + \frac{1}{2}\sin(n+1)p_3 \sin(n+1)q_3 \Bigg] f(\mathbf{q}) d\mathbf{q}.$$

II bobda keltirilgan $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha = 1,2,3$ va $\mathcal{H}_{123}$ qism fazolar $H(\mathbf{k})$ operatorga nisbatan invariant bo'ladi. Shu sababli $H(\mathbf{k})$ operator

$$H(\mathbf{k}) = H_1(\mathbf{k}) \oplus H_2(\mathbf{k}) \oplus H_3(\mathbf{k}) \oplus H_{123}(\mathbf{k}) \qquad (11)$$
to‘g‘ri yig‘indiga yoyiladi. Bu yerda ham $H_\alpha(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - V_\alpha$ operator orqali $H(\mathbf{k})$ operatorning $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha \in \{1,2,3\}$, invariant qism fazodagi qismi belgilangan. Qo‘zg‘almas $H_0(\mathbf{k})$ operator $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ funksiyaga ko‘paytirish operatori sifatida aniqlanadi.

5-lemma. *Ixtiyoriy $\boldsymbol{k} \in \mathbb{T}^3$ da quyidagi tenglik o‘rinli*
$$\sigma(H_{123}(\boldsymbol{k})) = \sigma(H_0(\boldsymbol{k})).$$

Faraz qilaylik $\mathbf{k} = \boldsymbol{\pi} = (\pi,\pi,\pi)$, bo‘lsin, u holda $H(\boldsymbol{\pi}) = 6I - V$ operatorning spektri $6, 6 - \bar{v}(n), n \in \mathbb{N}$ xos qiymatlar va $\{6\}$ muhim spektrdan iborat bo‘ladi.

Agar (10) monotonlik sharti o‘rinli bo‘lsa, u holda $z_1(\boldsymbol{\pi}) = 6 - \bar{v}(1)$ soni $H(\boldsymbol{\pi})$ operator uchun uch karrali xos qiymat va bu xos qiymatga mos xos funksiyalar
$$\sin p_1,\ \sin p_2,\ \sin p_3,$$
ko‘rinishda bo‘ladi.

Barcha $n \geq 2$ larda $z_n(\boldsymbol{\pi}) = 6 - \bar{v}(n)$ soni $H(\boldsymbol{\pi})$ operator uchun besh karrali xos qiymat bo‘ladi va bu xos qiymatga mos xos funksiyalar quyidagicha:
$$\sin np_3,\quad \sin p_1 \cos(n-1)p_3,\quad \sin p_2 \cos(n-1)p_3,$$
$$\sin(n-1)p_3 \cos p_1,\quad \sin(n-1)p_3 \cos p_2.$$

Endi $H(\boldsymbol{\pi})$ operatorning uch karrali $z_1(\boldsymbol{\pi}) = 6 - \bar{v}(1)$ xos qiymati $H_1(\boldsymbol{\pi})$, $H_2(\boldsymbol{\pi})$ va $H_3(\boldsymbol{\pi})$ operatorlar uchun oddiy xos qiymat bo‘ladi. Barcha $n \geq 2$ larda $H(\boldsymbol{\pi})$ operatorning besh karrali $z_n(\boldsymbol{\pi}) = 6 - \bar{v}(n)$ xos qiymati, $H_1(\boldsymbol{\pi})$ va $H_2(\boldsymbol{\pi})$ operatorlar uchun oddiy xos qiymat, $H_3(\boldsymbol{\pi})$ operator uchun esa uch karrali xos qiymat bo‘ladi.

5-teorema. *Faraz qilaylik, $k_2 = k_3 = \pi$ va $k_1 \in (-\pi,\pi)$ bo‘lsin.*

a) Agar $\bar{v}(1) \leq cos\frac{k_1}{2}$ bo‘lsa, u holda $H_1(k_1,\pi,\pi)$ operator muhim spektr tashqarisida xos qiymatlarga ega emas.

b) Agar shunday $n_0 \in \mathbb{N}$ nomer mavjud bo‘lib $\bar{v}(n_0+1) \leq cos\frac{k_1}{2} < \bar{v}(n_0)$ munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda $H_1(k_1,\pi,\pi)$ operator muhim spektr tashqarisida yotuvchi rosa n_0 ta
$$z_{1(n+1)}(k_1,\pi,\pi) = 6 - \bar{v}(n+1) - \frac{cos^2\frac{k_1}{2}}{\bar{v}(n+1)}, \quad n = 0,1,\ldots,n_0-1 \qquad (12)$$
xos qiymatlarga ega va bu xos qiymatlarga mos xos funksiyalar
$$f_{1(n+1)}^{-++}(p_1,p_2,p_3) = \frac{sinp_1 cos(n+1)p_3}{6 - 2cos\frac{k_1}{2}cosp_1 - z_{1(n+1)}(k_1,\pi,\pi)} \in \mathcal{H}_1$$
ko‘rinishda bo‘ladi.

6-teorema. *Istalgan $k_1 \in (-\pi,\pi]$ uchun $H_2(k_1,\pi,\pi)$ operator muhim spektr tashqarisida ckeksiz ko‘p oddiy*
$$z_{2(n+1)}(k_1,\pi,\pi) = 6 - \sqrt{\bar{v}^2(n+1) + 4cos^2\frac{k_1}{2}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\} \qquad (13)$$
xos qiymatlarga ega bo‘ladi. Bu xos qiymatlarga mos xos funksiyalar

$$f_{2(n+1)}^{+-+}(p_1, p_2\, p_3) = \frac{sinp_2 cos(n+1)p_3}{6 - 2cos\frac{k_1}{2}cosp_1 - z_{2(n+1)}(k_1,\pi,\pi)} \in \mathcal{H}_2$$

ko'rinishga ega.

7-teorema. *Istalgan $k_1 \in (-\pi, \pi)$ uchun $H_3(k_1, \pi, \pi)$ operator muhim spektr tashqarisida cheksiz ko'p xos qiymatlarga ega.*

Yuqorida olingan natijalardan ma'lum bo'ldiki $H(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - V$ operatorning $\mathcal{H}_{123}$ invariant qism fazodagi qismi $H_{123}(\mathbf{k})$ operatorning diskret spektri bo'sh to'plam edi. $\hat{v}$ potensial tashuvchisiga qanday shartlar qo'yilganda $H_{123}(\mathbf{k})$ operatorning xos qiymatlari mavjud bo'ladi?

$H(\mathbf{k})$ operatorni

$$\hat{v}(\mathbf{n}) = \hat{v}(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} \bar{v}(|\mathbf{n}|), & agar \quad |n_1| + |n_2| \le 2, \\ 0, & agar \quad |n_1| + |n_2| \ge 3 \end{cases} \qquad (14)$$

potensial bilan qaraymiz. Bu yerda $\bar{v}: \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ funksiya $\mathbb{Z}_+$ da aniqlangan

$$\bar{v}(0) > \bar{v}(1) > \bar{v}(2) > \cdots > 0$$

monoton kamayuvchi funksiya.

$$supp\ \hat{v} = D_2 = \{\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 : n_3 \in \mathbb{Z}, \quad |n_1| + |n_2| \le 2\}.$$

Potensial $\hat{v}$ (14) ko'rinishda bo'lganda ham $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha = 1,2,3$ va $\mathcal{H}_{123}$ qism fazolar $H(\mathbf{k})$ operatorga nisbatan invariant bo'ladi va $H(\mathbf{k})$ operatorni (11) to'g'ri yig'indi ko'rinishda ifodalash mumkin.

$H(\mathbf{k})$ operatorning $\mathcal{H}_{123}$ qism fazodagi qismi (sujeniyasi)

$$H_{123}(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - V_{123}$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda $H_0(\mathbf{k})$ operator $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ funksiyaga ko'paytirish operatori. V_{123} integral operator f elementga quyidagicha ta'sir qiladi:

$$(V_{123}f)(\mathbf{p}) = \frac{\sin p_1 \sin p_2}{\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}(n+2) \sin np_3 \ \sin q_1 \ \sin q_2 \sin nq_3 f(\mathbf{q})\, d\mathbf{q}.$$

Dastlab $H_{123}(\pi - 2\beta, \pi, \pi)$, $\beta \in [0, \pi)$ va $H_{123}(\pi, \pi - 2\beta, \pi)$ operatorlarning, keyin esa $H_{123}(\pi - 2\beta, \pi - 2\beta, \pi)$ operatorning xos qiymatlarini o'rganamiz. Murakkab bo'lmagan hisoblashlar ko'rsatadiki $H_{123}(\pi - 2\beta, \pi, \pi)$ va $H_{123}(\pi, \pi - 2\beta, \pi)$ operatorlar unitar ekvivalent bo'ladi.

Demak, $H_{123}(\pi - 2\beta, \pi, \pi)$ va $H_{123}(\pi, \pi - 2\beta, \pi)$ operatorlarning spektri ustma-ust tushadi. Shu sababli, faqat $H_{123}(\pi - 2\beta, \pi, \pi)$ operator uchun olingan natijalarni keltiramiz.

8-teorema. *Faraz qilaylik $\beta \in (0, \pi)$ bo'lsin.*

a) Agar $\bar{v}(3) < sin\beta$ bo'lsa, u holda $H_{123}(\pi - 2\beta, \pi, \pi)$ operator muhim spektr tashqarisida yotuvchi xos qiymatlarga ega emas.

b) Agar biror $n_0 \in \mathbb{N}$ uchun $sin\beta \in (\bar{v}(n_0 + 3), \bar{v}(n_0 + 2))$ bo'lsa, u holda $H_{123}(\pi - 2\beta, \pi, \pi)$ operator muhim spektr tashqarisida yotuvchi rosa n_0 ta oddiy

$$z_{123}^{(k)}(\pi - 2\beta, \pi, \pi) = 6 - \bar{v}(k+2) - \frac{1}{\bar{v}(k+2)} sin^2\beta, \quad k = 1,2, \ldots, n_0$$

xos qiymatlarga ega.

c) Agar biror $n_0 \in \mathbb{N}$ uchun $sin\beta = \bar{v}(n_0+2)$ bo‘lsa, u holda muhim spektr chap bo‘sag‘asi $m(\beta) = 6 - 2\bar{v}(n_0+2)$ soni $H_{123}(\pi-2\beta,\pi,\pi)$ operator uchun rezonans bo‘ladi.

Endi $H_{123}(\pi-2\beta,\pi-2\beta,\pi)$ operator uchun olingan natijani keltiramiz. Shu maqsadda quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$C_{123} = \frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\frac{\sin^2 p_1 \sin^2 p_2 \, dp_1 dp_2}{2-\cos p_1 - \cos p_2} = 0{,}302347.$$

9-teorema. *Faraz qilaylik $\beta \in (0,\pi)$ bo‘lsin.*

a) Agar $C_{123}\cdot\bar{v}(3) < sin\beta$ bo‘lsa, u holda $H_{123}(\pi-2\beta,\pi-2\beta,\pi)$ operator muhim spektr tashqarisida yotuvchi xos qiymatlarga ega emas.

b) Agar biror $n_0 \in \mathbb{N}$ da $sin\beta = C_{123}\cdot\bar{v}(n_0+2)$, bo‘lsa, u holda muhim spektr chap bo‘sag‘asi $m(\beta) = 6 - 2sin\beta$ soni $H_{123}(\pi-2\beta,\pi-2\beta,\pi)$ operator uchun xos qiymat bo‘ladi.

c) Agar biror $n_0 \in \mathbb{N}$ uchun $C_{123}\cdot\bar{v}(n_0+3) < sin\beta < C_{123}\cdot\bar{v}(n_0+2)$ bo‘lsa, u holda $H_{123}(\pi-2\beta,\pi-2\beta,\pi)$ operator muhim spektr tashqarisida yotuvchi rosa n_0 ta oddiy xos qiymatga ega.

XULOSA

Uch o‘lchamli panjara $\mathbb{Z}^3$ da ikki fermionli sistema energiyasiga mos Shryodinger operatori sferik simmetrik va silindrik potensiallar bilan qaralgan.

Sferik simmetrik potensialga qo‘yilgan shartlarda $H(\mathbf{k})$ Shryodinger operatorining muhim va diskret spektri tahlil qilingan. $H(\boldsymbol{\pi})$ operatorning uch karrali $6+v_+(1)$ va to‘qqiz karrali $6+v_+(2)$ xos qiymatlarining kichik $\lambda>0$ da qo‘zg‘alishlarida $H(\mathbf{k}_\lambda)$ operatorning muhim spektrdan tashqaridagi xos qiymatlari uchun asimptotikalar va ularning karraliklari haqida asosiy natijalar keltirilgan.

Silindrik potensialga qo‘yilgan shartlarda $H(\mathbf{k})$ operatorga nisbatan cheksiz ko‘p invariant qism fazolar mavjudligi ko‘rsatilgan. Bundan foydalanib $H(\mathbf{k})$ operatorning xos qiymatlari cheksizligi isbotlangan. $H(\mathbf{k})$ operatorning xos qiymatlari asimptotikalari va bu xos qiymatlarning muhim spektr tubiga intilish tezliklari haqida natijalar olingan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.02.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ ШАРОФА РАШИДОВА

ТОШТУРДИЕВ АБДИХУРАЙРА МУХАММАДИЕВИЧ

СПЕКТР ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЕДИНГЕРА СО СФЕРИЧЕСКИМ, ЦИЛИНДРИЧЕСКИМ И ТОЧЕЧНЫМ ПОТЕНЦИАЛАМИ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Самарканд – 2024

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за номером B2023.4.PhD/FM940.

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Абдуллаев Жаникул Ибрагимович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Кулиев Комил Данабаевич** доктор физико-математических наук
	Яхшибаев Махмадиёр Умирович доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Бухарский государственный университет**

Защита диссертации состоится «28» 09 2024 года в 10^{00} часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за №86). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «16» 09 2024 года.
(протокол рассылки № 2 от «16» 09 2024 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI • SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI •

А.С. Солеев
Председатель научного совета по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук, профессор

А.М. Халхужаев
Ученый секретарь научного совета по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук

С.Н. Лакаев
Заместитель председателя научного семинара при научном совете по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук, академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В мире особое внимание уделяется исследованию спектральных свойств дискретных операторов Шредингера (гамильтонианов), подходящих для системы (квантовых) частиц на оптической решетке. Они являются одним из основных механизмов теоретического обоснования экспериментальных результатов в различных областях, таких как физика твердого тела, физика систем высоких энергий и физика ультрахолодных оптических систем. В настоящее время в развитых странах важное место в широком классе физических моделей занимают операторы, состоящие из набора операторов свертки типа Лорана-Теплица и операторов умножения, учитывающих только нулевые и однодиапазонные взаимодействия. В связи с этим широкий интерес вызывают спектральные свойства оператора энергии системы частиц на решетке.

В мире проводятся научные исследования, направленные на исследование спектральных свойств операторов Шредингера, соответствующих двухчастичной системе на трехмерной решетке. Исследования резонансов Фешбаха для ультрахолодных атомов считаются приоритетными в научно-исследовательских институтах развитых стран в этом направлении. В связи с этим доказательство существования пороговых значений константы связи и собственных значений, лежащих выше существенного спектра для операторов Шредингера на трехмерной решетке, нахождение точного числа собственных значений и получение сходящихся рядов в окрестности пороговых значений константы связи, развитие исследований пороговых собственных значений оператора и пороговых резонансов считается одной из актуальных задач.

В нашей республике принимаются широкие меры по исследованию и их практическому применению существенных и дискретных спектров операторов Шредингера, соответствующих энергии двухчастичной системы на решетке. Основными задачами и направлениями деятельности математической науки являются проведение исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Алгебры и ее приложений, дифференциальных уравнений и их приложений, математического моделирования нелинейных систем, динамических систем и их приложений, стохастического анализа, медико-биологической информатики, вычислительной математики»[2]. В частности, большое значение при выполнении задач имеет нахождение собственных значений и собственных функций операторов Шредингера, соответствующих двухчастичной системе на решетке, т. е. расчет энергии системы частиц в определенных ситуациях микромира.

[2] Постановление Президента Республики Узбекистан ПП-4387 от 9 июля 2019 года “О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан”.

Тема и объект исследования настоящей диссертации находится в русле проблем, которые входят в тематику задач, отмеченных в Указах Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», № УП-2789 от 17 февраля 2017 года «О дальнейшем совершенствовании деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан» и решения от 7 мая 2020 года № PQ-4708 «О мерах по повышению качества образования в области математики и развития научных исследований» и также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. В классической механике в качестве важных динамических характеристик выбираются такие величины, как координата материальной точки, ее скорость и энергия. В квантовой механике скорость частицы заменяется ее импульсом, а энергия представлена импульсами. В классической механике, если будущее состояние системы можно полностью предсказать заранее, в квантовой механике, даже когда состояние системы полностью описано, ее значения в следующие моменты времени не будут одинаковыми. Следовательно, квантовая механика не может предсказать будущее состояние частицы. Последующие измерения на частице с известным начальным состоянием могут дать разные результаты. Задача квантовой механики - определить вероятность получения того или иного результата в этих измерениях.

Природа появления собственных значений двухчастичных операторов Шредингера при малых значениях параметра впервые изучалась Р.А. Минлосом, С.Н. Лакаевом, Ш.С. Маматовом. Приведение изучения связанных состояний гамильтониана H, двухчастичной системы движущейся по $d-$мерной решетке $\mathbb{Z}^d$, к изучению собственных функций семейства операторов Шредингера $H(\mathbf{k})$, $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^d$ (где $k—$ полный квазиимпульс системы) впервые встречается в работах Р.А. Минлоса, С.Н. Лакаева, А.И. Могильнера. Кроме того обоснована интерпретация собственных функций оператора $\mathrm{H}(\mathbf{k})$ как связанных состояний гамильтониана системы H, а собственных значений - как значений энергии, соответствующих связанным состояниям.

С. Альбеверио, С.Н. Лакаевым было доказано, что на трехмерной решетке порог существенного спектра оператора $H(0)$ является собственным значением или резонансом, то для всех $\boldsymbol{k} \in \mathbb{T}^d$, дискретный спектр оператора

Шредингера $H(\boldsymbol{k})$ не пуст. Затем аналогичный результат на произвольной d −мерной решетке доказали С.Н. Лакаев и А. Халхужаев. В работах Ж.И. Абдуллаева рассматривались возмущения собственных значений двухчастичного оператора Шредингера в одномерной и двумерной решетках. Конечность числа собственных значений оператора Шредингера на d −мерной решетке изучалась в работах М.И. Муминова, С.К. Гошала, Ж.И. Абдуллаева, И.А. Икрамова.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего образовательного или научно-исследовательского учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с планом научно-исследовательской работы Самаркандского государственного университета в рамках комплексной научной работы №SMat-05 «Математический анализ и его применение в современной математической физике».

Цель исследования заключается в изучении спектральных свойств оператора Шрёдингера со сферическим и цилиндрическим потенциалом на трехмерной решетке.

Задачи исследования:

доказать существование инвариантных подпространств относительно оператора Шредингера, соответствующего энергии двухфермионной системы на трехмерной решетке, получить выражения для собственных функций оператора Шредингера со сферическим потенциалом в инвариантных подпространствах;

найти число и кратность собственных значений дискретного оператора Шредингера со сферическим потенциалом с использованием метода инвариантных подпространств и получить асимптотические формулы для этих собственных значений с точностью до λ^2;

найти собственные функции дискретного оператора Шредингера с цилинрическим потенциалом, лежащие в бесконечном числе инвариантных подпространств и соответствующие собственные числа;

найти число собственных значений и определить их скорость стремления к нижнему краю существенного спектра при некоторых условиях на потенциал, используя существование бесконечного числа инвариантных подпространств относительно оператора Шредингера.

Объектом исследования являются операторы Шредингера, соответствующие энергии двухфермионной системы на трехмерной решетке.

Предмет исследования состоит из спектрального анализа операторов Шредингера, рассматриваемых со специальными потенциалами на трехмерной решетке.

Методы исследования. В диссертации использованы методы математического анализа, функционального анализа, линейной алгебра, спектральной теории самосопряженных операторов, инвариантных подпространств, решения интегральных уравнений и теории возмущения.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

доказано существование инвариантных подпространств относительно оператора Шредингера, соответствующего энергии двухфермионной системы на трехмерной решетке, получены выражения для собственных функций оператора Шредингера со сферическим потенциалом в инвариантных подпространствах;

найдены число и кратность собственных значений дискретного оператора Шредингера со сферическим потенциалом вне существенного спектра с использованием метода инвариантных подпространств и получены асимптотические формулы для этих собственных значений с точностью до λ^2;

найдены собственные функции дискретного оператора Шредингера с цилиндрическим потенциалом, лежащие в бесконечном числе инвариантных подпространств и соответствующие собственные числа;

найдено число собственных значений и определена их скорост стремления к нижнему краю существенного спектра при некоторых условиях на потенциал, используя существование бесконечного числа инвариантных подпространств относительно оператора Шредингера.

Практическими результатами исследования являются следующие:

найдены число и кратность собственных значений оператора Шредингера на трехмерной решетке со сферическим потенциалом и выражения для соответствующих им собственных функций;

методами теории инвариантных подпространств и самосопряженных операторов была доказана бесконечность числа собственных значений дискретного оператора Шрёдингера с цилиндрическим потенциалом, и найдена скорость стремления этих собственных значений ко дну существенного спектра

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов математического анализа, функционального анализа, спектральной теории самосопряженных операторов, решения интегральных уравнений, принципа Бирмана-Швингера а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования заключается в том, что они могут быть использованы в спектральной теории самосопряженных операторов, в теории упругости и физике твердого тела, для решения задач, связанных с доказательством существования спектров и собственных значений оператора Шредингера, соответствующего двухчастичной системе на решетке.

Практическая значимость результатов исследования объясняется тем, что полученные научные результаты служат теоретической основой для проведения и применения экспериментальных исследований в физике твердого тела, теории упругости и квантовой механике.

Внедрение результатов исследования. На основе научных результатов, касающихся спектра дискретных операторов Шрёдингера со сферическим, цилиндрическим и точечным потенциалами сделаны следующие внедрения:

научные результаты о дискретном спектре оператора Шредингера, соответствующего энергии двухчастичной системы на решетке и инвариантных подпространствах в ведущих зарубежных журналах (Lobachevskii Journal of Mathematics, Volume 43, 16 February 2023, pages 3079–3090. Volume 44, 28 October 2023, pages 2781–2789. Volume 44, 12 July 2023 pages 1241–1250. Journal of Physics: Conference Series, 2021 J. Phys. Conf. Ser. 2070 012023. DOI 10.1088/1742-6596/2070/1/012023) использованы при исследовании дискретного спектра операторов Шрёдингера методом инвариантных подпространств. Применение научных результатов позволило значительно упростить задачу в результате отдельного изучения собственных значений дискретных операторов Шредингера в инвариантных подпространствах;

результаты относительно дискретного спектра двухчастичного оператора Шрёдингера на решетке и инвариантных подпространств исползованы в проекте Международного Казахско-Турецкого университета имени Ходжи Ахмада Яссави по теме: № AP09259074 «Методы построения решений дифференциальных уравнений дробного порядка и вопросы разрешимости краевых и начально-краевых задач» (ссылка № 04/844 Международного Казахско-Турецкого университета имени Ходжи Ахмада Яссави Республики Казахстан от 12 марта 2024 года) при получении наглядного представления о собственных функциях и собственных значениях краевой задачи для нелокального уравнения Лапласа с кратными инволюциями на единичной сфере, результатов о полноте этих собственных функций. Применение научных результатов позволило изучить спектральные свойства обобщенного оператора Гельмгольца на единичной сфере, т.е. найти его собственные значения и собственные функции.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 6 научно-практических конференциях, в том числе на 2 международных и 4 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 20 научных работ, из них 6 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 3 опубликованы в зарубежных журналах и 3 в республиканских научных изданиях.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 93 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «**Предварительные понятия**», представлены определения, понятия и основные теоремы, необходимые для изложения основных результатов. Построены спектральные проекторы оператора K, соответствующего координате движущейся частицы на рещетке и оператора V, соответствующего потенциальной энергии.

Во второй главе диссертации, названной «**Спектр оператора Шредингера, соответствующего двухфермионной системе со сферически-симметричным потенциалом**» рассмотрем оператор Шредингера $H(\boldsymbol{k})$, соответ-ствующий энергии двухфермионной системы на трехмерной решетке сферически-симметричным потенциалом (центр носителя потенциала представляет собой сферу радиусом $r=2$ в начале координат). С использованием метода инвариантных подпространств эффективно доказаны основные теоремы о числе, кратностях и асимптотике собственных значений оператора $H(\boldsymbol{k})$ при условиях, налагаемых на потенциал.

Пусть $\mathbb{Z}^3$ − трехмерная решетка, $\ell_2((\mathbb{Z}^3)^2)$ − гильбертово пространство квадратично-суммируемых функций, определенных на $(\mathbb{Z}^3)^2$, а

$$\ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2) = \ell_2^{as}(\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3) = \{f \in \ell_2((\mathbb{Z}^3)^2): \quad f(\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}) = -f(\mathbf{x_2}, \mathbf{x_1})\}$$

подпространство антисимметричных функций относительно перестановки координат.

Пусть $\mathbb{T}^3 = (-\pi, \pi]^3 -$ трехмерный тор, $L_2^{as}[(\mathbb{T}^3)^2] \subset L_2[(\mathbb{T}^3)^2]$ - гильбертово пространство квадратично-интегрируемых функций, определенных на $(\mathbb{T}^3)^2$ и антисимметричных относительно перестановки координат:

$$L_2^{as}((\mathbb{T}^3)^2) = L_2^{as}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3) = \{f \in L_2((\mathbb{T}^3)^2): f(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = -f(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1)\}.$$

Оператор $\widehat{H}$, соответствующий полной энергии двухфермионной системы, в гильбертовом пространстве $\ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2)$ выражается как сумма операторов $\widehat{H}_0$ соответствующих кинетической энергии фермионов, и $\widehat{\mathrm{V}}$ соответствующих потенциальной энергии:

$$\widehat{H} = \widehat{H}_0 + \widehat{V}. \qquad (1)$$

Оператор $\widehat{H}_0$ действуюет в гилбертовом пространстве $\ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2)$ по формуле

$$\widehat{H}_0 = -\frac{1}{2m}\Delta_1 - \frac{1}{2m}\Delta_2.$$

Здесь $m > 0$ означает массу фермиона, который в дальнейшем мы считаем равным единице, $\Delta_1 = \Delta \otimes I$ и $\Delta_2 = I \otimes \Delta$, где $I -$ единичный оператор.

Решетчатый Лапласиан $\Delta -$ разностный оператор, описывающий перенос частицы с узла на соседний узел, т.е.

$$(\Delta\hat{\psi})(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{3} [\hat{\psi}(\mathbf{x}+\mathbf{e}_j) + \hat{\psi}(\mathbf{x}-\mathbf{e}_j) - 2\hat{\psi}(\mathbf{x})], \quad \mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3, \quad \hat{\psi} \in \ell_2(\mathbb{Z}^3),$$

где $\mathbf{e}_1 = (1,0,0), \mathbf{e}_2 = (0,1,0), \mathbf{e}_3 = (0,0,1)$ единичные орты в $\mathbb{Z}^3$.

Возмущение оператора $\hat{V}$ соответствующего энергии взаимодействия частиц, на функцию ψ определяется в виде**:**

$$(\hat{V}\psi)(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}) = \hat{v}(\mathbf{x_1}-\mathbf{x_2})\psi(\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}), \quad \psi \in \ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2).$$

На потенциал $\hat{v}$ накладываются следующие условия:

$$\hat{v}(-n) \geq 0 \qquad va \quad \hat{v} \in \ell_1(\mathbb{Z}^3) \tag{2}$$

Относительно функции $\hat{v}$ предполагается, что

$$\hat{v}(\mathbf{x}) = \begin{cases} v_+(|\mathbf{x}|), & \text{если} \quad |\mathbf{x}| \leq 2, \\ 0, & \text{если} \quad |\mathbf{x}| \geq 3, \end{cases} \tag{3}$$

где $|\mathbf{x}| = |x_1| + |x_2| + |x_3|$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3$. Здесь функция $v_+ : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим условиям

$$v_+(0) > v_+(1) > v_+(2) > 0, \quad v_+(|\mathbf{x}|) = 0, \; |\mathbf{x}| \geq 3. \tag{4}$$

Носителем потенциала $\hat{v}$ является шар формы

$$D = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z}^3 : \quad |\mathbf{x}| \leq 2\}.$$

Для каждого $\psi \in \ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2)$ выполняется равенство $\psi(\mathbf{x},\mathbf{x}) = 0$, $\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^3$ поэтому значение функции $\hat{v}$ в нулевой точке можно выбрать произвольно. Здесь оно принято $\hat{v}(\mathbf{0}) = 0$.

Лемма 1. *Предположим, что условия (2) и (3), заданные для потенциала $\hat{v}$, выполнены. Тогда оператор $\hat{H}$, определенный с помощью равенства (1), является самосопряженным, ограниченным оператором в пространстве $\ell_2^{as}((\mathbb{Z}^3)^2)$.*

Переход в импульсное представление осуществляется с помощью преобразования Фурье

$$F : \ell_2^{as}(\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}^3) \to L_2^{as}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3).$$

Здесь $\mathcal{F}$– оператор Фурье, определенный в виде:

$$(\mathcal{F}\hat{f})(k_1, k_2) = \frac{1}{(2\pi)^3} \sum_{n,m \in \mathbb{Z}^3} \hat{f}(\boldsymbol{n},\boldsymbol{m}) e^{i(\boldsymbol{n},k_1)+i(\boldsymbol{m},k_2)}$$

Гамильтониан $H = H_0 + V = F\hat{H}F^{-1}$ в импульсном представлении коммутирует с группой унитарных операторов $U_{\mathbf{s}}, s \in \mathbb{Z}^3$:

$$(U_{\mathbf{s}}f)(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2}) = e^{-i(\mathbf{k_1}+\mathbf{k_2},\mathbf{s})} f(\mathbf{k_1},\mathbf{k_2}), \; f \in L_2^{as}(\mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3).$$

Отсюда следует, что существуют разложения операторов $U_{\mathbf{s}}$ и H в прямые интегралы

$$U_{\mathbf{s}} = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus \, U_{\mathbf{s}}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \qquad H = \int_{\mathbb{T}^3} \oplus \, \widetilde{H}(\mathbf{k}) \, d\mathbf{k}.$$

Здесь $U_{\mathbf{s}}(\mathbf{k})$ - оператор умножения на функцию $\exp(-i(\mathbf{s},\mathbf{k}))$ в пространстве $L_2^{as}(F_{\mathbf{k}})$, $F(\mathbf{k}) = \{(\mathbf{k}_1,\mathbf{k}_2) \in \mathbb{T}^3 \times \mathbb{T}^3 : \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2 = \mathbf{k}\}$, $\mathbf{k} \in \mathbb{T}^3$. Слой $\widetilde{H}(\mathbf{k})$ оператора H также действует в $L_2^{as}(F_{\mathbf{k}})$ и унитарно эквивалентен оператору $H(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) + V$, называемому оператором Шредингера на решетке, который действует в гильбертовом пространстве $L_2^o(\mathbb{T}^3) = \{f \in L_2(\mathbb{T}^3): f(-\mathbf{p}) = f(\mathbf{p})\}$ по формуле

$$(H(\mathbf{k})f)(\mathbf{p}) = \varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p})f(\mathbf{p}) + \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\int_{\mathbb{T}^3} v(\mathbf{p}-\mathbf{s})f(\mathbf{s})d\mathbf{s}.$$

Невозмущенный оператор $H_0(\mathbf{k})$ есть оператор умножения на функцию

$$\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}) = 6 - 2\cos\frac{k_1}{2}\cos p_1 - 2\cos\frac{k_2}{2}\cos p_2 - 2\cos\frac{k_3}{2}\cos p_3. \qquad (5)$$

Здесь оператор V является интегральным оператор в $L_2^o(\mathbb{T}^3)$ с ядром

$$(2\pi)^{-\frac{3}{2}}v(\mathbf{p}-\mathbf{s}) = (2\pi)^{-\frac{3}{2}}(\mathcal{F}\hat{v})(\mathbf{p}-\mathbf{s}),$$

т.е.

$$(\mathrm{V}f)(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi^3}\int_{\mathbb{T}^3}\Big[v_+(1)\sum_{j=1}^{3}\sin p_j \sin s_j + v_+(2)\sum_{j=1}^{3}\sin 2p_j \sin 2s_j +$$
$$+2v_+(2)\sum_{1\le i<j\le 3}(\cos p_i \cos s_i \sin p_j \sin s_j + \sin p_i \sin s_i \cos p_j \cos s_j)\Big]f(\mathbf{s})d\mathbf{s}.$$

Оператор $H_0(\mathbf{k})$ не имеет собственных значений, его спектр совпадает с областью значений функции $\varepsilon(\mathbf{k})$

$$\sigma(H_0(\mathbf{k})) = [m(\mathbf{k}), \quad M(\mathbf{k})],$$

где

$$m(\mathbf{k}) := \min_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^3}\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}), \qquad M(\mathbf{k}) := \max_{\mathbf{q}\in\mathbb{T}^3}\varepsilon_{\mathbf{k}}(\mathbf{q}).$$

Спектр оператора V состоит из собственных значений $\{0, \ v_+(1), \ v_+(2)\}$.
Пусть $L_2^-(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}): f(-p) = -f(p)\}$ – подпространство, состоящее из всех нечетных функций на $\mathbb{T} = [-\pi,\pi]$ и $L_2^+(\mathbb{T}) = \{f \in L_2(\mathbb{T}): f(-p) = f(p)\}$ – подпространство, состоящее из четных функций на $\mathbb{T}$.

Кроме того, мы используем обозначения

$$\mathcal{H}_{123} := L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}), \quad \mathcal{H}_1 := L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}),$$
$$\mathcal{H}_2 := L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}), \quad \mathcal{H}_3 := L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^+(\mathbb{T}) \otimes L_2^-(\mathbb{T}).$$

Пространство нечетных функций $L_2^o(\mathbb{T}^3)$ можно представить в виде прямой суммы

$$L_2^o(\mathbb{T}^3) = \mathcal{H}_{123} \oplus \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3. \qquad (6)$$

Лемма 2. *Для каждого $\boldsymbol{k} \in \mathbb{T}^3$ подпространства $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_3$ и $\mathcal{H}_{123}$ инвариантны относительно оператора $H(\boldsymbol{k})$.*

Из разложения (6) и леммы 2 следует следующее разложение

$$H(\mathbf{k}) = H_1(\mathbf{k}) \oplus H_2(\mathbf{k}) \oplus H_3(\mathbf{k}) \oplus H_{123}(\mathbf{k}) \qquad (7)$$

Обозначим через $H_{123}(\mathbf{k})$ и $H_\alpha(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) + V_\alpha$ сужения оператора $H(\mathbf{k})$ в инвариантны подпространства $\mathcal{H}_{123}$ и $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha = 1,2,3$, соответственно.

Здесь $H_0(\mathbf{k}) := H_{0(\alpha)}(\mathbf{k})$ - оператор умножения на функцию $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$, определенную в виде (5).

Сужение V_α оператора V действует в инвариантном подпространстве $\mathcal{H}_\alpha$:

$$(V_\alpha f)(\mathbf{p}) = \frac{2v_+(1)}{(2\pi)^3}\sin p_\alpha \int_{\mathbb{T}^3} \sin s_\alpha f(\mathbf{s})d\mathbf{s} + \frac{2v_+(2)}{(2\pi)^3}\sin 2p_\alpha \int_{\mathbb{T}^3} \sin 2s_\alpha f(\mathbf{s})d\mathbf{s} +$$
$$+\frac{4v_+(2)}{(2\pi)^3}\sin p_\alpha \int_{\mathbb{T}^3} \sin s_\alpha\left[\cos p_\beta \cos s_\beta + \cos p_\gamma \cos s_\gamma\right] f(\mathbf{s})d\mathbf{s}. \qquad (8)$$

Согласно равенству (7) задача исследования спектра оператора $H(\boldsymbol{k})$ сводится к задаче изучения спектра операторов $H_{123}(\boldsymbol{k}), H_1(\boldsymbol{k}), H_2(\boldsymbol{k}), H_3(\boldsymbol{k})$.

Теорема 1. *Для каждого $\boldsymbol{k} \in \mathbb{T}^3$ имеет место следующее равенство:*

$$\sigma(H_{123}(\boldsymbol{k})) = \sigma(H_0(\boldsymbol{k})).$$

Из равенства (8) вытекает, что операторы V_1, V_2 и V_3 унитарно эквивалентны.

Лемма 3. *Если $\boldsymbol{k}_\lambda = (\pi - 2\lambda, \pi - 2\lambda, \pi - 2\lambda)$ то операторы $H_1(\boldsymbol{k}_\lambda)$, $H_2(\boldsymbol{k}_\lambda)$ и $H_3(\boldsymbol{k}_\lambda)$ унитарно эквивалентны.*

Поэтому ограничимся изучением спектра оператора $H_1(\boldsymbol{k}_\lambda)$.

Поскольку ядро интегрального оператора V_1 симметрично относительно аргументов $V_1(\mathbf{p},\mathbf{q})$, p_2 и p_3 мы еще раз покажем, что существуют инвариантные подпространства. Для этого введем следующие обозначения: Запишем пространство $\mathcal{H}_1$ как прямую сумму симметричного $\mathcal{H}_1^s := \{f \in L_1^-: f(p_1,p_2,p_3) = f(p_1,p_3,p_2)\}$ и антисимметричного $\mathcal{H}_1^{as} := \{f \in L_1^-: f(p_1,p_2,p_3) = -f(p_1,p_3,p_2)\}$ подпространств:

$$\mathcal{H}_1 = \mathcal{H}_1^s \oplus \mathcal{H}_1^{as}.$$

Лемма 4. Подпространства $\mathcal{H}_1^{as}$ *и* $\mathcal{H}_1^s$ инвариантны относительно оператора $H_1(\boldsymbol{k}_\lambda)$.

Сужения оператора $H_1(\mathbf{k}_\lambda)$ в подпространствах $\mathcal{H}_1^s$ и $\mathcal{H}_1^{as}$ обозначим через $H_1^s(\mathbf{k}_\lambda)$ и $H_1^{as}(\mathbf{k}_\lambda)$ соответственно и введем обозначение

$$C^{as} = \frac{1}{4\pi^3}\int_{\mathbb{T}^3} \frac{\sin^2 p_1(\cos p_2 - \cos p_3)^2}{3+\cos p_1 + \cos p_2 + \cos p_3} d\mathbf{p} \approx 0{,}178224.$$

Теорема 2. *Пусть $\lambda \in (0,\pi)$.*

а) Если $C_1^{as}\cdot v_+(2) < sin\lambda$, то оператор $H_1^{as}(\boldsymbol{k}_\lambda)$ не имеет собственных значений вне существенного спектра оператора $H(\boldsymbol{k}_\lambda)$.

б) Если $C_1^{as}\cdot v_+(2) = sin\lambda$, то правый край существенного спектра $M(\boldsymbol{k}_\lambda)$ является собственным значением для оператора $H_1^{as}(\boldsymbol{k}_\lambda)$.

с) Если $v_+(2)\cdot C^{as} > sin\lambda$, то оператор $H_1^{as}(\boldsymbol{k}_\lambda)$ имеет единственное простое собственное значение вне существенного спектра оператора $H(\boldsymbol{k}_\lambda)$.

Теорема 3. *Существует число $\delta > 0$ такое, что для произвольного $\lambda \in (0,\delta)$ оператор $H_1^s(\boldsymbol{k}_\lambda)$ имеет три разных простых собственных значения вне существенного спектра оператора $H(\boldsymbol{k}_\lambda)$.*

Следующий результат следует из прямого разложения (7) и теорем 2 и 3.

Теорема 4. *Существует число* $\delta > 0$ *такое, что для произвольного* $\lambda \in (0, \delta)$ *оператор* $H(\boldsymbol{k}_\lambda)$ *имеет 4 трехкратных собственных значения вне существенного спектра. Для этих собственных значений справедливы следующие асимптотические формулы:*

$$z_1(\lambda) = 6 + v_+(1) + \frac{5}{v_+(1) - v_+(2)}\lambda^2 + O(\lambda^4), \quad \lambda \to 0$$

$$z_2(\lambda) = 6 + v_+(2) + \frac{2}{v_+(2)}\lambda^2 + O(\lambda^4), \ \lambda \to 0$$

$$z_{3,4}(\lambda) = 6 + v_+(2) + \frac{11v_+(1) - 16v_+(2)}{2v_+(2)[v_+(1) - v_+(2)]}\lambda^2$$

$$\pm \frac{\sqrt{[9v_+(2) - 4v_+(1)]^2 + v_+^2(1) - v_+^2(2)}}{2v_+(2)[v_+(1) - v_+(2)]}\lambda^2 + O(\lambda^4), \quad \lambda \to 0$$

Третья глава диссертации, озаглавленная «**Связанные состояния двухфермионной системы с цилиндрическим потенциалом**» посвящена оператору Шредингера $H(\boldsymbol{k})$, соответствующему энергии двухфермионной системы с потенциалом

$$\hat{v}(\mathbf{n}) = \hat{v}(n_1, n_2, n_3) = \begin{cases} \bar{v}(|\mathbf{n}|), & agar \quad |n_1| + |n_2| \le 1 \\ 0, & agar \quad |n_1| + |n_2| \ge 2, \end{cases} \tag{9}$$

Здесь $|\mathbf{n}| = |n_1| + |n_2| + |n_3|$, $\bar{v}: \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\bar{v}(1) > \bar{v}(2) > \cdots > 0 \quad va \quad \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}^2(n) < \infty. \tag{10}$$

$$supp\, \hat{v} = D = \{\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) \in \mathbb{Z}^3 : n_3 \in \mathbb{Z}, \quad |n_1| + |n_2| \le 1\}.$$

Оператор Шредингера $H(\mathbf{k})$ определяется в гильбертовом пространстве $L_2^o(\mathbb{T}^3)$ следующим образом:

$$H(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - \mathrm{V}.$$

Невозмущенный оператор $H_0(\mathbf{k})$ есть оператор умножения на функцию $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$ вида (5). Действие интегрального оператора V на элемент $f \in L_2^o(\mathbb{T}^3)$ имеет вид:

$$(\mathrm{V}f)(\mathbf{p}) = \frac{1}{4\pi^3}\int\limits_{\mathbb{T}^3}\Bigg[\bar{v}(1)\sum_{i=1}^{3}\sin p_i \sin q_i$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\bar{v}(n+1)\sum_{i=1}^{2}\Big(2\cos np_3\cos nq_3\sin\, p_i\sin q_i$$
$$+\,2\sin np_3\sin nq_3\cos p_i\cos q_i$$
$$+\frac{1}{2}\sin(n+1)p_3\sin(n+1)q_3\Big)\Bigg]f(\mathbf{q})d\mathbf{q}.$$

Подпространства $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha = 1{,}2{,}3$ и $\mathcal{H}_{123}$, представленные в главе II, инвариантны относительно оператора $H(\mathbf{k})$.

Следовательно, оператор $H(\mathbf{k})$ разлагается в прямую сумму:

$$H(\mathbf{k}) = H_1(\mathbf{k}) \oplus H_2(\mathbf{k}) \oplus H_3(\mathbf{k}) \oplus H_{123}(\mathbf{k}) \qquad (11)$$

Обозначим через $H_\alpha(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) + V_\alpha$ сужение оператора $H(\mathbf{k})$ в инвариантное подпространство $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha = 1{,}2{,}3$. Здесь $H_0(\mathbf{k}) := H_{0(\alpha)}(\mathbf{k})$ - оператор умножения на функцию $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$.

Лемма 5. *Для каждого $\boldsymbol{k} \in \mathbb{T}^3$ имеет место следующее равенство:*

$$\sigma(H_{123}(\boldsymbol{k})) = \sigma(H_0(\boldsymbol{k})).$$

Заметим, что для $\mathbf{k} = \boldsymbol{\pi} := (\pi,\pi,\pi)$, спектр оператора $H(\boldsymbol{\pi}) = 6I - V$ состоит только из собственных значений $6, 6 - \bar{v}(n), n \in \mathbb{N}$ и существенного спектра $\{6\}$.

Следует отметить, что $z_1(\boldsymbol{\pi}) = 6 - v(1)$ – трехкратное собственное значение оператора $H(\boldsymbol{\pi})$ с соответствующими собственными функциями

$$\sin p_1, \qquad \sin p_2, \qquad \sin p_3$$

Всего $n \geq 2$ $z_n(\boldsymbol{\pi}) = 6 - \bar{v}(n)$ – пятикратное собственное значение оператора $H(\boldsymbol{\pi})$ с соответствующими собственными функциями

$$\sin np_3,\quad \sin p_1\cos(n-1)p_3,\quad \sin p_2\cos(n-1)p_3,$$
$$\sin(n-1)p_3\cos p_1,\quad \sin(n-1)p_3\cos p_2.$$

Теперь трехкратное собственное значение $z_1(\boldsymbol{\pi}) = 6 - \bar{v}(1)$ оператора $H(\boldsymbol{\pi})$ является простым собственным значением для операторов $H_1(\boldsymbol{\pi})$, $H_2(\boldsymbol{\pi})$ и $H_3(\boldsymbol{\pi})$.

Для всех $n \geq 2$, пятикратное собственное значение $z_n(\boldsymbol{\pi}) = 6 - \bar{v}(n)$, оператора $H(\boldsymbol{\pi})$ являются простым собственным значением для операторов $H_1(\boldsymbol{\pi})$ и $H_2(\boldsymbol{\pi})$ а для операторов $H_3(\boldsymbol{\pi}) -$ трёхератным собственным значением.

Теорема 5. *Пусть, $k_2 = k_3 = \pi$ и $k_1 \in (-\pi,\pi)$.*

а) Если $\bar{v}(1) \leq cos\frac{k_1}{2}$, то оператор $H_1(k_1,\pi,\pi)$ не имеет собственных значений вне существенного спектра.

б) Если существует такое число $n_0 \in \mathbb{N}$, что выполняется соотношение $\bar{v}(n_0+1) \leq cos\frac{k_1}{2} < \bar{v}(n_0)$ то оператор $H_1(k_1,\pi,\pi)$ имеет ровно n_0, собственных значений

$$z_{1(n+1)}(k_1,\pi,\pi) = 6 - \bar{v}(n+1) - \frac{cos^2\frac{k_1}{2}}{\bar{v}(n+1)}, \quad n = 0,1,\dots,n_0-1, \qquad (12)$$

лежащих вне существенного спектра, а собственные функции, соответствующие этим собственным значениям, имеют вид:

$$f_{1(n+1)}^{-++}(p_1,p_2,p_3) = \frac{sinp_1\cos(n+1)p_3}{6-2cos\frac{k_1}{2}cosp_1 - z_{1(n+1)}(k_1,\pi,\pi)} \in \mathcal{H}_1.$$

Теорема 6. *Для любого $k_1 \in (-\pi,\pi]$ оператор $H_2(k_1,\pi,\pi)$ имеет бесконечное число собственных значений*

$$z_{2(n+1)}(k_1,\pi,\pi) = 6 - \sqrt{\bar{v}^2(n+1) + 4cos^2\frac{k_1}{2}}, \quad n \in \mathbb{Z}_+ := \mathbb{N} \cup \{0\} \qquad (13)$$

лежащих вне существенного спектра. Собственные функции, соответствующие этим собственным значениям, имеют вид

$$f_{2(n+1)}^{+-+}(p_1,p_2\ p_3) = \frac{sinp_2\cos(n+1)p_3}{6-2cos\frac{k_1}{2}cosp_1 - z_{2(n+1)}(k_1,\pi,\pi)} \in \mathcal{H}_2.$$

Теорема 7. *Для любого $k_1 \in (-\pi,\pi)$ оператор $H_3(k_1,\pi,\pi)$ имеет бесконечное число собственных значений вне существенного спектра.*

Из полученных выше результатов ясно, что дискретный спектр сужения оператора $H(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - V$ на инвариантное подпространство $\mathcal{H}_{123}$ – оператора $H_{123}(\mathbf{k})$, представляет собой пустое множество. При каких условиях на носитель потенциала $\hat{v}$ существуют собственные значения оператора $H_{123}(\mathbf{k})$?

Рассмотрим оператор $H(\boldsymbol{k})$ с потенциалом

$$\hat{v}(\mathbf{n}) = \hat{v}(n_1,n_2,n_3) = \begin{cases} \bar{v}(|\mathbf{n}|), & agar \quad |n_1|+|n_2| \le 2, \\ 0, & agar \quad |n_1|+|n_2| \ge 3 \end{cases} \qquad (14)$$

Здесь $|\mathbf{n}| = |n_1|+|n_2|+|n_3|$, $\bar{v}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\bar{v}(1) > \bar{v}(2) > \dots > 0$$

$$supp\ \hat{v} = D = \{\mathbf{n} = (n_1,n_2,n_3) \in \mathbb{Z}^3 : n_3 \in \mathbb{Z}, \quad |n_1|+|n_2| \le 1\}.$$

Даже когда потенциал $\hat{v}$ имеет вид (14), подпространства $\mathcal{H}_\alpha$, $\alpha = 1,2,3$ и $\mathcal{H}_{123}$ инвариантны относительно оператора $H(\mathbf{k})$, а оператор $H(\mathbf{k})$ может быть выражен в прямой суммой (11).

Сужение оператора $H(\mathbf{k})$ в пространстве $\mathcal{H}_{123}$ имеет вид

$$H_{123}(\mathbf{k}) = H_0(\mathbf{k}) - V_{123}$$

Здесь оператор $H_0(\mathbf{k})$ есть оператор умножения на функцию $\varepsilon_{\boldsymbol{k}}$ вида (5).

Интегральный оператор V_{123} воздействует на элемент f следующим образом:

$$(V_{123}f)(\mathbf{p}) = \frac{\sin p_1 \sin p_2}{\pi^3} \int_{\mathbb{T}^3} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{v}(n+2)\sin np_3\ \sin q_1\ \sin q_2 \sin nq_3 f(\mathbf{q})\, d\mathbf{q}.$$

Сначала изучим собственные значения операторов $H_{123}(\pi-2\beta,\pi,\pi)$, $\beta\in[0,\pi)$ и $H_{123}(\pi,\pi-2\beta,\pi)$, а затем оператора $H_{123}(\pi-2\beta,\pi-2\beta,\pi)$. Простые вычисления показывают, что операторы $H_{123}(\pi-2\beta,\pi,\pi)$ и $H_{123}(\pi,\pi-2\beta,\pi)$ унитарно эквивалентны.

Следовательно, спектры операторов $H_{123}(\pi-2\beta,\pi,\pi)$ и $H_{123}(\pi,\pi-2\beta,\pi)$ совпадают. Поэтому мы приведем только результаты, полученные для оператора $H_{123}(\pi-2\beta,\pi,\pi)$.

Теорема 8. *Пусть,* $\beta\in(0,\pi)$.

а) Если $\bar{v}(3)<sin\beta$, *то оператор* $H_{123}(\pi-2\beta,\pi,\pi)$ *не имеет собственных значений вне существенного спектра.*

б) Если существует такое число $n_0\in\mathbb{N}$, *что выполняется и соотношение* $sin\beta\in\left(\bar{v}(n_0+3),\bar{v}(n_0+2)\right)$, *то оператор* $H_{123}(\pi-2\beta,\pi,\pi)$ *имеет ровно* n_0 *собственных значений*

$$z_{123}^{(k)}(\pi-2\beta,\pi,\pi)=6-\bar{v}(k+2)-\frac{1}{\bar{v}(k+2)}sin^2\beta,\quad k=1,2,\dots,n_0$$

вне существенного спектра

c) Если $sin\beta=\bar{v}(n_0+2)$ *для некоторого* $n_0\in\mathbb{N}$, *то левый край* $m(\beta)=6-2\bar{v}(n_0+2)$ *существенного спектра будет резонансом для оператора* $H_{123}(\pi-2\beta,\pi,\pi)$.

Теперь приведем результат, полученный для оператора $H_{123}(\pi-2\beta,\pi-2\beta,\pi)$. Для этого введём следующее обозначение:

$$C_{123}=\frac{1}{2\pi^2}\int_{\mathbb{T}^2}\frac{\sin^2 p_1\sin^2 p_2\,dp_1dp_2}{2-\cos p_1-\cos p_2}=0{,}302347.$$

Теорема 9. *Пусть,* $\beta\in(0,\pi)$.

a) Если $C_{123}\cdot\bar{v}(3)<sin\beta$, *то оператор* $H_{123}(\pi-2\beta,\pi-2\beta,\pi)$ *не имеет собственных значений вне существенного спектра.*

b) Если $sin\beta=C_{123}\cdot\bar{v}(n_0+2)$, *при некотором* $n_0\in\mathbb{N}$, *то левый край* $m(\beta)=6-2sin\beta$ *существенного спектра будет собственным значением для оператор* $H_{123}(\pi-2\beta,\pi-2\beta,\pi)$.

c) Если существует такое число $n_0\in\mathbb{N}$ *что справедливо соотношение* $C_{123}\cdot\bar{v}(n_0+3)<sin\beta<C_{123}\cdot\bar{v}(n_0+2)$, *то оператор* $H_{123}(\pi-2\beta,\pi-2\beta,\pi)$ *имеет ровно* n_0 *простых собственных значений вне существенного спектра.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрен оператор Шредингера, соответствующий энергии двухфермионной системы на трехмерной решетке $\mathbb{Z}^3$ со сферически-симметричным и цилиндрическим потенциалами.

Проанализирован существенный и дискретный спектр оператора Шрёдингера $H(\mathbf{k})$ в условиях, налагаемых на сферически-симметричный потенциал. Приведены основные результаты об асимптотиках и кратностях собственных значений оператора $H(\mathbf{k}_\lambda)$ вне существенного спектра при малых возмущениях $\lambda > 0$ трехкратного $6 + v_+(1)$ и девятикратного $6 + v_+(2)$ собственных значений оператора $H(\boldsymbol{\pi})$.

Показано существование бесконечного число инвариантных подпространств относительно оператора $H(\mathbf{k})$ при условиях, наложенных на цилиндрический потенциал. С помощью этого доказано, что оператор $H(\mathbf{k})$ имеет бесконечное число собственных значении. Получены результаты об асимптотиках собственных значений оператора $H(\mathbf{k})$ и скорости стремления этих собственных значени – ко дну существенного спектра.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 AT SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SAMARKAND STATE UNIVERSITY NAMED AFTER SHAROF RASHIDOV

TOSHTURDIEV ABDIKHURAYRA MUKHAMMADIEVICH

SPECTRUM OF DISCRETE SCHRÖDINGER OPERATORS WITH SPHERICAL, CYLINDRICAL AND POINT POTENTIALS

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Samarkand – 2024

The theme of the dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry higher education, science and innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2023.4.PhD/FM940

Dissertation was prepared at Samarkand State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.samdu.uz) and the «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Abdullaev Janikul Ibragimovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Kuliev Komil Danaboevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	Yakhshiboev Makhmadiyor Umirovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Bukhara State University**

Defense will take place «28» 09 2024 at 10^{00} at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32, fax: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Samarkand State University (is registered № 86) (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on «16» 09 2024 year
(Mailing report № 2 on «16» 09 2024 year)

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI • SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI •

A.S.Soleev
Chairman of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

A.M.Khalkhuzhaev
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

S.N. Lakaev
Chairman of the Scientific Seminar at the Academic Council, Doctor of Physics and Mathematics, Academician

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The purposes of the research work consists in studying the spectral properties of the Schrödinger operator with a spherical and cylindrical potential on a three-dimensional lattice.

The objects of the research work is to study are the Schrödinger operators corresponding to the energy of a two-fermion system on a three-dimensional lattice.

Scientific novelty of the research work is as follows:

the existence of invariant subspaces with respect to the Schrödinger operator corresponding to the energy of a two-fermion system on a three-dimensional lattice is proved, expressions for the eigenfunctions of the Schrödinger operator with a spherical potential in invariant subspaces are obtained;

the number and multiplicity of eigenvalues of the discrete Schrödinger operator with a spherical potential outside the essential spectrum are found using the method of invariant subspaces and asymptotic formulas are obtained for these eigenvalues with an accuracy of up to λ^2;

the eigenfunctions of the discrete Schrödinger operator with a cylindrical potential lying in an infinite number of invariant subspaces and the corresponding eigenvalues are found;

the number of eigenvalues is found and the rate of their convergence to the lower edge of the essential spectrum is determined under certain conditions on the potential, using the existence of an infinite number of invariant subspaces with respect to the Schrödinger operator.

Implementation of the research results. Based on scientific results concerning the spectrum of discrete Schrödinger operators with spherical, cylindrical and point potentials, the following implementations are made: scientific results on the discrete spectrum of the Schrödinger operator corresponding to the energy of a two-particle system on a lattice and invariant subspaces in leading foreign journals (Lobachevskii Journal of Mathematics, Volume 43, 16 February 2023, pages 3079–3090. Volume 44, 28 October 2023, pages 2781–2789. Volume 44, 12 July 2023 pages 1241–1250. Journal of Physics: Conference Series, 2021 J. Phys. Conf. Ser. 2070 012023. DOI 10.1088/1742-6596/2070/1/012023) were used in the study discrete spectrum of Schrödinger operators by the method of invariant subspaces. The application of scientific results made it possible to significantly simplify the problem as a result of a separate study of the eigenvalues of discrete Schrödinger operators in invariant subspaces;

the results on the discrete spectrum of the two-particle Schrödinger operator on a lattice and invariant subspaces were used in the project of the International Kazakh-Turkish University named after Khoja Ahmad Yassavi on the topic: No. AP09259074 "Methods for constructing solutions of fractional differential equations and solvability issues of boundary value and initial-boundary value problems" (reference No. 04/844 of the International Kazakh-Turkish University named after Khoja Ahmad Yassavi of the Republic of Kazakhstan dated March 12, 2024) in obtaining a visual representation of the eigenfunctions and eigenvalues of the boundary value problem for the nonlocal Laplace equation with multiple involutions on the unit sphere, and the results on the completeness of these eigenfunctions. The application of the scientific results made it possible to study the spectral Helmholtz operator on the unit sphere, i,e. to find its eigenvalues and eigenfunctions.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of introduction, three chapters, a conclusion and references. The volume of the dissertation is 93 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (Часть I; Part I)

1. J.I. Abdullaev, A.M. Toshturdiev. Invariant Subspaces of the Shryodinger Operator with a Finite Support Potential // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022. Vol. 43, –№ 3. –P. 1481-1490. (3. Scopus, IF=0.53)
2. J.I. Abdullaev, A.M. Toshturdiev. Bound states of a system of two fermions on invariant subspace // AIP Conference Procedinges 2021. Vol 2365. 050008. https://doi.org/10.1063/5.0057260 (Scopus).
3. J.I. Abdullaev, A.M. Toshturdiev. Kuchli ta'sirlashuvda bo‘lgan uch zarrachali sistemaning bog‘langan holatlari // O‘zbekiston milliy universistyeti xabarlari. – Toshkent, 2023. 31-47 b. (01.00.00; №04).
4. J.I. Abdullaev, A.M. Toshturdiev. Bound States of a System of Two Fermions on Invariant Subspace // Journal of Modern Physics, 2021. Vol. 12, –№ 1. –P. 35-49. (Web of science, IF=0.86).
5. A.M. Toshturdiev. Eigenvalues of the two-particle Schrodinger operator with a cylindrical potential // Scientific reports of Bukhara state university. – Bukhara, 2023. –№5. –P 60-68. (01.00.00; №03).
6. J.I. Abdullaev, A.M. Toshturdiev. Panjaradagi bir zarrachali sistema energiyasi taqsimotining ba’zi xossalari // Scientific journal of Samarkand University. – Samarkand, 2020. –№3. –P. 23-29. (01.00.00; №02).

II bo‘lim (Часть II; Part II)

7. Абдуллаев Ж.И, Тоштурдиев А.М. Вложенные собственные значения двухчастичного оператора Шредингера // International conference “Mathematical analysis and its application to mathematical physics”. Samarkand. September 17-20 2018y. –P 67-68 .
8. J.I.Abdullaev., A.M. Toshturdiev. Panjaradagi ikki zarrachali sistema energiyasining o‘rta qiymati // “Yosh matematiklarning yangi teoremalari – 2018” Namangan 2018 yil 18-19-oktyabr. 14-15 b.
9. Абдуллаев Ж.И, Тоштурдиев А.М. Бир заррачали система энергиясининг урта киймати ва дисперсияси // “Современные проблемы теории вероятностей и математической статистики” Ташкент 30-апреля-1-мая 2019г –С 103-105.
10. J.I Abdullaev, A.M. Toshturdiev Shryodinger tenglamasining statsinonar yechimlari // “Fundamental matematika muammolari va ularning tadbiqlari” Navoiy 25-may 2019y. 90-91b.
11. Абдуллаев Ж.И, Тоштурдиев А.М. Связанные состояния системы двух фермионов в инвариантном подпространстве. // “Computational models and technologies” August 24-25, 2020y –С 129-130.

12. Абдуллаев Ж.И, Тоштурдиев А.М. Инвариантные подпространства оператора Шредингера системы двух фермионов. // “Современые стохатические модели и проблемы актуарной математики”. Карши 25-сентябр 2020-йил –С 68-70.
13. Абдуллаев Ж.И, Тоштурдиев А.М. Панжарадаги бир заррачали система энергиясининг урта киймати ва дисперсияси. // “Дифференциал тенгламалар ва анализнинг турдош масалалари”. Бухоро, 4-5-ноябр, 2021й. –С 112-114.
14. J.I.Abdullaev., A.M. Toshturdiev. Kuchli tasirlashuvda bo‘lgan uch zarrachali sistemaning bog‘langan holatlari. // “Amaliy matematika va axborot texnologiyalarining zamonaviy muammolari”. Buxoro 11-12-may, 2022y. 136 b.
15. J.I.Abdullaev., A.M. Toshturdiev. Integral tenglamalarning tatbiqi va ularni yechish usullari. // “Umumta’lim fanlarini sinxron va asinxron bog‘lab o‘quvchi kreativ faoliyatini rivojlantirishda integrativ yondashuv”. Denov. 14-may. 2022 y. 98-107 b.
16. Abdullaev J.I Toshturdiyev A.M. Eeigenvalues of the two-particle Schrodinger operator with a cylindrical potential // “Operator algebras, non-associative structures and related problems”. Tashkent, September 14-15, 2022. –P160-162.
17. Abdullaev J.I Toshturdiyev A.M. Bound states of the 2+1 Fermionic Trimer with strong Contact Interactions. “Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics”. Samarkand. september 23-24, 2022. Part - 1 . –P 155-157.
18. Абдуллаев Ж.И, Тоштурдиев А.М. Связанные состояния системы двух фермионов в подпространстве. “Fizika, matematika va mexanikaning dolzarb muammolar” nomli xalqaro konferensiya. Buxoro, 24-25 may, 2023y. 52-54b.
19. Abdullaev J.I Toshturdiyev A.M. Kuchli ta’sirlashuvda bo‘lgan 2+1 zarrachali sistemaning bog‘langan holatlari. “Sifatli ta’lim va interdisiplinar yondashuv: muammolar, yechimlar va hamkorlik”. Sirdaryo. 2023 yil 25-26 may. 13-15b.
20. Abdullaev J.I Toshturdiyev A.M. Slindrik potensialli ikki fermionli Shryodinger operatorining invariant qism fazodagi xos qiymatlari. “Ali Qushchi - Mirzo Ulug‘bek ilmiy maktabining buyuk elchisi” Samarqand. 2023-yil 21-22-sentyabr. 324-331b.

Avtoreferat Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universitetining
“SamDU ilmiy axborotnomasi” jurnali tahririyatida tahrir qilindi. (30.07.2024-yil).

2024-yil 30-iyulda bosishga ruxsat etildi.
Ofset bosma qog‘ozi. Qog‘oz bichimi 60×84 $^{1}/_{16}$.
“Times” garniturasi. Ofset bosma usuli.
Shartli b.t. 2,56. Adadi 60 nusxa. Buyurtma № 9/2.

“Sardor poligraf” OK bosmaxonasida chop etildi.
Manzil: Samarqand viloyati, Samarqand tumani, Xishrav MFY.