

**FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI**  
**HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI**  
**PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

---

**FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI**

**JALILOV MUHAMMADALI ABDUMUTALIBOVICH**

**KASR TARTIBLI HOSILALI PARABOLIK HAMDA ARALASH**  
**TURDAGI TENGLAMALAR UCHUN MASALALAR**

**01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika**

**FIZIKA - MATEMATIKA FANLARI**  
**bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi**  
**AVTOREFERATI**

**FARG‘ONA – 2024**

UDK: 517.95

**Fizika – matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi  
avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по  
физико – математическим наукам**

**Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical –  
mathematical sciences**

**Jalilov Muhammadali Abdumutalibovich**

Kasr tartibli hosilali parabolik hamda aralash turdagi tenglamalar uchun  
masalalar.....3

**Жалилов Мухаммадали Абдумуталибович**

Задачи для уравнений параболического и смешанного типов с производными  
дробного порядка.....21

**Jalilov Muhammadali Abdumutalibovich**

Problems for equations of parabolic and mixed types with fractional  
derivatives.....39

**E‘lon qilingan ishlar ro‘uxati**

Список опубликованных работ

List of published works.....42

**FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI**  
**HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI**  
**PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

---

**FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI**

**JALILOV MUHAMMADALI ABDUMUTALIBOVICH**

**KASR TARTIBLI HOSILALI PARABOLIK HAMDA ARALASH**  
**TURDAGI TENGLAMALAR UCHUN MASALALAR**

**01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika**

**FIZIKA - MATEMATIKA FANLARI**  
**bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi**  
**AVTOREFERATI**

**Farg‘ona – 2024**

**Fizika - matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida №B 2023.4.PhD/FM947 raqam bilan ro'yxatga olingan.**

Dissertatsiya Farg'ona davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida ([www.fdu.uz](http://www.fdu.uz)) va «Ziyonet» Axborot ta'lim portalida ([www.ziyonet.uz](http://www.ziyonet.uz)) joylashtirilgan.

**Ilmiy rahbar:**

**Kadirkulov Baxtiyar Jalilovich**  
fizika-matematika fanlari doktori, dotsent

**Rasmiy opponentlar:**

**Xasanov Anvardjan**  
fizika-matematika fanlari doktori, professor

**Safarov Jurabek Shakarovich**  
fizika-matematika fanlari doktori

**Yetakchi tashkilot:**

**Buxoro davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi Farg'ona davlat universiteti huzuridagi PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 raqamli Ilmiy kengashning 2024 yil «\_\_»\_\_\_\_\_ soat \_\_\_\_dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 150100, Farg'ona shahar, Murabbiylar ko'chasi, 19-uy. Tel.:(+99873) 244-44-02, faks: (+99873) 244-44-93, ye-mail: [fardu\\_info@umail.uz](mailto:fardu_info@umail.uz)).

Dissertatsiya bilan Farg'ona davlat universitetining Axborot - resurs markazida tanishish mumkin (\_\_\_\_raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 150100, Farg'ona shahar, Murabbiylar ko'chasi, 19-uy. Tel.:(+99873) 244-44-94.

Dissertatsiya avtoreferati 2024 «\_\_»\_\_\_\_\_kuni tarqatildi.

(2024 yil «\_\_»\_\_\_\_\_dagi \_\_\_\_\_raqamli reyestr bayonnomasi).

**A.K.Urinov**

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., professor

**I.U.Xaydarov**

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.n., dotsent

**Y.P.Apakov**

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi o'rinbosari, f.-m.f.d., professor

## **KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiya annotatsiyasi)**

**Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati.** Jahonda olib borilayotgan ko‘plab amaliy masalalarni tatqiq etish differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni hal qilishga olib kelinadi. Xususan, anomal diffuziya jarayonlarini, yerosti suvlari oqimining harakatini, kompozitsion materiallarning xususiyatlari bilan bog‘liq kimyoviy va mexanik jarayonlarning matematik modeli kasr tartibli differensial tenglamalarga keltiriladi. Bundan ko‘rinadiki, kasr tartibli differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechish yuqoridagi amaliy masalalarning tahlillari va xususiyatlari to‘g‘risida to‘liq tasavvurni ta‘minlagan holda kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining dolzarb yo‘nalishlaridan biri sifatida muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

Dunyoda kasr tartibli differensial tenglamalar uchun turli boshlang‘ich va chegaraviy masalalarning yechilishini o‘rganishga qaratilgan ilmiy-tadqiqot ishlari olib borilmoqda. Bu borada, diffuziya hamda nolokal va yuqori tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun qo‘yilgan turli nolokal chegaraviy masalalar, shu jumladan, Bitsadze-Samarskiy turidagi nolokal masalalarning yechilish usullarini o‘rganishga, shuningdek, masala yechimining mavjudligi va yagonaligini tadqiq etishga alohida e‘tibor berilmoqda.

Mamlakatimizda ham nazariy, ham amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan tadqiqotlar yuzasidan keng qamrovli izlanishlar amalga oshirilib, muayyan natijalarga erishilmoqda. Jumladan, matematika fanlarining ustuvor yo‘nalishlari, xususan, differensial tenglamalar va matematik fizika, dinamik sistemalar va optimal boshqaruv, amaliy matematika va matematik modellashtirish, matematik analiz va funksiyalar nazariyasi, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, algebra va geometriya bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish, matematiklarning asosiy vazifalari va faoliyati sifatida belgilangan<sup>1</sup>. Amalga oshirilgan chora-tadbirlar natijasida bugungi kunga qadar ushbu sohalar bo‘yicha muhim ilmiy natijalar qo‘lga kiritildi. Jumladan, differensial tenglamalar yo‘nalishida diffuziya hamda nolokal va yuqori tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich va chegaraviy masalalar hamda Bitsadze-Samarskiy turidagi nolokal masalalarning yechimlarining aniq ko‘rinishini topish hamda yagonaligini isbotlash alohida ahamiyatga ega.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 17-fevraldagi PQ-2789-son “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”, 2017-yil 20-apreldagi PQ-2909-son “Oliy ta‘lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”, 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta‘limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiynomidagi

---

<sup>1</sup> O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017 yil 18 maydagi “O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy-tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish chora-tadbirlari to‘g‘risida” gi 292-son qarori

Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida" va 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son "Matematika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

**Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlantirishining ustuvor yo'nalishlariga mosligi.** Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalarni rivojlanishining IV. "Matematika, mexanika va informatika" ustuvor yo'nalishi doirasida bajarilgan.

**Muammoning o'rganilganlik darajasi.** Kasr tartibli hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar Furye usuli yordamida S.A.Malik, O.X.Masaeva, G.Li, D.Zhang, X.Jia, M.Yamamoto, F.Al-Musalhi, Al-Salti, S.Summaya, M.A.Salmanlar tomonidan, integral almashtirishlar va Grin funksiyasi usuli yordamida esa A.V.Psxu va O.M.Mamchuev, R.K.Saxena, O.X.Masaevalar tomonidan tadqiq qilingan. Laplas tenglamasi uchun kasr tartibli hosila qatnashgan chegaraviy shartli masalalarning bir qiymatli yechilishi M.A.Sadibekov, B.X.Turmetov, B.T.Torebek, S.Kerbal va M.Kiranelar tomonidan o'rganilgan.

Plazma nazariyasida elliptik turdagi xususiy hosilali differensial tenglama uchun yuzaga keladigan yangi turdagi nolokal chegaraviy masala A.V.Bitvadze va A.A.Samarskiy tomonidan qo'yilgan va o'rganilgan bo'lib, bugungi kunda bunday turdagi nolokal masalalarni o'rganish alohida ahamiyat kasb etadi. Butun yoki kasr tartibli hosilali differensial tenglamalar uchun Bitsadze-Samarskiy turidagi masalalar K.U.Xubiev, V.Karachik, B.X.Turmetov, M.Ruzhansky, N.E.Tokmagambetov, B.T.Torebeklarning ishlarida, parabolik sistemalar uchun esa Y.A.Baderko, M.F.Cherepovalarning ishlarida tadqiq qilingan.

Yuqorida keltirilgan ishlarda asosan ikkinchi tartibli tenglamalar va ular uchun asosan klassik masalalar yoki Samarskiy-Ionkin turidagi nolokal masalalar o'rganilgan. Kasr tartibli tenglamalar uchun Bitsadze-Samarskiy shartli nolokal masalalar deyarli o'rganilmagan bo'lib, yuqori tartibli involyutsiyali tenglamalar uchun chegaraviy masalalar, shuningdek, Bitsadze-Samarskiy shartli yoki involyutsiyali spektral masalalar umuman o'rganilmagan. Ushbu dissertatsiya ishi differensial tenglamalar nazariyasining ushbu muhim masalalariga bag'ishlangan.

**Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta'lim muassasasining ilmiy - tadqiqot ishlari rejalari bilan bog'liqligi.** Dissertatsiya tadqiqoti Farg'ona davlat universiteti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq "Differensial tenglamalar va unga turdosh matematik sohalarning dolzarb muammolari" dasturi doirasida bajarilgan.

**Tadqiqotning maqsadi** nolokal xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalalar qo'yish va o'rganish hamda ushbu masalalarni tadqiq etish usullarini ishlab chiqishdan iborat.

**Tadqiqotning vazifalari** quyidagilardan iborat:

kasr tartibli diffuziya tenglamasi hamda Kaputo hosilali ikkinchi tartibli aralash turdagi tenglamalar uchun to'g'ri va teskari nolokal masalalarni qo'yish va o'rganish;

ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Bitsadze-Samarskiy turidagi nolokal masalalarning spektral xossalarini o'rganish;

kasr tartibli hosilali yuqori tartibli aralash turdagi tenglamalar uchun to'g'ri va teskari nolokal masalalarni qo'yish va o'rganish;

buzilgan xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun manba funksiyasini topish bilan bog'liq teskari masalalarni qo'yish va o'rganish;

kasr tartibli hosila va involyutsiya qatnashgan to'rtinchi tartibli xususiy hosilali aralash turdagi tenglamalar uchun to'g'ri va teskari nolokal masalalarni qo'yish va o'rganish.

**Tadqiqotning obyekti** Kaputo, Hilfer turidagi kasr tartibli integro-differensial operatorlar va xususiy hosilali nolokal differensial tenglamalar hisoblanadi.

**Tadqiqotning predmeti** kasr tartibli operatorlar va involyutsiya qatnashgan xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalalardan iborat.

**Tadqiqotning usullari.** Dissertatsiya ishida differensial tenglamalar va matematik fizika, chiziqli operatorlarning spektral nazariyasi, integral tenglamalar nazariyasi, Furrye hamda Grin funksiyasi nazariyasi usullaridan foydalanilgan.

**Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:**

Furrye usulidan foydalanib, kasr tartibli hosilalar qatnashgan diffuziya va aralash turdagi tenglamalar uchun nolokal shartli to'g'ri va teskari masalalar yechimlarining mavjudligi, yagonaligi va turg'unligiga doir teoremlar isbotlangan;

differensial tenglamalar nazariyasi usullaridan foydalanib, ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Bitsadze-Samarskiy shartli masalaning xos sonlari va mos o'zak funksiyalari topilgan hamda ularning to'laligi va Riss bazisni tashkil etishi differensial operator rezolventasini baholash orqali asoslangan;

Grin funksiyasi usuli hamda ekstremum prinsipi yordamida tur o'zgarish chizig'i xarakteristika bo'lmagan Kaputo ma'nosidagi kasr tartibli hosilani o'z ichiga oluvchi uchinchi tartibli aralash turdagi tenglama uchun chegaraviy masala yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan;

xos funksiyalarning to'laligidan foydalanib, Furrye usuli yordamida aralash turdagi to'rtinchi tartibli involyutsiya qatnashgan tenglamalar uchun chegaraviy masalalar yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

**Tadqiqotning amaliy natijalari.** Kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun Bitsadze-Samarskiy turidagi nolokal masalalarni yechishda mos spektral masala o'zak funksiyalari sistemasining to'laligi va bazislik xossalarini tadqiq qilish usuli taklif qilinib, u chegaraviy masalalar yechimlarini tekis va absolyut yaqinlashuvchi qator ko'rinishida qurish imkonini beradi. Shu bilan birga, o'z-o'ziga qo'shma to'rtinchi tartibli differensial tenglama uchun, involyutsiya

qatnashgan spektral masalani yechishni shu tenglama uchun involyutsiyasiz spektral masalani yechishga keltirish usuli ko'rsatilgan.

**Tadqiqot natijalarining ishonchliligi.** Matematik isbotlar Furye usuli, chiziqli operatorlarning spektral nazariyasi, integral tenglamalar va matematik analiz usullariga, shuningdek, matematik fikrlash va hisob-kitoblarning qat'iyiligiga asoslangan.

**Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati.**

Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati shundan iboratki, ushbu ishda olingan ilmiy natijalar chiziqli operatorlarning spektral nazariyasi, kasr tartibli differensial va integral tenglamalar nazariyasi hamda matematik fizikaning noklassik masalalarini o'rganishda asos sifatida foydalanish mumkin.

Dissertatsiya tadqiqotining amaliy ahamiyati kasr tartibli xususiy hosilali tenglamalar bilan aniqlanuvchi ba'zi bir fizik, kimyoviy va biologik jarayonlarning, jumladan, elektrokimyoning anomal diffuziya jarayonlarini, tuproqdagi molekulyar diffuziya, suyuqliklarning kuchli g'ovak muhitlarda harakati bilan bog'liq jarayonlarni matematik modellashtirishni qo'llanishi mumkinligi bilan belgilanadi.

**Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi.** Kasr tartibli hosilali parabolik hamda aralash turdagi tenglamalar uchun masalalarni tadqiq qilish bo'yicha olingan natijalar asosida:

kasr tartibli parabolik tenglama uchun Bitsadze-Samarskiy turidagi teskari masalaning tadqiqot natijalari CFRG-23-02 raqamli fundamental loyihada kasr tartibli operator qatnashgan differensial tenglamalarni o'rganishda foydalanilgan (O'mon sultonligi, Fan va texnologiyalar milliy universitetining 2024-yil 23-apreldagi ma'lumotnomasi). Natijada, kasr tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun teskari masalalarni tadqiq etish imkoniyati paydo bo'lgan;

involyutsiya qatnashgan to'rtinchi tartibli xususiy hosilali aralash turdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning aniq yechimlaridan AP 09259074 raqamli "Kasr tartibli differensial tenglamalar yechimlarini qurish usullari va chegaraviy va boshlang'ich chegaraviy masalalarining yechilishi muammolari" mavzusidagi fundamental loyihada aralash turdagi nolokal xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun teskari masalalarni o'rganishda foydalanilgan (Hoja Ahmad Yassaviy nomli xalqaro qozoq-turk universitetining 2024-yil 25-apreldagi №04/465 sonli ma'lumotnomasi). Natijada, aralash turdagi nolokal xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun teskari masalalarni o'rganish imkoniyati paydo bo'lgan.

**Tadqiqot natijalarining aprobatyasi.** Dissertatsiyaning asosiy natijalari 13 ta xalqaro va 5 ta respublika ilmiy va ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o'tkazilgan.

**Tadqiqot natijalarining e'lon qilinganligi.** Dissertatsiya mavzusi bo'yicha 31 ta ilmiy ish chop etilgan bo'lib, ulardan O'zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy jurnallarda 10 ta ilmiy maqola,

jumladan 5 tasi xorijiy ilmiy jurnallarda, 5 tasi esa mahalliy jurnallarda chop etilgan.

**Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi.** Dissertatsiya kirish, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 118 betni tashkil etadi.

## DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

**Kirish** qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga mosligi ko'rsatilgan, muammoning o'rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obykti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo'yicha ma'lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning "**Kaputo operatorini o'z ichiga olgan ikkinchi tartibli differensial tenglamalar uchun Bitsadze-Samarskiy turidagi masalalar**" deb nomlangan birinchi bobi uchta paragrafdan iborat bo'lib, u ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun to'g'ri to'rtburchakli sohalarda to'g'ri va teskari masalalar qo'yishga va o'rganishga bag'ishlangan.

1.1-paragrafda dissertatsiyaning asosiy natijalari bayoniga doir ba'zi-bir ma'lumotlar keltirilgan.

1.2-paragrafda tekislikdagi  $\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ ,  $T > 0$  sohada

$${}_c D_{0t}^\alpha u(x, t) = u_{xx}(x, t) + g(x) \quad (1)$$

tenglama uchun quyidagi masala qo'yilgan va tadqiq etilgan, bu yerda  ${}_c D_{0t}^\alpha$  -

$${}_c D_{0t}^\alpha \varphi(t) = I_{0t}^{1-\alpha} \varphi'(t) = \Gamma^{-1}(1-\alpha) \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \varphi'(\tau) d\tau, t > 0, 0 < \alpha < 1 \quad (2)$$

formula bilan aniqlanadigan Kaputo ma'nosidagi kasr tartibli hosila.

**1-masala.** *Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi  $(u(x, t), g(x))$  funksiyalar juftligini topish talab etilsin:*

1)  $u, u_x \in C(\bar{\Omega})$ ,  ${}_c D_{0t}^\alpha u, u_{xx} \in C(\Omega)$ ,  $g(x) \in C[0, 1]$  ;

2)  $u(x, t)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $\Omega$  sohada (1) tenglamani qanoatlantirsin;

3)  $u(x, t)$  funksiya  $u(x, 0) = \varphi(x)$ ,  $u(x, T) = \psi(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $u(0, t) = 0$ ,

$u_x(1, t) = u_x(x_0, t)$ ,  $0 \leq t \leq T$  shartlarni qanoatlantirsin. Bu yerda  $\varphi(x), \psi(x)$  - berilgan funksiyalar,  $x_0$  - berilgan haqiqiy son,  $0 < x_0 < 1$ .

Quyidagi

$$-X''(x) = \lambda X(x), 0 < x < 1, \quad (3)$$

$$X(0) = 0, X'(1) = X'(x_0), 0 < x_0 < 1. \quad (4)$$

spektral masalaning o'zak funksiyalari sistemasining to'raligini o'rganamiz. Buning uchun  $D(L_0) = \{X(x) \in C^\infty[0,1]: X(0) = 0, X'(1) = X'(x_0)\}$  sohada  $L_0 X = -X''$  tenglik bilan aniqlangan  $L_0$  operatorini kiritib, uning  $L_2(0,1)$  norma bo'yicha yopilmasini (замыкание)  $L$  orqali belgilaylik.

Ushbu paragrafda quyidagi lemma va teoremlar isbotlangan:

**1-teorema.**  $L$  operatorning o'zak funksiyalari sistemasi  $L_2(0,1)$  fazoda to'la bo'ladi.

**1-natija.**  $x_0$  son  $(0,1)$  oraliqdan olingan ixtiyoriy irratsional son bo'lsin. U holda (3), (4) masalaning xos sonlari turlicha bo'lib, mos xos funksiyalar sistemasi  $L_2(0,1)$  fazoda to'la bo'ladi.

(3), (4) masala bilan bir qatorda unga qo'shma bo'lgan quyidagi

$$-Y''(x) = \lambda Y(x), \quad x \in (0, x_0) \cup (x_0, 1), \quad (5)$$

$$Y(0) = 0, \quad Y'(1) = 0, \quad Y'(x_0 + 0) = Y'(x_0 - 0), \quad Y(x_0 + 0) - Y(x_0 - 0) = Y(1) \quad (6)$$

masalani qaraymiz.

**2-natija.**  $x_0 - (0,1)$  oraliqdagi istalgan irratsional son bo'lsin. U holda (5), (6) masalaning o'zak funksiyalari sistemasi  $L_2(0,1)$  fazoda Riss bazisini tashkil etmaydi.

$x_0 = p/q - (0,1)$  oraliqdan olingan ratsional son bo'lib,  $q - p = 1$  bo'lsin. U holda (3), (4) va unga qo'shma (5), (6) masala

$$\lambda_0 = 0, \quad \lambda_{1n} = (2q\pi n / (q + p))^2, \quad n \neq k(q + p), \quad \lambda_{2n} = (2qn\pi)^2, \quad k, n \in \mathbb{N}$$

xos sonlar va ularga mos

$$X_0(x) = x, \quad X_{1n}(x) = \sin \sqrt{\lambda_{1n}} x, \quad X_{2n}(x) = \sin \sqrt{\lambda_{2n}} x, \quad \tilde{X}_{2n}(x) = x \cos \sqrt{\lambda_{2n}} x, \quad x \in [0, 1],$$

$$Y_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, x_0), \\ \frac{2}{1-x_0^2}, & x \in (x_0, 1], \end{cases} \quad Y_{1n}(x) = \begin{cases} 4 \sin \sqrt{\lambda_{1n}} x / (1+x_0), & x \in [0, x_0), \\ \frac{2 \cos \sqrt{\lambda_{1n}} (1-x)}{(1+x_0) \sin \sqrt{\lambda_{1n}}}, & x \in (x_0, 1], \end{cases}$$

$$Y_{2n}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, x_0), \\ 4 \cos \sqrt{\lambda_{2n}} x / (1-x_0^2), & x \in (x_0, 1], \end{cases} \quad \tilde{Y}_{2n}(x) = \begin{cases} \frac{4 \sin \sqrt{\lambda_{2n}} x}{1+x_0}, & x \in [0, x_0), \\ \frac{4(1-x) \sin \sqrt{\lambda_{2n}} x}{1-x_0^2}, & x \in (x_0, 1] \end{cases}$$

o'zak funksiyalarga ega.

**1-lemma.**  $x_0 = p/q - (0,1)$  oraliqdan olingan ratsional son bo'lib,  $p$  va  $q$  natural sonlar hamda  $q - p = 1$  bo'lsin. U holda (3), (4) va (5), (6) masalalarning o'zak funksiyalari sistemasi  $L_2(0,1)$  fazoda Riss bazisini tashkil qiladi.

**2-teorema.** Agar 1-masalaning yechimi mavjud bo'lsa, u yagonadir.

**3-teorema.**  $\varphi(x), \psi(x)$  funksiyalar

$$\varphi(x), \psi(x) \in C^3[0,1], \quad \varphi^{IV}(x), \psi^{IV}(x) \in L_2(0,1), \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi''(0) = 0,$$

$\psi(0) = 0, \psi''(0) = 0, \varphi'(1) = \varphi'(x_0), \varphi'''(1) = \varphi'''(x_0), \psi'(1) = \psi'(x_0), \psi'''(1) = \psi'''(x_0)$  shartlarni qanoatlantirsin. U holda 1-masalaning yechimi mavjud.

$\Omega = \{(x, t) : 0 < x < 1, -a < t < b\}, a, b \in R^+$  – tekislikdagi to‘g‘ri to‘rtburchakli soha bo‘lib,  $\Omega_1 = \Omega \cap (t > 0), \Omega_2 = \Omega \cap (t < 0)$  bo‘lsin. 1.3-paragrafda  $\Omega$  sohada

$$0 = \begin{cases} {}_c D_{0t}^\alpha u(x, t) - u_{xx}(x, t), t > 0, \\ u_t(x, t) - u_{xx}(x, t), t < 0 \end{cases} \quad (7)$$

tenglama uchun quyidagi nolokal masala tadqiq etilgan, bu yerda  ${}_c D_{0t}^\alpha, (0 < \alpha < 1)$  – (2) formula bilan aniqlangan Kaputo ma’nosidagi kasr tartibli hosila.

**2-masala.** Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi  $u(x, t)$  funksiyani topish talab etilsin:

1)  $u, u_x \in C(\bar{\Omega}_1), {}_c D_{0t}^\alpha u, u_{xx} \in C(\Omega_1), u \in C^1(\bar{\Omega}_2) \cap C_{x,t}^{2,2}(\Omega_2);$

2)  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  sohada (7) tenglamani qanoatlantirsin;

3)  $u(0, t) = 0, u_x(1, t) = u_x(x_0, t), -a \leq t \leq b$  va  $u(x, -a) = hu(x, b) + \varphi(x), 0 \leq x \leq 1$  nolokal shartlarni hamda

$$u(x, +0) = u(x, -0), \lim_{t \rightarrow +0} {}_c D_{0t}^\alpha u(x, t) = \lim_{t \rightarrow -0} u_t(x, t) \quad (8)$$

ulash shartlarini qanoatlantirsin, bu yerda  $\varphi(x)$  – berilgan funksiya,  $h \in R, x_0 = p/q \in (0, 1), p, q \in N.$

Ushbu paragrafda quyidagi lemma va teoremlar isbotlangan:

**4-teorema.** Agar

$$\Delta_{in} = \cos \sqrt{\lambda_{in}} a + \sqrt{\lambda_{in}} \sin \sqrt{\lambda_{in}} a - h E_\alpha(-\lambda_{in} b^\alpha) \neq 0, i = 1, 2, \Delta_0 = 1 - h \neq 0 \quad (9)$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘lib,  $A_2$  masalaning yechimi mavjud bo‘lsa, u yagonadir,

bu yerda  $\lambda_{1n} = (2nq\pi / (p + q))^2, \lambda_{2n} = (2nq\pi)^2, n, k \in N, n \neq k(q + p).$

**2-lemma.**  $h \in R, h \neq 1, c, d \in N, EKUB(c, d) = 1, a = c(q + p) / 2d$  bo‘lsin. U holda yetarlicha katta  $n$  larda shunday musbat  $C_0$  o‘zgarmas soni topiladiki,

$$|\Delta_{in}| \geq C_0 > 0, i = 1, 2 \quad (10)$$

baho o‘rinli bo‘ladi.

**5-teorema.** Aytaylik,  $\varphi(x) \in C^5[0, 1], \varphi^{VI}(x) \in L_2(0, 1)$  bo‘lib,  $\varphi(x)$  funksiya

$\varphi(0) = 0, \varphi''(0) = 0, \varphi^{IV}(0) = 0, \varphi'(1) = \varphi'(x_0), \varphi'''(1) = \varphi'''(x_0), \varphi^V(1) = \varphi^V(x_0)$  shartlarni qanoatlantirsin hamda (9) va (10) shartlar bajarilsin. U holda 2-masalaning yechimi mavjud bo‘ladi.

Dissertatsiyaning “**Kaputo va Hilfer operatorini o‘z ichiga olgan yuqori tartibli aralash turdagi tenglamalar uchun masalalar**” deb nomlangan ikkinchi bobi uchta paragrafdan iborat bo‘lib, u 1.3 - paragrafda berilgan to‘g‘ri to‘rtburchakli sohada Kaputo va Hilfer integro-differensial operatori qatnashgan yuqori tartibli aralash tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalarni bayon qilish va o‘rganishga bag‘ishlangan.

2.1-paragrafda kasr tartibli aralash turdagi

$$0 = \begin{cases} u_{xxxx}(x,t) + D^{\alpha,\gamma} u(x,t), & t > 0, \\ u_{xxxx}(x,t) + u_{tt}(x,t), & t < 0 \end{cases} \quad (11)$$

tenglama uchun quyidagi nolokal masala qo'yilgan va o'rganilgan,  $D^{\alpha,\gamma}$  – kasr tartibli Hilfer integro-differensial operatori bo'lib, u quyidagicha aniqlanadi:

$$D_{at}^{\alpha,\gamma} \tau(t) = I_{at}^{\gamma(1-\alpha)} (I_{at}^{(1-\gamma)(1-\alpha)} \tau(t))', \quad 0 < \alpha \leq \gamma \leq 1. \quad (12)$$

**3-masala.** Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi  $u(x,t)$  funksiyani topish talab etilsin:

- 1)  $t^{1-\gamma} u \in C_{x,t}^{3,0}(\bar{\Omega}_1)$ ,  $t^{1-\gamma} D^{\alpha,\gamma} u \in C(\bar{\Omega}_1)$ ,  $u_{xxxx} \in C(\Omega_1)$ ,  $u \in C_{x,t}^{3,1}(\bar{\Omega}_2) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega_2)$ ;
- 2)  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  sohada (11) tenglamani qanoatlantirsin;
- 3)  $u(0,t) = 0$ ,  $u(1,t) = 0$ ,  $u_{xx}(0,t) = 0$ ,  $u_{xx}(1,t) = 0$ ,  $t \in [-a,0] \cup (0,b]$  hamda  $u_t(x,-a) = D^{\alpha,\gamma} u(x,b) + \varphi(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$  chegaraviy shartlarni va

$$\lim_{t \rightarrow +0} I_{0t}^{1-\gamma} u(x,t) = \lim_{t \rightarrow -0} u(x,t), \quad \lim_{t \rightarrow +0} I_{0t}^{1-\alpha} \frac{d}{dt} I_{0t}^{1-\gamma} u(x,t) = \lim_{t \rightarrow -0} u_t(x,t) \quad (13)$$

ulash shartlarini qanoatlantirsin, bu yerda  $\varphi(x)$  – berilgan funksiya.

Ushbu paragrafda quyidagi lemma va teoremlar isbotlangan:

**3-lemma.**  $f(t) \in [0, \ell]$  kesmada uzluksiz funksiya bo'lsin. U holda

$$\begin{cases} D^{\alpha,\gamma} u(t) = \lambda u(t) + f(t), & t \in (0, \ell), \\ \lim_{t \rightarrow +0} (I_{0t}^{n-\gamma} u(t))^{(k)} = u_k, & k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

masalaning yechimi mavjud, yagona va  $t^{1-\gamma} D^{\alpha,\gamma} u(t) \in C[0, \ell]$  bo'lib, u

$$u(t) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k t^{\gamma+k-n} E_{\alpha,\gamma+k+1-n}(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\lambda(t-\tau)^\alpha) f(\tau) d\tau$$

ko'rinishda bo'ladi, bunda  $u_k$  – berilgan o'zgarmas sonlar.

**6-teorema.** Agar

$$\Delta_n(a,b) = \sin \lambda_n^2 a - \lambda_n^2 \cos \lambda_n^2 a + \lambda_n^2 b^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_n^4 b^\alpha) \neq 0, \quad \lambda_n = \pi n, \quad n \in N \quad (14)$$

shart o'rinli bo'lib, 3-masalaning yechimi mavjud bo'lsa, u yagonadir.

**4-lemma.**  $a = p / (q\pi)$ ,  $p, q \in N$ ,  $E_{KUB}(p,q) = 1$ ,  $q$  – toq son bo'lsin. U holda ixtiyoriy fiksirlangan  $b > 0$  va yetarlicha katta  $n$  lar uchun, shunday musbat  $B_0$  o'zgarmas soni topiladiki,

$$|\Delta_n(a,b)| \geq B_0 n^2 > 0 \quad (15)$$

baho o'rinli bo'ladi.

**5-lemma.** (14) va (15) shartlar bajarilsin. U holda barcha  $n \in N$  lar uchun

$$t^{1-\gamma} |u_n^+(t)| \leq B_1 |\varphi_n| / n^4, \quad t^{1-\gamma} |D^{\alpha,\gamma} u_n^+(t)| \leq B_2 |\varphi_n|, \quad t \in [0, b],$$

$$|u_n^-(t)| \leq B_3 |\varphi_n| / n^2, \quad |(u_n^-(t))'| \leq B_4 |\varphi_n|, \quad (u_n^-(t))'' \leq B_5 n^2 |\varphi_n|, \quad t \in [-a, 0],$$

munosabatlar o'rinli, bu yerda  $B_k, k = \overline{1,5}$  – musbat o'zgarmas sonlar.

**7-teorema.** Aytaylik,  $\varphi(x)$  funksiya  $\varphi(x) \in C^2[0,1]$ ,  $\varphi^{(3)}(x) \in L_2(0,1)$ ,  $\varphi^{(2k)}(0) = 0$ ,  $\varphi^{(2k)}(1) = 0$ ,  $k = \overline{0,1}$  shartlarni qanoatlantirib, barcha  $n > n_0$  larda (15) tengsizlik bajarilsin. Bunda:

1) agar  $n = 1, 2, \dots, n_0$  lar uchun  $\Delta_n(a, b) \neq 0$  bo'lsa,  $u$  holda 3 - masala  $\Omega$  sohada yagona yechimga ega bo'lib, bu yechim

$$u(x, t) = \begin{cases} \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n^+(t) \sin \lambda_n x, & (x, t) \in \Omega_1, \\ \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n^-(t) \sin \lambda_n x, & (x, t) \in \Omega_2, \end{cases} \quad u_n^\pm(t) = \begin{cases} \frac{\varphi_n t^{\gamma-1} E_{\alpha, \gamma}(-\lambda_n^4 t^\alpha)}{\lambda_n^2 \Delta_n(a, b)}, & t > 0, \\ \frac{\varphi_n (\cos \lambda_n^2 t - \lambda_n^2 \sin \lambda_n^2 t)}{\lambda_n^2 \Delta_n(a, b)}, & t \leq 0 \end{cases}$$

qatorlar bilan aniqlanadi;

2) agar biror  $n = k_1, \dots, k_s$  lar uchun  $\Delta_n(a, b) = 0$  bo'lsa,  $u$  holda 3 - masala yechimga ega bo'lishi uchun  $\varphi_n = (\varphi(x), \sqrt{2} \sin \lambda_n x)_{L_2(0,1)} = 0$ ,  $n = k_1, \dots, k_s$  ortogonallik shartlarining bajarilishi zarur va yetarli bo'lib, masalaning yechimi

$$u(x, t) = \sqrt{2} \left[ \sum_{n=1}^{k_1-1} + \sum_{n=k_1+1}^{k_2-1} + \dots + \sum_{n=k_s+1}^{\infty} \right] u_n^\pm(t) \sin \lambda_n x + \sum_m C_m V_m^\pm(x, t),$$

$$V_m^\pm(x, t) = \begin{cases} t^{\gamma-1} E_{\alpha, \gamma}(-\lambda_m^4 t^\alpha) \sin \lambda_m x, & t > 0, \\ (\cos \lambda_m^2 t - \lambda_m^2 \sin \lambda_m^2 t) \sin \lambda_m x, & t < 0 \end{cases}$$

ko'rinishda aniqlanadi, bu yerda  $m = k_1, \dots, k_s$ ,  $C_m$  - ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

**8-teorema.** 7-teoremaning shartlari bajarilsin.  $U$  holda 3-masalaning yechimi uchun  $\|u(x, t)\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C_1 \|\varphi(x)\|_{C[0,1]}$ ,  $\|u(x, t)\|_{L_2(\Omega)} \leq C_2 \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}$  baholar o'rinli bo'ladi, bu yerda  $C_1, C_2$  - musbat o'zgarmas sonlar.

2.2-paragrafda  $\Omega$  sohada Kaputo operatorini o'z ichiga olgan aralash turdagi

$$f(x) = \begin{cases} u_{xxxx}(x, t) + {}_c D_{0t}^\alpha u(x, t) + d^2 u(x, t), & t > 0, \\ u_{xxxx}(x, t) + u_{tt}(x, t) + d^2 u(x, t), & t < 0 \end{cases} \quad (16)$$

tenglama uchun nolokal teskari masala o'rganilgan, bu yerda  $d$  - musbat haqiqiy son,  ${}_c D_{0t}^\alpha$ ,  $(0 < \alpha < 1)$  - (2) formula bilan aniqlangan Kaputo ma'nosidagi kasr tartibli hosila.

**4-masala.** Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi  $(u(x, t), f(x))$  funksiyalar juftligini topish talab etilsin:

1)  $u \in C_{x,t}^{3,\alpha}(\overline{\Omega}_1) \cap C_x^4(\Omega_1) \cap C_{x,t}^{3,1}(\overline{\Omega}_2) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega_2)$ ,  $f(x) \in C[0,1]$ ;

2)  $u(x, t), f(x)$  funksiyalar  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  sohada (16) tenglamani qanoatlantirsin;

3)  $u(x, t)$  funksiya  $u(0, t) = 0$ ,  $u(1, t) = 0$ ,  $u_{xx}(0, t) = 0$ ,  $u_{xx}(1, t) = 0$ ,  $-a \leq t \leq b$ ,  $u(x, -a) = \varphi(x)$ ,  $u_t(x, -a) = {}_c D_{0t}^\alpha u(x, b) + \psi(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$  chegaraviy shartlarni va

(8) ulash shartlarini qanoatlantirsin, bu yerda  $\varphi(x)$  va  $\psi(x)$  berilgan funksiyalar,  $u \in C_t^\alpha(\Omega_1) \Leftrightarrow {}_C D_{0t}^\alpha u \in C(\Omega_1)$ .

Ushbu paragrafda quyidagi lemma va teoremlar isbotlangan:

**9-teorema.** Agar

$$\Delta_n(a,b) = (\sin \lambda_n^2 a) / \lambda_n^2 - \cos \lambda_n^2 a + E_\alpha(-\lambda_n^4 b^\alpha) \neq 0, \lambda_n^4 = d^2 + (\pi n)^4, n=1,2,\dots \quad (17)$$

shart o‘rinli bo‘lib, 4-masalaning yechimi mavjud bo‘lsa, u yagonadir.

**6-lemma.** 4-lemma shartlari o‘rinli bo‘lsin. U holda ixtiyoriy fiksirlangan  $b > 0$  va yetarlicha katta  $n$  lar uchun, shunday musbat  $B_0$  o‘zgarmas soni topiladiki,

$$|\Delta_n(a,b)| \geq B_0 > 0 \quad (18)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

**7-lemma.** (17) va (18) munosabatlar o‘rinli bo‘lsin. U holda barcha  $n \in N$  lar uchun  $|u_n(t)| \leq B_1 |\psi_n| / n^2 + |\varphi_n|$ ,  ${}_C D_{0t}^\alpha u_n(t) \leq B_2 |\psi_n|$ ,  $t \in [0,b]$ ,

$$|u_n(t)| \leq B_3 (|\varphi_n| + |\psi_n| / n^2), |u_n'(t)| \leq B_4 |\psi_n|, u_n''(t) \leq B_5 n^2 |\varphi_n|, t \in [-a,0],$$

$$|f_n| \leq B_6 (n^4 |\varphi_n| + n^2 |\psi_n|), t \in [-a,b]$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladi, bu yerda  $B_k, k = \overline{1,6}$  – musbat o‘zgarmas sonlar.

**10-teorema.** Aytaylik,  $\varphi(x)$  va  $\psi(x)$  funksiyalar uchun

$$\varphi^{IV}(x), \psi''(x) \in C[0,1], \varphi^V(x), \psi'''(x) \in L_2(0,1),$$

$$\varphi^{(2n)}(0) = 0, \varphi^{(2n)}(1) = 0, \psi^{(2\ell)}(0) = 0, \psi^{(2\ell)}(1) = 0, n = \overline{0,2}, \ell = \overline{0,1}$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lib, (17) va (18) shartlar bajarilsin. U holda 4 - masala  $\Omega$  sohada yagona yechimga ega bo‘lib, bu yechim

$$u(x,t) = \begin{cases} \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\psi_n}{\lambda_n^4 \Delta_n(a,b)} (E_\alpha(-\lambda_n^4 t^\alpha) - \cos \lambda_n^2 a - \lambda_n^2 \sin \lambda_n^2 a) + \varphi_n \right] \sin \pi n x, t > 0, \\ \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n [(\cos \lambda_n^2 t - \lambda_n^2 \sin \lambda_n^2 t - \cos \lambda_n^2 a - \lambda_n^2 \sin \lambda_n^2 a) + \varphi_n] \sin \pi n x}{\lambda_n^4 \Delta_n(a,b)}, t < 0, \\ f(x) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n \lambda_n^4 \Delta_n(a,b) - \psi_n (\cos \lambda_n^2 a + \lambda_n^2 \sin \lambda_n^2 a)}{\Delta_n(a,b)} \sin \pi n x \end{cases}$$

qatorlar bilan aniqlanadi.

**11-teorema.** 10-teorema shartlari bajarilsin. U holda 4 - masalaning yechimi uchun

$$\|u(x,t)\|_{L_2} \leq B_7 (\|\psi\|_{L_2} + \|\varphi\|_{L_2}), \|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})} \leq B_9 (\|\psi\|_{W_2^0} + \|\varphi\|_{W_2^2}),$$

$$\|f(x)\|_{L_2} \leq B_8 (\|\psi\|_{W_2^2} + \|\varphi\|_{W_2^4}), \|f(x)\|_{C[0,1]} \leq B_{10} (\|\psi\|_{W_2^3} + \|\varphi\|_{W_2^5})$$

baholar o‘rinli bo‘ladi, bu yerda  $B_i, i = \overline{7,10}$  – musbat o‘zgarmas sonlar.

2.3-paragrafda tekislikdagi  $\Omega$  sohada Kaputo kasr hosilasi qatnashgan ushbu uchinchi tartibli aralash turdagi

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}(Lu) = \frac{\partial}{\partial x} \begin{cases} u_{xx}(x, y) - {}_c D_{0y}^\alpha u(x, y), x > 0, \\ u_{xx}(x, y) - u_{yy}(x, y), x < 0 \end{cases} \quad (19)$$

tenglama uchun chegaraviy masala tadqiq etilgan. Bunda  $\Omega$  soha tekislikdagi  $x > 0, y > 0$  da  $y=0, x=1, y=1$  to'g'ri chiziqlarning mos  $AB, BB_0, B_0A_0$  kesmalari bilan,  $x < 0, y > 0$  da esa (19) tenglamaning  $A(0,0), A_0(0,1)$  nuqtalaridan chiquvchi  $AC: x+y=0, A_0C: x-y=-1$  xarakteristikalari bilan chegaralangan soha bo'lib,  ${}_c D_{0t}^\alpha, (0 < \alpha < 1)$  – (2) formula bilan aniqlangan Kaputo ma'nosidagi kasr tartibli integro-differensial operatori.

**5-masala.**  $\bar{\Omega}$  sohada uzluksiz va quyida keltirilgan shartlarni qanoatlantiruvchi  $u(x, y)$  funksiyani topish talab qilinsin:

1)  $\Omega \setminus \{x=0\}$  sohada (19) tenglamaning regulyar yechimi bo'lsin;

2)  $u(x, y)$  funksiya

$$\begin{aligned} u|_{y=0} &= \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u|_{x=1} = f(y), \quad 0 \leq y \leq 1, \\ u|_{A_0C} &= \psi_1(y), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{A_0C} = \psi_2(y), \quad \frac{1}{2} \leq y \leq 1, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{AC} = \psi_3(y), \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin, bu yerda  $\varphi(x), f(y), \psi_1(y), \psi_2(y), \psi_3(y)$  berilgan funksiyalar.

Ushbu paragrafda quyidagi lemma va teoremlar isbotlangan:

**12-teorema.** Aytaylik,  $\varphi(x), f(y), \psi_1(y), \psi_2(y)$  va  $\psi_3(y)$  funksiyalar

$$\begin{aligned} \varphi(x) &\in C^1[0,1], \quad f(y) \in C^1[0,1], \quad \psi_1(y) \in C^2[1/2,1], \quad \psi_2(y) \in C^1[1/2,1], \\ \psi_3(y) &\in C^1[0,1/2], \quad \varphi(0)=0, \quad \varphi(1)=f(0)=0, \quad \psi_2' = -\psi_3'(1/2) \end{aligned}$$

shartlarni qanoatlantirsin. U holda 5 - masalaning yechimi mavjud va yagonadir.

Teoremani isbotlashda ushbu

$$\tau''(y) - {}_c D_{0y}^\alpha \tau(y) = f(y), \quad \tau(0)=0, \quad \tau(1)=\psi_1(1) \quad (20)$$

Dirixle masalasi yechimi xossalaridan foydalanamiz, bunda  $\tau(y) = u(0, y), f(y)$  - berilgan uzluksiz funksiya.

**8-lemma.** Aytaylik,  $\tau(t) \in C^1[0,1] \cap C^2(0,1)$  funksiya  $(0,1)$  oraliqda (20) masalaga mos bir jinsli tenglamani qanoatlantirsin. U holda  $\tau(t)$  funksiya o'zining musbat maksimumi yoki manfiy minimumiga albatta  $[0,1]$  segmentning chegaraviy nuqtalarida, ya'ni  $t=0$  yoki  $t=1$  nuqtalarda erishadi.

**9-lemma.** (20) Dirixle masalasi bittadan ko'p yechimga ega emas.

Dissertatsiyaning “**To'rtinchi tartibli aralash turdagi nolokal tenglamalar uchun masalalar**” deb nomlangan uchinchi bobi uchta paragrafdan iborat bo'lib, u  $\Omega = \{(x, t) : -1 < x < 1, -a < t < b\}, a, b \in R^+$  sohada Kaputo va Hilfer hosilalari

qatnashgan involyutsiyali aralash tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalalar o'rganishga bag'ishlangan.

$\Omega_1 = \Omega \cap (t > 0)$ ,  $\Omega_2 = \Omega \cap (t < 0)$  bo'lsin. 3.1-paragrafda  $\Omega$  sohada aralash turdagi nolokal

$$0 = \begin{cases} D^{\alpha,\gamma} u(x,t) + u_{xxxx}(x,t) - \varepsilon u_{xxxx}(-x,t) + d^2 u(x,t), & t > 0, \\ u_{tt}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) - \varepsilon u_{xxxx}(-x,t) + d^2 u(x,t), & t < 0 \end{cases} \quad (21)$$

tenglama uchun quyidagi nolokal masala o'rganilgan, bu yerda  $\varepsilon$ ,  $d$  – berilgan haqiqiy sonlar,  $D^{\alpha,\gamma}$ , ( $0 < \alpha \leq \gamma \leq 1$ ) – (12) formula bilan aniqlangan kasr tartibli Hilfer operatori.

**6-masala.** *Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi  $u(x,t)$  funksiyani topish talab etilsin:*

- 1)  $t^{1-\gamma} u \in C_{x,t}^{3,0}(\bar{\Omega}_1)$ ,  $t^{1-\gamma} D^{\alpha,\gamma} u \in C(\bar{\Omega}_1)$ ,  $u_{xxxx} \in C(\Omega_1)$ ,  $u \in C_{x,t}^{3,1}(\bar{\Omega}_2) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega_2)$ ;
- 2)  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  sohada (21) tenglamani qanoatlantirsin;
- 3)  $u(-1,t) = 0$ ,  $u(1,t) = 0$ ,  $u_{xx}(-1,t) = 0$ ,  $u_{xx}(1,t) = 0$ ,  $t \in [-a, 0] \cup (0, b]$ ,  $u_i(x, -a) = D^{\alpha,\gamma} u(x, b) + \psi(x)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$

chegaraviy va (13) ulash shartlarini qanoatlantirsin, bu yerda  $\psi(x)$  – berilgan funksiya.

Ushbu spektral masalalarni qaraymiz:

$$X^{(IV)}(x) - \varepsilon X^{(IV)}(-x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(-1) = 0, X(1) = 0, X''(-1) = 0, X''(1) = 0, \quad (23)$$

$$Y_i^{(IV)}(x) + \mu_i Y_i(x) = 0, \quad Y_i(\pm 1) = 0, Y_i''(\pm 1) = 0, \quad i = 1, 2, \mu_{1,2} = \tilde{\lambda}/(1 \pm \varepsilon), \quad \varepsilon \neq \pm 1, \quad (24)$$

bu yerda  $\lambda$  – spektral parametr,  $X_{1k}(x) = Y_{1k}(x) - Y_{1k}(-x)$ ,  $X_{2k}(x) = Y_{2k}(x) + Y_{2k}(-x)$ ,  $k \in N$ .

Ushbu paragrafda quyidagi lemma va teoremlar isbotlangan:

**10-lemma.**  $Y_{ik}(x)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $k = 1, 2, \dots$  - (24) masalaning xos funksiyalari,  $\mu_{ik}$  esa ularga mos xos sonlari bo'lsin. U holda

$$X_{1k}(x) = Y_{1k}(x) - Y_{1k}(-x), \quad X_{2k}(x) = Y_{2k}(x) + Y_{2k}(-x), \quad k = 1, 2, \dots \quad (25)$$

funksiyalar sistemasi (23) masalaning  $\tilde{\lambda}_{1k} = (1 + \varepsilon)\mu_{1k}$ ,  $\tilde{\lambda}_{2k} = (1 - \varepsilon)\mu_{2k}$  xos sonlariga mos keladigan xos funksiyalari bo'ladi, bu yerda  $\varepsilon \neq \pm 1$ .

**13-teorema.**  $Y_{ik}(x)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $k = 1, 2, \dots$  - (24) masalaning to'la xos funksiyalari sistemasi bo'lib,  $\mu_{ik}$  esa ularga mos xos sonlar bo'lsin. U holda (25) funksiyalar sistemasi ixtiyoriy  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $\varepsilon \neq \pm 1$  da  $L_2(-1, 1)$  fazoda to'la bo'ladi.

**14-teorema.** Agar

$$\Delta_{ik} = (\sin \sqrt{\lambda_{ik}} a) / \sqrt{\lambda_{ik}} - \cos \sqrt{\lambda_{ik}} a + b^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{ik} b^\alpha) \neq 0, \quad i = 1, 2, \quad k = 1, 2, \dots \quad (26)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lib, 6-masalaning yechimi mavjud bo‘lsa, u holda u yagonadir, bu yerda  $\lambda_{1k} = (1 + \varepsilon)k^4\pi^4 + d^2$ ,  $\lambda_{2k} = (1 - \varepsilon)(k - 0,5)^4\pi^4 + d^2$ .

**11-lemma.**  $b$  – ixtiyoriy musbat haqiqiy son,  $a$  shunday haqiqiy musbat sonki,  $\sqrt{1 \pm \varepsilon} \cdot a \cdot \pi$  ko‘paytma ratsional son bo‘lsin. U holda katta  $k$  lar uchun shunday musbat  $M_i, i = 1, 2$  o‘zgarmas son mavjudki, quyidagi baho o‘rinli:

$$|\Delta_{ik}| \geq M_i > 0. \quad (27)$$

**12-lemma.** (26) va (27) shartlar bajarilsin. U holda

$$\begin{aligned} t^{1-\gamma} |u_{1k}(t)| &\leq C_1 k^{-2} |\psi_{1k}|, \quad t^{1-\gamma} |u_{2k}(t)| \leq C_2 (k - 0,5)^2 |\psi_{2k}|, \quad t \in [0, b], \\ |u_{1k}(t)| &\leq N_1 k^{-2} |\psi_{1k}|, \quad |u_{2k}(t)| \leq N_2 (k - 0,5)^{-2} |\psi_{2k}|, \quad t \in [-a, 0], \\ t^{1-\gamma} |D^{\alpha, \gamma} u_{1k}(t)| &\leq D_1 |\psi_{1k}|, \quad t^{1-\gamma} |D^{\alpha, \gamma} u_{2k}(t)| \leq D_2 |\psi_{2k}|, \quad t \in [0, b], \\ \left| \frac{d^s u_{1k}(t)}{dt^s} \right| &\leq L_s k^{2s-2} |\psi_{1k}|, \quad \left| \frac{d^s u_{2k}(t)}{dt^s} \right| \leq P_s (k - 0,5)^{2s-2} |\psi_{2k}|, \quad t \in [-a, 0] \end{aligned}$$

tengsizliklar o‘rinli, bu yerda  $C_s, D_s, L_s, N_s, P_s, s = 1, 2$  – musbat o‘zgarmas sonlar.

**15-teorema.**  $\psi(x)$  funksiya  $\psi(x) \in C^2[-1, 1]$ ,  $\psi'''(x) \in L_2(-1, 1)$ ,  $\psi^{(l)}(-1) = 0$ ,  $\psi^{(l)}(1) = 0$ ,  $l = 0, 2$  shartlarni qanoatlantirib, (26) va (27) munosabatlar o‘rinli bo‘lsin. U holda 6 - masala  $\Omega$  sohada yagona yechimga ega bo‘lib, bu yechim

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (u_{1k}(t) \sin(k\pi x) + u_{2k}(t) \cos(k - 0,5)\pi x), \\ u_{ik}(t) &= \begin{cases} \frac{\psi_{ik}}{\lambda_{ik} \Delta_{ik}} t^{\gamma-1} E_{\alpha, \gamma}(-\lambda_{ik} t^\alpha), & t > 0, \\ \frac{\psi_{ik}}{\lambda_{ik} \Delta_{ik}} (\cos \sqrt{\lambda_{ik}} t - \sqrt{\lambda_{ik}} \sin \sqrt{\lambda_{ik}} t), & t < 0, \quad i = 1, 2 \end{cases} \end{aligned}$$

qator bilan aniqlanadi.

**16-teorema.** 15-teorema shartlari bajarilsin. U holda 6-masalaning yechimi uchun  $\|u(x, t)\|_{L_2} \leq B_1 \|\psi\|_{L_2}$ ,  $\|u(x, t)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq B_2 \|\psi\|_{W_2^0}$  baholar o‘rinli bo‘ladi, bu yerda  $B_i, i = \overline{1, 2}$  - musbat o‘zgarmas sonlar.

3.2-paragrafda  $\Omega$  sohada quyidagi nolokal va teskari masala o‘rganilgan:

**7-masala.** Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi  $(u(x, t), f(x))$  funksiyalar juftligini topish talab etilsin:

$$1) \quad t^{1-\gamma} u \in C_{x,t}^{3,0}(\bar{\Omega}_1), \quad t^{1-\gamma} D^{\alpha, \gamma} u \in C(\bar{\Omega}_1), \quad u_{xxxx} \in C(\Omega_1), \quad u \in C_{x,t}^{3,1}(\bar{\Omega}_2) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega_2), \\ f(x) \in C[-1, 1];$$

2)  $u(x, t), f(x)$  funksiyalar  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  sohada

$$f(x) = \begin{cases} D^{\alpha, \gamma} u(x, t) + u_{xxxx}(x, t) - \varepsilon u_{xxxx}(-x, t) + d^2 u(x, t), & t > 0, \\ u_{tt}(x, t) + u_{xxxx}(x, t) - \varepsilon u_{xxxx}(-x, t) + d^2 u(x, t), & t < 0 \end{cases} \quad (28)$$

tenglamani qanoatlantirsin;

3)  $u(x,t)$  funksiya (22) hamda

$$u(x,-a) = \varphi(x), u_t(x,-a) = D^{\alpha,\gamma} u(x,b) + \psi(x), -1 \leq x \leq 1$$

chegaraviy shartlarni va (13) ulash shartlarini qanoatlantirsin, bu yerda  $\varphi(x)$  va  $\psi(x)$  – berilgan funksiyalar,  $\varepsilon, d$  – berilgan haqiqiy sonlar,  $D^{\alpha,\gamma}$ ,  $(0 < \alpha \leq \gamma \leq 1)$  – (12) formula bilan aniqlangan kasr tartibli Hilfer operatori.

Ushbu paragrafda quyidagi lemma va teoremlar isbotlangan:

**17-teorema.** Aytaylik, (26) tengsizlik o‘rinli bo‘lsin. U holda agar 7 - masalaning yechimi mavjud bo‘lsa,  $u$  yagonadir.

**18-teorema.** Aytaylik,  $\varphi(x)$  va  $\psi(x)$  funksiyalar uchun

$$\begin{aligned} \varphi^{IV}(x), \psi''(x) &\in C[-1,1], \varphi^V(x), \psi'''(x) \in L_2(-1,1), \\ \varphi^{(s)}(\pm 1) &= 0, \psi^{(l)}(\pm 1) = 0, s = 0, 2, 4, l = 0, 2 \end{aligned} \quad (29)$$

munosabatlar o‘rinli bo‘lib, (26) va (27) shartlar bajarilsin. U holda 7 - masala  $\Omega$  sohada yagona yechimga ega bo‘ladi.

3.3-paragrafda 3.1-paragrafda aniqlangan  $\Omega$  sohada

$$f(x) = \begin{cases} t^{-\beta} {}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t) + u_{xxxx}(x,t) - \varepsilon u_{xxxx}(-x,t) + d^2 u(x,t), t > 0, \\ u_{tt}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) - \varepsilon u_{xxxx}(-x,t) + d^2 u(x,t), t < 0 \end{cases} \quad (30)$$

aralash turdagi tenglama uchun quyidagi nolokal va teskari masala o‘rganilgan,  $\beta > 0$ ,  $\varepsilon, d$  – berilgan haqiqiy sonlar,  ${}_C D_{0t}^{\alpha}$ ,  $(0 < \alpha < 1)$  – (2) formula bilan aniqlangan Kaputo ma’nosidagi kasr tartibli hosila.

**8-masala.** Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi  $(u(x,t), f(x))$  funksiyalar juftligini topish talab etilsin:

- 1)  $u \in C_{x,t}^{3,0}(\bar{\Omega}_1) \cap C_x^4(\Omega_1), t^{-\beta} {}_C D_{0t}^{\alpha} u \in C(\bar{\Omega}_1), u \in C_{x,t}^{3,1}(\bar{\Omega}_2) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega_2), f(x) \in C[-1,1]$ ;
- 2)  $u(x,t)$  va  $f(x)$  funksiyalar  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  sohada (30) tenglamani qanoatlantirsin;
- 3)  $u(x,t)$  funksiya  $u(\pm 1, t) = 0, u_{xx}(\pm 1, t) = 0, -a \leq t \leq b$ ,

$u(x,-a) = \varphi(x), u_t(x,-a) = t^{-\beta} {}_C D_{0+}^{\alpha} u(x,b) + \psi(x), -1 \leq x \leq 1$  chegaraviy va  $\lim_{t \rightarrow +0} t^{-\beta} {}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t) = \lim_{t \rightarrow -0} u_t(x,t)$  ulash shartini qanoatlantirsin, bu yerda  $\varphi(x)$  va  $\psi(x)$  – berilgan funksiyalar.

Ushbu paragrafda quyidagi lemma va teoremlar isbotlangan:

**19-teorema.** Quyidagi

$$\Delta_{ik} = (\sin \sqrt{\lambda_{ik}} a) / \sqrt{\lambda_{ik}} - \cos \sqrt{\lambda_{ik}} a + E_{\alpha, 1+\beta/\alpha, \beta/\alpha}(-\lambda_{ik} b^{\alpha+\beta}) \neq 0, i=1, 2, k=1, 2, \dots \quad (31)$$

tengsizlik bajarilsin. U holda 8 - masalaning yechimi mavjud bo‘lsa,  $u$  yagona. Bu yerda  $\lambda_{1k} = (1 + \varepsilon)k^4 \pi^4 + d^2$ ,  $\lambda_{2k} = (1 - \varepsilon)(k - 0,5)^4 \pi^4 + d^2$ ,  $E_{\alpha, m, l}(z)$  – Kilbas-Saygo turidagi funksiya bo‘lib,

$$E_{\alpha,m,l}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, c_0 = 1, c_k = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma[\alpha(jm+l)+1]}{\Gamma[\alpha(jm+l+1)+1]}, k \in N$$

qator bilan aniqlanadi, bu yerda  $\alpha, l \in C, \operatorname{Re}(\alpha) > 0, m \in R$ .

**13-lemma.**  $b$  -ixtiyoriy musbat haqiqiy son,  $a$  shunday musbat haqiqiy sonki,  $\sqrt{1 \pm \varepsilon} \cdot a \cdot \pi$  – ko‘paytma ratsional son bo‘lsin. U holda  $k$  ning yetarlicha katta qiymatlari uchun shunday musbat  $M_i, i=1,2$  o‘zgarmas soni mavjudki, quyidagi baho o‘rinli bo‘ladi:

$$|\Delta_{ik}^*| \geq M_i > 0. \quad (32)$$

**20-teorema.** Aytaylik, (29), (31) va (32) shartlar bajarilsin. U holda 8 - masala yagona yechimga ega bo‘ladi.

## XULOSA

Dissertatsiya kasr tartibli hosilalarni o‘z ichiga olgan xususiy hosilali differensial hamda aralash tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalarni o‘rganishga bag‘ishlangan bo‘lib, ushbu tadqiqotning asosiy natijalari quyidagicha:

kasr tartibli diffuziya tenglamasi hamda aralash tenglama uchun Bitsadze-Samarskiy turidagi nolokal to‘g‘ri va teskari masalalarning bir qiymatli yechilishi ko‘rsatilgan bo‘lib, qaralayotgan masalalar ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Bitsadze-Samarskiy turidagi spektral masalani o‘rganishga keltirilgan, ushbu masala va unga qo‘shma masalaning xos sonlari va ularga mos o‘zak funksiyalari topilgan, o‘zak funksiyalar sistemasining to‘lalik va bazislik xossalari o‘rganilgan;

yuqori tartibli aralash turdagi nolokal tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari nolokal masalalarning bir qiymatli yechilishi ko‘rsatilgan bo‘lib, bunda yuzaga keladigan “kichik maxrajlar” muammosi qaralayotgan soha chegaralariga muayyan shartlar qo‘yish orqali hal qilingan;

Kaputo ma’nosidagi kasr tartibli hosilali diffuziya-to‘lqin tenglamasi uchun chegaraviy masala o‘rganilgan bo‘lib, bunda masala yechimining mavjudligi Grin funksiyasi hamda integral tenglamalar nazariyasi usullari yordamida, yagonaligi esa kasr tartibli operatorlar uchun ekstremum hamda Zarembo-Jiro prinsiplari yordamida ko‘rsatilgan;

Kaputo kasr tartibli hosila hamda involyutsiya qatnashgan to‘rtinchi tartibli buzilgan aralash turdagi tenglama uchun manba funksiyasini topish bilan bog‘liq teskari masalaning bir qiymatli yechilishi shartlari aniqlangan;

to‘rtinchi tartibli involyutsiyali oddiy differensial tenglama uchun chegaraviy masalaning spektral xossalari o‘rganilgan, uning xos sonlari hamda ularga mos xos funksiyalar topilgan, shu bilan birga topilgan xos funksiyalarning to‘laligi va bazis tashkil qilishi ko‘rsatilgan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 ПО  
ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ  
ФЕРГАНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

---

**ФЕРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ЖАЛИЛОВ МУХАММАДАЛИ АБДУМУТАЛИБОВИЧ**

**ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО И  
СМЕШАННОГО ТИПОВ С ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА**

**01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика**

**АВТОРЕФЕРАТ  
диссертации доктора философии (PhD)  
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

**Фергана – 2024**

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико – математическим наукам зарегистрирована в Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за №В 2023.4.PhD/FM947.

Диссертация выполнена в Ферганском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб – странице Научного совета ([www.fdu.uz](http://www.fdu.uz)) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» ([www.ziynet.uz](http://www.ziynet.uz)).

**Научный руководитель:** **Кадиркулов Бахтияр Жалилович**  
доктор физико-математических наук, доцент

**Официальные оппоненты:** **Хасанов Анварджан**  
доктор физико-математических наук, профессор  
**Сафаров Журабек Шакарович**  
доктор физико-математических наук

**Ведущая организация:** **Бухарский государственный университет**

Защита диссертации состоится «\_\_» \_\_\_\_\_ 2024 года в \_\_\_\_\_ часов на заседании Научного совета PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 при Ферганском государственном университете. (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, дом 19. Тел: (+99873) 244-44-02, факс: (+99873) 244-44-93, e-mail: [fardu\\_info@umail.uz](mailto:fardu_info@umail.uz)).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно–ресурсном центре Ферганского государственного университета (зарегистрирована за №\_\_\_). (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, дом 19). Тел.: (+99873) 244-44-94.

Автореферат диссертации разослан «\_\_» \_\_\_\_\_ 2024 года.  
(протокол рассылки №\_\_ от «\_\_» \_\_\_\_\_ 2024 года).

**А.К. Уринов**

Председатель ученого совета по  
присуждению ученых степеней,,  
д.ф-м.н., профессор

**И.У. Хайдаров**

Ученый секретарь научного совета по  
присуждению ученых степеней,  
к.ф-м.н., доцент

**Ю.П. Апаков**

Заместитель председатель научного  
семинара при научном совете по  
присуждению ученых степеней, д.ф-  
м.н., профессор

## **ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))**

**Актуальность и востребованность темы диссертации.** Исследования многих практических задач, проводимые в мире, приводят к решению краевых задач для дифференциальных уравнений. В частности, математическая модель химико-механических процессов, связанных с аномальными диффузионными процессами, движением потоков грунтовых вод, свойствами композиционных материалов, сводится к дробным дифференциальным уравнениям. Отсюда следует, что решение краевых задач для дробных дифференциальных уравнений важно, как одно из современных направлений теории дробных дифференциальных уравнений, дающее полную картину анализа и характеристики рассмотренных выше практических задач.

В мире ведутся научно-исследовательские работы, направленные на изучение решения различных начальных и краевых задач для дробных дифференциальных уравнений. В связи с этим особое внимание уделяется исследованию различных нелокальных краевых задач для диффузии и нелокальных дифференциальных уравнений и уравнений высшего порядка, а также изучению методов решения нелокальных задач типа Бицадзе-Самарского, а также исследованию существования и единственности решения задач.

В нашей республике проводятся комплексные исследования, имеющие как теоретическое, так и практическое значение, и здесь достигнуты определенные результаты. В частности, проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям математических наук, в частности, дифференциальные уравнения и математическая физика, динамические системы и оптимальное управление, прикладная математика и математическое моделирование, математический анализ и теория функций, теория вероятностей и математическая статистика, алгебра и геометрия определены как основные задачи и виды деятельности математиков<sup>2</sup>. В результате реализованных мероприятий в этих областях получены важные научные результаты. В частности, особое значение имеет нахождение точных решений начально-краевых и нелокальных задач типа Бицадзе-Самарского, а также доказательство их единственности для диффузионных и нелокальных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений высокого порядка.

Проблема исследования настоящей диссертации находится в русле задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии Наук, организации, управления

---

<sup>2</sup> Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года № 292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

и финансирования научно-исследовательской деятельности», ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан», ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

**Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики.** Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

**Степень изученности проблемы.** Краевые задачи для различных уравнений дробного порядка с применением метода Фурье исследованы в работах С.А.Малик, О.Х.Масаевой, Г.Ли (G.Li), Д.Чжанг (D.Zhang), Х.Жиа (X.Jia), М.Ямомото (M.Yamamoto), Ф.Аль-Мусалхи, Н.Аль-Салти, С.Сумайя, М.А.Салман, а с применением интегральных преобразований и метода функции Грина в работах А.В. Псху и О.М. Мамчуева, Р.К.Сахена и О. Х. Масаевой. Отметим работы М.А.Садибекова, Б.Х.Турметова, Б.Т.Торребек, С.Кербал (S.Kerbal) и М.Киранэ, где изучены вопросы разрешимости краевых задач с граничными операторами дробного порядка для уравнения Лапласа.

Нелокальная краевая задача нового типа для эллиптического уравнения, возникающая в теории плазмы, была сформулирована и изучена А.В. Бицадзе и А.А.Самарским и в научной литературе получила название задачи (типа) Бицадзе-Самарского. Далее, аналогичные задачи с операторами целого или дробного порядка изучались в работах К.У.Хубиева, В.Карачика, Б.Х.Турметова, М.Ружанский (M.Ruzhansky), Н.Е.Токмагамбетова, Б.Т.Торребек, а для параболических систем в работах Е.А.Бадерко, М.Ф.Черепова.

В вышеперечисленных работах, в основном, исследовались классические задачи или задачи с условиями Ионкина-Самарского для дифференциальных уравнений второго порядка. Нелокальные задачи типа Бицадзе-Самарского для уравнений дробного порядка практически не изучены, а краевые задачи для уравнений высшего порядка с инволюцией, а также задачи Бицадзе-Самарского или спектральные задачи вообще не изучены. Настоящая диссертация посвящена этой важной проблеме теории дифференциальных уравнений в частных производных.

**Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполнена диссертация.** Диссертационные исследования выполнялись в рамках программы «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и родственных

разделов математики» плана научно-исследовательской работы Ферганского государственного университета.

**Целью исследования** является постановка и исследование прямых и обратных задач для нелокальных дифференциальных уравнений в частных производных, а также разработка методов исследования этих задач.

**Задачи исследования**, решаемые в данной работе, следующие:

постановка и исследование прямых и обратных нелокальных задач для уравнения диффузии дробного порядка, а также для уравнений смешанного типа второго порядка с дробной производной Капуто;

изучение спектральных свойств нелокальных задач типа Бицадзе-Самарского для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка;

постановка и исследование прямых и обратных нелокальных задач для смешанных уравнений высокого порядка с дробными производными;

постановка и исследование обратных задач функции источника для вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных с дробными производными;

постановка и исследование прямых и обратных нелокальных задач для смешанных уравнений четвертого порядка с дробной производной и с инволюцией.

**Объектом исследования** являются операторы интегро-дифференцирования дробного порядка в смысле Капуто, Хилфера, нелокальные уравнения в частных производных.

**Предметом исследования** являются прямые и обратные задачи для уравнений в частных производных с операторами дробного порядка и с инволюцией.

**Методы исследования.** В диссертации использованы методы дифференциальных уравнений и математической физики, спектральной теории линейных операторов, теории интегральных уравнений, методы Фурье и теории функций Грина.

**Научная новизна исследования заключается в следующем:**

методом Фурье доказаны теоремы о существовании, единственности и устойчивости решения нелокальных прямых и обратных задач для уравнения диффузии и уравнений смешанного типа, содержащих дробные производные;

методами теории дифференциальных уравнений были найдены собственные значения и соответствующие им корневые функции задачи Бицадзе-Самарского для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, а их полнота и базисность Рисса основаны на оценке резольвенты дифференциального оператора;

методом функции Грина и принципом экстремума доказаны существование и единственность решения краевой задачи для уравнения

смешанного типа третьего порядка, с нехарактеристической линией изменения типа, содержащей дробную производную Капуто;

с использованием полноты собственных функций и метода Фурье доказаны существование и единственность решения краевых задач для уравнений четвертого порядка смешанного типа с инволюцией.

#### **Практические результаты исследования.**

При решении нелокальных задач типа Бицадзе-Самарского для уравнений в частных производных дробного порядка предложен способ исследования полноты и базисности корневых функций спектральных задач, позволяющий применение этих свойств для построения решения краевых задач в виде равномерно и абсолютно сходящегося ряда. В случае самосопряженного дифференциального оператора четвертого порядка показан способ приведения решения спектральной задачи с инволюцией к спектральной задаче с этим же оператором без инволюции.

#### **Достоверность результатов исследования.**

Математические доказательства основаны на методе Фурье, методах спектральной теории линейных операторов, интегральных уравнений и математического анализа, а также на строгости математических рассуждений и вычислений.

#### **Научная и практическая значимость результатов исследования.**

Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть применены в спектральной теории линейных операторов, в теории дифференциальных и интегральных уравнений дробного порядка, а также для исследования неклассических задач математической физики.

Практическое значение диссертационного исследования определяется применением полученных в работе научных результатов при математическом моделировании ряда процессов физики, химии, биологии, в частности, аномальных диффузионных процессов в электрохимии, молекулярной диффузии в почвах, движения жидкостей в сильно пористых средах, описываемых при помощи уравнений дробного порядка.

**Внедрение результатов исследования.** На основании результатов исследования задач для уравнений параболического и смешанного типа с дробными производными реализовано:

результаты исследования обратной задачи типа Бицадзе-Самарского для параболического уравнения дробного порядка были использованы в фундаментальном проекте CFRG-23-02 для исследования краевых задач для дифференциальных уравнений с операторами дробного порядка (справка Национального университета науки и технологий от 23 апреля 2024 г., Султанат Оман). Полученные результаты позволили представить решения задачи в виде абсолютно и равномерно сходящегося ряда;

точные решения краевых задач для смешанных дифференциальных уравнений четвертого порядка с инволюцией были использованы в

фундаментальном проекте АП 09259074 «Методы построения решений дифференциальных уравнений дробного порядка и вопросы разрешимости краевых и начально-краевых задач» для исследования обратных задач для нелокальных дифференциальных уравнений смешанного типа (справка №04/465 от 25 апреля 2024 года Международного казахско-турецкого университета имени Ходжи Ахмеда Яссави). В результате стало возможным исследование обратных задач для нелокальных уравнений в частных производных смешанного типа.

**Апробация результатов исследования.** Основные результаты диссертации обсуждались на 13 международных и 5 республиканских научных и научно-практических конференциях.

**Публикация результатов исследования.** По теме диссертации опубликована 31 научная работа, в том числе, 10 научных статей, из них 5 опубликованы в зарубежных научных журналах, 5-опубликованы в отечественных научных журналах, рекомендованных к публикации основных научных результатов докторских диссертаций Высшей Аттестационной Комиссии Республики Узбекистан.

**Структура и объём диссертации.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 118 страниц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

**Во введении** обосновывается актуальность темы диссертации, освещается совместимость исследования с приоритетными направлениями развития науки и техники республики, указывается уровень изученности проблемы, цель, описываются задачи, объект и предмет исследования, презентуется научная новизна и практические результаты исследования, раскрывается теоретическая и практическая значимость полученных результатов, дана информация о внедрении результатов исследования, сведения об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации, названная **“Задачи типа Бицадзе-Самарского для дифференциальных уравнений второго порядка, содержащих оператор Капуто”** состоит из трех параграфов и посвящена постановке и исследованию прямых и обратных задач для уравнений в частных производных второго порядка в прямоугольной области.

В параграфе 1.1 приведены некоторые сведения, использованные для получения основных результатов диссертации.

В параграфе 1.2 в области  $\Omega = \{(x,t): 0 < x < 1, 0 < t < T\}$ ,  $T > 0$  для уравнения

$${}_c D_{0,t}^\alpha u(x,t) = u_{xx}(x,t) + g(x) \quad (1)$$

поставлена и исследована следующая задача, где  ${}_C D_{0^+}^\alpha$  – производная дробного порядка в смысле Капуто, которая определяется по формуле:

$${}_C D_{0^+}^\alpha \varphi(t) = I_{0^+}^{1-\alpha} \varphi'(t) = \Gamma^{-1}(1-\alpha) \int_0^t (t-\tau)^{-\alpha} \varphi'(\tau) d\tau, t > 0, 0 < \alpha < 1. \quad (2)$$

**Задача 1.** Требуется найти пару функций  $(u(x,t), g(x))$ , удовлетворяющих следующим условиям:

1)  $u, u_x \in C(\bar{\Omega})$ ,  ${}_C D_{0^+}^\alpha u, u_{xx} \in C(\Omega)$ ,  $g(x) \in C[0,1]$ ;

2) функции  $u(x,t)$  и  $g(x)$  удовлетворяют уравнению (1) в области  $\Omega$ ;

3) функция  $u(x,t)$  удовлетворяет условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), u(x,T) = \psi(x), 0 \leq x \leq 1, u(0,t) = 0, u_x(1,t) = u_x(x_0,t), 0 \leq t \leq T.$$

Здесь  $\varphi(x), \psi(x)$  – заданные функции,  $x_0$  – заданное действительное число,  $0 < x_0 < 1$ .

Исследуем полноту системы корневых функций следующей спектральной задачи

$$-X''(x) = \lambda X(x), 0 < x < 1, \quad (3)$$

$$X(0) = 0, X'(1) = X'(x_0), 0 < x_0 < 1. \quad (4)$$

Введём оператор  $L_0$ , определенный равенством  $L_0 X = -X''$  с областью определения  $D(L_0) = \{X(x) \in C^\infty[0,1] : X(0) = 0, X'(1) = X'(x_0)\}$ . Пусть  $L$  – оператор, полученный замыканием оператора  $L_0$ , в норме  $L_2(0,1)$ .

В этом параграфе доказываются следующие леммы и теоремы:

**Теорема 1.** Система корневых функций оператора  $L$  полна в  $L_2(0,1)$ .

**Следствие 1.** Пусть число  $x_0$  – произвольное иррациональное число из интервала  $(0,1)$ . Тогда собственные значения задачи (3), (4) различны и система соответствующих собственных функций полна в  $L_2(0,1)$ .

Рассмотрим следующую задачу, сопряженную задаче (3), (4),

$$-Y''(x) = \lambda Y(x), x \in (0, x_0) \cup (x_0, 1), \quad (5)$$

$$Y(0) = 0, Y'(1) = 0, Y'(x_0 + 0) = Y'(x_0 - 0), Y(x_0 + 0) - Y(x_0 - 0) = Y(1). \quad (6)$$

**Следствие 2.** Пусть  $x_0$  – любое иррациональное число из  $(0,1)$ . Тогда система корневых функций задачи (5), (6) не образует базис Рисса в  $L_2(0,1)$ .

Пусть  $x_0$  – рациональное число из интервала  $(0,1)$  и пусть  $q - p = 1$ . Тогда числа  $\lambda_0 = 0$ ,  $\lambda_{1n} = (2q\pi n / (q + p))^2$ ,  $n \neq k(q + p)$ ,  $k, n \in \mathbb{N}$ ,  $\lambda_{2n} = (2q\pi)^2$ ,  $n \in \mathbb{N}$  являются собственными числами задач (3), (4) и (5), (6), а соответствующие собственные функции имеют вид:

$$X_0(x) = x, X_{1n}(x) = \sin \sqrt{\lambda_{1n}} x, X_{2n}(x) = \sin \sqrt{\lambda_{2n}} x, \tilde{X}_{2n}(x) = x \cos \sqrt{\lambda_{2n}} x,$$

$$Y_0(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, x_0), \\ \frac{2}{1-x_0^2}, & x \in (x_0, 1], \end{cases} \quad Y_{1n}(x) = \begin{cases} 4 \sin \sqrt{\lambda_{1n}} x / (1+x_0), & x \in [0, x_0), \\ \frac{2 \cos \sqrt{\lambda_{1n}} (1-x)}{(1+x_0) \sin \sqrt{\lambda_{1n}}}, & x \in (x_0, 1], \end{cases}$$

$$Y_{2n}(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, x_0), \\ 4 \cos \sqrt{\lambda_{2n}} x / (1-x_0^2), & x \in (x_0, 1], \end{cases} \quad \tilde{Y}_{2n}(x) = \begin{cases} 4 \sin \sqrt{\lambda_{2n}} x / (1+x_0), & x \in [0, x_0), \\ \frac{4(1-x) \sin \sqrt{\lambda_{2n}} x}{1-x_0^2}, & x \in (x_0, 1]. \end{cases}$$

**Лемма 1.** Пусть  $x_0 = p/q$  – рациональное число из интервала  $(0,1)$ , где  $p$  и  $q$  – натуральные числа, такие, что  $q-p=1$ . Тогда система корневых функций задач (3), (4) и (5), (6) образует базис Рисса в  $L_2(0,1)$ .

**Теорема 2.** Если существует решение задачи 1, то оно единственно.

**Теорема 3.** Пусть функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  удовлетворяют условиям

$\varphi(x), \psi(x) \in C^3[0,1]$ ,  $\varphi^{IV}(x), \psi^{IV}(x) \in L_2(0,1)$ ,  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi''(0) = 0$ ,  
 $\psi(0) = 0$ ,  $\psi''(0) = 0$ ,  $\varphi'(1) = \varphi'(x_0)$ ,  $\varphi'''(1) = \varphi'''(x_0)$ ,  $\psi'(1) = \psi'(x_0)$ ,  $\psi'''(1) = \psi'''(x_0)$   
Тогда решение задачи 1 существует.

Пусть  $\Omega = \{(x,t) : -1 < x < 1, -a < t < b\}$ ,  $a, b \in R^+$  – прямоугольная область в плоскости,  $\Omega_1 = \Omega \cap (t > 0)$ ,  $\Omega_2 = \Omega \cap (t < 0)$ . В параграфе 1.3 для уравнения

$$0 = \begin{cases} {}_C D_{0t}^\alpha u(x,t) - u_{xx}(x,t), & t > 0, \\ u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t), & t < 0 \end{cases} \quad (7)$$

в области  $\Omega$  поставлена и исследована следующая нелокальная задача, где  ${}_C D_{0t}^\alpha$ ,  $(0 < \alpha < 1)$  – дробная производная в смысле Капуто, определенная по формуле (2).

**Задача 2.** Требуется найти функцию  $u(x,t)$ , такую, что:

1)  $u, u_x \in C(\bar{\Omega}_1)$ ,  ${}_C D_{0+}^\alpha u, u_{xx} \in C(\Omega_1)$ ,  $u \in C^1(\bar{\Omega}_2) \cap C_{x,t}^{2,2}(\Omega_2)$ ;

2) в области  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  удовлетворяет уравнению (7);

3) удовлетворяет нелокальным условиям

$u(0,t) = 0$ ,  $u_x(1,t) = u_x(x_0,t)$ ,  $-a \leq t \leq b$ ,  $u(x,-a) = h \cdot u(x,b) + \varphi(x)$ ,  $0 \leq x \leq 1$   
и условию склеивания

$$u(x,+0) = u(x,-0), \lim_{t \rightarrow +0} {}_C D_{0t}^\alpha u(x,t) = \lim_{t \rightarrow -0} u_t(x,t), \quad (8)$$

где  $\varphi(x)$  – заданная функция,  $h \in R$ ,  $x_0 = p/q \in (0,1)$ .

В этом параграфе доказываются следующие леммы и теоремы:

**Теорема 4.** Пусть имеют место неравенства

$$\Delta_{in} = \cos \sqrt{\lambda_{in}} a + \sqrt{\lambda_{in}} \sin \sqrt{\lambda_{in}} a - h E_\alpha(-\lambda_{in} b^\alpha) \neq 0, \quad i=1,2, \quad \Delta_0 = 1-h \neq 0, \quad (9)$$

где  $\lambda_{1n} = (2nq\pi / (p+q))^2$ ,  $\lambda_{2n} = (2nq\pi)^2$ ,  $n, k \in N$ ,  $n \neq k(q+p)$ . Тогда, если решение задачи 2 существует, то оно единственно.

**Лемма 2.** Пусть  $h \in R, h \neq 1, c, d \in N, \text{НОД}(c, d) = 1, a = c(q + p) / 2d$ . Тогда при больших значениях  $n$  существует положительная постоянная  $C_0$ , такая, что справедлива оценка

$$|\Delta_{in}| \geq C_0 > 0, i = 1, 2. \quad (10)$$

**Теорема 5.** Пусть  $\varphi(x) \in C^5[0, 1], \varphi^{VI}(x) \in L_2(0, 1)$ , функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет условиям

$\varphi(0) = 0, \varphi''(0) = 0, \varphi^{IV}(0) = 0, \varphi'(1) = \varphi'(x_0), \varphi'''(1) = \varphi'''(x_0), \varphi^V(1) = \varphi^V(x_0)$ , а также выполнены условия (9) и (10). Тогда решение задачи 2 существует.

Вторая глава диссертации, названная “Задачи для уравнений смешанного типа высокого порядка, содержащих дробные операторы Капуто и Хилфера”, состоит из трех параграфов и посвящена постановке и исследованию прямых и обратных задач для смешанных уравнений высокого порядка с производными Капуто и Хилфера в области, определенной в параграфе 1.3.

**В параграфе 2.1** для уравнения смешанного типа дробного порядка вида

$$0 = \begin{cases} u_{xxxx}(x, t) + D^{\alpha, \gamma} u(x, t), t > 0, \\ u_{xxxx}(x, t) + u_t(x, t), t < 0 \end{cases} \quad (11)$$

поставлена и исследована следующая нелокальная задача, где  $D^{\alpha, \gamma}$  – интегро-дифференциальный оператор Хилфера дробного порядка, который определяется по формуле:

$$D_{at}^{\alpha, \gamma} \tau(t) = I_{at}^{\gamma(1-\alpha)} (I_{at}^{(1-\gamma)(1-\alpha)} \tau(t))', \quad 0 < \alpha \leq \gamma \leq 1. \quad (12)$$

**Задача 3.** Требуется найти функцию  $u(x, t)$ , такую, что:

- 1)  $t^{1-\gamma} u \in C_{x,t}^{3,0}(\bar{\Omega}_1), t^{1-\gamma} D^{\alpha, \gamma} u \in C(\bar{\Omega}_1), u_{xxxx} \in C(\Omega_1), u \in C_{x,t}^{3,1}(\bar{\Omega}_2) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega_2)$ ;
- 2) в области  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  удовлетворяет уравнению (11);
- 3) удовлетворяет граничным условиям  $u(0, t) = 0, u(1, t) = 0, u_{xx}(0, t) = 0, u_{xx}(1, t) = 0, t \in [-a, 0] \cup (0, b], u_t(x, -a) = D^{\alpha, \gamma} u(x, b) + \varphi(x), 0 \leq x \leq 1$  и условию склеивания

$$\lim_{t \rightarrow +0} I_{0t}^{1-\gamma} u(x, t) = \lim_{t \rightarrow -0} u(x, t), \quad \lim_{t \rightarrow +0} I_{0t}^{1-\alpha} (I_{0t}^{1-\gamma} u(x, t))'_t = \lim_{t \rightarrow -0} u_t(x, t), \quad (13)$$

где  $\varphi(x)$  – заданная функция.

В этом параграфе доказываются следующие леммы и теоремы:

**Лемма 3.** Пусть  $f(t)$  непрерывная функция на отрезке  $[0, \ell]$ . Тогда решение задачи

$$\begin{cases} D^{\alpha, \gamma} u(t) = \lambda u(t) + f(t), t \in (0, \ell), \\ \lim_{t \rightarrow +0} (I_{0t}^{n-\gamma} u(t))^{(k)} = u_k, k = 0, 1, \dots, n-1 \end{cases}$$

существует, единственно,  $t^{1-\gamma} D^{\alpha, \gamma} u(t) \in C[0, \ell]$  и имеет вид

$$u(t) = \sum_{k=0}^{n-1} u_k t^{\gamma+k-n} E_{\alpha, \gamma+k+1-n}(\lambda t^\alpha) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda(t-\tau)^\alpha) f(\tau) d\tau,$$

$u_k$  - заданные числа.

**Теорема 6.** Если выполнено условие

$$\Delta_n(a,b) = \sin \lambda_n^2 a - \lambda_n^2 \cos \lambda_n^2 a + \lambda_n^2 b^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_n^4 b^\alpha) \neq 0, \quad \lambda_n = \pi n, n \in N. \quad (14)$$

и решение задачи 3 существует, то оно единственно.

**Лемма 4.** Пусть  $a = p / (q\pi)$ ,  $p, q \in N$ ,  $\text{НОД}(p, q) = 1$ ,  $q$  – нечетное число. Тогда для произвольного фиксированного числа  $b > 0$  и достаточно большого  $n$  существует положительная постоянная  $B_0$ , такая, что справедлива оценка

$$|\Delta_n(a,b)| \geq B_0 n^2 > 0. \quad (15)$$

**Лемма 5.** Пусть выполнены условия (14) и (15). Тогда для всех  $n \in N$ , имеет место  $t^{1-\gamma} |u_n^+(t)| \leq B_1 |\varphi_n| / n^4$ ,  $t^{1-\gamma} |D^{\alpha,\gamma} u_n^+(t)| \leq B_2 |\varphi_n|$ ,  $t \in [0, b]$ ,

$$|u_n^-(t)| \leq B_3 |\varphi_n| / n^2, \quad |(u_n^-(t))'| \leq B_4 |\varphi_n|, \quad (u_n^-(t))'' \leq B_5 n^2 |\varphi_n|, \quad t \in [-a, 0],$$

где  $B_k, k = \overline{1,5}$  – положительные постоянные.

**Теорема 7.** Пусть  $\varphi(x) \in C^2[0,1]$ ,  $\varphi^{(3)}(x) \in L_2(0,1)$ ,  $\varphi^{(2k)}(0) = 0$ ,  $\varphi^{(2k)}(1) = 0$ ,  $k = \overline{0,1}$  и для всех  $n > n_0$  имеет место неравенство (15). Тогда:

1) если при  $n = 1, 2, \dots, n_0$  выполняется условие  $\Delta_n(a,b) \neq 0$ , тогда задача в области  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  имеет единственное решение и оно определяется рядом

$$u(x,t) = \begin{cases} \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n^+(t) \sin \lambda_n x, & (x,t) \in \Omega_1, \\ \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} u_n^-(t) \sin \lambda_n x, & (x,t) \in \Omega_2, \end{cases} \quad u_n^\pm(t) = \begin{cases} \frac{\varphi_n}{\lambda_n^2 \Delta_n(a,b)} t^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_n^4 t^\alpha), & t > 0, \\ \frac{\varphi_n}{\Delta_n(a,b)} \left( \frac{\cos \lambda_n^2 t}{\lambda_n^2} - \sin \lambda_n^2 t \right), & t \leq 0. \end{cases}$$

2) если для некоторых  $n = k_1, \dots, k_s$  выполняется условие  $\Delta_n(a,b) = 0$ , то задача 3 разрешима только тогда, когда выполняются условия ортогональности  $\varphi_n = (\varphi(x), \sqrt{2} \sin \lambda_n x)_{L_2(0,1)} = 0$ ,  $n = k_1, \dots, k_s$ . При этом решение определяется в виде ряда

$$u(x,t) = \sqrt{2} \left( \sum_{n=1}^{k_1-1} + \sum_{n=k_1}^{k_2-1} + \dots + \sum_{n=k_s+1}^{\infty} \right) u_n^\pm(t) \sin \lambda_n x + \sum_m C_m V_m^\pm(x,t),$$

$$V_m^\pm(x,t) = \begin{cases} t^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_m^4 t^\alpha) \sin \lambda_m x, \\ (\cos \lambda_m^2 t - \lambda_m^2 \sin \lambda_m^2 t) \sin \lambda_m x, \end{cases}$$

где  $m = k_1, \dots, k_s$ ,  $C_m$  – произвольные постоянные.

**Теорема 8.** Пусть выполнены условия теоремы 7. Тогда для решения задачи 3 имеют место оценки  $\|u(x,t)\|_{C(\overline{\Omega})} \leq C_1 \|\varphi(x)\|_{C[0,1]}$ ,  $\|u(x,t)\|_{L_2(\Omega)} \leq C_2 \|\varphi(x)\|_{L_2(0,1)}$ , где  $C_1, C_2$  – положительные постоянные.

**В параграфе 2.2** в области  $\Omega$  для уравнения смешанного типа дробного порядка вида

$$f(x) = \begin{cases} u_{xxxx}(x,t) + {}_c D_{0t}^\alpha u(x,t) + d^2 u(x,t), & t > 0, \\ u_{xxxx}(x,t) + u_{tt}(x,t) + d^2 u(x,t), & t < 0, \end{cases} \quad (16)$$

поставлена и исследована следующая нелокальная задача, где  $d$  – положительная постоянная,  ${}_c D_{0t}^\alpha$ , ( $0 < \alpha < 1$ ) – дробная производная в смысле Капуто, определенная по формуле (2).

**Задача 4.** Требуется найти пару функций  $(u(x,t), f(x))$ , обладающих следующими свойствами:

- 1)  $u \in C_{x,t}^{3,\alpha}(\overline{\Omega_1}) \cap C_x^4(\Omega_1) \cap C_{x,t}^{3,1}(\overline{\Omega_2}) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega_2)$ ,  $f(x) \in C[0,1]$ ;
- 2) функции  $u(x,t)$  и  $f(x)$  удовлетворяют уравнению (16) в области  $\Omega_1 \cup \Omega_2$ ;
- 3) функция  $u(x,t)$  удовлетворяет граничным условиям

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u_{xx}(0,t) = 0, \quad u_{xx}(1,t) = 0, \quad -a \leq t \leq b,$$

$$u(x,-a) = \varphi(x), \quad u_t(x,-a) = {}_c D_{0t}^\alpha u(x,b) + \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

и условию склеивания (8), где  $\varphi(x)$  и  $\psi(x)$  – заданные функции,  $u \in C_t^\alpha(\Omega_1) \Leftrightarrow {}_c D_{0t}^\alpha u \in C(\Omega_1)$ .

В этом параграфе доказываются следующие леммы и теоремы:

**Теорема 9.** Если выполнено условие

$$\Delta_n(a,b) = (\sin \lambda_n^2 a) / \lambda_n^2 - \cos \lambda_n^2 a + E_\alpha(-\lambda_n^4 b^\alpha) \neq 0, \quad \lambda_n^4 = d^2 + (\pi n)^4, \quad n = 1, 2, \dots \quad (17)$$

и решение задачи 4 существует, то оно единственно.

**Лемма 6.** Пусть выполнены условия леммы 4. Тогда для произвольного фиксированного числа  $b > 0$  и достаточно большого  $n$  существует положительная постоянная  $B_0$ , такая, что справедлива оценка

$$|\Delta_n(a,b)| \geq B_0 > 0. \quad (18)$$

**Лемма 7.** Пусть выполнены условия (17) и (18). Тогда для всех  $n \in \mathbb{N}$ , имеет место

$$\begin{aligned} |u_n(t)| &\leq B_1 |\psi_n| / n^2 + |\varphi_n|, \quad |{}_c D_{0t}^\alpha u_n(t)| \leq B_2 |\psi_n|, \quad t \in [0, b], \\ |u_n(t)| &\leq B_3 (|\varphi_n| + |\psi_n| / n^2), \quad |u_n'(t)| \leq B_4 |\psi_n|, \quad u_n''(t) \leq B_5 n^2 |\varphi_n|, \quad t \in [-a, 0], \\ |f_n| &\leq B_6 (n^4 |\varphi_n| + n^2 |\psi_n|), \quad t \in [-a, b], \end{aligned}$$

где  $B_k, k = \overline{1,6}$  – положительные постоянные.

**Теорема 10.** Пусть функции  $\varphi(x)$ ,  $\psi(x)$  удовлетворяют условиям

$$\varphi^{IV}(x), \psi''(x) \in C[0,1], \quad \varphi^V(x), \psi'''(x) \in L_2(0,1),$$

$$\varphi^{(2n)}(0) = 0, \quad \varphi^{(2n)}(1) = 0, \quad \psi^{(2\ell)}(0) = 0, \quad \psi^{(2\ell)}(1) = 0, \quad n = \overline{0,2}, \ell = \overline{0,1}$$

и выполнены условия (17) и (18). Тогда существует единственное решение задачи 4 и оно определяется рядами

$$u(x,t) = \begin{cases} \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{\psi_n}{\lambda_n^4 \Delta_n(a,b)} (E_{\alpha}(-\lambda_n^4 t^{\alpha}) - \cos \lambda_n^2 a - \lambda_n^2 \sin \lambda_n^2 a) + \varphi_n \right] \sin \pi n x, & t > 0, \\ \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi_n [(\cos \lambda_n^2 t - \lambda_n^2 \sin \lambda_n^2 t - \cos \lambda_n^2 a - \lambda_n^2 \sin \lambda_n^2 a) + \varphi_n] \sin \pi n x}{\lambda_n^4 \Delta_n(a,b)}, & t < 0, \end{cases}$$

$$f(x) = \sqrt{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n \lambda_n^4 \Delta_n(a,b) - \psi_n (\cos \lambda_n^2 a + \lambda_n^2 \sin \lambda_n^2 a)}{\Delta_n(a,b)} \sin \pi n x.$$

**Теорема 11.** Пусть выполнены условия теоремы 10. Тогда для решения задачи 4 имеют место оценки

$$\|u(x,t)\|_{L_2} \leq B_7 (\|\psi\|_{L_2} + \|\varphi\|_{L_2}), \quad \|u(x,t)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq B_8 (\|\psi\|_{W_2^0} + \|\varphi\|_{W_2^2}),$$

$$\|f(x)\|_{L_2} \leq B_8 (\|\psi\|_{W_2^2} + \|\varphi\|_{W_2^4}), \quad \|f(x)\|_{C[0,1]} \leq B_{10} (\|\psi\|_{W_2^3} + \|\varphi\|_{W_2^5}),$$

где  $B_i$ ,  $i = 7, 10$  – положительные постоянные.

В параграфе 2.3 в области  $\Omega$  для смешанного уравнения третьего порядка с дробной производной Капуто вида

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} (Lu) = \frac{\partial}{\partial x} \begin{cases} u_{xx}(x,y) - {}_c D_{0,y}^{\alpha} u(x,y), & x > 0, \\ u_{xx}(x,y) - u_{yy}(x,y), & x < 0 \end{cases} \quad (19)$$

исследована краевая задача. Здесь  $\Omega$  – односвязная область плоскости независимых переменных  $x, y$ , ограниченная отрезками  $AB, BB_0, B_0A_0$  прямых  $y=0, x=1, y=1$  соответственно и характеристиками  $AC: x+y=0$  и  $A_0C: x-y=1$  уравнения (19), выходящими из точек  $A(0,0), A_0(0,1)$ ,  ${}_c D_{0,y}^{\alpha}$ ,  $0 < \alpha < 1$  – дробная производная в смысле Капуто, определенная по формуле (2).

**Задача 5.** Требуется определить функцию  $u(x,y)$ , непрерывную в замкнутой области  $\bar{\Omega}$ , которая:

- 1) является регулярным решением уравнения (19) в области  $\Omega$  при  $x \neq 0$ .
- 2) функция  $u(x,y)$  удовлетворяет граничным условиям

$$u|_{y=0} = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad u|_{x=1} = f(y), \quad 0 \leq y \leq 1,$$

$$u|_{A_0C} = \psi_1(y), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{A_0C} = \psi_2(y), \quad \frac{1}{2} \leq y \leq 1, \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{AC} = \psi_3(y), \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{2},$$

где  $\varphi(x), f(y), \psi_1(y), \psi_2(y), \psi_3(y)$  заданные функции.

В этом параграфе доказываются следующие леммы и теоремы:

**Теорема 12.** Пусть функции  $\varphi(x), f(y), \psi_1(y), \psi_2(y)$  и  $\psi_3(y)$  удовлетворяют следующим условиям

$$\varphi(x) \in C^1[0,1], \quad f(y) \in C^1[0,1], \quad \psi_1(y) \in C^2[1/2,1], \quad \psi_2(y) \in C^1[1/2,1],$$

$$\psi_3(y) \in C^1[0,1/2], \quad \varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = f(0) = 0, \quad \psi_2' = -\psi_3'(1/2).$$

Тогда регулярное решение задачи 5 существует и оно единственно.

При доказательстве этой теоремы используем свойства решения задачи Дирихле вида

$$\tau''(y) - {}_c D_{0y}^\alpha \tau(y) = f(y), \quad \tau(0) = 0, \quad \tau(1) = \psi_1(1), \quad (20)$$

где  $\tau(y) = u(0, y)$ , а  $f(y)$  - заданная непрерывная функция.

**Лемма 8.** Пусть функция  $\tau(t) \in C^1[0,1] \cap C^2(0,1)$  удовлетворяет однородному уравнению, соответствующему (20) на  $(0,1)$ . Тогда  $\tau(t)$  обязательно достигает своего положительного максимума или отрицательного минимума в точках границы отрезка  $[0,1]$ , т.е. при  $t=0$  или  $t=1$ .

**Лемма 9.** Задача Дирихле (20) не может иметь более одного решения.

Третья глава диссертации, названная “**Задачи для нелокальных уравнений смешанного типа четвертого порядка**”, состоит из трех параграфов и посвящена постановке и исследованию прямых и обратных задач для смешанных уравнений четвертого порядка с дробными производными Капуто и Хилфера с инволюцией в области  $\Omega = \{(x,t) : -1 < x < 1, -a < t < b\}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}^+$ .

Пусть  $\Omega_1 = \Omega \cap (t > 0)$ ,  $\Omega_2 = \Omega \cap (t < 0)$ ,  $\varepsilon \in \mathbb{R}$ . В параграфе 3.1 для нелокального уравнения смешанного типа вида

$$0 = \begin{cases} D^{\alpha,\gamma} u(x,t) + u_{xxxx}(x,t) - \varepsilon u_{xxxx}(-x,t) + d^2 u(x,t), t > 0, \\ u_{tt}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) - \varepsilon u_{xxxx}(-x,t) + d^2 u(x,t), t < 0 \end{cases} \quad (21)$$

в области  $\Omega$  поставлена и исследована следующая нелокальная задача, где  $\varepsilon, d$  – заданные действительные числа,  $D^{\alpha,\gamma}$ ,  $(0 < \alpha \leq \gamma \leq 1)$  – дробный оператор Хилфера, определяемый формулой (12).

**Задача 6.** Требуется найти функцию  $u(x,t)$ , такую, что:

- 1)  $t^{1-\gamma} u \in C_{x,t}^{3,0}(\bar{\Omega}_1)$ ,  $t^{1-\gamma} D^{\alpha,\gamma} u \in C(\bar{\Omega}_1)$ ,  $u_{xxxx} \in C(\Omega_1)$ ,  $u \in C_{x,t}^{3,1}(\bar{\Omega}_2) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega_2)$ ;
- 2) в области  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  удовлетворяет уравнению (21);
- 3) удовлетворяет граничным условиям

$$u(-1,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \quad u_{xx}(-1,t) = 0, \quad u_{xx}(1,t) = 0, \quad t \in [-a, 0] \cup (0, b], \quad (22)$$

$$u_i(x, -a) = D^{\alpha,\gamma} u(x, b) + \psi(x), \quad -1 \leq x \leq 1$$

и условию склеивания (13), где  $\psi(x)$  – заданная функция.

Рассмотрим следующие спектральные задачи:

$$X^{(IV)}(x) - \varepsilon X^{(IV)}(-x) + \lambda X(x) = 0, \quad X(-1) = 0, \quad X(1) = 0, \quad X''(-1) = 0, \quad X''(1) = 0, \quad (23)$$

$$Y_i^{IV}(x) + \mu_i Y_i(x) = 0, \quad Y_i(\pm 1) = 0, \quad Y_i''(\pm 1) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \mu_{1,2} = \tilde{\lambda} / (1 \pm \varepsilon), \quad \varepsilon \neq \pm 1, \quad (24)$$

где  $\lambda$  – спектральный параметр,  $Y_{ik}(x) = X_{ik}(x) \pm X_{ik}(-x)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

В этом параграфе доказываются следующие леммы и теоремы:

**Лемма 10.** Пусть  $Y_{ik}(x), i=1,2, k=1,2,\dots$  – собственные функции, а  $\mu_{ik}$  соответствующие собственным значениям задачи (24). Тогда система функций

$$X_{1k}(x) = Y_{1k}(x) + Y_{1k}(-x), X_{2k}(x) = Y_{2k}(x) - Y_{2k}(-x), k=1,2,\dots \quad (25)$$

является собственными функциями задачи (23), соответствующими собственным значениям  $\tilde{\lambda}_{1k} = (1 + \varepsilon)\mu_{1k}, \tilde{\lambda}_{2k} = (1 - \varepsilon)\mu_{2k}$ , где  $\varepsilon \neq \pm 1$ .

**Теорема 13.** Пусть  $\varepsilon \in R, \varepsilon \neq \pm 1, Y_{ik}(x), i=1,2, k=1,2,\dots$  – полная система собственных функций, а  $\mu_{ik}, k=1,2,\dots$  соответствующие собственные значения задачи (24). Тогда система функций (25) является полной в  $L_2(-1,1)$ .

**Теорема 14.** Пусть имеет место неравенство

$$\Delta_{ik} = (\sin \sqrt{\lambda_{ik}} a) / \sqrt{\lambda_{ik}} - \cos \sqrt{\lambda_{ik}} a + b^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{ik} b^\alpha) \neq 0, i=1,2, k=1,2,\dots \quad (26)$$

Тогда, если решение задачи б существует, то оно единственно, где  $\lambda_{1k} = (1 + \varepsilon)k^4 \pi^4 + d^2, \lambda_{2k} = (1 - \varepsilon)(k - 0,5)^4 \pi^4 + d^2$ .

**Лемма 11.** Пусть  $b$  – произвольное положительное действительное число, а – положительное действительное число, такое, что  $\sqrt{1 \pm \varepsilon} \cdot a \cdot \pi$  – рациональное. Тогда при больших значениях  $k$  существует положительная постоянная  $M_i, i=1,2$ , такая, что справедлива оценка

$$|\Delta_{ik}| \geq M_i > 0. \quad (27)$$

**Лемма 12.** Пусть выполнены условия (26) и (27). Тогда имеют место неравенства:

$$\begin{aligned} t^{1-\gamma} |u_{1k}(t)| &\leq C_1 k^{-2} |\psi_{1k}|, t^{1-\gamma} |u_{2k}(t)| \leq C_2 (k - 0,5)^2 |\psi_{2k}|, t \in [0, b], \\ |u_{1k}(t)| &\leq N_1 k^{-2} |\psi_{1k}|, |u_{2k}(t)| \leq N_2 (k - 0,5)^{-2} |\psi_{2k}|, t \in [-a, 0], \\ t^{1-\gamma} |D^{\alpha,\gamma} u_{1k}(t)| &\leq D_1 |\psi_{1k}|, t^{1-\gamma} |D^{\alpha,\gamma} u_{2k}(t)| \leq D_2 |\psi_{2k}|, t \in [0, b], \\ \left| \frac{d^s u_{1k}(t)}{dt^s} \right| &\leq L_s k^{2s-2} |\psi_{1k}|, \left| \frac{d^s u_{2k}(t)}{dt^s} \right| \leq P_s (k - 0,5)^{2s-2} |\psi_{2k}|, t \in [-a, 0], \end{aligned}$$

где  $C_s, D_s, L_s, N_s, P_s, s=1,2$  – положительные постоянные.

**Теорема 15.** Если  $\psi(x) \in C^2[-1,1], \psi'''(x) \in L_2(-1,1), \psi^{(l)}(-1) = 0, \psi^{(l)}(1) = 0, l=0,2$  и выполнены условия (26) и (27), то существует единственное решение задачи б, и оно определяется в виде ряда

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{k=1}^{\infty} (u_{1k}(t) \sin(k\pi x) + u_{2k}(t) \cos(k - 0,5)\pi x), \\ u_{ik}(t) &= \frac{\psi_{ik}}{\lambda_{ik} \Delta_{ik}} \begin{cases} t^{\gamma-1} E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_{ik} t^\alpha), t > 0, \\ \left( \cos \sqrt{\lambda_{ik}} t - \sqrt{\lambda_{ik}} \sin \sqrt{\lambda_{ik}} t \right), t < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

**Теорема 16.** Пусть выполнены условия теоремы 15. Тогда решение задачи б удовлетворяет оценкам

$$\|u(x,t)\|_{L_2} \leq B_1 \|\psi\|_{L_2}, \quad \|u(x,t)\|_{C(\bar{\Omega})} \leq B_2 \|\psi\|_{W_2^0},$$

где  $B_i, i = \overline{1,2}$  – положительные постоянные.

В параграфе 3.2 в области  $\Omega$  исследована следующая нелокальная и обратная задача:

**Задача 7.** Требуется найти пару функций  $(u(x,t), f(x))$ , обладающих следующими свойствами:

1)  $t^{1-\gamma}u \in C_{x,t}^{3,0}(\bar{\Omega}_1)$ ,  $t^{1-\gamma}D^{\alpha,\gamma}u \in C(\bar{\Omega}_1)$ ,  $u_{xxxx} \in C(\Omega_1)$ ,  $u \in C_{x,t}^{3,1}(\bar{\Omega}_2) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega_2)$ ,  $f(x) \in C[-1,1]$ ;

2) функции  $u(x,t), f(x)$  в  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  удовлетворяют уравнению

$$f(x) = \begin{cases} D^{\alpha,\gamma}u(x,t) + u_{xxxx}(x,t) - \varepsilon u_{xxxx}(-x,t) + d^2u(x,t), t > 0, \\ u_{tt}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) - \varepsilon u_{xxxx}(-x,t) + d^2u(x,t), t < 0; \end{cases} \quad (28)$$

3) функция  $u(x,t)$  удовлетворяет условиям (13), (22) и

$$u(x,-a) = \varphi(x), \quad u_t(x,-a) = D^{\alpha,\gamma}u(x,b) + \psi(x), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

где  $\varphi(x), \psi(x)$  – заданные функции,  $\varepsilon, d$  – заданные действительные числа,  $D^{\alpha,\gamma}$ ,  $(0 < \alpha \leq \gamma \leq 1)$  – дробный оператор Хилфера, определяемый формулой (12).

В этом параграфе доказываются следующие леммы и теоремы:

**Теорема 17.** Пусть имеет место неравенство (26). Тогда, если решение задачи 7 существует, то оно единственно.

**Теорема 18.** Пусть функции  $\varphi(x), \psi(x)$  удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \varphi^{IV}(x), \psi''(x) &\in C[-1,1], \quad \varphi^V(x), \psi'''(x) \in L_2(-1,1), \\ \varphi^{(s)}(\pm 1) &= 0, \quad \psi^{(l)}(\pm 1) = 0, \quad s = 0, 2, 4, \quad l = 0, 2 \end{aligned} \quad (29)$$

и выполнены условия (26) и (27). Тогда существует единственное решение задачи 7.

**В параграфе 3.3** для нелокального уравнения смешанного типа вида

$$f(x) = \begin{cases} t^{-\beta} {}_C D_{0t}^{\alpha} u(x,t) + u_{xxxx}(x,t) - \varepsilon u_{xxxx}(-x,t) + d^2u(x,t), t > 0, \\ u_{tt}(x,t) + u_{xxxx}(x,t) - \varepsilon u_{xxxx}(-x,t) + d^2u(x,t), t < 0 \end{cases} \quad (30)$$

в области  $\Omega$ , определенной в параграфе 3.1, исследована обратная задача, где  $\beta > 0$ ,  $\varepsilon, d$  – заданные действительные числа,  ${}_C D_{0t}^{\alpha}$ ,  $(0 < \alpha < 1)$  – дробная производная в смысле Капуто, определенная по формуле (2).

**Задача 8.** Требуется найти пару функций  $(u(x,t), f(x))$ , обладающих следующими свойствами:

1)  $u \in C_{x,t}^{3,0}(\bar{\Omega}_1) \cap C_x^4(\Omega_1)$ ,  $t^{-\beta} {}_C D_{0t}^{\alpha} u \in C(\bar{\Omega}_1)$ ,  $u \in C_{x,t}^{3,1}(\bar{\Omega}_2) \cap C_{x,t}^{4,2}(\Omega_2)$ ,  $f(x) \in C[-1,1]$ ;

2) функции  $u(x,t)$  и  $f(x)$  в области  $\Omega_1 \cup \Omega_2$  удовлетворяют уравнению (30);

3) функция  $u(x,t)$  удовлетворяет граничным условиям  $u(\pm 1, t) = 0, u_{xx}(\pm 1, t) = 0$ ,

$-a \leq t \leq b$ ,  $u(x, -a) = \varphi(x)$ ,  $u_t(x, -a) = t^{-\beta} {}_C D_{0+}^\alpha u(x, b) + \psi(x)$ ,  $-1 \leq x \leq 1$  и условию склеивания  $\lim_{t \rightarrow +0} t^{-\beta} {}_C D_{0+}^\alpha u(x, t) = \lim_{t \rightarrow -0} u_t(x, t)$ , где  $\varphi(x), \psi(x)$  – заданные функции.

В этом параграфе доказываются следующие леммы и теоремы:

**Теорема 19.** Пусть имеет место неравенство

$$\Delta_{ik} = (\sin \sqrt{\lambda_{ik}} a) / \sqrt{\lambda_{ik}} - \cos \sqrt{\lambda_{ik}} a + E_{\alpha, 1+\beta/\alpha, \beta/\alpha}(-\lambda_{ik} b^{\alpha+\beta}) \neq 0, \quad i=1, 2, \quad k=1, 2, \dots \quad (31)$$

Тогда, если решение задачи  $\delta$  существует, то оно единственно, где

$$\lambda_{1k} = (1 + \varepsilon) k^4 \pi^4 + d^2, \quad \lambda_{2k} = (1 - \varepsilon) (k - 0,5)^4 \pi^4 + d^2, \quad k=1, 2, \dots, \quad a E_{\alpha, m, l}(z) -$$

известная функция Килбаса-Сайго, которая имеет вид

$$E_{\alpha, m, l}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k, \quad c_0 = 1, \quad c_k = \prod_{j=0}^{k-1} \frac{\Gamma[\alpha(jm+l)+1]}{\Gamma[\alpha(jm+l+1)+1]}, \quad \alpha, l \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad m \in \mathbb{R}.$$

**Лемма 13.** Пусть  $b$  – произвольное положительное действительное число,  $a$  – положительное действительное число, такое, что  $\sqrt{1 \pm \varepsilon} \cdot a \cdot \pi$  – рациональное. Тогда, при больших значениях  $k$  существует положительная постоянная  $M_i, i=1, 2$ , такая, что справедлива оценка

$$|\Delta_{ik}^*| \geq M_i > 0. \quad (32)$$

**Теорема 20.** Если выполнены условия (29), (31) и (32), то существует единственное решение задачи  $\delta$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена исследованию прямых и обратных задач для уравнений параболического и смешанного типа, содержащих дробные производные и основные результаты данного исследования заключаются в следующем:

показана однозначная разрешимость нелокальных прямых и обратных задач типа Бицадзе-Самарского для уравнения диффузии дробного порядка и смешанного уравнения, при этом рассмотренные задачи приводятся к исследованию спектральной задачи типа Бицадзе-Самарского для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка, найдены собственные значения и соответствующие корневые функции этой, а также сопряженной ей задачи, изучены свойства полноты и базисности системы корневых функций;

доказана однозначная разрешимость прямых и обратных нелокальных задач для нелокальных уравнений смешанного типа высокого порядка путем наложения определенных условий на границы области, также решена проблема “малых знаменателей”;

решена краевая задача для диффузионно-волнового уравнения дробной производной в смысле Капуто, в которой существование решения задачи доказывается с помощью методов функции Грина и теории интегральных уравнений, а единственность - с помощью принципа экстремума и Заремба-Жиро для операторов дробного порядка.

найжены условия однозначной разрешимости обратной задачи нахождения функции источника для вырождающегося уравнения смешанного типа четвертого порядка, с дробной производной Капуто и с инволюцией.

исследованы спектральные свойства краевой задачи для инволютивного обыкновенного дифференциального уравнения четвертого порядка, найдены собственные значения и соответствующие им собственные функции, показана полнота и базисность найденных собственных функций.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES**  
**PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 FERGANA STATE UNIVERSITY**  

---

**FERGANA STATE UNIVERSITY**

**JALILOV MUHAMMADALI ABDUMUTALIBOVICH**

**PROBLEMS FOR EQUATIONS OF PARABOLIC AND MIXED TYPES WITH  
FRACTIONAL DERIVATIVES**

**01.01.02 – Differential Equations and Mathematical Physics**

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD)  
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

**Fergana – 2024**

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number №B 2023.4.PhD/FM947.

Dissertation has been prepared at Fergana State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website ([www.fdu.uz](http://www.fdu.uz)) and the “ZiyoNet” information and educational portal ([www.ziynet.uz](http://www.ziynet.uz)).

**Scientific supervisors:** **Kadirkulov Bakhtiyar Jalilovich**  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Dotsent

**Official opponents:** **Khasanov Anvardjan**  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

**Safarov Jurabek Shakarovich**  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences

**Leading organization:** **Bukhara State University**

Defense will take place « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2024 at \_\_\_\_ at the meeting of Scientific Council number PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 at Fergana State University. (Address: Murabbiylar str. 19, Fergana, Uzbekistan, 150100, Phone: (+99873)244-44-02, fax: (+99873)244-44-93, e-mail: [fardu\\_info@umail.uz](mailto:fardu_info@umail.uz)).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Fergana State University (is registered № \_\_\_\_). (Address: Murabbiylar str. 19, Fergana, Uzbekistan, 150100, Phone: (+99873)244-44-94).

Abstract of dissertation sent out on « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2024 year.  
(Mailing report № \_\_\_\_\_ on « \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 2024 year).

**A.K.Urinov**  
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S.,  
Professor

**I.U.Khaydarov**  
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, C.Ph.M.S., Dotsent

**Y.P.Apakov**  
Deputy chairman of the Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S.,  
Professor

## INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

**The aim of the research** is to formulate and study direct and inverse problems for nonlocal partial differential equations, as well as to develop methods for studying these problems.

**The object of the research** is integro-differential operators of fractional order in the sense of Caputo, Hilfer, nonlocal partial differential equations.

**The scientific novelty of the research** lies in the following:

Using the Fourier method, theorems on the existence, uniqueness, and stability of solutions of the direct and inverse problems with nonlocal conditions for diffusion and mixed-type equations involving fractional derivatives have been proved;

using the methods of the theory of differential equations, the eigenvalues of the problem with Bitsadze-Samarsky condition and the corresponding kernel functions for the second-order ordinary differential equation were found, and their completeness and the formation of the Riess basis were based on the evaluation of the resolvent of the differential operator;

Using the Green's function method and the extremum principle, the existence and uniqueness of the solution to the boundary value problem for a third-order mixed-type equation containing a fractional derivative in the Caputo sense, where the line of change of type is not characteristic, are proved.

Using the completeness of eigenfunctions, the existence and uniqueness of the solution to boundary value problems for equations involving a fourth-order involution of mixed type, through the Fourier method, are proved.

**Implementation of research results.** Based on the results of the study of problems for equations of parabolic and mixed-type with fractional derivatives:

The results of the inverse Bitsadze-Samarskii type problem for a fractional-order parabolic equation were used in the fundamental project CFRG-23-02 for studying inverse boundary value problems for a fractional wave equation (reference from the National University of Science and Technology of the Sultanate of Oman dated April 23, 2024). The obtained results allowed presenting solutions to the problem in the form of absolutely and uniformly convergent series. Exact solutions to boundary value problems for fourth-order mixed differential equations with involution were used in the fundamental project AP 09259074 "Methods for constructing solutions of fractional order differential equations and issues of solvability of boundary and initial-boundary value problems" for studying inverse problems for nonlocal differential equations of mixed-type (reference № 04/465 dated April 25, 2024, from the International Kazakh-Turkish University named after H.A. Yassawi). As a result, it became possible to study inverse problems for nonlocal partial differential equations of mixed-type.

**E'lon qilingan ishlar ro'yxati**  
**Список опубликованных работ**  
**List of published works**  
**I bo'lim (I часть; part I)**

1. Jalilov M.A. The Samarskii-Ionkin type problem for the fourth order mixed-type equation with fractional differential operator // Бюллетень Института математики. 2019. № 2. – P. 33-42. (01.00.00; №17)

2. Кадиркулов Б.Ж., Жалилов М.А. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа четвертого порядка с оператором Хилфера // Бюллетень Института математики. 2020. № 1. –С. 59-67. (01.00.00; №17)

3. Jalilov M.A., Kayumova G.A. On a Boundary Value Problem for a Nonlocal Mixed-Type Equation with the Hilfer Operator // AIP Conference Proceedings 2365, 070010 2021. –pp. 1-9. (3. Journal IF: 0.189)

4. Jalilov M.A. On a Problem for a Nonlocal Mixed-Type Equation of Fractional Order with Degeneration // Lobachevskii journal of mathematics. 2021. Vol. 42. № 15. – P. 3652–3660. (3. Journal IF: 0.53)

5. Kadirkulov B.J., Jalilov M.A. On a nonlocal problem for a fourth-order mixed-type equation with the Hilfer operator // Bulletin of the Karaganda University. Mathematics series. № 4(104). 2021. –Pp. 89-102. (3. Journal IF: 0.35)

6. Кадиркулов Б.Ж., Жалилов М.А. Об одной обратной задаче для уравнения смешанного типа с оператором дробного порядка // Илмий ахборотнома. Aniq fanlar seriyasi – Научный вестник. – Самарканд. 2021. № 5. –pp. 13-22. (01.00.00; №2)

7. Кадиркулов Б.Ж., Жалилов М.А. Об одной обратной задаче для нелокального уравнения смешанного типа дробного порядка с оператором Хилфера // НамДУ илмий ахборотномаси – Научный Вестник НамГУ. – Наманган. 2022. № 8. –С. 14-21. (01.00.00; №14)

8. Кадиркулов Б.Ж., Жалилов М.А. Об одной обратной задаче для нелокального уравнения смешанного типа дробного порядка с вырождением // Бюллетень Института математики. 2022. Т. 5. № 5. –С.142-153. (01.00.00; №17)

9. Ashurov R.R., Kadirkulov B.J., Jalilov M.A. On an inverse problem of the Bitsadze-Samarskii type for a parabolic equation of fractional order // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. 2023. Vol. 29. Issue 3. Article number 70. –Pp. 1-21. (3. Journal IF: 0.9)

10. Kadirkulov B.J. Jalilov M.A. On a boundary value problem for a third-order equation of parabolic-hyperbolic type with a fractional order operator // Lobachevskii journal of mathematics. 2023. Vol. 44. Issue. 7. –pp. 2725-2737. (3. Journal IF: 0.53)

## II bo‘lim (II часть; part II)

11. Кадиркулов Б.Ж., Жалилов М.А. Об одной обратной задаче типа Самарского-Ионкина для уравнения смешанного типа четвёртого порядка // «Современные проблемы математики и информатики». Материалы республиканской научно-практической конференции. –Фергана. 2019. –С. 135-136.

12. Кадиркулов Б.Ж., Жалилов М.А. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа с оператором Хилфера // «Неклассические уравнения математической физики и их приложения». Узбекско - Российская научная конференция 24-26 октября. Ташкент-2019. -С. 116-117.

13. Жалилов М.А., Каюмова Г.А. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа четвёртого порядка с оператором Капуто // ФарДУ. Илмий хабарлар – Научный вестник. ФерГУ. – Фергана. 2020. № 1. – С. 18-23.

14. Жалилов М.А., Каюмова Г.А. Об одной краевой задаче для нелокального уравнения смешанного типа с оператором Хилфера // Abstracts of the Uzbekistan-Malaysia international online conference. “Computational models and technologies”. –Tashkent. Uzbekistan. 2020. –Pp. 229-230.

15. Жалилов М.А., Каюмова Г.А. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа четвёртого порядка с оператором Капутто // Тезисы докладов Международной научной конференции на тему «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики». –Фергана. Узбекистан. 2020. –С. 61-62.

16. Кадиркулов Б.Ж., Жалилов М.А. Об одной нелокальной задаче для смешанного уравнения четвертого порядка с дробными производными // Тезисы докладов Международной научной конференции на тему «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики». Фергана, 2020 год. -С. 86-87.

17. Кадиркулов Б.Ж., Жалилов М.А. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа с оператором Хилфера // Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Современные методы математической физики и их приложения». –Ташкент. 2020. –С. 383-384.

18. Кадиркулов Б.Ж., Жалилов М.А. Об одной нелокальной задаче для уравнения смешанного типа четвёртого порядка с оператором Капуто // Научный вестник. ФерГУ. – Фергана. 2021. № 1. –С. 19-24.

19. Кадиркулов Б.Ж., Жалилов М.А. Нелокальная задача для вырождающегося уравнения смешанного типа с дробной производной // Материалы Международной научной конференции «Современные проблемы математики и физики». –Стерлитамак. Россия. 2021. –С. 339-344.

20. Kadirkulov B.J., Jalilov M.A. An inverse problem for a nonlocal mixed-type fractional-order equation with the Hilfer operator // “Modern problems of

applied mathematics and information technologies al-Khwarizmi 2021” dedicated to the 100th anniversary of the academician Vasil Kabulovich. –Fergana. Uzbekistan. 2021. –pp. 129.

21. Кадиркулов Б.Ж., Жалилов М.А. Об одной обратной задаче для нелокального уравнения смешанного типа с дробной производной // Сборник материалов международной конференции «Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы». –Белгород. Россия. 2021. –С. 127-128.

22. Жалилов М.А., Каюмова Г.А. Об одной задаче для нелокального уравнения смешанного типа дробного порядка с вырождением // Сборник материалов международной конференции «Дифференциальные уравнения, математическое моделирование и вычислительные алгоритмы». –Белгород. Россия. 2021. –С. 107-108.

23. Кадиркулов Б.Ж., Жалилов М.А. Об одной задаче для нелокального уравнения смешанного типа дробной производной Хилфера // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых Дифференциальные уравнения и родственные проблемы анализа. Бухара. Узбекистан. 2021 год. С. 223-224.

24. Кадиркулов Б.Ж., Жалилов М.А. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа четвёртого порядка с дробной производной // Материалы VI Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». –Нальчик. Кабардино-Балкарская Республика. Россия. 2021. –С. 89.

25. Кадиркулов Б.Ж., Жалилов М.А. Об одной обратной задаче для дробного параболического уравнения с инволюцией // ФарДУ. Илмий хабарлар – Научный вестник. ФерГУ. – Фергана. 2022. № 3. –С. 15-20.

26. Кадиркулов Б.Ж., Жалилов М.А. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка параболо-гиперболического типа с дробной производной // XX Международная научная конференция по дифференциальным уравнениям «ЕРУГИНСКИЕ ЧТЕНИЯ-2022». Новополоцк. Белорусия. 31 мая – 3 июня 2022 г. –С. 12-13.

27. Кадиркулов Б.Ж., Жалилов М.А. Обратная задача определения функции источника для параболического уравнения второго порядка с оператором Капуто // Сборник материалов республиканской научно-практической конференции «Актуальные вопросы алгебры и анализа». 18-19 ноября 2022 г. –Термез. Узбекистан. 2022. –С. 117-118.

28. Кадиркулов Б.Ж., Жалилов М.А. Об одной задаче для дробного параболического уравнения четвёртого порядка с инволюцией // Тезисы докладов научной конференции «Новые теоремы молодых математиков – 2022». 13-14 мая 2022 г. –Наманган. Узбекистан. 2022. –С.159-160.

29. Кадиркулов Б.Ж., Жалилов М.А. Об одной обратной задаче для нелокального уравнения смешанного типа с дробной производной //Abstracts

Ministry of higher and secondary special education of the republic of Uzbekistan of the Uzbekistan-Malaysia international conference “Computational models and technologies”. September 16-17th, 2022 Tashkent. -p. 86-87.

30. Ашуров Р.Р., Кадиркулов Б.Ж., Жалилов М.А. Об одной обратной задаче типа Бицадзе-Самарского для вырождающегося параболического уравнения дробного порядка // Тезисы международной научно-практической конференции «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий». 2023. Нукус. Узбекистан. -С. 250-251.

31. Ashurov R.R., Kadirkulov B.J., Jalilov M.A. On a nonlocal problem for a mixed-type equation with a fractional order operator // Abstracts of the “VII World Congress of Turkic World Mathematicians”. (TWMS Congress-2023). 20-23 September. 2023. Turkestan. Kazakhstan. -pp. 106.

Avtoreferat Farg‘ona davlat universiteti «FarDU. Ilmiy xabarlar – Научный вестник. ФерГУ» ilmiy – metodik jurnal tahririyatida tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

FDU “Nusxa ko‘paytirish bo‘limi”da  
chop etildi. 2024-yil.

Nashriyot bosma tabog‘i – 3.

Shartli bosma tabog‘i – 1,5. Bichimi 84x108 1/16.

Adadi 100.

Manzil: 150100, Farg‘ona shahri, Murabbiylar ko‘chasi, 19-uy.



