

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI

MATEMATIK ANALIZ VA ALGEBRA KAFEDRASI

Nazarov Farrux Shuxratovichning
“5460100 – matematika” ta'lim yo'nalishi bo'yicha
bakalavr darajasini olish uchun

**CHIZIQLI OPERATORLARNING BA'ZI BIR
TATBIQLARI**

mavzusida yozgan

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar:

dots. M. Abulov

“Himoyaga tavsiya etilsin”

Fizika – matematika fakulteti

dekani: _____ prof. A.Q. Tashatov

“ _____ ” 2012 yil

Qarshi - 2012

M u n d a r i j a.

Kirish.....	4
I bob. Chiziqli fazo.....	6
1.1.Chiziqli fazo ta`rifi va xossalari.....	6
1.2.Chiziqli fazoning o`lchovi va izomorfligi.....	10
1.3.Chiziqli fazoni qism fazolarning yig`indisiga yoyish.....	12
1.4. Evklid fazosi va uning xossalari.....	16
II bob. Chiziqli operatorlar.....	20
2.1.Chiziqli operatorlar va ularning asosiy xossalari.....	20
2.2.Chiziqli operatorlarni matritsali yozuvi.....	24
2.3.Chiziqli operatorning xarakteristik ko`phadi.....	26
2.4.Evklid fazosida chiziqli va bir yarim chiziqli formalar.....	30
2.5. Evklid fazosidagi o`z-o`ziga qo`shma operatorlar.....	33
2.6. Kvadratik formani kvadratlar yig`indisiga keltirish.....	36
Xulosa.....	38
Foydalanilgan adabiyotlar ro`yxati.....	39

Bu murakkab dunyoning azaliy va abadiy muammolari, shu bilan birga, har bir davrning dolzarb masalalariga har tomonlama asosli ilmiy javoblar topilgan taqdirdagina ma'naviyat olami yangi ma'no-mazmun bilan boyib boradi. Boshqacha aytganda, har bir ilmiy yangilik, yaratilgan kashfiyot – bu yangi davr va dunyoqarashga turtki beradi, ma'naviyatning shakllanishiga o'ziga xos ta'sir o'tkazadi.

I. Karimov

Kirish.

Bitiruv malakaviy ishning dolzarbligi: Chiziqli algebra va funksional analiz fanlarining asosiy tushunchalaridan biri bu chiziqli operator tushunchasidir. Shu sababli ham chiziqli operatorlarni, ular aniqlangan chiziqli fazo va evklid fazolarini hamda bu fazolarda berilgan operatorlarni muhim xossalari va tatbiqlarini o'rganish juda muhim. Masalan, algebra fanidagi chiziqli almashtirishni, matematik fizika tenglamalari fanida differensiallashni operator sifatida qarash mumkin shuning uchun ham operator xossalarini o'rganish matematika fani nuqtayi nazaridan juda dolzarb masaladir.

Bitiruv malakaviy ishning maqsadi: Chiziqli algebra va funksional analiz fanlarining muhim bo'limlaridan biri bo'lgan chiziqli operatorlarni xossalarini va ba'zi bir tatbiqlarini o'rganishdan iborat.

Bitiruv malakaviy ishning vazifasi:

1. Chiziqli fazo tushunchasi va chiziqli fazoning xossalarini o'rganish.
2. Chiziqli operatorning xos qiymati va xos vektorini, uning xarakteristik ko'phadini o'rganish.
3. Evklid fazosida chiziqli va bir yarim chiziqli formalar va o'z-o'ziga qo'shma operatorlarni xossalari va tatbiqlarini o'rganish.

Bitiruv malakaviy ishning ilmiyligi va ilmiy ahamiyati: Bitiruv ishi mavzusida oid barcha muhim bo'lgan adabiyotlarni to'plash va ular asosida chiziqli fazo, evklid fazosi, chiziqli operator ta'rifi va xossalari hamda tatbiqlari bilan tanishib, ular qo'llaniladigan sohani yanada chuqurroq o'rganishdan iborat.

Ushbu bitiruv malakaviy ish ikkita bob va o'nta paragrafdan iborat.

Birinchi bob birinchi paragrafda chiziqli fazo ta'rifi va asosiy xossalari keltirilgan. Ikkinchi paragrafda esa chiziqli fazoning o'lchovi va izomorf chiziqli fazolar haqida asosiy tushunchalar yoritilgan. Uchinchi paragrafda chiziqli fazoni

qism fazolarga yoyish ko`rsatilgan. To`rtinchi paragrafda esa evklid fazosi ta`rifi va uning asosiy xossalari keltirilgan.

Ikkinchi bob birinchi paragrafda chiziqli operator ta`rifi va uning asosiy xossalari yoritilgan. Ikkinchi paragrafda esa chiziqli operatorlarni matritsali yozuvi ko`rsatib berilgan. Uchinchi paragrafda chiziqli operatorning xarakteristik ko`phadi, xos qiymati va xos vektori ta`riflari va xossalari ko`rsatilgan. To`rtinchi paragrafda evklid fazosida chiziqli va bir yarim chiziqli formalarni skalyar ko`paytma orqali ifodalanishi isbotlangan. Beshinchi paragrafda esa evklid fazosidagi o`z-o`ziga qo`shma operatorlar ta`rifi va xossalari yoritilgan. Olinchi ya`ni so`ngi paragrafda chiziqli operatorlar xossalaridan foydalanib kvadratik formani kvadratlar yig`indisiga yoyish ko`rsatilgan.

I bob. Chiziqli fazo.

1.1.Chiziqli fazo ta`rifi va asosiy xossalari.

Ta`rif.  $x, y, z, \dots$  ixtiyoriy tabiatli elementlarning  $R$  to`plamini chiziqli (yoki afin) fazosi deyiladi, agarda quyidagi uchta shart bajarilsa:

I. R to`plamning ixtiyoriy ikkita  $x$  va  $y$  elementlari uchun uchinchi bir  $z$  elementni mos qo`yish qoidasi, ya`ni  $x$  va  $y$  elementlarni yig`indisi aniqlangan va u $z = x + y$ deb belgilanadi.

II. R to`plamni ixtiyoriy  $x$  elementini ixtiyoriy haqiqiy  $\lambda$  songa ko`paytirish qoidqasi ya`ni  $x$  elementni  $\lambda$  songa ko`paytmasi aniqlangan va u $y = \lambda x$ yoki $y = x\lambda$ orqali belgilanadi.

III. Kiritilgan amallar quyidagi 8 ta aksiomaga bo`ysunadi:

1. $x + y = y + x$ (qo`shish kommutativ)
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$ (qo`shish assosiativ)
3. Shunday 0 element mavjudki, ixtiyoriy x element uchun $x + 0 = x$ bo`ladi.
4. Har bir x element uchun shunday qarama-qarshi x' element mavjudki, $x + x' = 0$ bo`ladi.
5. Har bir x element uchun
$$1 \cdot x = x;$$
6. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x;$
7. $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x;$
8. $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y.$

1-misol. Uch o`lchovli vazoda erkin vektorlar to`plamini qaraylik. Bizga ma`lum bo`lgan vektorlarni qo`shish va songa ko`paytirish amallarga nisbatan bu to`plam chiziqli fazo bo`ladi va uni B_3 orqali belgilanadi. Shunga o`xshash tekislikdagi va to`g`ri chiziqdagi erkin vektorlar to`plamlari mos ravishda B_2 va B_1 orqali belgilaymiz.

2-misol. $\{x\}$ – barcha musbat haqiqiy sonlar to'plami bo'lsin. Bu to'plamning x va y elementlari yig'indisini x va y haqiqiy sonlar ko'paytmasi kabi aniqlaylik. $\{x\}$ to'plamni x elementini λ haqiqiy songa ko'paytmasini x haqiqiy sonni λ darajaga ko'paytirish kabi aniqlaylik. $\{x\}$ to'plamni nol elementi bo'lib 1 soni xizmat qiladi, x elementga teskari element bo'lib $1/x$ soni xizmat qiladi. Oson ko'rish mumkinki, 1-8 aksiomalar bajariladi.

3-misol. Chiziqli fazoga muhim misol bo'lib, A^n – elementlari tartiblangan n ta haqiqiy sonlarning ushbu elementlaridan iborat bo'lgan to'plami xizmat qiladi.

A^n to'plam elementlari uchun qo'shish va songa ko'paytirish amallarini quyidagicha kiritamiz:

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n);$$

$$\lambda(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n).$$

Bu to'plamning nol elementi bo'lib $0 = (0, 0, \dots, 0)$ element xizmat qiladi.

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ elementga qarama –qarshi element bo'lib $(-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$ xizmat qiladi.

Ko'rish qiyin emaski 1-8 aksiomalar bajariladi.

4-misol. $a \leq t \leq b$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lgan $x = x(t)$ funksiyalarning $C[a, b]$ to'plamida qo'shish va songa ko'paytirish amallarini funksiyalarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari kabi aniqlasak, oson ko'rish mumkinki 1-8 aksiomalar bajariladi.

5-misol. $\{P_n(t)\}$ – darajasi n – dan yuqori bo'lmagan algebraik ko'phadlar to'plami, bizga ma'lum ko'phadlarni qo'shish va songa ko'paytirish kabi aniqlasak, u holda bu to'plam ham chiziqli fazoga misol bo'ladi.

Quyidagi to'plamlar chiziqli fazoga misol bo'la olmaydi:

a) Barcha n – darajali ko'phadlar to'plami (chunki ularning yig'indisi n – darajali ko'phad bo'lmasligi mumkin);

b) Koeffisientlari musbat boʻlgan va darajasi n dan katta boʻlmagan koʻphadlar toʻplami (bu toʻplam elementlarini manfiy haqiqiy songa koʻpaytirish mumkin emas).

Ixtiyoriy chiziqli fazo elementlarini vektorlar deb atash qabul qilingan. Koʻp hollarda “vektor” soʻzi tor maʼnoda boʻlib qoladi, chunki chiziqli fazo elementlari ixtiyoriy tabiatli boʻlishi mumkin.

Agar taʼrifdagi $\lambda, \mu, \dots$ sonlar haqiqiy sonlar boʻlsa, u holda bu fazo haqiqiy chiziqli fazo deyiladi. Agar taʼrifdagi $\lambda, \mu, \dots$ sonlar kompleks sonlar boʻlsa, u holda bunday fazo kompleks chiziqli fazo deyiladi.

Endi chiziqli fazolarning baʼzi bir xossalari keltirib oʻtamiz.

1-teorema. Har qanday chiziqli fazoda yagona nol element va har bir x elementi uchun yagona qarama-qarshi elementi mavjud.

2-teorema. Ixtiyoriy chiziqli fazoda

a) nol element ixtiyoriy x elementini nol haqiqiy songa koʻpaytirilganiga teng:

$$0 = 0 \cdot x.$$

b) Har qanday x element uchun qarama-qarshi element bu x elementni -1 haqiqiy songa koʻpaytirilganiga teng:

$$-x = -1 \cdot x$$

$x, y, z, \dots$ elementli R haqiqiy chiziqli fazoni qaraylik.

1-taʼrif. R fazoni $x, y, \dots, z$ elementlarining chiziqli kombinatsiyasi deb bu elementlarni haqiqiy sonlarga koʻpaytmalarining yigʻindisi

$$\alpha x + \beta y + \dots + \gamma z \tag{1}$$

ga aytiladi. Bunda $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ lar biror haqiqiy sonlar.

2-taʼrif. R fazoning $x, y, \dots, z$ elementlari chiziqli bogʻliq deyiladi, agarda shunday haqiqiy kamida bittasi noldan farqli boʻlgan $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ sonlar topilib ular uchun ushbu elementlarning chiziqli kombinatsiyasi fazoning nol elementiga teng boʻlsa, yaʼni

$$\alpha x + \beta y + \dots + \gamma z = 0$$

boʻlsa.

4-ta`rif.  $R$  fazoning chiziqli erkli  $e_1, e_2, \dots, e_n$  elementlari to`plami bu fazoning bazisi deyiladi, agar bu R fazoning har bir x elementi uchun shunday haqiqiy $x_1, x_2, \dots, x_n$ sonlar topiladiki, ular uchun

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n \quad (3)$$

bo`lsa.

Bu x elementni $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazis bo`yicha yoyilmasi deyiladi.  $x_1, x_2, \dots, x_n$  sonlar esa  $x$  elementni ( $e_1, e_2, \dots, e_n$  bazis bo`yicha) koordinatalari deyiladi.

4-teorema. R fazoning ikkita elementini qo`shish uchun (bu fazoning ixtiyoriy bazisida) ularni mos koordinatalari qo`shiladi, elementini λ songa ko`paytirish uchun uning barcha koordinatalari  $\lambda$  songa ko`paytiriladi.

1.2. Chiziqli fazoning o`lchovi va izomorfligi.

1-ta`rif.  $R$  chiziqli fazo  $n$  o`lchovli deyiladi, agarda unda n ta chiziqli erkli element mavjud, ixtiyoriy $n+1$ ta elementi esa chiziqli bog`liq bo`lsa.

R fazoning o`lchovi odatda $\dim R$ orqali belgilanadi.

2-ta`rif.  $R$  chiziqli fazo cheksiz o`lchovli deyiladi, agarda unga ixtiyoriy sondagi chiziqli erkli elementlar mavjud bo`lsa.

1-teorema. Agar R n o`lchovli chiziqli fazo bo`lsa, u holda bu fazoning ixtiyoriy n ta chiziqli erkli elementlari bazis tashkil etadi.

2-teorema. Agar R fazoda n ta elementdan iborat bazis mavjud bo`lsa, u holda  $R$  fazoning o`lchovi n ga teng.

3-ta`rif. Ikkita haqiqiy  $R$  va  $R'$  chiziqli fazolar izomorf deyiladi, agarda bu fazolar elementlari orasida o`zaro bir qiymatli shunday moslik o`rnatish mumkin bo`lsaki, agar R fazoning x va y elementlariga R' fazoning x' va y' elementlari mos kelsa, u holda R fazoning $x+y$ elementiga R' fazoning $x'+y'$, λx elementiga $\lambda x'$ element mos kelsa.

Ko`rish qiyin emaski, agar  $R$  va  $R'$  chiziqli fazolar izomorf bo`lsa, u holda

1) R fazoning nol elementiga R' fazoning nol elementi mos keladi;

2) ulardagi maksimal chiziqli erkli elementlar soni bir xil ya'ni ularning o'lchovi teng.

3-teorema. Ikkita n o'lchovli R va R' chiziqli fazolar izomorf bo'ladi.

Faraz qilaylik, R fazoning L qism to'plami quyidagi shartlarni bajarsin:

1. Agar x va y elementlar L qism to'plamga tegishli bo'lsa, u holda $x + y$ element ham shu qism to'plamga tegishli.

2. Agar x element L qism yotsa va λ biror haqiqiy son bo'lsa, u holda λx ham bu qism to'plamga tegishli.

Ko'rish qiyin emaski, 1 va 2 xossalar bajarilgan L qism to'plamni o'zi ham chiziqli fazo bo'ladi.

4-ta'rif. 1 va 2 shartlarni bajaruvchi R fazoning L qism to'plami R fazoning chiziqli qism fazosi deyiladi.

Misollar. 1. Faqat nol elementdan tashkil topgan R fazoning qism to'plami.

2. R fazoning o'zi.

Bu ikki qism fazo xosmas qism fazolar deyiladi.

3. $C[a, b]$ dagi $\{P_n(t)\}$ – darajasi n dan katta bo'lmagan algebraik ko'phadlarning to'plami, $C[a, b]$ ning qism fazosi bo'ladi.

4. B_3 dagi biror tekislikka parallel bo'lgan erkin vektorlarning B_2 qism to'plami.

5. $x, y, \dots, z$ elementlar R fazoning elementlari bo'lsin.

$x, y, \dots, z$ elementlarning chiziqli qobig'i deb, bu elementlarning barcha chiziqli kombinatsiyalari to'plamiga aytamiz, ya'ni

$$\alpha x + \beta y + \dots + \gamma z$$

ko'rinishdagi elementlar to'plamiga aytiladi. Bunda $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ lar ixtiyoriy sonlar.

$x, y, \dots, z$ elementlarning chiziqli qobig'ini $L(x, y, \dots, z)$ orqali belgilaymiz.

Ravshanki, $L(x, y, \dots, z)$ chiziqli qobiq uchun 1 va 2 shartlar bajariladi. Shu sababli ixtiyoriy chiziqli qobiq R fazoning qism fazosi bo'ladi.

$x, y, \dots, z$ elementlarning chiziqli qobig'i shu elementlarni o'z ichiga oluvchi eng kichik qism fazo bo'ladi.

Chiziqli qobiqqa misol bo'lib, $C[a,b]$ dagi $1, t, t^2, \dots, t^n$ elementlarning chiziqli qobig'i misol bo'ladi. Bu chiziqli qobiq $\{P_n(t)\}$ – darajasi n dan katta bo'lmagan algebraik ko'phadlarning to'plamidan iborat.

Ravshanki, R fazoning har qanday qism fazosining o'lchovi bu fazo o'lchovidan katta emas.

Agar L qism fazo butun n o'lchovli R chiziqli fazo bilan ustma-ust tushmasa, u holda L ning o'lchovi n dan kichik bo'ladi.

Ko'rish mumkinki, butun R fazoda $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazis tanlangan bo'lsa, u holda ularni L qism fazoning bazisi sifatida olish mumkin emas (ba'zi e_i lar L da yotmasligi ham mumkin), lekin teskari tasdiq o'rinli.

Tasdiq. Agar $e_1, e_2, \dots, e_k$ elementlar n o'lchovli fazoning k o'lchovli qism fazosida bazis tashkil etsa, u holda bu bazisni R ni $e_{k+1}, e_{k+2}, \dots, e_n$ elementlari orqali shunday to'ldirish mumkinki hosil bo'lgan $e_1, e_2, \dots, e_n$ elementlar to'plami R da bazis bo'ladi.

5-teorema. $x, y, \dots, z$ elementlarning $L(x, y, \dots, z)$ chiziqli qobig'i o'lchovi $x, y, \dots, z$ elementlar sistemasining maksimal chiziqli erkli soniga teng. Xususan agar elementlar $x, y, \dots, z$ elementlar chiziqli erkli bo'lsa, u holda $L(x, y, \dots, z)$ chiziqli qobiqning o'lchovi $x, y, \dots, z$ elementlar soniga teng.

Qism fazoning yig'indisi va kesishmasi.

L_1 va L_2 – R fazoning ikkita ixtiyoriy qism fazosi bo'lsin. R fazoning bir paytda L_1 va L_2 da yotuvchi x elementlari to'plami R fazoning qism fazosi bo'ladi va u L_1 va L_2 fazolarning ko'paytmasi deyiladi.

R fazoning barcha $y + z$ ko'rinishdagi elementlari to'plami, bunda y L_1 fazoning elementi z esa L_2 fazoning elementi R fazoning qism fazosi bo'ladi va u L_1 va L_2 fazolarning yig'indisi deyiladi.

Misol. R uch o'lchovli fazodagi barcha erkin vektorlarning chiziqli fazosi, L_1 Oxy tekislikka parallel bo'lgan barcha erkin vektorlarning qism fazosi, L_2 esa Oxz

tekislikka parallel bo'lgan barcha erkin vektorlarning qism fazosi bo'lsin. U holda L_1 va L_2 fazolarning yig'indisi R fazoning o'zidan, fazolarning kesishmasi esa Ox o'qiga parallel bo'lgan barcha erkin vektorlar to'plamidan iborat.

6-teorema. Chekli o'lchovli R chiziqli fazoning L_1 va L_2 qism fazolarining o'lchovlarining yig'indisi, ushbu qism fazolar kesishmasi va yig'indisini o'lchovlari yig'indisiga teng.

1.3. Chiziqli fazoni qism fazolarning to'g'ri yig'indisiga yoyish.

L_1 va L_2 n o'lchovli R fazoning qism fazolari bo'lsin.

1-ta'rif. R fazo L_1 va L_2 qism fazolarning to'g'ri yig'indisi orqali ifodalanadi deyiladi, agarda R fazoning har bir x elementi yagona usul bilan

$$x = x_1 + x_2$$

ko'rinishda ifodalansa. Bunda x_1 L_1 fazoning x_2 esa L_2 fazoning elementi.

Bu hol $R = L_1 \otimes L_2$ ko'rinishda belgilanadi. Oxirgi tenglik R fazoning L_1 va L_2 fazolarning to'g'ri yig'indisiga yoyilmasi deyiladi.

R uch o'lchovli erkin vektorlar fazosi, L_1 esa Oxy tekisligiga parallel bo'lgan barcha vektorlar fazosi L_2 esa Oz o'qiga parallel bo'lgan barcha vektorlar fazosi bo'lsa, u holda R L_1 va L_2 fazolarning to'g'ri yig'indisidan iborat bo'ladi.

Teorema. n o'lchovli R fazo L_1 va L_2 qism fazolarning to'g'ri yig'indisidan iborat bo'lishi uchun, ularning kesishmasi faqat nol elementdan va R ni o'lchovi L_1 va L_2 fazolar o'lchovlari yig'indisidan iborat bo'lishi etarli.

Endi n o'lchovli chiziqli fazoda bazis o'zgarganda koordinatalarni o'zgarishi va bazislarni almashtirishni qaraylik.

$e_1, e_2, \dots, e_n$ va $e_1^1, e_2^1, \dots, e_n^1$ lar n o'lchovli R chiziqli fazodagi 2 ta ixtiyoriy bazislar bo'lsin. R fazoning ixtiyoriy elementi har ikki bazis orqali ham ifodalanadi. Faraz qilaylik $e_1^1, e_2^1, \dots, e_n^1$ elementlar $e_1, e_2, \dots, e_n$ lar orqali quyidagicha ifodalansin:

(5)

Isboti. Faraz qilaylik, yana bir C matritsa mavjud va

$$AC = CA = E$$

bo`lsin. U holda

$$\begin{aligned}CAA^{-1} &= C(AA^{-1}) = CE = C \\CAA^{-1} &= (CA)A^{-1} = EA^{-1} = A^{-1}\end{aligned}$$

bundan $C = A^{-1}$ kelib chiqadi.

1.4. Evklid fazosi va uni sodda xossalari.

R haqiqiy chiziqli fazo haqiqiy evklid fazosi (yoki evklid fazosi) deyiladi
agarda quyidagi ikkita shart bajarilsa:

I. Ushbu fazoning ixtiyoriy ikkita x va y elementlariga ularni skalyar ko'paytmasi deb ataluvchi (x, y) haqiqiy sonni mos qo'yish qoidasi berilgan bo'lsa.

II. Ushbu aniqlangan skalyar ko'paytma quyidagi to'rtta aksiomani qanoatlantirsa:

1. $(x, y) = (y, x)$ (o`rin almashtirishlik va simmetriklik xossasi).
2. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$ (tarqatish xossasi).
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ barcha haqiqiy λ lar uchun.
4. $(x, x) > 0$, agarda x – noldan farqli element bo`lsa;  $(x, x) = 0$ , agar  $x$  – nol element bo`lsa.

Agar o`rganiladigan ob`ektlar va yoqorida sanalgan qoidalar berilgan bo`lsa, u holda evklid fazosi konkret (aniq) fazo deyiladi.

Evklid fazosiga misollar keltiramiz.

1-misol. Barcha erkin vertorlarning B_3 chiziqli fazosini qaraylik. Ikkita ixtiyoriy vektorining skalyar ko`paytmasini analitik geometriyaga aniqlanga skalyar ko`paytma kabi kiritaylik (ya`ni bu vektorlar uzunligini ko`paytmasiga ular orasidagi burchak kosinusini ko`paytmasi). U holda ko`rish qiyin emaski skalyar ko`paytmadagi 1-4 xossalari bajariladi. Demak,  $B_3$  fazo ushbu aniqlangan skalyar ko`paytmaga nisbatan evklid fazosi bo`ladi.

2-misol. Barcha $a \leq x \leq b$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz $x(t)$ funksiyalarning $C[a, b]$ – cheksiz o`lchovli chiziqli fazosini qaraylik. Ikkita  $x(t)$  va  $y(t)$  funksiyalarning skalyar ko`paytmasini bu funksiyalarni ko`paytmasini (a dan b gacha) integrali sifatida aniqlaymiz:

$$\int_a^b x(t)y(t)dt. \quad (1)$$

Sodda ko`rish mumkinki skalyar ko`paytmadagi 1-4 xossalari bajariladi. Demak, $C[a, b]$ fazo ushbu aniqlangan (1) skalyar ko`paytmaga nisbatan cheksiz o`lchovli evklid fazosi bo`ladi.

3-misol. n – o`lchovli chiziqli  $A^n$  fazo evklid fazosiga misol bo`la oladi. Agarda unda ixtiyoriy ikkita $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ vektorlar uchun skalyar ko`paytmani quyidagicha aniqlasak

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n \quad (2)$$

Ko`rish qiyin emaski, ushbu kiritilgan skalyar ko`paytma uchun 1-4 aksiomalar bajariladi.

Bu evklid fazosi ko`p hollarda E^n orqali belgilanadi.

4-misol. Ushbu A^n chiziqli fazoda skalyar ko`paytmani (2) dan farqli, unga nisbatan umumiy bo`lgan holda kiritaylik.

Buning uchun n – tartibli ushbu kvadrat matritsani qaraymiz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (3)$$

Ushbu matritsa yordamida $x_1, x_2, \dots, x_n - n$ o'zgaruvchili bir jinsli ikkinchi tartibli ko'phad tuzamiz:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i x_k, \quad (4)$$

Bunday ko'phad (3) matritsadan tuzilgan kvadrik forma deyiladi. (4)

kvadratik forma musbat aniqlangan deyildi, agarda u $x_1, x_2, \dots, x_n$ o'zgaruvchilarning hammasi bir vaqtda nol teng bo'lmagan qiymatlarida musbat qiymatni qabul qilsa. Demak, musbat aniqlangan kvadratik forma faqat $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ bo'lganda nolga teng, boshqa barcha hollarda musbat qiymat qabul qiladi.

(3) matritsa quyidagi ikkita shartni qanoatlantirsin:

1. U musbat aniqlangan (4) kvadratik formani ifodalasin.
2. Simmetrik bo'lsin (bosh dioganalga nisbatan) ya'ni barcha $i = 1, 2, \dots, n$ va $k = 1, 2, \dots, n$ lar uchun $a_{ik} = a_{ki}$ shartni qanoatlantirsin.

1- va 2- shartlarni qanoatlantiruvchi (3) matritsa yordamida A^n fazodagi ikkita $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ va $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ lar uchun skalyar ko'paytmani quyidagicha aniqlaymiz:

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} x_i y_k, \quad (5)$$

Oson ko'rish mumkinki, bunday aniqlangan skalyar ko'paytma uchun 1-4 aksiomalar bajariladi.

Ta'rif. Chiziqli R fazo normallangan deyiladi, agarda quyidagi ikkita shart bajarilsa:

I. R dagi har bir x element uchun unning normasi (uzunligi) deb ataluvchi va $\|x\|$ deb belgilanuvchi haqiqiy son mos qo'yadigan qoida aniqlangan bo'lsin.

II. Ushbu aniqlangan qoida uchun quyidagi uchta aksioma bajarilsin:

1°. $\|x\| > 0$, agarda x noldan farqli element bo'lsa, $\|x\| = 0$ agarda $x = 0$ element bo'lsa.

2°. $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ barcha x elementlar va barcha λ haqiqiy sonlar uchun.

3°. Ixtiyoriy x va y elementlar uchun quyidagi uchburchak tengsizligi yoki Minkovskiy tengsizligi deb ataluvchi

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

tengsizlik o'rinli.

II bob. Chiziqli operatorlar.

2.1. Chiziqli operator tushunchasi va ularning asosiy xossalari.

1-ta`rif.  $V$  va  $W$  lar mos ravishda  $n$  va  $m$  o`lchovli chiziqli fazolar bo`lsin.  $V$  ni  $W$  ga o`tzuvchi A operator deb, $A:V \rightarrow W$ akslantirishga aytiladiki, u V ning har bir x elementini W fazoning biror y elementiga o`tzadi.

2-ta`rif.  $V$  ni  $W$  ga o`tzuvchi A operator chiziqli operator deyiladiki, agarda V ning ixtiyoriy ikkita x_1 va x_2 hamda λ kompleks son uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

1. $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$ (operatorni additivligi)
2. $A(\lambda x) = \lambda Ax$ (operatorning bir jinsligi)

Agar W fazo kompleks tekislikdan iborat bo`lsa, u holda  $V$  ni  $W$  ga o`tzuvchi A chiziqli operator chiziqli forma yoki chiziqli funksional deyiladi.

Agar W fazo V fazo bilan ustma-ust tushsa, u holda V ni V ga o`tzuvchi chiziqli operator V fazoni chiziqli almashtirishi deyiladi.

A va B V ni W ga o`tzuvchi ikkita chiziqli operator bo`lsin. Bu operatorlarning $A + B$ yig`indisi deb quyidagi tenglik bilan aniqlangan operatorga aytamiz:

$$(A + B)x = Ax + Bx \quad (1)$$

A operatorning λ skalyarga ko`paytmasi λA deb, quyidagi tenglik bilan aniqlangan operatorga aytiladi:

$$(\lambda A)x = \lambda(Ax) \quad (2)$$

O nol operator deb, V fazoning barcha elementlarini W fazoning nol elementiga o`tzuvchi operatorga aytiladi:

$$Ox = 0.$$

A operatorga qarama-qarshi operator deb quyidagicha aniqlangan $-A$ operatorga aytiladi:

$$-A = (-1)A.$$

Tasdiq. Barcha V ni W ga o'tqazuvchi operatorlarning $L(V, W)$ to'plami yuqorida aniqlangan operatorlarni qo'shish va songa ko'paytirish amallari hamda tanlangan nol operator va qarama-qarshi operatorlarga nisbatan chiziqli fazo tashkil etadi.

$L(V, W)$ to'plamni o'rganamiz.

Aynan yoki birlik I operator deb quyidagi operatorga aytiladi:

$$Ix = x$$

(bu erda $x - V$ fazoning ixtiyoriy elementi)

$L(V, W)$ fazoda operatorlarning ko'paytmasi tushunchasini kiritamiz.

$L(V, W)$ fazodagi A va B operatorlarning AB ko'paytmasi deb, quyidagi operatorga aytiladi:

$$(AB)x = A(Bx) \quad (3)$$

Umumiy holda

$$AB \neq BA$$

$L(V, W)$ fazodagi chiziqli operatorlar quyidagi xossalarga ega:

1. $\lambda(AB) = (\lambda A)B$
2. $(A + B)C = AC + BC$
3. $A(B + C) = AB + AC$
4. $(AB)C = A(BC)$

(4)

4 xossadan $L(V, W)$ fazodagi chekli sondagi operatorlar uchun ko'paytmani aniqlash mumkinligi kelib chiqadi va xususan A operatorning n – darajasi quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$A^n = AA \dots A$$

Ravshanki,

$$A^{n+m} = A^n A^m$$

munosabat o'rinli.

3-tarif. $L(V, V)$ dagi A operator uchun $L(V, V)$ dagi chiziqli B operator teskari operator deyiladi, agarda

$$AB = BA = I$$

bo'lsa.

A operatorga teskari operator odatda A^{-1} orqali belgilanadi, demak ixtiyoriy $x \in V$ uchun

$$A^{-1}Ax = x$$

Shunday qilib, agar $A^{-1}Ax = 0$ bo'lsa, u holda $x = 0$ bo'ladi, ya'ni agar A teskari operatorga ega bo'lsa, u holda $Ax = 0$ ekanligidan $x = 0$ kelib chiqadi. V dan V ga o'tqazuvchi A chiziqli operator o'zaro bir qiymatli deyiladi, agarda ixtiyoriy ikkita har xil x_1 va x_2 elementlarga har xil $y_1 = Ax_1$ va $y_2 = Ax_2$ elementlar mos kelsa.

Agar A operator V dan V ga o'zaro bir qiymatli o'tqazsa, u holda

$A: V \rightarrow V$ akslantirish V ni V ga akslantiradi, ya'ni har bir $y \in V$ element o'zining biror $x \in V$ obraziga ega bo'ladi:

$$y = Ax$$

Bu faktorni o'rinli ekanligini isbotlash uchun V fazoning n ta chiziqli erkli $x_1, x_2, \dots, x_n$ elementlarini bu fazoning n ta chiziqli erkli $Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n$ elementlariga akslanishini ko'rsatish etarli.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ lar V fazoning chiziqli erkli elementlari bo'lsin. Agar $\alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 + \dots + \alpha_n Ax_n = 0$ bo'lsa, u holda A chiziqli operator ekanligidan

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n) = 0$$

A operator V ni V ga bir qiymatli akslantirish ekanligidan

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

kelib chiqadi.

Olishimizga ko'ra $x_1, x_2, \dots, x_n$ lar chiziqli erkli. Shu sababli

$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$. Demak, $Ax_1, Ax_2, \dots, Ax_n$ elementlar chiziqli erkli.

Tadiq. $L(V, V)$ dagi A chiziqli operator teskari operatorga ega bo'lishi uchun u V ni V ga bir qiymatli o'tqazishi zarur va etarli.

4-ta`rif.  $A$  chiziqli operatorning yadrosi deb  $V$  fazoning  $Ax=0$  tenglikni bajaruvchi  $x$  elementlari to`plamiga aytiladi. A chiziqli operatorning yadrosi $\ker A$ orqali belgilanadi. Agar $\ker A=0$ bo`lsa, u holda  $A$  operator  $V$  ni  $V$  ga bir qiymatli o`tgazadi.

$\ker A=0$ shart A operatorni teskari operatorga ega bo`lishini zaruriy va etarli sharti bo`ladi.

5-ta`rif. A chiziqli operatorning obrazi deb V fazoning

$$y = Ax$$

ko`rinishda ifodalanadigan elementlari to`plamiga aytiladi.

A chiziqli operatorning obrazi imA orqali belgilanadi.

Agar $\ker A=0$ bo`lsa,  $imA=V$  bo`ladi va aksincha. Shu sababli $imA=V$ shart ham A operatorni teskari operatorga ega bo`lishini zaruriy va etarli sharti bo`ladi.

Ravshanki, $\ker A$ va imA V fazoning chiziqli fazo ostisi bo`ladi.

3-teorema. V fazoning $\dim V$ o`lchovi  $n$  ga va  $A \in L(V, V)$  dagi chiziqli operator bo`lsin, u holda $\dim(imA) + \dim(\ker A) = n$ bo`ladi.

4-teorema. V_1 va V_2 lar n o`lchovli V chiziqli fazoning qism fazolari va

$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim V$ bo`lsin, u holda  $L(V, V)$  da shunday chiziqli  $A$  operator topiladiki,  $V_1 = imA$  va  $V_2 = \ker A$  bo`ladi.

6-ta`rif. A chiziqli operatorning rangi deb

$$RangA = \dim(imA)$$

songa aytiladi.

Natija. $L(V, V)$ dagi A chiziqli operator A^{-1} teskari operatorga ega bo`lishi uchun

$$RangA = \dim V = n$$

bo`lishi zarur va etarli.

6-teorema. A va $B \in L(V, V)$ dagi chiziqli operatorlar bo`lsin, u holda

$$rangAB \leq rangA, \quad rangAB \leq rangB.$$

7-teorema. A va $B \in L(V, V)$ dagi chiziqli operatorlar va V n o'lchovli chiziqli fazo bo'lsin, u holda

$$\text{rang} AB \geq \text{rang} A + \text{rang} B - n$$

Natija. Agar $\text{rang} A = n$ ($n = \dim V$ fazoning o'lchovi), u holda

$$\text{rang} AB = \text{rang} BA = \text{rang} B$$

2.2. Chiziqli operatorlarni matritsali yozuvi.

Chiziqli V fazoda berilgan bazisdagi chiziqli operatorlarni matritsalarini. V fazodagi $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisni fikslaymiz, $x \in V$ dagi ixtiyoriy element va

$$x = \sum_{k=1}^n x^k e_k \quad (1)$$

esa bu x elementni berilgan bazisdagi yoyilmasi hamda A esa $L(V, V)$ dagi chiziqli operator bo'lsin u holda (1) dan

$$Ax = \sum_{k=1}^n x^k A e_k \quad (2)$$

$$A e_k = \sum_{j=1}^n a_k^j e_j \quad (3)$$

deb olsak, (2) ni quyidagicha yozamiz:

$$Ax = \sum_{k=1}^n x^k \sum_{j=1}^n a_k^j e_j = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^n a_k^j x^k \right) e_j$$

Shunday qilib, $y = Ax$ va $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ elementning koordinatalari bo'lsa u holda

$$y^j = \sum_{k=1}^n a_k^j x^k, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

Ushbu $A = (a_k^j)$ kvadrat matritsani qaraylik, bu matritsa berilgan $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazisdagi A chiziqli operatorning matritsasi deyiladi. Oldingi ko'rsatilgan usul bilan birgalikda uni berilgan bazisdagi matritsaviy yozuvi ham ishlatiladi:

$$y = Ax$$

Agar $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$ bo'lsa, u holda $y = (y^1, y^2, \dots, y^n)$ dagi y^j $j = 1, 2, \dots, n$ (4) formula orqali A ning a_k^j elementlari esa (3) formula orqali hisoblanadi.

Agar A operator nol operator bo'lsa, u holda bu operatorning A matritsasining barcha elementlari ixtiyoriy bazisda nollardan iborat, ya'ni A matritsa nol matritsa bo'ladi.

Agar A operator birlik operator bo'lsa, ya'ni $A = I$ bo'lsa, u holda bu operatorning ixtiyoriy bazisdagi matritsasi birlik matritsadan iborat bo'ladi, ya'ni $A = E$.

1-teorema. V chiziqli fazoda $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazis berilgan va $A = a_k^j$ n – tartbli kvadrat matritsa bo'lsin, u holda A shunday yagona chiziqli operator mavjudki, bu A matritsa berilgan bazisda ushbu operatorni matritsasi bo'ladi.

A va B matritsalar n – tartibli kvadrat matritsalar bo'lsin. A va B V fazoda ularga mos $\{e_k\}$ bazisdagi operatorlar bo'lsin, u holda teorema ko'ra $A + \lambda B$ matritsaga $A + \lambda B$ operator mos keladi. Bunda λ – biror son.

2-teorema. A chiziqli operatorning $\text{rang} A$ rangi matritsasi rangiga teng.

1-natija. A va B matritsalar ko'paytmasining rangi quyidagi munosabatlarni bajaradi:

$$\text{rang} AB \leq \text{rang} A, \text{rang} AB \leq \text{rang} B, \text{rang} AB \geq \text{rang} A + \text{rang} B - n.$$

2-natija. A operator uchun teskari A^{-1} operator faqat va faqat A operator matritsasining rangi n ga ($n = \dim V$) teng bo'lgandagina mavjud bo'ladi. Bu holda A matritsaga teskari A^{-1} matritsa ham mavjud bo'ladi.

Endi yangi bazisga o'tganda chiziqli operator matritsasini almashtirishni qaraylik. V chiziqli fazo, A esa $L(V, V)$ dagi chiziqli operator $e_1, e_2, \dots, e_n$ va $\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_n$ V dagi 2 ta bazis hamda

$$\tilde{e}_k = \sum_{i=1}^n u_k^i e_i, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

esa $\{e_k\}$ bazisdan $\{\tilde{e}_k\}$ bazisga o'tish formulasi bo'lsin

$U = (u_k^i)$ deb olamiz, $\text{rang} U = n$ ga teng. $A = (a_k^j)$ va $\tilde{A} = (\tilde{a}_k^j)$ matritsalar A operatorni $\{e_i\}$ va $\{\tilde{e}_k\}$ bazislardagi matritsalar bo'lsin

Bu matritsalar orasidagi munosabatni topamiz.

3-teorema. A operatorni $\{e_i\}$ va $\{\tilde{e}_k\}$ bazislardagi $A = (a_k^j)$ va $\tilde{A} = (\tilde{a}_k^j)$ matritsalar orasida

$$A = U^{-1} \tilde{A} U \quad (6)$$

munosabat mavjud.

$A = U^{-1} \tilde{A} U$ formulani ikkala tomonini o'ngdan U^{-1} va chapdan U ga ko'paytirib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\tilde{A} = U A U^{-1} \quad (7)$$

A va B n – tartibli kvadrat matritsalar. A va B lar $\{e_i\}$ bazisdagi ularni mos operatorlari bo'lsin. U holda $A + \lambda B$ matritsaga $A + \lambda B$ chiziqli operator mos keladi.

Yuqoridagi teoremadan

$$\det A = \det \tilde{A}$$

kelib chiqadi.

Shunday qilib, chiziqli operatorning matritsasini determinanti bazisni tanlab olishga bog'liq emas. Shu sababli A chiziqli operatorning determinanti $\det A$ tushunchasini kiritish mumkin,

$$\det A = |A|$$

A - A operatorning ixtiyoriy bazisdagi matritsasi.

2.3. Chiziqli operatorning xarakteristik ko'phadi.

$L(V, V)$ dagi A – chiziqli operator, I – esa aynan operator bo'lsin.

1-ta'rif. λ ga nisbatan ko'phad bo'lgan

$$\det(A - \lambda I)$$

A operatorning xarakteristik ko'phadi deyiladi.

V fazoda $\{e_k\}$ bazis berilgan va $A=(a_k^j)$ – A operatorning bu bazisdagi matritsasi bo'lsin. U holda A operatorning xarakteristik ko'phadi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a_1^1 - \lambda & a_1^2 & \dots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 - \lambda & \dots & a_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n^1 & a_n^2 & \dots & a_n^n - \lambda \end{vmatrix}.$$

Xarakteristik ko'phadning λ^k oldidagi koeffisientini d_k orqali belgilab uni quyidagicha yozamiz:

$$\det(A - \lambda I) = \sum_{k=0}^n d_k \lambda^k.$$

Shunday qilib, $\det(A - \lambda I)$ determinant qiymati bazisni tanlab olishga bog'liq emas, u holda xarakteristik ko'phadning d_k koeffisientlari bazisni tanlab olishga bog'liq emas, ular invariantlar bo'ladi, ya'ni ular bazisni tanlab olishga bog'liq bo'lmagan miqtorlar.

Xususan, $d_{n-1} = a_1^1 + a_2^2 + \dots + a_n^n$ invariant bo'ladi. Bu invariant A operatorning izi deyiladi va trA orqali belgilanadi:

$$trA = a_1^1 + a_2^2 + \dots + a_n^n.$$

$\det(A - \lambda I) = 0$ tenglama A operatorning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

Chiziqli operatorlarning xos qiymatlari va xos vektorlari.

$V_1 - n$ o'lchovli V chiziqli fazoning qism fazosi va $A - L(V, V)$ dagi chiziqli operator bo'lsin.

2-ta'rif. V_1 A operatorning invariant qism fazosi deyiladi, agarda V_1 tegishli barcha x elementlar uchun Ax element ham V_1 da yotsa.

A operatorning invariant qism fazolariga $\ker A$ va imA qism fazolar misol bo'la oladi.

3-ta'rif. λ son A operatorning xos qiymati deyiladi, agarda shunday noldan farqli

$$Ax = \lambda x \tag{1}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi x element mavjud bo'lsa. Bu x element A operatorning xos vektori deyiladi.

1-teorema. λ son A operatorning xos qiymati bo'lishi uchun uning

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

xarakteristik tenglamasini ildizi bo'lishi zarur va etarli.

Isboti. $\lambda - A$ operatorning xos qiymati va $x -$ bu λ songa mos ($x \neq 0$) xos vector bo'lsin. (1) ni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Shunday qilib, $x -$ noldan farqli element va oxirgi tenglikdan $\ker(A - \lambda I) \neq 0$ kelib chiqadi, ya'ni

$$\dim(\ker(A - \lambda I)) \geq 1. \quad (2)$$

Ma'lumki,

$$\dim(\operatorname{im}(A - \lambda I)) + \dim(\ker(A - \lambda I)) = n,$$

bu tenglikdan va (2) tengsizlikdan

$$\dim(\operatorname{im}(A - \lambda I)) \leq n - 1 \quad (3)$$

kelib chiqadi.

Ta'rifdan $\dim(\operatorname{im}(A - \lambda I))$ $A - \lambda I$ operator rangiga teng. Shu sababli (3) tengsizlikdan

$$\operatorname{rang}(A - \lambda I) < n \quad (4)$$

kelib chiqadi.

Shunday qilib, agar $\lambda -$ xos qiymat bo'lsa, u holda $A - \lambda I$ operatorning $A - \lambda I$ matritsaning rangi n dan kichik, ya'ni $\det(A - \lambda I) = 0$ va demak, $\lambda -$ xarakteristik tenglamani ildizi.

Endi $\lambda -$ (1) xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lsin. U holda (3) tengsizlik o'rinli va demak (2) tengsizlik o'rinli. Bundan esa λ son uchun noldan farqli shunday x element mavjudki,

$$(A - \lambda I)x = 0.$$

Bu oxirgi tenglik (1) ga ekvivalent, shu sababli $\lambda -$ xos qiymat.

Teorema isbotlandi.

Natija. Har qanday chiziqli operator xos qiymatga ega.

Haqiqatan ham, kompleks sonlar nazariyasining asosiy teoremasiga ko'ra xarakteristik tenglama har doim ildizga ega.

2-teorema. Berilgan $\{e_k\}$ bazisda A operatorning A matritsasi diagonal ko'rinishda bo'lishi uchun, e_k bazis vektorlari bu operatorning xos vektorlari bo'lishi zarur va etarli.

Isboti. e_k bazis vektorlar A operatorning xos vektorlari bo'lsin. U holda

$$Ae_k = \lambda_k e_k, \quad (1)$$

shu sababli A operatorning A matritsasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (2)$$

ya'ni diagonal ko'rinishda bo'ladi.

A matritsa A operatorning $\{e_k\}$ bazisdagi diagonal ko'rinishda bo'lsin, ya'ni (2) ko'rinishda bo'lsin. U holda (1) o'rinli, demak e_k bazis vektorlari bu operatorning xos vektorlari. Teorema isbotlandi.

3-teorema. A operatorning $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ lar xos qiymatlari bo'lsin. U holda ularga mos $e_1, e_2, \dots, e_p$ xos vektorlari o'zaro chiziqli erkli bo'ladi.

Isboti. Induksiya usulidan foydalanamiz. $p=1$ da teorema o'rinli. Bu holda e_1 - noldan farqli vector, chunki noldan farqli bitta vector chiziqli erkli. Faraz qilaylik, teorema m ta $e_1, e_2, \dots, e_m$ vektorlar uchun o'rinli bo'lsin. Bu vektorlarga e_{m+1} vektorni qo'shaylik, u holda

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k e_k = 0 \quad (3)$$

bo'lsin. U holda operatorni chiziqli ekanligidan quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k Ae_k = 0. \quad (4)$$

Shunday qilib, e_k – xos vektorlar, u holda

$$Ae_k = \lambda_k e_k$$

Shu sababli (4) quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum_{k=1}^{m+1} \alpha_k \lambda_k e_k = 0 \quad (5)$$

(3) tenglikdan

$$\sum_{k=1}^{m+1} \lambda_{m+1} \alpha_k e_k = 0.$$

(5) tenglikdan ushbu tenglikni ayirib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\sum_{k=1}^{m+1} (\lambda_k - \lambda_{m+1}) \alpha_k e_k = 0. \quad (6)$$

Shartga ko'ra barcha λ_k har xil, ya'ni $\lambda_k - \lambda_m \neq 0$. Shu sababli (6) dan olishimizga ko'ra $e_1, e_2, \dots, e_m$ vektorlar chiziqli ekanligidan $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_m = 0$ kelib chiqadi. Bundan va (3) dan hamda e_{m+1} – xos vektor ekanligidan ($e_{m+1} \neq 0$) $\alpha_{m+1} = 0$ kelib chiqadi. Shunday qilib, (3) tenglikdan biz $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{m+1} = 0$ tenglikni hosil qilamiz. Bu esa $e_1, e_2, \dots, e_{m+1}$ vektorlarni chiziqli erkli ekanligini bildiradi.

Teorema isbotlandi.

Natija. Agar A operatorning xarakteristik ko'phadi n ta har xil ildizga ega bo'lsa, u holda biror bazisda A operatorning matritsasi diagonal ko'rinishga bo'ladi.

Haqiqatan ham, qaralayotgan holda isbot qilingan 2-teoremaga ko'ra barcha xos vektorlari chiziqli erkli va ularni bazis sifatida olish mumkin U holda 1- teoremaga ko'ra A operatorning matritsasi bu bazisda diagonal ko'rinishda bo'ladi.

2.4. Evklid fazoda chiziqli va bir yarim chiziqli formalar.

V – evklid fazosi va C – kompleks tekislik (bir o'lchovli kompleks chiziqli fazo) bo'lsin. U holda ma'lumki, V ni C ga o'tqazuvchi chiziqli operator chiziqli forma deyiladi. Ushbu mavzuda $L(V, C)$ dagi ixtiyoriy f chiziqli forma uchun maxsus ko'rinish topamiz.

Lemma. $f - L(V, C)$ dagi chiziqli forma bo'lsin, u holda V da chunday yagona h element mavjudki,

$$f(x) = (x, h) \quad (1)$$

bo`ladi.

Isboti. h elementni mavjudligini isbotlash uchun V da $e_1, e_2, \dots, e_n$ bazis tanlab olamiz.

h^k koordinatasi quyidagicha ifodalangan h elementni qaraymiz:

$$h^k = \overline{f(e_k)}. \quad (2)$$

Shunday qilib, olishimizga ko`ra

$$h = \sum_{k=1}^n h^k e_k.$$

$x = \sum_{k=1}^n x^k e_k$ V dagi ixtiyoriy element bo`lsin. f formaning chiziqli ekanligidan va

(2) tenglikdan foydalanib

$$f(x) = \sum_{k=1}^n x^k f(e_k) = \sum_{k=1}^n x^k \overline{h^k} \quad (3)$$

ni hosil qilamiz. Ma`lumki, ortonormallangan $\{e_k\}$ bazisda $x = \sum_{k=1}^n x^k e_k$ va

$h = \sum_{k=1}^n h^k e_k$ vektorlarning (x, h) skalyar ko`paytmasi $\sum_{k=1}^n x^k \overline{h^k}$ ga teng. U holda

(3) dan $f(x) = (x, h)$ tenglikni hosil qilamiz.

h vektorni mavjudligi isbotlandi.

Endi bu vektorning yagonaligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, shunday ikkita h_1 va h_2 vektorlar mavjud bo`lsinki, ular yordamida  $f(x)$  chiziqli forma (1) ko`rinishda ifodalansin. U holda ixtiyoriy x vektor uchun $(x, h_1) = (x, h_2)$, bundan esa $(x, h_1 - h_2) = 0$ kelib chiqadi. Bu tenglikda $x = h_1 - h_2$ deb olib, evklid fazosida elementni normasi ta`rifidan foydalanib

$$\|h_1 - h_2\| = 0$$

tenglikka kelamiz. Shunday qilib, $h_1 = h_2$. Lemma isbotlandi.

Ravshanki, lemma V – haqiqiy evklid fazosi, $f \in L(V, R)$ bo`lgan holda ham o`rinli. Bu yerda R – haqiqiy to`g`ri chiziq.

Evklid fazosida bir yarim chiziqli formalar va ularni maxsus ifodalanishi.

1-ta'rif. Argumentlari x va y L chiziqli fazodagi barcha mumkin bo'lgan vektorlar bo'lgan $B(x, y)$ sonli funksiya bir yarim chiziqli forma deyiladi, agar L dagi ixtiyoriy x, y va z vektorlar va ixtiyoriy kompleks λ son uchun

$$\left. \begin{aligned} B(x + y, z) &= B(x, z) + B(y, z), \\ B(x, y + z) &= B(x, y) + B(x, z), \\ B(\lambda x, y) &= \lambda B(x, y), \\ B(x, \lambda y) &= \bar{\lambda} B(x, y) \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

munosabatlar bajarilsa.

1-teorema. $B(x, y)$ V evklid fazosidagi bir yarim chiziqli forma bo'lsin. U holda $L(V, V)$ da shunday yagona A chiziqli operator mavjudki,

$$B(x, y) = (x, Ay) \quad (2)$$

bo'ladi.

Isboti. $y \in V$ fazoning fiksirlangan elementi bo'lsin. U holda $B(x, y)$ x argumentning chiziqli formasi bo'ladi. Shu sababli oldingi mavzudagi lemmaga ko'ra V fazodagi shunday bir qiymatli aniqlangan h elementni ko'rsatish mumkinki,

$$B(x, y) = (x, h) \quad (3)$$

bo'ladi. Shunday qilib, V har bir y elementga (3) qoida bilan V dagi yagona h element mos qo'yiladi. Demak, shunday A operator aniqlanganki, $h = Ay$ bo'ladi. Bu operatorning chiziqli ekanligi (1) xossa va skalyar ko'paytma xossalardan kelib chiqadi.

A operatorning yagona ekanligini isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, ikkita A_1 va A_2 operatorlar mavjud bo'lsinki, bu operatorlar yordamida $B(x, y)$ forma (2) ko'rinishga kelsin. U holda ravshanki, ixtiyoriy x va y lar uchun $(x, A_1 y) = (x, A_2 y)$. Bundan esa $(x, A_2 y - A_1 y) = 0$ kelib chiqadi. Agar bu tenglikka $x = A_2 y - A_1 y$ deb olsak, u holda

$$\|A_2 y - A_1 y\| = 0$$

kelib chiqadi. Demak, V dagi ixtiyoriy y element uchun $A_2 y = A_1 y$ ya'ni $A_2 = A_1$. Teorema isbotlandi.

Natija. $B(x, y) - V$ evklid fazosidagi bir yarim chiziqli forma bo'lsin. U holda $L(V, V)$ da shunday yagona A operator mavjudki,

$$B(x, y) = (Ax, y) \quad (4)$$

bo'ladi.

x va y elementlar V da yotsin va $x = \sum_{j=1}^n x^j e_j$, $y = \sum_{k=1}^n y^k e_k$ - lar x va y elementlarni $\{e_k\}$ bazisdagi yoyilmasi bo'lsin. Bir yarim chiziqli formaning ta'rifidan quyidagi munosabatni hosil qilamiz:

$$B(x, y) = B\left(\sum_{j=1}^n x^j e_j, \sum_{k=1}^n y^k e_k\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n x^j y^k B(e_j, e_k) \quad (5)$$

$$b_{jk} = B(e_j, e_k), \quad (6)$$

deb olsak, u holda (5) dan

$$B(x, y) = \sum_{j,k=1}^n b_{jk} x^j y^k$$

tenglik kelib chiqadi.

$B = (b_{jk}) - B(x, y)$ bir yarim chiziqli formaning $\{e_k\}$ bazisdagi matritsasi deyiladi.

Tasdiq. $B(x, y)$ bir yarim chiziqli forma

$$B(x, y) = (Ax, y) \quad (4)$$

ko'rinishda ifodalansa va A operatorning bu bazisdagi A matritsasi (a_j^k) ga teng bo'lsa, u holda bu bazisda

$$b_{jk} = a_j^k$$

bo'ladi.

2.5. Evklid fazosidagi o'z-o'ziga qo'shma chiziqli operatorlar.

1-ta'rif. $L(V, V)$ dagi A^* operator A chiziqli operatorga qo'shma deyiladi, agarda V dagi ixtiyoriy x va y lar uchun

$$(Ax, y) = (x, Ay) \quad (1)$$

munosabat bajarilsa.

Ko`rish qiyin emaski,  $A$  chiziqli operatorga qo`shma operator dam chiziqli operator bo`ladi.

1- teorema. Har qanday A chiziqli operator yagona qo`shma operatorga ega.

Qo`shma operatorlar quyidagi xossalarga ega:

$$1. I^* = I.$$

$$2. (A + B)^* = A^* + B^*.$$

$$3. (\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*.$$

$$4. (A^*)^* = A.$$

$$5. (AB)^* = B^* A^*.$$

2-ta`rif.  $L(V, V)$  dagi  $A$  chiziqli operator o`z-o`ziga qo`shma operator deyiladi, agarda

$$A^* = A$$

bo`lsa.

2-teorema. $A - V$ evklid fazosidagi chiziqli operator bo`lsin, u holda

$$A = A_r + iA_i$$

ifodalanish o`rinli, bunda  $A_r$  va  $A_i$  -lar o`z-o`ziga qo`shma bo`lgan operatorlar, ular mos ravishda A operatorning haqiqiy va mavhum qismi deyiladi.

A va B operatorlar kommutasiyalanadigan operatorlar deyiladi, agarda $AB = BA$ bo`lsa.

3-teorema. A va B o`z-o`ziga qo`shma bo`lgan operatorlarning AB ko`paytmasi o`z-o`ziga qo`shma operator bo`lishi uchun  $A$  va  $B$  operatorlar kommutasiyalanadigan bo`lishi zarur va etarli.

4- teorema. Agar A o`z-o`ziga qo`shma operator bo`lsa, u holda ixtiyoriy $x \in V$ uchun (Ax, x) - skalyar ko`paytma haqiqiy son bo`ladi.

5-teorema. O`z-o`ziga qo`shma operatorning xos qiymatlari haqiqiy sonlar bo`ladi.

6-teorema. Agar A – operator oʻz-oʻziga qoʻshma operator boʻlsa, u holda har xil xos qiymatlariga mos xos vektorlari oʻzari ortogonal boʻladi.

Chiziqli operatorning normasi.

$A - V$ evklid fazosini oʻzini-oʻziga oʻtqazuvchi chiziqli operator boʻlsin.

2-taʼrif. A chiziqli operatorning $\|A\|$ normasi deb, quyidagi tenglik bilan aniqlanadigan songa aytiladi:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| \quad (1)$$

Chiziqli operator taʼrifidan quyidagi tengsizlik kelib chiqadi:

$$\|Ax\| \leq \|A\| \|x\| \quad (2)$$

Tasdiq. Agar A – oʻz-oʻziga qoʻshma boʻlgan operator boʻlsa, u holda A operatorning $\|A\|$ normasi $\sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$ ga teng:

$$\sup_{\|x\|=1} (Ax, x) = \|A\|.$$

7-teorema. A chiziqli operator oʻz-oʻziga qoʻshma operator boʻlishi uchun $\text{Im}(Ax, x) = 0$ boʻlishi zarur va etarli.

Lemma. Evklid fazosidagi oʻz-oʻziga qoʻshma A chiziqli operatorning ixtiyoriy λ xos qiymati (Ax, x) skalyar koʻpaytmaga teng, bu yerda $x - \|x\| = 1$ shartni qanoatlantiruvchi biror vektor.

Natija. A – oʻz-oʻziga qoʻshma operator va λ – esa bu operatorning ixtiyoriy xos qiymati.

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Ax, x), \quad M = \sup_{\|x\|=1} (Ax, x)$$

boʻlsin. u holda

$$m \leq \lambda \leq M$$

7-teorema. A – oʻz-oʻziga qoʻshma operator va ixtiyoriy x uchun $(Ax, x) \geq 0$ boʻlsin. U holda $\|A\|$ bu operatorning eng katta xos qiymatiga teng.

8-teorema. $A - o'z-o'ziga$ qo'shma operator , m va $M - \|x\| = 1$ to'plamdagi (Ax, x) ni aniq quyi va yuqori chegaralari bo'lsin. Bu sonlar A operatorning eng kichik va eng katta xos qiymatlari bo'ladi.

9-teorema. $n - o'lchovli$ V evklid fazosidagi har bir $A - o'z-o'ziga$ qo'shma chiziqli operator uchun n ta chiziqli erkli o'zaro ortogonal va birlik xos vektorlar mavjud bo'ladi.

Teorema (Gamil'ton-Keli teoremasi). Agar $A - o'z-o'ziga$ qo'shma operator va $p(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ – bu operatorning xarakteristik ko'phadi bo'lsa, u holda

$$p(A) = 0$$

bo'ladi.

2.6. Kvadratik formani kvadratlar yig'indisiga keltirish.

1-ta'rif. $B(x, y)$ bir yarim chiziqli forma ermit formasi deyiladi, agarda ixtiyoriy x va y lar uchun

$$B(x, y) = \overline{B(y, x)} \quad (1)$$

bo'lsa.

Oldingi bir yarim chiziqli formalarni maxsus ifodalanishi mavzudagi 1-teoremaga ko'ra ixtiyoriy $B(x, y)$ bir yarim chiziqli forma yagona

$$B(x, y) = (Ax, y) \quad (2)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, bu yerda A – chiziqli operator.

1-teorema. $B(x, y)$ bir yarim chiziqli forma ermit formasi bo'lishi uchun bu formani (2) ifodasidagi A operator o'z-o'ziga qo'shma operator bo'lishi zarur va etarli.

2-teorema. $B(x, y)$ bir yarim chiziqli forma ermit formasi bo'lishi uchun $B(x, x)$ funksiyani haqiqiy bo'lishi zarur va etarli.

2-ta'rif. $B(x, y)$ bir yarim chiziqli forma ermit formasi bo'lsin, bu formaga mos kvadratik forma deb $B(x, x)$ funksiyaga aytiladi.

3-teorema. $B(x, y)$ n – oʻlchovli V evklid fazosidagi barcha mumkin boʻlgan x va y larda aniqlangan ermit formasi boʻlsin. U holda bu fazoda shunday ortonormallangan $\{e_k\}$ bazis mavjud va V da yotuvchi barcha x lar uchun shunday haqiqiy λ_k sonlarni topish mumkinki, $B(x, x)$ kvadratik formani x vektorning $\{e_k\}$ bazisdagi ξ_k koordinatalarining kvadratlari yigʻindisi koʻrinishida ifodalash mumkin:

$$B(x, x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k |\xi_k|^2. \quad (3)$$

Isboti. $B(x, y)$ ermit formasi formasi boʻlsin. U holda oldingi mavzudagi 1-teoremaga koʻra $B(x, y)$ forma yagona

$$B(x, y) = (Ax, y) \quad (4)$$

koʻrinishda ifodalash mumkin, bu yerda A – oʻz-oʻziga qoʻshma operator.

Oldingi mavzudagi 4-teoremaga koʻra A operator uchun shunday ortonormallangan uning xos vektorlaridan tuzilgan $\{e_k\}$ bazisni koʻrsatish mumkin. Agar λ_k – A operatorning xos qiymati ξ_k esa x vektorning $\{e_k\}$ bazisdagi koordinatalari boʻlsa, yaʼni

$$x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \quad (5)$$

boʻlsa, u holda

$$Ax = \sum_{k=1}^n \xi_k Ae_k \quad \text{va} \quad Ae_k = \lambda_k e_k$$

tengliklardan Ax uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$Ax = \sum_{k=1}^n \xi_k Ae_k = \sum_{k=1}^n \lambda_k \xi_k e_k. \quad (6)$$

Shunday qilib (5) va (6) dan hamda $\{e_k\}$ bazisning ortonormallangan ekanligidan (Ax, x) uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$(Ax, x) = \sum_{k=1}^n \lambda_k |\xi_k|^2.$$

Bu ifodadan va (4) dan (3) ni hosil qilamiz. Teorema isbotlandi.

X u l o s a.

Ushbu bitiruv malakaviy ish referativ xarakterga ega bo`lib, chiziqli fazo va chiziqli operatorlar nazariyasidagi asosiy tushunchalar va teoremlar; chiziqli fazo ta`rifi, uning xossalari, o`lchovi, bazisi, chiziqli fazoni qism fazolarga yoyilmasi; evklid fazosi va uning asosiy xossalari va misollar; chiziqli operatorlar ta`rifi va ularning asosiy xossalari, ularning matritsali yozuvi, chiziqli operatorning xarakteristik ko`phadi, xos qiymatlari va xos vektorlari; evklid fazosidagi chiziqli va bir yarim chiziqli formalarni skalyar ko`paytma orqali ifodalanishi; evklid fazosida o`z-o`ziga qo`shma bo`lgan chiziqli operatorlar xossalari, chiziqli operatorlar xossalariidan foydalanib kvadratik formani kvadratlar yig`indisiga keltirish kabi mavzular o`rganilgan.

Shunday qilib, ushbu bitiruv malakaviy ishni tayyorlash davomida quyidagi muhim xulosalarga kelindi.

1. Chiziqli operator chiziqli algebra va funksiyonal analiz fanlarining muhim bo`limlaridan biri.
2. Agar chiziqli fazoda skalyar ko`paytma kiritish mumkin bo`lsa, u holda bu fazo evklid fazosiga aylanadi.
3. Har bir chiziqli operatorga biror matritsa mos keladi va aksincha har bir matritsa uchun birorta chiziqli operator topish mumkin.
4. Chiziqli operatorning har xil xos qiymatlariga mos xos vektorlari o`zaro ortogonal bo`ladi.
5. Evklid fazosidagi chiziqli va bir yarim chiziqli formalarini skalyar ko`paytma orqali ifodalash mumkin.
6. Chiziqli operator xossalariidan foydalanib, kvadratik formani kvadratlar yig`indisiga keltirish mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.

- 1.И.А. Каримов. Юксак маънавият – енгилмас куч. Тошкент. Маънавият. 2008 й. 174 б.
- 2.В.А.Ильин, Э.Г. Позняк. Линейная алгебра. Москва. Наука.1974 г. 296 с.
- 3.М.М.Постников.Введение в теорию алгебраических чисел.М.Наука. 1982г.240с.
- 4.Ж.Хожиев,А.С.Файнлейб.Алгебра ва сонлар назарияси курси. Т.Ўзбекистон. 2001 й. 304б.
- 5.Л.Б.Шнеперман.Курс алгебры и теории чисел в задачах и упражнениях. I и II часть. Минск.»Выш.шк.» 1987 г.272с.
6. А.Н.Колмогоров, С.В. Фомин. Элементы теории функций и функционального анализа. М.Наука.1976г.546с.
- 7.С.Т.Завало,В.Н.Костарчук,Б.И.Хацет.Алгебра и теория чисел. М.»Высш.шк». 1980г.408с.
8. А.Г. Курош. Олий алгебра курси. Тошкент. Ўқитувчи. 1976 й.г.464 б.
- 9.С.Ленг.Алгебра.М.Мир 1968г.564с.
- 10.А.И.Кострикин.Введение в алгебру.М.Наука.1977г.496с.
- 11.Ван дер Варден .Алгебра.М.Наука.1976г. 648с.
- 12.И.М.Виноградов.Основы теории чисел. <http://www.mcme.ru>,
<http://lib.mexmat.ru>.