

**“TIQXMMI” MILLIY TADQIQOT UNIVERSITETI HUZURIDAGI
FUNDAMENTAL VA AMALIY TADQIQOTLAR INSTITUTI HUZURIDAGI
ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/31.03.2022.T/FM.10.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

MATRASULOV JASURBEK DAVRONBEK O‘G‘LI

**PAST O‘LCHAMLI SODDA KVANT TIZIMLARI VA STOXASTIK
JARAYONLARNING BOSHQARILADIGAN ADIABATIK
EVOLYUTSIYASINI MODELLASHTIRISH**

05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui (fizika-matematika fanlari)

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

TOSHKENT – 2024

**Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa (PhD) doktori dissertatsiyasi
avtoreferati mundarijasi**
**Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по
физико-математическим наукам**
**Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical –
mathematical sciences**

Matrasulov Jasurbek Davronbek o‘g‘li

Past o‘lchamli sodda kvant tizimlari va stoxastik jarayonlarning
boshqariladigan adiabatik evolyutsiyasini modellashtirish..... 3

Матрасулов Жасурбек Давронбек угли

Моделирование управляемой адиабатической эволюции простых квантовых
систем и стохастических процессов в системах низкой размерности..... 24

Matrasulov Jasurbek Davronbek ugli

Modelling of the controlled adiabatic evolution of simple quantum systems
and stochastic processes in low-dimensional systems 45

E‘lon qilingan ishlar ro‘yxati

Список опубликованных работ
List of published works 47

**“TIQXMMI” MILLIY TADQIQOT UNIVERSITETI HUZURIDAGI
FUNDAMENTAL VA AMALIY TADQIQOTLAR INSTITUTI HUZURIDAGI
ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/31.03.2022.T/FM.10.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

MATRASULOV JASURBEK DAVRONBEK O‘G‘LI

**PAST O‘LCHAMLI SODDA KVANT TIZIMLARI VA STOXASTIK
JARAYONLARNING BOSHQARILADIGAN ADIABATIK
EVOLYUTSIYASINI MODELLASHTIRISH**

05.01.07 – Matematik modellashtirish. Sonli usullar va dasturlar majmui (fizika-matematika fanlari)

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

TOSHKENT – 2024

Falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2023.2.PHD/FM860 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Falsafa doktori dissertatsiyasi Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetida bajarilgan. Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (xulosa)) Ilmiy kengashning internet sahifasida (www.ifar.uz) va “Ziyonet” axborot-ta’lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:

Yusupov Jambul Ruslonovich
fizika-matematika fanlari doktori

Rasmiy opponentlar:

Polvonov Satimboy Rajapovich
fizika-matematika fanlari doktori, professor
Kolovskiy Andrey Radievich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Yetakchi tashkilot:

Samarqand Davlat universiteti

Dissertatsiya himoyasi “TIQXMMI” Milliy tadqiqot universiteti huzurida Fundamental va amaliy tadqiqotlar instituti huzuridagi ilmiy darajalar beruvchi DSc.03/31.03.2022.T/FM.10.04 raqamli ilmiy kengashning 2024-yil «25» oktabr soat 16⁰⁰ dagi majlisida bo‘lib o‘tadi (Manzil: 100000, Toshkent shahri, Qori Niyoziy ko‘chasi 39-uy, Fundamental va amaliy tadqiqotlar instituti, 108-katta majlislar zali; Tel.: +99871 237-09-61.; e-mail: info@ifar.uz).

Dissertatsiya bilan “TIQXMMI” Milliy tadqiqot universiteti huzuridagi fundamental va amaliy tadqiqotlar instituti Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (8 raqami bilan ro‘yxatga olingan). Manzil: 100000, Toshkent shahri, Qori Niyoziy ko‘chasi, 39-uy, Fundamental va amaliy tadqiqotlar instituti, 108-katta majlislar zali; Tel.: +99871 237-09-61.

Dissertatsiya avtoreferati 2023-yil “19” iyun kuni tarqatildi.
(2023-yil «17» iyundagi 8 raqamli reestr bayonnomasi.)

B.J. Ahmedov

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi,
fizika-matematika fanlari doktori, professor

E.X. Karimbayev

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy
kotibi, fizika-matematika fanlari bo‘yicha
falsafa doktori (PhD)

B.M. Narzilloyev

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash
qoshidagi Ilmiy seminar raisi, fizika-
matematika fanlari doktori, yetakchi ilmiy
xodim

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Tadqiqot ishining dolzarbligi va zarurati. So‘nggi o‘n yillikda butun dunyoda olib borilayotgan jadal ilmiy va amaliy tadqiqotlar zamonaviy kvant texnologiyalarining asosini tashkil etuvchi turli kvant materiallari va qurilmalarida qo‘llash istiqboliga ega bo‘lgan kvant jarayonlarini boshqarish va manipulyatsiya qilish usullarini ishlab chiqishga qaratilgan. Aynan shunday texnologiyalarni joriy etish orqali nano- va kvant texnologiyalaridagi zamonaviy mexanik, elektron, optik, issiqlik va boshqa qurilmalarning resurs tejamkorligi va miniatyurizatsiyasida sezilarli yaxshilanishlar kutilmoqda. Bunday maqsadga erishish kvant jarayonlarining evolyutsiyasini boshqarish muammosini hal qilish imkonini beradigan, kvant rejimida sodir bo‘ladigan fundamental jarayonlarning mexanizmlarini chuqur tushunishni talab qiladi. Va buni, o‘z navbatida, yuqorida qayd etilgan jarayonlarning kvant evolyutsiyasining fizika nuqtai nazaridan maqbul va samarali matematik modellarini ishlab chiqmasdan amalga oshirib bo‘lmaydi. Aynan shunday modellarni ishlab chiqish va ulardan foydalanish, kvant materiallari va rivojlangan funksional qurilmalarni ishlab chiqish imkonini beradi. Kvant jarayonlarini boshqarishning samarali usullaridan biri yapon olimlari K. Nakamura va S. Masuda tomonidan ilgari surilgan kvant tizimining tezlashtirilgan (sekinlashtirilgan) evolyutsiyasi deb ataladigan algoritmdir.

Hozirgi kunda, jahonda Shredinger tenglamalari bilan tavsiflangan kvant tizimining tezlashtirilgan (sekinlashtirilgan) evolyutsiyasini turli kontekstlarda va turli xil yondashuvlarda o‘rganilmoqda. Shunday yo‘nalishlardan biri adiabatikaga eng qisqa yo‘l bo‘lib, undagi maqsad sekin evolyutsiya bilan berilgan manzilga tezda erishishdir. So‘nggi o‘n yil ichida bir qator olimlar tomonidan past o‘lchamli kvant tizimlarining adiabatik kvant dinamikasini boshqarishning turli xil versiyalari taklif qilingan. Ushbu nuqtai nazardan dinamik konfaynment orqali kvant evolyutsiyasining tezlashishini, Shredinger tenglamasida nostatsionar chegaraviy shartlarining parametrlarini manipulyatsiya qilish orqali amalga oshirish alohida qiziqish uyg‘otadi. Bunday tizimlarda kvant tizimining evolyutsiyasini boshqarish uchun vosita sifatida konfaynment parametrlarini to‘g‘ri sozlash ishlatiladi.

Mamlakatimizda ham nazariy fizika, ham amaliy matematika nuqtai nazaridan past o‘lchamli funksional materiallarni o‘rganishda yuzaga keladigan turli kvant tizimlari va jarayonlarini modellashtirishga alohida e‘tibor qaratilmoqda. Jumladan, bu yo‘nalishda yuqori aniqlikdagi va stabil diskretlash usullaridan foydalanishni talab qiladigan turli potentsial va chegaraviy shartlar bilan berilgan nostatsionar kvant mexanik to‘lqin tenglamalarining sonli yechimlari asosida matematik modellarni ishlab chiqish alohida o‘rin tutadi. “Funksional analiz, algebra, differensial tenglamalar, matematik fizika, matematik modellashtirish, hisoblash matematikasi va diskret matematika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” kabi ustuvor yo‘nalishlar bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish Respublika universitetlari va Akademik Tadqiqot Institutlarining ilmiy guruhleri, kafedralari va laboratoriyalari kabi bir qator tashkilotlarning usutvor vazifalaridan biridir. Rezolyutsiyaning bajarilishini ta‘minlashda differensial tenglamalarni grafiklarda analitik va sonli yechish nazariyasini rivojlantirish muhim ahamiyatga ega.

Mazkur dissertatsiya izlanishlari ma'lum darajada O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi "O'zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo'yicha Harakatlar strategiyasi to'g'risida"gi PF-4947-sonli Farmonida, 2012 yil 21 martdagi "Zamonaviy axborot-kommunikasiya texnologiyalarini yanada joriy etish va rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi PQ-1730-sonli Qarori, 2010 yil 15 dekabrda "2011-2015 yillarda O'zbekiston Respublikasi sanoatini rivojlantirishning ustuvor yo'nalishlari to'g'risida"gi PQ-1442-sonli Qarori, 2017 yil 17 fevraldagi "Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi PQ-2789-sonli Qarori va O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2012 yil 1 fevraldagi "Joylarda komp'yuterlashtirish va axborot-kommunikasiya texnologiyalarini yanada rivojlantirish uchun shart-sharoitlar yaratish chora-tadbirlari to'g'risida"gi №24-sonli Qarorida, shuningdek, mazkur faoliyatga bag'ishlangan boshqa xuquqiy-me'yoriy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishga xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga mosligi. Mazkur tadqiqot ishi O'zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalar rivojlanishining "Matematika, mexanika va informatika" ustuvor yo'nalishi doirasida bajarilgan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta'lim yoki ilmiy-tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalarini bilan bog'liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti REP-05032022/235 «Ultrafast phenomena and vacuum effects in relativistic artificial atoms created in graphene», F-2021-440 «Tarmoqlangan past o'lchamli strukturalarda kvant transporti va kvazizarralar dinamikasi: Shaffof kvant tarmoqlarini modellashtirish va dizaynlashtirish» ilmiy-tadqiqot loyihalari doirasida O'zbekiston Milliy universitetining ilmiy-tadqiqot ishlari rejasi asosida amalga oshirildi.

Dissertatsiya mavzusi bo'yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi. Kvant tizimlari evolyutsiyasini nazorat qilish va kvant jarayonlarini tezlashtirish usullarini ishlab chiqishga qaratilgan ilmiy tadqiqotlar dunyoning yetakchi ilmiy markazlari va oliy o'quv yurtlarida, jumladan Basklar davlati universiteti (Ispaniya), Lyuksemburg universiteti (Lyuksemburg), Ibroniya universiteti (Isroil), Nyukasl universiteti (Buyuk Britaniya), Bengkulu universiteti (Indoneziya), Merilend universiteti (AQSh), Maks Plank nomidagi murakkab tizimlar fizikasi instituti (Germaniya), O'zbekiston Milliy universiteti (O'zbekiston) kabi ilmiy tashkilotlarda olib borilmoqda.

Butun dunyoda kvant tizimlari evolyutsiyasini analitik va raqamli modellashtirish va past o'lchamli tizimlarning kvant dinamikasini boshqarish bo'yicha bir qator ustuvor yo'nalishlarda jadal ilmiy va amaliy tadqiqotlar olib borilmoqda, jumladan: kvant jarayonlarining evolyutsiyasini manipulyatsiya qilish usullarini ishlab chiqish, kvant evolyutsiyasini tezlashtirish yoki sekinlashtirish metodlarini ishlab chiqish, shuningdek kvant jarayonlarining boshqariladigan evolyutsiyasini modellashtirish uchun kvant tizimlarining bir qator xususiyatlarni o'rganish amalga oshirilmoqda.

Butun dunyoda past o'lchamli tizimlarda kvant evolyutsiyasini o'rganish, shuningdek, nostatsionar Shredinger tenglamasi yordamida tavsiflanadigan kvant tizimlari dinamikasini tezlashtirish yoki sekinlashtirish algoritmlari ishlab chiqish

bo'yicha olib borilgan tadqiqotlar natijasida bir qator ilmiy yutuqlarga erishildi, jumladan: kvant evolyutsiyasini tezlashtirish yoki sekinlashtirishning matematik nazariyasining asoslari ishlab chiqildi, “fast-forward” algoritmiga (Osaka University) asoslangan kvant evolyutsiyasini boshqarishning bir qator samarali usullari taklif qilindi, “short cuts to quantum evolution” (University of the Basque Country) asosida kvant tizimlarining adiabatik evolyutsiyasini boshqarish metodlari ham o'rganildi, shuningdek, nostatsionar Dirak tenglamasi yordamida tavsiflanadigan relativistik tizimlarning kvant evolyutsiyasini tezlashtirish usuli ishlab chiqildi (University of Maryland), kvant tizimlarida adiabatik invariantlarni tezlashtirish usullari o'rganildi (University of Maryland), kvant tizimlarida tunnel effektining dinamikasini boshqarish usuli ishlab chiqildi (O'zbekiston Milliy universiteti), stoxastik issiqlik dvigatellarini manipulyatsiya qilish usullari tadqiq qilindi (O'zbekiston Milliy universiteti), spinlar dinamikasini boshqarish usuli ishlab chiqildi (Bengkulu universiteti).

Muammoning o'rganilganlik darajasi. Kvant tizimlar evolyutsiyasini manipulyatsiya qilish tushunchasi A. Emmanuilidu, M. Berri, S. Rays, M. Demirplak, K. Nakamura, S. Masuda va J. G. Muga asarlarida kiritilgan. Biroq, kvant adiabatik jarayonlar uchun kvant tizimlarining evolyutsiyasini manipulyatsiya qilish usullarini birinchi qo'llash K. Nakamura, S. Masuda, A. del Kampo, X. Chen ishlariga borib taqaladi. Keyinchalik Xi Chen, A. Ruschhaupt, S. Shmidt, A. del Campo, D. Guery-Odelin, J. G. Muga “shortcuts to adiabaticity” usuli yordamida atom sovutish modelini taqdim etdi. K. Nakamura, A. Xojaqulov, S. Masuda, S. Avazboyevlar an'anaviy va adiabatik rejimlarda kvant tunnellar jarayonini tezlashtirish usullarini taklif qildilar. S. Masuda, U. Gungordu, X. Chen, T. Ohmi, M. Nakaxara Bose-Eynshteyn kondensatlarida topologik girdoblar hosil bo'lishini tezlashtirish yo'llarini ishlab chiqdilar. Stoxastik issiqlik dvigatellarini tezlashtirish muammosi birinchi marta K. Nakamura, Y. Izumida tomonidan ko'rib chiqilgan. Tezlashtirilgan dinamik kvant tutilishining termodinamik xossalari K. Nakamura, G. Babajanova, A. del Kampo, J. Goold, M. Paternostro tomonidan o'rganilgan. Klassik adiabatik invariant uchun tezlanish sxemasi C. Jarzinski, S. Deffner, A. Patra, Y. Subasi tomonidan taklif qilingan. S. Deffner relyativistik kvant jarayonlari dinamikasini tezlashtirish muammosini ko'rib chiqdi. Spin dinamikasini tezlashtirish muammosini I. Setiawan, B.E. Gunara, S. Masuda, K. Nakamura ko'rib chiqdilar.

Tadqiqot ishining maqsadi. Ushbu dissertatsiyaning maqsadi kvant tizimlarining tezlashtirilgan va sekinlashtirilgan adiabatik evolyutsiyasini modellashtirish va taklif qilingan matematik modellarni kvant issiqlik dvigatellariga qo'llashdan iborat. Tadqiqotning yana bir maqsadi stoxastik tizimlarning boshqariladigan evolyutsiyasini modellashtirishdir.

Tadqiqot ishining vazifalari:

1. Kvant qutisidagi kvant gazlarining boshqariladigan adiabatik evolyutsiyasini modellashtirish;
2. Past o'lchamli kvant tizimlarining evolyutsiyasini tezlashtirish va sekinlashtirish shartlarini aniqlash;
3. Dinamik konfaynment ostidagi tezlashtirilgan adiabatik kvant evolyutsiyasini modellashtirish;

4. Stoxastik issiqlik dvigatelining matematik modelini qurish;
5. Tarmoqlangan past o'lchamli tuzilmalarda Broun zarrasining dinamikasini modellashtirish;
6. Past o'lchamli tizimlarda kvant evolyutsiyasini tezlashtirish uchun adiabatik eng qisqa yo'lning (adiabatiklikka qisqartmalar) matematik modelini qurish.

Tadqiqot ishining ob'ekti: past o'lchamli kvant tizimlari, dinamik konfaynment ostidagi kvant ideal gaz, stoxastik issiqlik dvigateli, tarmoqlangan strukturalardagi Broun zarrasi.

Tadqiqot ishining predmeti: kichik o'lchamli kvant sistemalarining evolyutsiyasini tezlashtirish va sekinlashtirish usullarini ishlab chiqish, dinamik konfaynmentda qaralyotgan tizimlarning adiabatik evolyutsiyasini boshqarish, stoxastik issiqlik mashinasi matematik modelini ishlab chiqish, tarmoqlangan kichik o'lchamli tizimlarda Broun harakatini boshqarish.

Tadqiqot ishining usullari: ushbu dissertatsiyada Shredinger, issiqlik, Kramers va Fokker-Plank tenglamalarini analitik va sonli yechish usullari qo'llanildi.

Tadqiqot ishining ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

Dinamik konfaynmentda past o'lchamli kvant tizimlarining evolyutsiyasini tezlashtirish (sekinlashtirish) usuli taklif etiladi;

Evolyutsiyani tezlashtirish jarayonini eksperimental ravishda amalga oshirish imkonini beruvchi "Tezlashtiruvchi potentsial" ning aniq ko'rinishi olindi;

Stoxastik issiqlik dvigatelining matematik modeli va uning ishlash jarayoni va evolyutsiyasini tezlashtirish orqali uning ishlashini boshqarish usuli taklif qilindi;

Past o'lchamli tarmoqlangan tizimlarda boshqariladigan Broun harakatining matematik modeli taklif qilindi;

Dinamik konfaynmentda past o'lchamli tizimlarning issiqlik uzatishni tezlashtirish usuli ishlab chiqilgan;

Dinamik konfaynmentdagi kvant ideal Fermi gazi uchun yangi holat tenglamalari olindi.

Tadqiqot ishining amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

vaqtga bog'liq chegaraviy shartlar bilan berilgan nostatsionar Shredinger tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalari va metrik graflardagi Fokker-Plank tenglamalari uchun chekli ayirmalar sxemalari taqdim etildi;

past o'lchamli kvant tizimlarining tezlashtirilgan evolyutsiyasi uchun Shredinger tenglamalasi va stoxastik issiqlik dvigatelining matematik modelini yaratish uchun Kramers tenglamasini sonli va analitik yechish usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqot ishining natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Ishda qo'llaniladigan yondashuv juda universal bo'lib, kvant evolyutsiyasini boshqarish nazariyasiga, shuningdek kvant ideal gaz fizikasiga hissa qo'shadi.

Olingan natijalarning amaliy ahamiyati ulardan issiqlik dvigatellarini klassik va kvant rejimlarida modellashtirish, past o'lchamli tizimlarining sodda kvant evolyutsiyani tezlashtirish va sekinlashtirish usullarini ishlab chiqish, shuningdek, past o'lchamli tarmoqlangan strukturalarda Broun harakatini modellashtirishda

foydalanish imkoniyatini beradi. Bu muammolarning barchasi kvant texnologiyalari va stoxastik dinamika bilan bevosita bog'liq.

Tadqiqot ishining asosiy natijalari:

- 1) Past o'lchamli tizimlarda adiabatik kvant evolyutsiyasini tezlashtirish usuli taklif qilindi;
- 2) Past o'lchamli tizimlarda amalga oshirilgan stoxastik issiqlik dvigatelining matematik modeli taklif etildi;
- 3) Past o'lchamli tizimlarda diffuziyani boshqarish usuli taklif qilindi;
- 4) Metrik graflarda Fokker-Plank tenglamasining analitik yechimi olindi;
- 5) Past o'lchamli tarmoqlangan strukturalarda Broun harakatining modeli taklif qilindi.

Tadqiqot natijalarining amaliyotga joriy qilinishi. “Quantum gas in the fast forward scheme of adiabatically expanding cavities: Force and equation of state” ilmiy natijalariga asoslanib:

to'liq funksiyasining analitik ifodasi quyidagi xorijiy ilmiy ishlarda (Philosophical Transactions of Royal Society A, Volume 380, 20210278, November 2022; Reviews of Modern Physics, Volume 91, 045001, October 2019; Physical Review A, Volume 99, 062116, June 2019; Physical Review E, Volume 102, 012129, July 2020; Applied Mathematics Letters, Volume 143, 108684, September 2023) kvant kuchi, kinetik energiya, ichki energiya kabi fizik kattaliklarning o'rtacha qiymatini hisoblash uchun qo'llanilgan. Ilmiy natijani qo'llash qattiq va yumshoq devorlarli dinamik konfaynmentdagi kvant ideal gazining qayta qurish modelini yaratishga imkon berdi;

“Fast-forward approach to stochastic heat engine” ilmiy natijalariga asoslanib:

Maqolada izotermik va adiabatik jarayonlarni tezlashtirish uchun olingan potentsial quyidagi xorijiy ilmiy ishlarda (Frontiers in Physics, 16-jild, 33202, dekabr 2021; Physical Review Letters, jild 128, 230603, 2022 yil iyun; Physical Review, 054108, 2022 yil noyabr; Statistik mexanika jurnali: nazariya va eksperiment, jild 2020, 093207, 2020 yil; Fizika sharhi E, 106-jild, 024105, avgust 2022; Fizika sharhi E16, 2022-yil avgust; Tadqiqotni ko'rish, 4-jild, 023157, 2022 yil may; The European Physical Journal Plus, jild 137, 1011, 2022 yil sentyabr; Physical Review E, 103-jild, 032146, 2021 yil mart; The European Physical Journal B, 2-jild 2021-jild; Fizikadagi taraqqiyot haqida, 86-jild, 035902, 2023 yil yanvar) stoxastik issiqlik dvigatelining termodinamik xususiyatlarini o'rganishda qo'llanilgan.

Tadqiqot ishi natijalari asosida ikkita “Моделирование случайных процессов с использованием уравнения Фоккера-Планка на метрических графах” (DGU 2022 2974, 05/23/2022) va “Программный комплекс для моделирования броуновского движения в сетях по методу Фоккера-Планка” (DGU 20237477, 18/10/2023) dasturiy mahsulot uchun O'zbekiston Respublikasi Adliya vazirligi huzuridagi Intellektual mulk agentligi tomonidan ro'yxatga olingan sertifikatlar olingan.

Tadqiqot natijalarini aprobatsiya qilish: tadqiqot natijalari 5 ta ilmiy-amaliy konferensiyalarda, jumladan 1 ta respublika va 4 ta xalqaro konferensiyalarda, shuningdek, Dyusseldorf universitetining Nazariy fizika institutida va Anqara universiteti Fizika fakultetida o‘tkazilgan ilmiy seminarlarda sinovdan o‘tkazildi.

Tadqiqot natijalarining chop etilganligi: tadqiqot natijalari bo‘yicha xalqaro jurnallarda 5 ta ilmiy maqola chop etilgan, bulardan 4 tasi SCOPUS ma‘lumotlar bazasiga kiradi va 4 ta konferensiya tezislari chop etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiyaning tuzilishi kirish, to‘rt bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati va ilovalardan iborat. Dissertatsiya hajmi 110 bet.

DISSERTATSIYANING ASOSIY QISMI

Kirishda O‘zbekiston Respublikasi fan va texnikasini rivojlantirishning ustuvor yo‘nalishlarini tadqiq qilishdan kelib chiqqan holda dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va talabi asoslanadi, maqsad va vazifalari, shuningdek tadqiqot ob‘ekti va predmeti shakllantiriladi, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari taqdim qilinadi, olingan natijalarning ishonchligini asoslanadi, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyatini ochib beriladi, tadqiqot natijalarini amaliyotga tatbiqi ro‘yxati, chop etilgan ishlar to‘g‘risidagi ma‘lumotlar va dissertatsiya ishining tuzilishi keltirildi.

“Kvant tizimlari evolyutsiyasini tezlashtirish va sekinlashtirish usullari” deb nomlangan birinchi bobda kvant evolyutsiyasini boshqarish muammosining hozirgi holati, dissertatsiya vazifalarining dolzarbliligi tavsifi keltirilgan, shuningdek Shredinger tenglamasi doirasida kvant evolyutsiyasini tezlashtirish va sekinlashtirish nazariyasi, xususan, "fast forward" algoritmi batafsil taqdim etildi.

“Adiabatik ravishda kengayib borayotgan nano o‘lchamli bo‘shliqdagi kvant gazning tezlashtirilgan evolyutsiyasi” deb nomlangan ikkinchi bob dinamik konfaynmentdagi ideal gazning tezlashtirilgan kvant evolyutsiyasini modellashtirishga bag‘ishlangan. Unda, xususan, vaqt bo‘yicha adiabatik o‘zgaruvchan kvant tizimining evolyutsiyasini tezlashtirish algoritmi taklif etiladi.

Xususan, silindrsimon bo‘shliqda joylashgan ideal gazning klapan bilan harakatlanuvchi adiabatik kvant evolyutsiyasini tezlashtirish sxemasi (usuli) taklif etilgan. Bir o‘lchamli tizimda dinamik konfaynment vaqtga bog‘liq bo‘lmagan Shredinger tenglamasi bilan tavsiflanuvchi statsionar (lahzali) ψ_0 kvant holatini hosil qiluvchi va sekin o‘zgaruvchan (vaqt bo‘yicha) V_0 potentsial tomonidan yaratilgan deb faraz qilamiz. Umumiy holatda, ya‘ni uzoq vaqt davomida tizimning evolyutsiyasi nostatsionar Shredinger tenglamasi yordamida tavsiflanadi.

Ushbu yondashuv doirasida biz sekin o‘zgaruvchan potentsial tomonidan yaratilgan "deformatsiyalanuvchi" tuzoqda joylashgan kvant tizimini ko‘rib chiqamiz, bu yerda deformatsiya $R(t)$ potentsial parametrining o‘zgarishi natijasida yuzaga keladi, uning adiabatik evolyutsiyasi quyidagi munosabat yordamida beriladi

$$R(t) = R_0 + \epsilon t,$$

bunda $\epsilon \ll 1$, o'sish koeffitsienti va uning kichikligi tufayli $R(t)$ ning sezilarli o'zgarishini kuzatish uchun yetarlicha uzoq vaqt $T = O\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$ talab qilinadi. Bunday kvant tizimining evolyutsiyasi quyidagicha berilgan, statsionar bo'lmagan bir o'lchamli Shredinger tenglamasi yordamida tavsiflanadi:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_0}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi_0 + V_0(x, R(t)) \psi_0,$$

bu yerda tashqi elektromagnit maydon bilan o'zaro ta'sir yo'q deb taxmin qilinadi. Keyin statsionar tizimga tegishli bog'langan holatlar quyidagicha berilgan Shredinger tenglamasi yordamida tavsiflanadi:

$$E \phi_0 = \hat{H}_0 \phi_0 \equiv \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V_0(x, R) \right] \phi_0.$$

Shuningdek, biz quyidagi ifoda orqali berilgan regulyarlashtirilgan kvant holatini kiritamiz

$$\begin{aligned} \psi_0^{reg} &\equiv \phi_0(x, R(t)) e^{i\epsilon \theta(x, R(t))} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E(R(t')) dt'} \\ &\equiv \phi_0^{reg}(x, R(t)) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E(R(t')) dt'}. \end{aligned}$$

Va shunga mos ravishda belgilangan potentsial –

$$V_0^{reg} \equiv V_0(x, R(t)) + \epsilon \tilde{V}(x, R(t)).$$

Bunda θ va \tilde{V} noma'lum hadlar, ψ_0^{reg} quyidagi nostatsionar Shredinger tenglamasini qanoatlantirishi orqali ϵ aniqlikda topilishi mumkin:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_0^{reg}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi_0^{reg} + V_0^{reg} \psi_0^{reg}.$$

$\phi_0(x, R(t))$ funksiyani, $\bar{\phi}_0(x, R(t))$ haqiqiy qiymatli amplituda va $\eta(x, R(t))$ fazalar orqali quyidagicha yozib olib

$$\phi_0(x, R(t)) = \bar{\phi}_0(x, R(t)) e^{i\eta(x, R(t))},$$

θ va \tilde{V} lar uchun quyidagi ifodalarga ega bo'lamiz:

$$\partial_x (\bar{\phi}_0^{-2} \partial_x \theta) = -\frac{m}{\hbar} \partial_R \bar{\phi}_0^{-2},$$

$$\frac{\tilde{V}}{\hbar} = -\partial_R \eta - \frac{\hbar}{m} \partial_x \eta \cdot \partial_x \theta.$$

Yuqoridagi so'nggi ikkita ifodadan birinchisini x bo'yicha integrallab, navbdatdagi ifodani olamiz:

$$\partial_x \theta = -\frac{m}{\hbar} \frac{1}{\phi_0^2} \int^x \partial_R \bar{\phi}_0^2 dx'.$$

Bizning vazifamiz tashqi elektromagnit maydon ta'sirida ψ_0^{reg} kvant holatining adiabatik dinamikasi evolyutsiyasini tezlashtirishdir. Buning uchun biz ushbu holatning tezlashtirilgan versiyasini navbatdagi shaklda kiritamiz:

$$\psi_{FF}^{(0)}(x, t) = \psi_0^{reg}(x, R(\Lambda(t))) = \phi_0^{reg}(x, R(\Lambda(t))) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E(R(\Lambda(t'))) dt'}$$

Bu yerda

$$R(\Lambda(t)) = R_0 + \epsilon \Lambda(t),$$

$\Lambda(t)$ esa ushbu ko'rinishda ifodalanadi:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \alpha(t') dt'.$$

Bu yerda $\alpha(t)$ – vaqt shkalasini oshirish omili, u $\alpha(0) = 1$, $\alpha(t) > 1$ ($0 \leq t \leq T_{FF}$), $\alpha(t) = 1$ ($t > T_{FF}$) ko'rinishda aniqlangan. T – bu $R(t)$ ni sezirarli o'zgarishga olib keluvchi juda uzoq vaqt deb hisoblab, uning T_{FF} ga bog'liqligini shu ko'rinishda yozib olamiz:

$$T = \int_0^{T_{FF}} \alpha(t) dt.$$

Ushbu vaqt oralig'ida ($0 \leq t \leq T_{FF}$), tezlashtirilgan $\alpha(t)$ ning aniq ifodasi quyidagicha yozilishi mumkin:

$$\alpha(t) = \bar{\alpha} - (\bar{\alpha} - 1) \cos\left(\frac{2\pi}{T/\bar{\alpha}} t\right),$$

bu yerda $\bar{\alpha}$ – bu $\alpha(t)$ ning o'rtacha qiymati, va bu $\bar{\alpha} = T/T_{FF}$ ko'rinishda aniqlanadi. Biz $\psi_{FF}^{(0)}$ to'lqin funksiyani, $A_{FF}^{(0)}(x, t)$ va $V_{FF}^{(0)}(x, t)$ maydon potentsiallarida zaryadlangan zarra uchun Shredinger tenglamasining yechimi deb tasavvur qilamiz:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{FF}^{(0)}}{\partial t} = H_{FF} \psi_{FF}^{(0)} \equiv \left(\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \partial_x - A_{FF}^{(0)} \right)^2 + V_{FF}^{(0)} + V_0^{reg} \right) \psi_{FF}^{(0)},$$

bu yerda qulaylik uchun biz birlik zaryad ($q = 1$) va birlik yorug'lik tezliklaridan ($c = 1$) foydalanamiz. Shundan so'ng elektr maydonini quyidagicha yozib olamiz

$$E_{FF} = -\frac{\partial A_{FF}^{(0)}}{\partial t} - \partial_x V_{FF}^{(0)}.$$

Bu o'z navbatida ϕ_0^{reg} to'lqin funksiya uchun quyidagi Shredinger tenglamasiga olib keladi:

$$i\hbar \frac{\partial \phi_0^{reg}}{\partial t} = \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \partial_x - A_{FF}^{(0)} \right)^2 \phi_0^{reg} + (V_{FF}^{(0)} + V_0^{reg} - E) \phi_0^{reg},$$

bu yerda $V_0^{reg} \equiv V^{reg}(x, R(\Lambda(t)))$.

ϕ_0^{reg} funksiyani $\bar{\phi}_0$ amplituda va $\eta + \epsilon\theta$ faza oqali quyidagicha yozib olib

$$\phi_0^{reg} \equiv \bar{\phi}_0(x, R(\Lambda(t))) e^{i[\eta(x, R(\Lambda(t))) + \epsilon\theta(x, R(\Lambda(t)))]},$$

$\psi_{FF}^{(0)}$ to'lqin funksiyasi uchun navbatdagi ifodaga ega bo'lamiz:

$$\psi_{FF}^{(0)} = \bar{\phi}_0(x, R(\Lambda(t))) e^{i\eta(x, R(\Lambda(t)))} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E(R(\Lambda(t'))) dt'}.$$

Yuqorida olingan natijalar, masalan, harakatlanuvchi devorga ega bo'lgan bir o'lchovli kvant qutisidagi kvant zarrasining evolyutsiyasini tezlashtirish uchun qo'llanilishi mumkin. Bunday tizimning modeli quyidagi nostatsionar Shredinger tenglamasi yordamida tavsiflanadi:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_0 \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi,$$

bu yerda to'lqin funksiya $\psi(x=0, t) = 0$ va $\psi(x=L(t), t) = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi. Devorning holatidagi o'zgarishni adiabatik deb hisoblaymiz, ya'ni $L(t) = L_0 + \epsilon t$, va bu yerda ϵ – kichik kattalik.

Bunday adiabatik kvant tizimining xos qiymatlari va xos funktsiyalari quyidagi ko'rinishga ega:

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2,$$

$$\phi_n = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left(\frac{\pi n}{L} x \right).$$

Yuqorida ko'rsatib o'tilgan amallarga ko'ra, biz regulyarlashtirish bosqichning fazasini quyidagicha aniqlashtirib olamiz:

$$\partial_x \theta = -\frac{m}{\hbar} \frac{1}{\phi_n^2} \partial_L \int_0^x \phi_n^2 dx = \frac{m}{\hbar} \frac{x}{L},$$

$$\theta = \frac{m}{2\hbar} \frac{x^2}{L}.$$

Kvant tizimning adiabatik evolyutsiyasini tezlashtirish uchun yuqorida keltirilgan algoritmni qo'llash tezlashtirilgan tizimning to'lqin funktsiyasi uchun quyidagi natijani beradi:

$$\psi_{FF} = \phi_n(x, L(\Lambda(t))) e^{i\frac{mL}{2\hbar L}x^2} e^{-i\frac{\hbar}{2m}(\pi n)^2 \int_0^t \frac{dt'}{L^2(\Lambda(t'))}}.$$

Bu yerda $L(\Lambda(t)) = L_0 + \int_0^t v(t')dt'$, va $v(t) = \bar{v} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{T_{FF}} t\right)$. Evolyutsiyani tezlashtiruvchi potentsial uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$V_{FF} = -\frac{m\ddot{L}}{2L}x^2,$$

va bu avvalgi tadqiqotlar natijalariga mos keladi.

"Stoxastik issiqlik dvigateling tezlashtirilgan evolyutsiyasi" deb nomlangan uchinchi bobda Karno printsipi asosida ishlaydigan stoxastik dvigatelning boshqariladigan faoliyati modeli taklif etiladi. Bunday issiqlik dvigatelning misoli sifatida, masalan, so'nggi o'n yil ichida katta qiziqish uyg'otgan Broun issiqlik dvigatellarini olish mumkin. Ushbu ishda biz garmonik potentsial bilan o'zaro ta'sir qiluvchi va yuqori (T_h)- va past (T_c)- haroratli ikkita termal rezervuar orasida harakatlanadigan Broun zarrasidan iborat stoxastik issiqlik dvigatelida izotermik jarayonning evolyutsiyasini tezlashtirish modelini taklif qildik.

Ushbu modelda $k_B T (= \frac{1}{\beta})$ haroratga ega rezervuar bilan aloqada bo'lgan va kengayuvchi (siqiluvchi) garmonik potentsial (ya'ni, kengligi vaqt o'zgarishi bilan o'zgarib turadigan parabolik o'ra bilan) bilan o'zaro ta'sir qiluvchi Broun zarrasi ko'rib chiqilgan. Bunday tizimning $\rho_0(x, p, t)$ taqsimot funktsiyasi uchun

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_p}{\partial p} = 0. \quad (1)$$

Bu yerda (J_x, J_p) quyidagicha aniqlangan ehtimolliklar oqimi

$$J_x = \left(\frac{\partial H_0}{\partial p} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial p}\right) \rho_0,$$

$$J_p = -\left(\frac{\partial H_0}{\partial x} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial x}\right) \rho_0 - \gamma \left(\frac{\partial H_0}{\partial p} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial p}\right) \rho_0. \quad (2)$$

Bu yerda $H_0 = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2} \lambda x^2$ – parabolik tuzoqdagi Broun zarrasi Gamiltoniani, λ – bikirlik koeffitsiyenti, va γ – ishqalanish koeffitsiyenti. Oxirgi ikkita ifodadan foydalanib, Kramers tenglamasini quyidagicha yozib olish mumkin

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} = \{H_0, \rho_0\} + \gamma \partial_p \left(\frac{\partial H_0}{\partial p} \rho_0 + \frac{1}{\beta} \partial_p \rho_0\right), \quad (3)$$

Bu yerda $\{\dots, \dots\}$ – Puasson qavslari. (3) tenglamaning oxirgi hadi $\frac{\gamma}{\beta}$ ga proporsionaldir va Lanjevin tenglamasida paydo bo'ladigan Gauss (oq) shovqini bilan bog'liq. Bikrlik koeffitsiyenti $\lambda = const$ bo'lgan hol uchun, qaralyotgan tizimning taqsimot funksiyasi ρ_0^{eq} Gauss ko'rinishga ega bo'ladi. Statsionar hol uchun $\partial_t \rho_0 = 0$ Kramers tenglamasi quyidagi yechimga ega bo'ladi

$$\rho_0^{eq} = \frac{\beta\sqrt{\lambda}}{2\pi} \exp(-\beta H_0(\lambda)), \quad (4)$$

va quyidagi normirovka shartini qanoatlantiradi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0^{eq}(x, p) dx dp = 1.$$

λ vaqt bo'yicha sekin o'zgaradigan holni, ya'ni kvazistatik holni ko'rib chiqamiz:

$$\lambda(t) \equiv \lambda_0 + \varepsilon t \quad (5)$$

Bu yerda $|\varepsilon| \ll 1$, va bu $\lambda(t)$ ning sezilarli o'zgarishini kuzatish uchun juda uzoq $T = O(\frac{1}{|\varepsilon|})$ vaqt talab qiladi.

Dastavval biz quyidagi ko'rinishda, regulyarlashtirilgan $\rho_0^{reg}(x, p; \lambda(t))$ taqsimot funksiyasini kiritib olamiz

$$\rho_0^{reg} = \exp[-\beta H_0(\lambda(t)) - \Gamma(\lambda(t))] \quad (6)$$

va bu yerda

$$H_0(\lambda(t)) \equiv \frac{p^2}{2} + \frac{\lambda(t)}{2} x^2, \\ \exp(-\Gamma(\lambda(t))) \equiv \frac{\beta\sqrt{\lambda(t)}}{2\pi}. \quad (7)$$

H_0 ga potentsial εh ni qo'shish orqali biz Kramers tenglamasining regulyarlashtirilgan versiyasini olishimiz mumkin:

$$\frac{\partial \rho_0^{reg}}{\partial t} = \{H_0 + \varepsilon h, \rho_0^{reg}\} + \gamma \partial_p (p \rho_0^{reg} + \frac{1}{\beta} \partial_p \rho_0^{reg}) + \varepsilon \gamma \partial_p (\rho_0^{reg} \frac{\partial h}{\partial p}). \quad (8)$$

Regulyarlashtirilgan taqsimot funksiyasi ρ_0^{reg} ushbu ifodani qanoatlantirishini

$$\partial_t \rho_0^{reg} = \frac{\partial \rho_0^{reg}}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \\ = \varepsilon \left[-\frac{\beta}{2} x^2 + \frac{1}{2\lambda} \right] \rho_0^{reg}, \quad (9)$$

va (8) tenglamaning ikki tarafini tenglashtirib quyidagi ifodalarni olamiz

$$\{H_0, \rho_0^{reg}\} + \gamma \partial_p(p\rho_0^{reg} + \frac{1}{\beta} \partial_p \rho_0^{reg}) = 0, \quad (10)$$

$$[-\frac{\beta}{2}x^2 + \frac{1}{2\lambda}]\rho_0^{reg} = \{h, \rho_0^{reg}\} + \gamma \partial_p(\rho_0^{reg} \partial_p h). \quad (11)$$

Quyidagi munosabatni hisobga olib $\partial_p \rho_0^{reg} = -\beta p \rho_0^{reg}$ va $\partial_x \rho_0^{reg} = -\beta \lambda x \rho_0^{reg}$, (11) tenglamani ushbu ko'rinishda yozib olamiz

$$-\frac{\beta}{2}x^2 + \frac{1}{2\lambda} = +\beta[\lambda x \partial_p h - p \partial_x h] - \gamma \beta p \partial_p h + \gamma \partial_{pp} h. \quad (12)$$

(12) tenglamaning yechimi quyidagi ko'rinishda faraz qilamiz

$$h = ap^2 + bpx + cx^2. \quad (13)$$

Buning natijasida biz algebraik tenglamar sistemasiniga kelamiz:

$$b + 2\gamma a = 0,$$

$$\lambda b = -\frac{1}{2},$$

$$2\lambda a - 2c - \gamma b = 0,$$

$$\frac{1}{2\lambda} - 2\gamma a = 0. \quad (14)$$

Ushbu sistemaning yechimlari quyidagi ko'rinishda bo'ladi $a = \frac{1}{4\gamma\lambda}$, $b = -\frac{1}{2\lambda}$, va $c = \frac{1}{4}(\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma}{\lambda})$. Bundan biz h uchun quyidagi ifodani olamiz

$$h = \frac{1}{4\gamma\lambda}p^2 - \frac{1}{2\lambda}px + (\frac{1}{4\gamma} + \frac{\gamma}{4\lambda})x^2. \quad (15)$$

Yuqorida olingan natija ε dagi birinchi yaqinlashuvga tegishli ekanligi, ya'ni u ikkinchi tartib ε^2 ni hisobga olmasligiga e'tibor beramiz.

Bizning vazifamiz (9) tenglama orqali tavsiflanadigan tizimning evolyutsiyasini tezlashtirishdan iborat. Bu muammoni hal qilishning samarali usullaridan biri (t) vaqtni o'zgaruvchisini bu "tezlashtirilgan" $\Lambda(t)$ vaqtga almashtirishdir. Bu yerda biz $\alpha(t) \gg 1$ masshtab koeffitsientini kiritib, ($\Lambda(t)$) funksiyani quyidagicha aniqlashimiz mumkin:

$$\Lambda(t) = \int_0^t \alpha(t') dt'. \quad (16)$$

Tezlanish oraliqi $0 \leq t \leq T_{FF}$ bo'lganda, $\alpha(t)$ funksiyani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz $\alpha(t) = 1 + (\bar{\alpha} - 1)f(s)$, bu yerda $s \equiv \frac{t}{T_{FF}}$. $\bar{\alpha} (> 1)$. Bu yerda $f(s) (\geq 0)$ funksiya $f(0) = f(1) = \dot{f}(0) = \dot{f}(1) = 0$ ko'rinishda berilgan chegaraviy shartlarni

va $\bar{f} = \int_0^1 f(s')ds' = 1$ normirovka shartini qanoatlantiradi deb hisoblab, quyidagi ifodani olamiz

$$\alpha(t) = \bar{\alpha} - (\bar{\alpha} - 1)\cos\left(\frac{2\pi}{T_{FF}}t\right). \quad (17)$$

So'ngra, λ bikirlik koefitsiyentiining vaqtga bog'liqligini quyidagicha faraz qilamiz

$$\lambda(\Lambda(t)) = \lambda_0 + \varepsilon\Lambda(t). \quad (18)$$

Shunda ρ_{FF} tezashtirilgan tizim taqsimot funksiyasi quyidagi ko'rinishda ifodalanishi mumkin

$$\begin{aligned} \rho_{FF}(x, p, t) &\equiv \rho_0^{reg}(x, p; \lambda(\Lambda(t))) \\ &= \exp[-\beta H_0(\lambda(\Lambda(t))) - \Gamma(\lambda(\Lambda(t)))]. \end{aligned} \quad (19)$$

Bu ρ_{FF} taqsimot funksiyasi tezashtirilgan tizimning vaqt bo'yicha evolyutsiyasini tavsiflovchi quyidagi Kramers tenglamasini qanoatlantiradi:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{FF}}{\partial t} &= \frac{\partial \lambda}{\partial t} \frac{\partial \rho_{FF}}{\partial \lambda} = \varepsilon \alpha \frac{\partial \rho_{FF}}{\partial \lambda} \\ &= \varepsilon \alpha \{h, \rho_0^{reg}\} + \gamma \varepsilon \alpha \partial_p (\rho_0^{reg} \partial_p h). \end{aligned}$$

Kramers tenglamasini $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \bar{\alpha} \rightarrow \infty} \varepsilon \bar{\alpha} = \bar{v}$ (bu yerda $\bar{v} > 0$ ($\bar{v} < 0$) va $\varepsilon \rightarrow +0$ ($\varepsilon \rightarrow -0$)) limitda navbatdagi ko'rinishda yozib olish mumkin:

$$\frac{\partial \rho_{FF}}{\partial t} = \{H_0 + v(t)h, \rho_{FF}\} + \gamma \partial_p (p\rho_{FF} + \frac{1}{\beta} \partial_p \rho_{FF}) + \gamma \partial_p (\rho_{FF} \frac{\partial(v(t)h)}{\partial p}). \quad (20)$$

Bu yerda $v(t)$ tezlik va u $\alpha(t)$ funksiyasi orqali shunday ifodalanadi:

$$v(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \bar{\alpha} \rightarrow \infty} \varepsilon \alpha(t) = \bar{v} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi}{T_{FF}}t\right) \right). \quad (21)$$

Shunday ekan, $0 \leq t \leq T_{FF}$ oraliqda, bikirlik koefitsiyentii uchun quyidagi ifodani olamiz:

$$\begin{aligned} \lambda(\Lambda(t)) &= \lambda_0 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \bar{\alpha} \rightarrow \infty} \varepsilon \Lambda(t) = \lambda_0 + \int_0^t v(t')dt' \\ &= \lambda_0 + \bar{v} T_{FF} \left[\frac{t}{T_{FF}} - \frac{1}{2\pi} \sin\left(\frac{2\pi}{T_{FF}}t\right) \right]. \end{aligned}$$

Navbatdagi munosabat quyidagicha yoziladi

$$\lambda(0) = \lambda_0, \quad \lambda(T_{FF}) = \lambda_0 + \bar{v} T_{FF} \quad (22)$$

va quyidagi ifodani hisobga olib

$$\dot{\lambda}(0) = \dot{\lambda}(T_{FF}) = 0, \quad (23)$$

tezlashtirilgan tizim Gamiltoniani uchun ushbu ifodaga kelamiz:

$$H_{FF}(x, p, t) = H_0 + \dot{\lambda}h. \quad (24)$$

Yuqorida (24) tenglamada berilgan Gamiltonian va (19) tenglamada berilgan taqsimot funksiyasi yordamida stoxastik issiqlik dvigatelining ish W , issiqlik miqdori Q va ichki energiya E kabi termodinamik kattaliklarini hisoblay olamiz. Ishning o'rtacha qiymati navbatdagi ifoda orqali aniqlanadi

$$W = \int_0^{T_{FF}} dt \left\langle \frac{\partial H_{FF}}{\partial t} \right\rangle. \quad (25)$$

Quyidagi munosabatni hisobga olib

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial H_{FF}}{\partial t} \right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial H_{FF}}{\partial t} \rho_{FF} dx dp \\ &= \left(\frac{\dot{\lambda}}{2} - \frac{\gamma \dot{\lambda}^2}{4\lambda^2} + \ddot{\lambda} \left(\frac{\gamma}{4\lambda} + \frac{1}{4\gamma} \right) \right) \frac{1}{\beta \lambda} \\ &\quad + \left(\frac{\ddot{\lambda}}{4\gamma\lambda} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4\gamma\lambda^2} \right) \frac{1}{\beta}, \end{aligned} \quad (26)$$

ishni qaytar (W_{rev}) va qaytmas (W_{irr}) qismlarning yig'indisi ko'rinishida yozib olamiz:

$$W = W_{rev} + W_{irr} \quad (27)$$

Bu yerda

$$W_{rev} = \frac{1}{2\beta} \ln \lambda \Big|_0^{T_{FF}} = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{\lambda(T_{FF})}{\lambda_0} \quad (28)$$

va

$$W_{irr} = \left(\frac{\gamma}{8} \int_0^{T_{FF}} \frac{\ddot{\lambda}}{\lambda^2} dt + \frac{1}{4\gamma} \int_0^{T_{FF}} \frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} dt \right) \frac{1}{\beta}. \quad (29)$$

Yuqoridagi (29) tenglamada integrallarni hisoblab uni quyidagi sodda ko'rinishda yozib olamiz:

$$W_{irr} = \frac{\gamma k_B T}{8\lambda(0)T_{FF}} Z_2(\xi) + \frac{k_B T}{4\gamma T_{FF}} Z_1(\xi), \quad (30)$$

bu yerda

$$Z_n(\xi) \equiv \xi \int_0^1 \frac{2\pi \sin(2\pi s)}{[1 + \xi(s - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi s))]^n} ds. \quad (31)$$

Xuddi shunday tarzda ichki energiyani hisoblaymiz:

$$\begin{aligned}
E(t) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_{FF} \rho_{FF} dx dp \\
&= (1 + \lambda (\frac{1}{2\gamma\lambda} + \frac{\gamma}{4\lambda^2})) \frac{1}{\beta}.
\end{aligned} \tag{32}$$

To'rtinchi bobda **“Tarmoqlangan strukturalardi Broun harakati dinamikasini modellashtirish”** sarlavhasi ostida, graflardagi Fokker-Plank tenglamasi asosida past o'lchamli tarmoqlangan strukturalardagi Broun zarrasining modeli taklif qilingan. Model garmonik ossilyator uchun yozilgan bir o'lchamli Fokker-Plank tenglamasiga asoslanadi:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial x} (xf) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} f. \tag{33}$$

Bu yerda $f(x, t)$ – ehtimollik zichligi (yoki taqsimot funksiyasi), γ – ishqalanish koeffitsiyenti va $D = const$ – diffuziya koeffitsiyenti.

Boshlang'ich shart quyidagicha berilgan

$$f(x, 0) = \delta(x - x_0), \tag{34}$$

Fokker-Plank tenglamasining (33) cheksiz chiziqdagi yechimi quyidagicha ifodalanadi

$$f(x_0, x, t) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D(1-e^{-2\gamma t})}} \exp[-\frac{\gamma(x-e^{-\gamma t}x_0)^2}{2D(1-e^{-2\gamma t})}]. \tag{35}$$

Statsionar hol uchun ($\frac{\partial f}{\partial t} = 0$) yechim navbatdagi ifoda orqali beriladi

$$f = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D}} \exp[-\frac{\gamma x^2}{2D}]. \tag{36}$$

Fokker-Plank tenglamasining yechimi (35) ushbu saqlanish qonunini qanotlantiradi:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dx = 0. \tag{37}$$

Bu yerda biz Fokker-Plank tenglamasini metrik graflarda qaraymiz, u past o'lchamli tarmoqlangan strukturalarda Broun harakatini tavsiflaydi. Oddiylik uchun uchta qirradan iborat yulduzsimon grafni ko'rib chiqing. Zarrachaning x_j koordinatalarini grafning har bir qirradi e_j uchun yozib olamiz. Bu yerda e_1 qirrani $x_1 \in (-\infty, 0]$ oraliqda, $e_{2,3}$ qirralarni esa $x_{2,3} \in [0, +\infty)$ oraliqda ko'rib chiqamiz.

Yulduzsimon metrik graf uchun Fokker-Plank tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} = \gamma_j \frac{\partial}{\partial x} (xf_j) + D_j \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_j, \quad j = 1, 2, 3. \tag{38}$$

Bu yerda j – qirra raqami, D_j – har bir qirradagi diffuziya koeffitsiyenti, f_j – har bir qirradagi taqsimot zichligi. Fokker plank tenglamasini (38) graflarda yechish uchun,

grafning tuguniga chegaraviy shartlar qo'yish lozim. Bu yerda chegaraviy shartlarni yechimning vaznli saqlanishi:

$$\sqrt{\frac{D_1}{\gamma_1}} f_1(0, t) = \sqrt{\frac{D_2}{\gamma_2}} f_2(0, t) = \sqrt{\frac{D_3}{\gamma_3}} f_3(0, t), \quad (39)$$

va tok shaqlanishi qonuni (Kirxgof qoidasi) ko'rinishida beramiz:

$$D_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} = D_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + D_3 \frac{\partial f_3}{\partial x}. \quad (40)$$

Boshlang'ich shartni quyidagicha yoziladi

$$f_j(x, 0) = \delta(x - x_{0j}). \quad (41)$$

Bunday chegaraviy va boshlang'ich shartlar uchun (38) tenglamaning yechimini quyidagicha olamiz:

$$f_j(x_{0j}, x, t) = \sqrt{\frac{\gamma_j}{2\pi D_j(1-e^{-2\gamma_j t})}} \exp\left[-\frac{\gamma_j(x-e^{-\gamma_j t}x_{0j})^2}{2D_j(1-e^{-2\gamma_j t})}\right]. \quad (42)$$

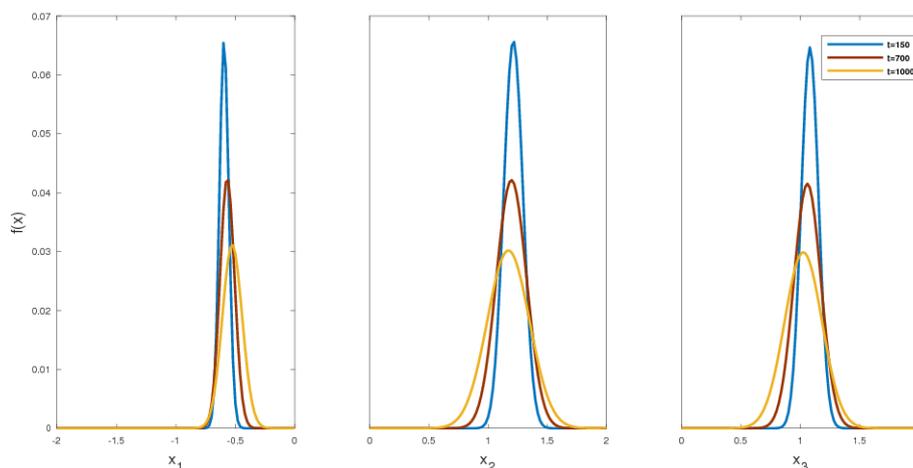
Diffuziya koeffitsiyentlari quyidagi yig'indi qoidasini qanoatlantiradi:

$$\frac{1}{\sqrt{D_1}} = \frac{1}{\sqrt{D_2}} + \frac{1}{\sqrt{D_3}}, \quad (43)$$

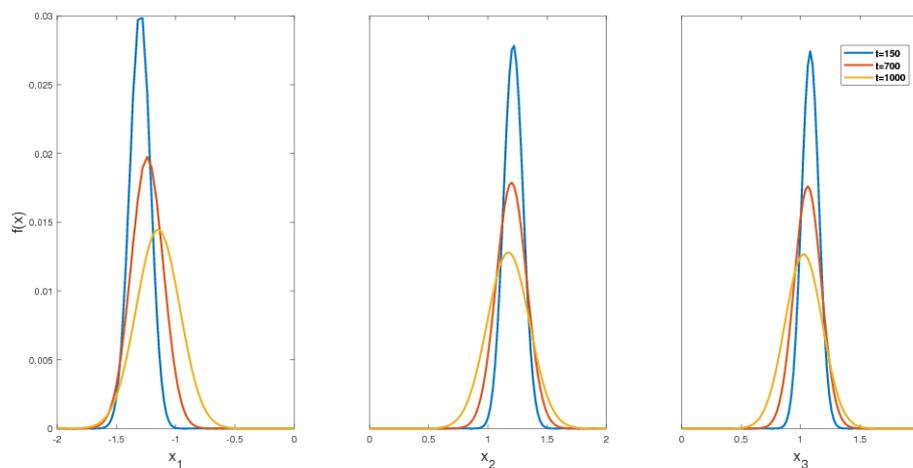
bu yerda $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma, x_{0j} = \pm\sqrt{D_j}$.

TEOREMA. Agar (43) yig'indilar qoidasi bajarilsa, u xolda (39) va (40) tugun chegaraviy shartlari graf tugunida shaffof chegaraviy shartga ekvivalent bo'ladi.

Yulduzsimon graf uchun yozilgan (38) Fokker-Plank tenglamasini aniq yechimini olish uchun (43) tenglamada berilgan yig'indilar qoidasi zarur va yetarli shartdir. Diffuziya koeffitsiyentlari uchun yozilgan (43) yig'indilar qoidasi bajarilgan hol uchun Fokker-Plank yechimlarining har xil vaqt oraliqlaridagi ($t = 150, t = 700$ и $t = 1000$) grafiklari 1-rasmda ko'rsatilgan,. Yig'indilar qoidasi bajarilmagan hol uchun (38) tenglamaning yechimlari grafiklari esa 2-rasmda keltirilgan, bunday hol uchun (38) tenglama faqat sonli usullar orqali yechiladi. Bu ishda (38) tenglamani sonli yechish uchun Crank-Nicolson diskretlash metodini qo'lladik. Ushbu grafiklarni solishtirib ularning o'rtasida sezilarli sifat va miqdoriy farqlarni kuzatish mumkin. 1-rasmda (yig'indilar qoidasi bajarilgan hol) taqsimot zichligi amplitudasi 2-rasmdagi (yig'indilar qoidasi bajarilmagan hol) taqsimot zichliklarining amplitudasidan ikki barobar katta.



1-rasm. Quyidagi qiymatlar uchun yulduzsimon graf uchun (38) tenglamani (43) qoida bajarilgan holda analitik yechib olingan taqsimot funksiyasi $f(x) : x_{01} = 0.7, x_{01} = 0.3, x_{01} = 0.5 \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1.5$ va $D_2 = 0.9, D_3 = 0.7$.



2-rasm Quyidagi qiymatlar uchun yulduzsimon graf uchun (38) tenglamani (43) qoida bajarilmagan holda sonli usulda yechib olingan taqsimot funksiyasi $f(x) : x_{01} = 0.7, x_{01} = 0.3, x_{01} = 0.5 \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1.5$ va $D_2 = 0.9, D_3 = 0.7$.

XULOSA

Ushbu dissertatsiya ishi past o'lchamli sodda kvant tizimlarning va stoxastik jarayonlarining boshqariladigan adiabatik evolyutsiyasini ularning evolyutsiyasini tezlashtirish yoki sekinlashtirish yo'li bilan matematik modellashtirish masalalarini

yechishga bag'ishlangan. Dissertatsiyada olib borilgan tadqiqotlar asosida quyidagi xulosalar keltirilgan:

1. Devorlari adiabatik harakatlanuvchi (sekin) kvant qutidagi kvant ideal gazining tezlashtirilgan evolyutsiyasi matematik modeli taklif qilindi. Bunday tizimning termodinamik xarakteristikalarini hisobladi;
2. Past o'lchamli tizimlarda diffuziya jarayonlarini tezlashtirishning matematik modeli taklif qilindi;
3. Past o'lchamli tizimlarda stoxastik issiqlik dvigatelining matematik modeli taklif qilindi;
4. Kengligi vaqtga bog'liq bo'lgan parabolik tuzoqdagi Broun zarrasining evolyutsiyasini tezlashtirish algoritmi ishlab chiqildi;
5. Evolyutsiyasi tezlashtirilgan stoxastik issiqlik dvigatelining termodinamik kattaliklari uchun analitik formulalar olindi;
6. Tarmoqlangan past o'lchamli strukturalarda Broun zarrasining matematik modeli taklif qilindi;
7. Fokker-Plank tenglamasining graflardagi analitik va sonli yechimlari olindi;
8. Metrik grafiklarda Fokker-Plank tenglamasining boshlang'ich chegaraviy masalalarini sonli yechish algoritmlari va dasturlar to'plami ishlab chiqildi.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/31.03.2022.T/FM.10.04 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ
УЧЕНОЙ СТЕПЕНИ ПРИ ИНСТИТУТ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ И
ПРИКЛАДНЫХ ИССЛЕДОВАНИЙ НАЦИОНАЛЬНОГО
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОГО УНИВЕРСИТЕТА «ТИИИМСХ»**

**НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА
МАТРАСУЛОВ ЖАСУРБЕК ДАВРОНБЕК ЎҒЛИ**

**МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМОЙ АДИАБАТИЧЕСКОЙ
ЭВОЛЮЦИИ ПРОСТЫХ КВАНТОВЫХ СИСТЕМ И
СТОХАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ В СИСТЕМАХ НИЗКОЙ
РАЗМЕРНОСТИ**

**05.01.07 – Математическое моделирование. Численные методы и комплексы
программ
(физико-математические науки)**

**АВТОРЕФЕРАТ РЪD ДИССЕРТАЦИИ
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

ТАШКЕНТ-2024

Тема диссертации докторская философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B2021.4.DSc/FM142.

Диссертация выполнена в Национальном Университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека. Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) и информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	Юсупов Жамбул Руслонович доктор физико-математических наук
Официальные оппоненты:	Коловский Андрей Радиевич доктор физико-математических наук, профессор Полвонов Сатимбой Ражапович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация	Самаркандский Государственный университет

Защита диссертации состоится «25» октября 2024 года в 1600 часов на заседании Научного совета DSc.03/31.03. 2022.T/FM.10.04 при институте Фундаментальных и прикладных исследований Национального исследовательского университета «ТИИИМСХ» (Адрес: 100000, г.Ташкент, улица Кори Ниязова 39, Тел.: +998 71 237-09-61; e-mail: info@ifar.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального исследовательского университета «ТИИИМСХ» за № 8 (Адрес: 100000, г.Ташкент, ул. Кори Ниязов, дом 39. Тел.: (+998971) 237-19-36, Факс: (+998971) 237-09-75, e-mail: info@ifar.uz).

Автореферат диссертации разослан «19» июня 2023 года.

(протокола реестра № 8 от «17» июня 2023 года.)

ВВЕДЕНИЕ (аннотация PhD диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Проводимые в мире за последнюю декаду интенсивные научные и практические исследования направлены на разработку методов управления и манипуляции квантовыми явлениями, имеющих перспективу применения в различных квантовых материалах и устройствах, составляющие основу современных квантовых технологий. Именно через внедрение подобных технологий ожидается значительное улучшение ресурсосбережения и миниатюризация современных механических, электронных, оптических, тепловых и других устройств, в нано- и квантовых технологиях. Достижение подобной цели требует глубокого понимания механизмов фундаментальных процессов, происходящих в квантовом режиме, позволяющих решить проблему управляемой эволюции квантовых явлений. А это, в свою очередь невозможно без разработки физически приемлимых и эффективных математических моделей квантовой эволюции вышеупомянутых процессов. Именно развитие и использование подобных моделей позволяют разрабатывать квантовые материалы и приборы с заранее заданными свойствами. Одним из эффективных способов манипулирования квантовыми процессами является, так называемый метод ускоренной (замедленной) эволюции квантовой системы, ранее предложенный японскими учеными К. Накамура (K. Nakamura) и Ш. Масуда (S. Masuda).

В настоящее время в мире интенсивно изучается проблема ускорения (замедления) эволюции квантовой системы, описываемых уравнениями Шрёдингера в различных контекстах и в рамках множества подходов. Одним из таких направлений является кратчайший путь к адиабатичности (*shortcuts to adiabaticity*), в которой целью является быстрое достижение заданной цели с медленной эволюцией. Различные версии манипуляции адиабатической квантовой динамикой в квантовых системах низкой размерности были предложены рядом авторов за последние десять лет. Особый интерес в данном контексте представляет ускорение квантовой эволюции посредством динамического конфинмента путем манипулирования параметрами нестационарных граничных условий в уравнении Шрёдингера. В таких системах надлежащая настройка параметров конфинмента используется в качестве инструмента для манипулирования эволюцией квантовой системы.

В нашей стране особое внимание уделяется моделированию различных квантовых систем и процессов возникающих при изучении функциональных материалов низкой размерности, как в контексте теоретической физики, так и прикладной математики. В частности, особое место в данном направлении занимает разработка математических моделей на основе численных решений нестационарных квантово-механических волновых уравнений с различными потенциалами и граничными условиями, которые требуют использования высокоточных и стабильных методов дискретизации и численных алгоритмов. Проведение исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Функциональный анализ, алгебра,

дифференциальные уравнения, математическая физика, математическое моделирование, вычислительная математика и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика» является одним из основных задач деятельности ряда научных групп, кафедр и лабораторий вузов и академических НИИ республики. При обеспечении исполнения постановления важное значение имеет развитие теории аналитического и численного решения дифференциальных уравнений на графах.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит выполнению задач, предусмотренных Указами Президента Республики Узбекистан от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», Постановлениями Президента Республики Узбекистан №ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», №ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», №ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», №ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых документах, принятых в данной сфере.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий в Республике. Данная диссертационная работа выполнена в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации¹.

Научные исследования, направленные на разработку способов управления эволюции квантовых систем и ускорения квантовых процессов, проводятся в ведущих научных центрах и высших образовательных учреждениях мира, в том числе, University of the Basque Country (Испания), University of Luxembourg (Люксембург), Hebrew University (Израиль), Newcastle University (Великобритания), University of Bengkulu (Индонезия), University of Maryland (США), Max Planck Institute for the Physics of Complex Systems (Германия), Национальный Университет Узбекистана (Узбекистан).

В мире при аналитическом и численном моделировании эволюции квантовых систем и манипулирования квантовой динамикой в системах низкой размерности по ряду приоритетных направлений проводятся интенсивные научно-практические исследования, в том числе: изучение особенностей в ряде квантовых систем с целью разработки способов манипулирования эволюцией квантовых явлений, разработка методов

¹ Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации составлен на основе следующих источников: Universal Journal of Computational Mathematics, Journal of Physics, Physics Letters A, Physical Review A, Journal of Mathematical Physics, Advances in Applied Mathematics Journal of Differential Equations, <http://www.springer.com/mathematics>; <http://www.sciencedirect.com/science/jrnallbooks/sub/mathematics>.

ускорения или замедления квантовой эволюции (fast forward evolution), а также управляемого развития квантовых процессов.

В результате исследований, проведенных в мире по изучению квантовой эволюции в системах низкой размерности, а также разработки методов ускорения или замедления динамики квантовых систем, описываемых с помощью нестационарного уравнения Шрёдингера, получены ряд научных результатов, в том числе: были разработаны основы математической теории ускорения или замедления квантовой эволюции, предложены ряд эффективных способов манипулирования квантовой эволюции на основе так называемого fast forward подхода (Osaka University), исследованы также методы манипулирования адиабатической эволюцией квантовых систем, основанные на так называемой short cuts to quantum evolution (University of the Basque Country), разработан также способ ускорения квантовой эволюции в релятивистских системах, описываемых с помощью нестационарного уравнения Дирака (University of Maryland), изучались также методы ускорения адиабатических инвариантов в квантовых системах (University of Maryland) изучалась так называемые дифференциальных уравнений в частных производных на графах (Institute for Nuclear Physics of Czech Academy of Sciences), разработан метод манипулирования динамикой туннелирования в квантовых системах (Национальный Университет Узбекистана), исследованы методы манипулирования динамикой стохастических тепловых машин (Национальный Университет Узбекистана), разработан метод манипуляции динамикой спинов (University of Bengkulu).

Степень изученности проблемы. Понятие манипулирования эволюцией квантовых систем было введено в работах А. Emmanouilidou, М. Berry, S. Rice, М. Demirplak, К. Nakamura, S. Masuda и G. Muga. Однако, первое применение методов манипулирования эволюцией квантовых систем для квантовых адиабатических процессов (замедленных) восходит к работам К. Nakamura, S. Masuda, G. Muga, A. del Campo, X. Chen. Позже, Xi Chen, A. Ruschhaupt, S. Schmidt, A. del Campo, D. Guery-Odelin, J. G. Muga представили модель охлаждения атомов с применением кратчайшего пути к адиабатичности. К. Nakamura, А. Ходжакулов, S. Masuda, С. Авазбаев предложили методы ускорения процесса квантового туннелирование как в обычных, так и в адиабатических режимах. S. Masuda, U. Güngördü, X. Chen, T. Ohmi, M. Nakahara разработали способы ускорения образование топологических вихрей в Бозе-Эйнштейнских конденсатах. Проблема ускорения стохастических тепловых машин впервые были рассмотрены К. Nakamura, Y. Izumida. Термодинамические свойства ускоренного динамического квантового конфайнмента были изучены К. Nakamura, Г. Бабажанова, A. del Campo, J. Goold, М. Paternostro. Схема ускорения классического адиабатического инварианта была предложена С. Jarzynski, S. Deffner, А. Patra, Y. Subasi. S. Deffner рассмотрел проблему ускорения динамики релятивистских квантовых процессов. Задачу ускорения спиновой динамики рассмотрели I. Setiawan, В. Е. Gunara, S. Masuda, К. Nakamura.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего учебного заведения, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование проводилось в рамках научно-исследовательского проекта ОТ-Ф4-30 «Исследование качественных свойств двойной нелинейной кросс системы под влиянием конвективного смещения, переменной плотности, источника или поглощения», согласно плана научно-исследовательских работ Национального университета Узбекистана.

Целью исследования являются моделирование ускоренной и замедленной адиабатической эволюции квантовых систем и применение предложенных моделей к проблеме квантовых тепловых двигателей. Другой целью исследования является моделирование управляемой эволюции стохастических систем.

Задачи исследования:

моделирование управляемой адиабатической эволюции квантовых газов в квантовом ящике;

выявление условий для ускорения и замедления эволюции квантовых систем низкой размерности;

моделирование ускоренной адиабатической квантовой эволюции под динамическим конфайнментом;

построение математической модели стохастического теплового двигателя (stochastic heat engine);

моделирование динамики броуновской частицы в разветвленных структурах низкой размерности;

построение математической модели адиабатического кратчайшего пути (short cuts to adiabaticity) для ускорения квантовой эволюции в системах низкой размерности.

Объект исследования – квантовые системы низкой размерности, квантовый идеальный газ под динамическим конфайнментом, стохастический тепловой двигатель, броуновская частица в разветвленных структурах.

Предмет исследования – разработка методов ускорения и замедления эволюции квантовых систем низкой размерности, управление адиабатической эволюцией систем под динамическим конфайнментом, разработка модели стохастического теплового двигателя (stochastic heat engine), контроль броуновского движения в разветвленных системах низкой размерности.

Методы исследования. В данной диссертации использованы методы аналитического и численного решения уравнений Шрёдингера, теплопроводности, Крамерса, а также уравнения Фоккера-Планка.

Научная новизна диссертационного исследования, следующая:

Предложен метод ускорения (замедления) эволюции квантовых систем низкой размерности при наличии динамического конфайнмента;

Получен явный вид «ускоряющего потенциала», позволяющего экспериментально реализовать процесс ускорения эволюции;

Предложена математическая модель стохастического теплового двигателя и способ управления его работы путем ускорения эволюции

процесса его функционирования;

Предложена математическая модель управляемого броуновского движения в сетеподобных системах низкой размерности;

Разработан способ ускорения теплового переноса в системах низкой размерности при наличии динамического конфайнмента;

Получены новые уравнения состояния для квантового идеального Ферми газа при наличии динамического конфайнмента.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

построены устойчивые разностные схемы для начально-краевых задач нестационарного уравнения Шрёдингера с зависящими от времени граничными условиями, а также уравнения Фоккера-Планка на метрических графах;

методы численного и аналитического решения уравнений Шрёдингера наличия динамического конфайнмента были использованы для моделирования ускоренной эволюции простейших квантовых систем низкой размерности и создания модели стохастического теплового двигателя.

Достоверность результатов исследований обеспечивается применением аналитических и численных методов решения уравнений Шрёдингера, Фоккера-Планка и теплопроводности, а также разработкой устойчивых разностных схем для начально-краевых задач с динамическими граничными условиями. Модели ускоренной и замедленной эволюции квантовых систем, стохастического теплового двигателя и броуновского движения в разветвленных структурах проверены на соответствие известным физическим принципам и подтверждены численным моделированием. Полученные результаты согласуются с теоретическими предсказаниями, что подтверждает их научную обоснованность и практическую применимость.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Использованный в работе подход является достаточно универсальным и вносит свой вклад в теорию контролирования квантовой эволюции, а также и в физику квантового идеального газа.

Практическая значимость полученных результатов следует из возможности их применения в моделировании стохастических тепловых двигателей, как в классическом, так и в квантовом режимах, разработки способов ускорения и замедления эволюции простейших квантовых систем низкой размерности, а также моделировании броуновского движения в сетеподобных системах низкой размерности. Все эти проблемы имеют непосредственное отношение к квантовым технологиям и стохастической динамике.

Основные результаты:

- 1) Предложен способ ускорения адиабатической квантовой эволюции в системах низкой размерности;
- 2) Предложена математическая модель стохастического теплового двигателя, реализуемого в системах низкой размерности;
- 3) Предложен способ управляемой диффузии в системах низкой размерности;

- 4) Получено аналитическое решение уравнения Фоккера-Планка на метрических графах;
- 5) Предложена математическая модель броуновского движения в разветвленных структурах низкой размерности.

Внедрение результатов исследования. На основе научных результатов “Quantum gas in the fast forward scheme of adiabatically expanding cavities: Force and equation of state”:

аналитическое выражение волновой функции использовалось в зарубежных научных работах (Philosophical Transactions of Royal Society A, Volume 380, 20210278, November 2022; Reviews of Modern Physics, Volume 91, 045001, October 2019; Physical Review A, Volume 99, 062116, June 2019; Physical Review E, Volume 102, 012129, July 2020; Applied Mathematics Letters, Volume 143, 108684, September 2023) для расчета таких физических ожидаемых величин, как квантовая сила, кинетическая энергия, внутренняя энергия. Применение научного результата позволило построить математическую модель перестройки адиабатического квантового идеального газа, заключенного в динамический конфайнмент с твердыми и мягкими стенками;

На основе научных результатов “Fast-forward approach to stochastic heat engine”:

полученный в статье потенциал для ускорения изотермических и адиабатических процессов использованы в зарубежных научных работах (Frontiers in Physics, Volume 16, 33202, December 2021; Physical Review Letters, Volume 128, 230603, June 2022; Physical Review E, Volume 106, 054108, November 2022; Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, Volume 2020, 093207, September 2020; Physical Review E, Volume 106, 024105, August 2022; Physical Review E, Volume 106, 064117, December 2022; Physical Review Research, Volume 4, 023157, May 2022; The European Physical Journal Plus, Volume 137, 1011, September 2022; Physical Review E, Volume 103, 032146, March 2021; The European Physical Journal B, Volume 96, 22, February 2023; Reports on Progress in Physics, Volume 86, 035902, January 2023) изучить термодинамические характеристики стохастической тепловой машины.

По результатам научно-исследовательской работы получены два сертификата на программный продукт, «Моделирование случайных процессов с использованием уравнения Фоккера-Планка на метрических графах» (DGU 2022 2974, 23.05.2022) и «Программный комплекс для моделирования броуновского движения в сетях по методу Фоккера-Планка». уравнение» (№ DGU 20237477 от 18.10.2023) зарегистрированные Агентством интеллектуальной собственности при Министерстве юстиции Республики Узбекистан.

Апробация результатов исследования. Результаты исследований апробированы на 7 научно-практических конференциях, в том числе 1 республиканской и 6 международных конференциях, а также в научных семинарах института теоретической физики Дюссельдорфского университета имени Генриха Гейне, физического факультета университета Анкары и

математического факультета университета Вуппертал.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 6 научных статей в международных научных журналах, 5 из которых входят в базу данных SCOPUS. А также опубликованы 3 тезиса в сборниках международных конференций.

Структура и объем диссертации. Структура диссертации состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы, и приложений. Объем диссертации составляет 110 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во **введении** обосновывается актуальность и востребованность темы диссертации, в соответствии исследованиям приоритетных направлений развития науки и технологий Республики Узбекистан, формулируются цель и задачи, а также объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, обоснована достоверность полученных результатов, раскрыты теоретическая и практическая значимость полученных результатов, приведены перечень внедрений в практику результатов исследования, сведения по опубликованным работам и структуре диссертации.

В первой главе, под названием «**Способы ускорения и замедления эволюции квантовых систем**», изложены описание современного состояния проблемы управления квантовой эволюцией, обоснование актуальности задач диссертации, а также описание базовой теории ускорения и замедления эволюции в рамках уравнения Шредингера. В частности, были подробно представлена концепция «fast forward method».

Вторая глава, которая называется «**Ускоренная эволюция квантового газа в адиабатически-расширяющейся наноразмерной полости**», посвящена моделированию ускоренной квантовой эволюции идеального газа при наличии динамического конфайнмента. В ней, в частности, предложен алгоритм ускорения эволюции адиабатически меняющейся по времени квантовой системы.

В частности, предложена схема (метод) ускорения адиабатической квантовой эволюции идеального газа, находящегося в цилиндрической полости с движущимся клапаном. Предполагается, что динамический конфайнмент в одномерной системе создается медленно меняющимся (по времени) потенциалом V_0 , который генерирует стационарное (мгновенное) квантовое состояние ψ_0 , описываемое стационарным уравнением Шредингера. Эволюция системы в общем случае, то есть в течении длительного времени описывается с помощью нестационарного уравнения Шредингера.

В рамках такого подхода рассмотрим квантовую систему, находящуюся на “деформируемой” ловушке, создаваемой медленно меняющимся потенциалом, где деформация происходит в результате изменения параметра

потенциала $R(t)$, адиабатическая эволюция которого задана с помощью соотношения

$$R(t) = R_0 + \epsilon t,$$

где $\epsilon \ll 1$, коэффициент роста, благодаря малости которого необходимо достаточно длительное время $T = O\left(\frac{1}{\epsilon}\right)$, чтобы видеть ощутимое изменение $R(t)$. Эволюция такой квантовой системы описывается с помощью нестационарного одномерного уравнения Шрёдингера, имеющий вид:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_0}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi_0 + V_0(x, R(t)) \psi_0,$$

где предполагается отсутствия взаимодействия с внешним электромагнитным полем. Тогда, связанные состояния соответствующей стационарной системы описываются с помощью уравнения Шрёдингера, имеющий вид

$$E \phi_0 = \hat{H}_0 \phi_0 \equiv \left[-\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 + V_0(x, R) \right] \phi_0.$$

Также, мы введем так называемое регуляризованное квантовое состояние, задаваемое выражением

$$\begin{aligned} \psi_0^{reg} &\equiv \phi_0(x, R(t)) e^{i\epsilon \theta(x, R(t))} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E(R(t')) dt'} \\ &\equiv \phi_0^{reg}(x, R(t)) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E(R(t')) dt'} \end{aligned}$$

и соответствующий регуляризованный потенциал, определяемый как

$$V_0^{reg} \equiv V_0(x, R(t)) + \epsilon \tilde{V}(x, R(t)).$$

Неизвестные величины θ и \tilde{V} могут быть найдены из того факта, что ψ_0^{reg} удовлетворяет нестационарному уравнению Шрёдингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_0^{reg}}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi_0^{reg} + V_0^{reg} \psi_0^{reg},$$

с точностью до ϵ .

Представляя функцию $\phi_0(x, R(t))$ в виде, зависящей от вещественных амплитуды $\bar{\phi}_0(x, R(t))$ и фазы $\eta(x, R(t))$ в виде

$$\phi_0(x, R(t)) = \bar{\phi}_0(x, R(t)) e^{i\eta(x, R(t))}$$

для θ и \tilde{V} имеем:

$$\partial_x(\bar{\phi}_0^{-2} \partial_x \theta) = -\frac{m}{\hbar} \partial_R \bar{\phi}_0^{-2},$$

$$\frac{\tilde{V}}{\hbar} = -\partial_R \eta - \frac{\hbar}{m} \partial_x \eta \cdot \partial_x \theta.$$

Интегрируя первое уравнение по x , получаем

$$\partial_x \theta = -\frac{m}{\hbar} \frac{1}{\phi_0^2} \int^x \partial_R \overline{\phi_0^2} dx'.$$

Нашей задачей является ускорение эволюции адиабатической динамики квантового состояния ψ_0^{reg} путем воздействия внешним электромагнитным полем, для чего мы вводим ускоренную версию данного состояния в виде

$$\psi_{FF}^{(0)}(x, t) = \psi_0^{reg}(x, R(\Lambda(t))) = \phi_0^{reg}(x, R(\Lambda(t))) e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E(R(\Lambda(t'))) dt'}$$

где

$$R(\Lambda(t)) = R_0 + \epsilon \Lambda(t),$$

а величина $\Lambda(t)$ определяется как

$$\Lambda(t) = \int_0^t \alpha(t') dt'.$$

Здесь $\alpha(t)$ – фактор увеличения масштаба, определяемый как $\alpha(0) = 1$, $\alpha(t) > 1$ ($0 \leq t \leq T_{FF}$), $\alpha(t) = 1$ ($t > T_{FF}$). Полагая, что T является очень длинным временем, позволяющим ощутимое изменение адиабатической величины $R(t)$, его зависимость от T_{FF} может быть определена как

$$T = \int_0^{T_{FF}} \alpha(t) dt.$$

Явное выражение для $\alpha(t)$ в ускоряемом интервале времени ($0 \leq t \leq T_{FF}$) может быть записано в виде

$$\alpha(t) = \bar{\alpha} - (\bar{\alpha} - 1) \cos\left(\frac{2\pi}{T/\bar{\alpha}} t\right),$$

где $\bar{\alpha}$ – среднее значение $\alpha(t)$, определяемое как $\bar{\alpha} = T/T_{FF}$. Далее, мы будем полагать, что функция $\psi_{FF}^{(0)}$ является решением нестационарного уравнения Шрёдингера для заряженной частицы в поле потенциалов $A_{FF}^{(0)}(x, t)$ и $V_{FF}^{(0)}(x, t)$:

$$i\hbar \frac{\partial \psi_{FF}^{(0)}}{\partial t} = H_{FF} \psi_{FF}^{(0)} \equiv \left(\frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \partial_x - A_{FF}^{(0)} \right)^2 + V_{FF}^{(0)} + V_0^{reg} \right) \psi_{FF}^{(0)},$$

где для простоты и удобства мы брали единичный заряд ($q = 1$) и единичную скорость света ($c = 1$). Тогда электрическое поле может быть записано как

$$E_{FF} = -\frac{\partial A_{FF}^{(0)}}{\partial t} - \partial_x V_{FF}^{(0)}.$$

Это приводит нас к следующему уравнению Шрёдингера для ϕ_0^{reg} :

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial \phi_0^{reg}}{\partial t} &= \frac{1}{2m} \left(\frac{\hbar}{i} \partial_x - A_{FF}^{(0)} \right)^2 \phi_0^{reg} \\ &+ (V_{FF}^{(0)} + V_0^{reg} - E) \phi_0^{reg}, \end{aligned}$$

где $V_0^{reg} \equiv V^{reg}(x, R(\Lambda(t)))$.

Представляя функцию ϕ_0^{reg} в терминах амплитуды $\bar{\phi}_0$ и фазы $\eta + \epsilon\theta$ как

$$\phi_0^{reg} \equiv \bar{\phi}_0(x, R(\Lambda(t))) e^{i[\eta(x, R(\Lambda(t))) + \epsilon\theta(x, R(\Lambda(t)))]},$$

мы получим для $\psi_{FF}^{(0)}$ следующее явное выражение:

$$\psi_{FF}^{(0)} = \bar{\phi}_0(x, R(\Lambda(t))) e^{i\eta(x, R(\Lambda(t)))} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_0^t E(R(\Lambda(t'))) dt'}.$$

Полученные выше результаты могут быть применены, например, к ускорению эволюции квантовой частицы в одномерном ящике (quantum box) с движущейся стенкой. Модель такой системы описывается с помощью следующего нестационарного уравнения Шрёдингера:

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = H_0 \psi = -\frac{\hbar^2}{2m} \partial_x^2 \psi$$

где волновая функция удовлетворяет граничным условиям, заданных как $\psi(x=0, t) = 0$ и $\psi(x=L(t), t) = 0$. $L(t)$ – изменение положение стенки будем считать адиабатическим, то есть $L(t) = L_0 + \epsilon t$, где ϵ – малая величина.

Собственные значения и собственные функции такой адиабатической квантовой системы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\pi n}{L} \right)^2, \\ \phi_n &= \sqrt{\frac{2}{L}} \sin \left(\frac{\pi n}{L} x \right). \end{aligned}$$

Согласно вышеизложенному, для фазы регуляризованного состояния имеем:

$$\begin{aligned} \partial_x \theta &= -\frac{m}{\hbar} \frac{1}{\phi_n^2} \partial_L \int_0^x \phi_n^2 dx = \frac{m}{\hbar} \frac{x}{L}, \\ \theta &= \frac{m}{2\hbar} \frac{x^2}{L}. \end{aligned}$$

Применение вышеизложенного алгоритма ускорения квантовой эволюции адиабатической системы дает следующий результат для волновой функции ускоренной системы:

$$\psi_{FF} = \phi_n(x, L(\Lambda(t))) e^{i \frac{mL}{2\hbar L} x^2} e^{-i \frac{\hbar}{2m} (\pi n)^2 \int_0^t \frac{dt'}{L^2(\Lambda(t'))}},$$

где $L(\Lambda(t)) = L_0 + \int_0^t v(t') dt'$, а $v(t) = \bar{v} \left(1 - \cos \frac{2\pi}{T_{FF}} t\right)$. Для потенциала системы с ускоренной эволюцией, то есть для ускоряющего потенциала имеем

$$V_{FF} = -\frac{m \ddot{L}}{2L} x^2,$$

что находится в согласии с результатами предыдущих исследований.

В третьей главе, под названием «Ускоренная эволюция стохастического теплового двигателя» предложена математическая модель управляемого функционирования теплового двигателя, работающего на основе принципа Карно. Примером подобного теплового двигателя, например, может служить так называемый броуновский тепловой двигатель, который привлек значительный интерес в течении последней декады. В данной работе нами предложена математическая модель ускорения эволюции изотермического и адиабатического процессов в стохастическом тепловом двигателе, состоящей из броуновской частицы, взаимодействующей с гармоническим потенциалом и работающим между двумя тепловыми резервуарами высокой (T_h) и низкой (T_c) температуры.

Рассмотрим броуновскую частицу, контактирующую с резервуаром температуры $k_B T (= \frac{1}{\beta})$ и взаимодействующую расширяющимся (сжимающимся) гармоническим потенциалом-ловушкой (т.е. с параболической ямой с переменной по времени шириной). Функция распределения вероятности $\rho_0(x, p, t)$ такой системы удовлетворяет уравнению Крамерса, который имеет вид

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_p}{\partial p} = 0 \quad (1)$$

с вектором потока вероятности (J_x, J_p) , который определяется как

$$\begin{aligned} J_x &= \left(\frac{\partial H_0}{\partial p} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial p} \right) \rho_0, \\ J_p &= - \left(\frac{\partial H_0}{\partial x} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho_0 \\ &\quad - \gamma \left(\frac{\partial H_0}{\partial p} + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial p} \right) \rho_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь $H_0 = \frac{p^2}{2} + \frac{1}{2}\lambda x^2$ – гамильтониан (броуновской) частицы единичной массы в параболической ловушке, а λ – коэффициент жесткости, и γ – коэффициент трения, отвечающий за диссипацию. Используя последние два выражения, уравнение Крамерса можно записывать в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_0}{\partial t} &= \{H_0, \rho_0\} \\ &+ \gamma \partial_p \left(\frac{\partial H_0}{\partial p} \rho_0 + \frac{1}{\beta} \partial_p \rho_0 \right), \end{aligned} \quad (3)$$

где $\{\dots, \dots\}$ – скобка Пуассона. Последний член в данном уравнении пропорционален $\frac{\gamma}{\beta}$ и имеет связи с гауссовым (белым) шумом, возникающим в уравнении Ланжевена.

Для $\lambda = const$, мы имеем равновесное гауссовое распределение ρ_0^{eq} при $t \rightarrow \infty$. Полагая для этого случая $\partial_t \rho_0 = 0$, уравнение Крамерса имеет решение в виде

$$\rho_0^{eq} = \frac{\beta\sqrt{\lambda}}{2\pi} \exp(-\beta H_0(\lambda)), \quad (4)$$

которое удовлетворяет условию нормировки, $\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0^{eq}(x, p) dx dp = 1$.

Рассмотрим случай, когда λ меняется по времени очень медленно, то есть квазистатически:

$$\lambda(t) \equiv \lambda_0 + \varepsilon t \quad (5)$$

где $|\varepsilon| \ll 1$, которое означает, что требуется очень большой промежуток времени $T = O(\frac{1}{|\varepsilon|})$, для того, чтобы увидеть ощутимое изменение для $\lambda(t)$.

Введем регуляризованную функцию распределения, $\rho_0^{reg}(x, p; \lambda(t))$, определяемую как

$$\rho_0^{reg} = \exp[-\beta H_0(\lambda(t)) - \Gamma(\lambda(t))] \quad (6)$$

где

$$\begin{aligned} H_0(\lambda(t)) &\equiv \frac{p^2}{2} + \frac{\lambda(t)}{2} x^2, \\ \exp(-\Gamma(\lambda(t))) &\equiv \frac{\beta\sqrt{\lambda(t)}}{2\pi}. \end{aligned} \quad (7)$$

Добавляя потенциал εh в H_0 можем получить регуляризованную версию уравнения Крамерса:

$$\frac{\partial \rho_0^{reg}}{\partial t} = \{H_0 + \varepsilon h, \rho_0^{reg}\}$$

$$\begin{aligned}
& +\gamma \partial_p(p\rho_0^{reg} + \frac{1}{\beta} \partial_p \rho_0^{reg}) \\
& +\varepsilon\gamma \partial_p(\rho_0^{reg} \frac{\partial h}{\partial p}).
\end{aligned} \tag{8}$$

Здесь $h = h(x, p; \lambda)$ опрееляется таким образом, что ρ_0^{reg} в (6) удовлетворяет уравнению (8).

Учитывая что, ρ_0^{reg} удовлетворяет уравнению

$$\begin{aligned}
\partial_t \rho_0^{reg} &= \frac{\partial \rho_0^{reg}}{\partial \lambda} \frac{d\lambda}{dt} \\
&= \varepsilon \left[-\frac{\beta}{2} x^2 + \frac{1}{2\lambda} \right] \rho_0^{reg},
\end{aligned} \tag{9}$$

и сравнивая обе стороны уравнение (8) (по одинаковому порядку ε) получим (с точностью до $O(1)$)

$$\{H_0, \rho_0^{reg}\} + \gamma \partial_p(p\rho_0^{reg} + \frac{1}{\beta} \partial_p \rho_0^{reg}) = 0. \tag{10}$$

Для параболической ловушки, с точность до из (8) имеем соотношение:

$$\begin{aligned}
\left[-\frac{\beta}{2} x^2 + \frac{1}{2\lambda} \right] \rho_0^{reg} &= \{h, \rho_0^{reg}\} \\
&+ \gamma \partial_p(\rho_0^{reg} \partial_p h),
\end{aligned} \tag{11}$$

которое определяет величину (функцию) h . Учитывая соотношения $\partial_p \rho_0^{reg} = -\beta p \rho_0^{reg}$ и $\partial_x \rho_0^{reg} = -\beta \lambda x \rho_0^{reg}$, уравнение (11) может быть переписано в виде

$$\begin{aligned}
-\frac{\beta}{2} x^2 + \frac{1}{2\lambda} &= +\beta [\lambda x \partial_p h - p \partial_x h] \\
&- \gamma \beta p \partial_p h + \gamma \partial_{pp} h.
\end{aligned} \tag{12}$$

Уравнение (12) может быть решено полагая, что

$$h = ap^2 + bpx + cx^2. \tag{13}$$

Это приводит нас к следующей системе алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned}
b + 2\gamma a &= 0, \\
\lambda b &= -\frac{1}{2}, \\
2\lambda a - 2c - \gamma b &= 0, \\
\frac{1}{2\lambda} - 2\gamma a &= 0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Решение данной системы может быть записано как $a = \frac{1}{4\gamma\lambda}$, $b = -\frac{1}{2\lambda}$, и $c = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{\gamma}{\lambda}\right)$. Поэтому для h имеем

$$h = \frac{1}{4\gamma\lambda}p^2 - \frac{1}{2\lambda}px + \left(\frac{1}{4\gamma} + \frac{\gamma}{4\lambda}\right)x^2. \quad (15)$$

Заметим, что полученный выше результат относится к первому приближению по ε , то есть не учитывает второй порядок ε^2 .

Нашей задачей является ускорение (замедление) эволюции системы, описываемой уравнением (9). Одним из эффективных способов решение подобной задачи является замена переменной времени, (t) функцией $\Lambda(t)$, который является «ускоренным» временем. Вводя фактор масштабирования $\alpha(t) \gg 1$ функцию $(\Lambda(t))$ можем определить как

$$\Lambda(t) = \int_0^t \alpha(t') dt'. \quad (16)$$

В интервале ускорения ($0 \leq t \leq T_{FF}$), функцию $\alpha(t)$ можно представить в виде $\alpha(t) = 1 + (\bar{\alpha} - 1)f(s)$ где $s \equiv \frac{t}{T_{FF}}$. $\bar{\alpha} (> 1)$. Функция $f(s) (\geq 0)$ удовлетворяет граничным условиям $f(0) = f(1) = \dot{f}(0) = \dot{f}(1) = 0$ и $\bar{f} = \int_0^1 f(s') ds' = 1$. Из всех возможных явных видов функции $f(s)$, мы выбираем $1 - \cos(2\pi s)$. Тогда имеем

$$\alpha(t) = \bar{\alpha} - (\bar{\alpha} - 1)\cos\left(\frac{2\pi}{T_{FF}}t\right). \quad (17)$$

Далее мы предполагаем, что зависимость от времени коэффициента жесткости λ имеет вид

$$\lambda(\Lambda(t)) = \lambda_0 + \varepsilon\Lambda(t). \quad (18)$$

Тогда ускоренную функцию распределения ρ_{FF} можно представить в виде

$$\begin{aligned} \rho_{FF}(x, p, t) &\equiv \rho_0^{reg}(x, p; \lambda(\Lambda(t))) \\ &= \exp[-\beta H_0(\lambda(\Lambda(t))) - \Gamma(\lambda(\Lambda(t)))]. \end{aligned} \quad (19)$$

Тогда ρ_{FF} удовлетворяет уравнению Крамерса, где коэффициент жесткости зависит от времени, а функции H_0, h заменены величинами $\varepsilon\alpha$ и $\lambda(\Lambda(t))$, соответственно:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{FF}}{\partial t} &= \frac{\partial \lambda}{\partial t} \frac{\partial \rho_{FF}}{\partial \lambda} = \varepsilon\alpha \frac{\partial \rho_{FF}}{\partial \lambda} \\ &= \varepsilon\alpha \{h, \rho_0^{reg}\} + \gamma\varepsilon\alpha \partial_p(\rho_0^{reg} \partial_p h). \end{aligned}$$

В пределе $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \bar{\alpha} \rightarrow \infty} \varepsilon \bar{\alpha} = \bar{v}$, где $\bar{v} > 0$ ($\bar{v} < 0$) для $\varepsilon \rightarrow +0$ ($\varepsilon \rightarrow -0$), для уравнения Крамера мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho_{FF}}{\partial t} &= \{H_0 + v(t)h, \rho_{FF}\} \\ &+ \gamma \partial_p (p \rho_{FF} + \frac{1}{\beta} \partial_p \rho_{FF}) \\ &+ \gamma \partial_p (\rho_{FF} \frac{\partial (v(t)h)}{\partial p}). \end{aligned} \quad (20)$$

Где $v(t)$ – скорость, которая выражается через функцию $\alpha(t)$ как

$$v(t) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \bar{\alpha} \rightarrow \infty} \varepsilon \alpha(t) = \bar{v} \left(1 - \cos \left(\frac{2\pi}{T_{FF}} t \right) \right). \quad (21)$$

Таким образом для $0 \leq t \leq T_{FF}$, имеем:

$$\begin{aligned} \lambda(\Lambda(t)) &= \lambda_0 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0, \bar{\alpha} \rightarrow \infty} \varepsilon \Lambda(t) = \lambda_0 + \int_0^t v(t') dt' \\ &= \lambda_0 + \bar{v} T_{FF} \left[\frac{t}{T_{FF}} - \frac{1}{2\pi} \sin \left(\frac{2\pi}{T_{FF}} t \right) \right]. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения

$$\lambda(0) = \lambda_0, \quad \lambda(T_{FF}) = \lambda_0 + \bar{v} T_{FF} \quad (22)$$

и

$$\dot{\lambda}(0) = \dot{\lambda}(T_{FF}) = 0, \quad (23)$$

для ускоренного гамильтониана броуновской частицы имеем:

$$H_{FF}(x, p, t) = H_0 + \dot{\lambda}h, \quad (24)$$

где H_0 и h определяются уравнениями (7) и (15).

С помощью гамильтониана в (27) и ускоренной функции распределения ρ_{FF} , заданного уравнением (19), мы можем вычислить соответствующие, то есть ускоренные термодинамические величины, такие как работа W , количество теплоты Q , и изотермальную энергию E . Среднее значение работы можно определить как

$$W = \int_0^{T_{FF}} dt \left\langle \frac{\partial H_{FF}}{\partial t} \right\rangle. \quad (25)$$

Имея в виду соотношение

$$\left\langle \frac{\partial H_{FF}}{\partial t} \right\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial H_{FF}}{\partial t} \rho_{FF} dx dp$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\dot{\lambda}}{2} - \frac{\gamma \dot{\lambda}^2}{4\lambda^2} + \ddot{\lambda} \left(\frac{\gamma}{4\lambda} + \frac{1}{4\gamma} \right) \right) \frac{1}{\beta \lambda} \\
&\quad + \left(\frac{\ddot{\lambda}}{4\gamma \lambda} - \frac{\dot{\lambda}^2}{4\gamma \lambda^2} \right) \frac{1}{\beta},
\end{aligned} \tag{26}$$

работу можно представить как сумму обратимых (W_{rev}) и необратимых (W_{irr}) частей:

$$W = W_{rev} + W_{irr} \tag{27}$$

где

$$W_{rev} = \frac{1}{2\beta} \ln \lambda \Big|_0^{T_{FF}} = \frac{1}{2\beta} \ln \frac{\lambda(T_{FF})}{\lambda_0} \tag{28}$$

и

$$W_{irr} = \left(\frac{\gamma}{8} \int_0^{T_{FF}} \frac{\ddot{\lambda}}{\lambda^2} dt + \frac{1}{4\gamma} \int_0^{T_{FF}} \frac{\ddot{\lambda}}{\lambda} dt \right) \frac{1}{\beta}. \tag{29}$$

После некоторых вычислений выражение для необратимой части работы в уравнении (27) можно упростить и записать в виде

$$W_{irr} = \frac{\gamma k_B T}{8\lambda(0)T_{FF}} Z_2(\xi) + \frac{k_B T}{4\gamma T_{FF}} Z_1(\xi), \tag{30}$$

где

$$Z_n(\xi) \equiv \xi \int_0^1 \frac{2\pi \sin(2\pi s)}{[1 + \xi(s - \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi s))]^n} ds. \tag{31}$$

Аналогично, для внутренней энергии имеем:

$$\begin{aligned}
E(t) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} H_{FF} \rho_{FF} dx dp \\
&= \left(1 + \dot{\lambda} \left(\frac{1}{2\gamma \lambda} + \frac{\gamma}{4\lambda^2} \right) \right) \frac{1}{\beta}.
\end{aligned} \tag{32}$$

В четвертой главе, под названием «**Моделирование динамики броуновского движения в разветвленных структурах**» на основе уравнения Фоккера-Планка на графах предложена математическая модель броуновской частицы в разветвленных структурах низкой размерности.

В качестве основы модели взято одномерное уравнение Фоккера-Планка с потенциалом гармонического осциллятора, которое имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \gamma \frac{\partial}{\partial x} (xf) + D \frac{\partial^2}{\partial x^2} f, \tag{33}$$

где $f(x, t)$ – плотность вероятности (или функция распределения), γ – коэффициент трения и $D = const$ – коэффициент диффузии, которые, далее для простоты будет рассмотрена как постоянная величина.

Для начального условия, имеющего вид

$$f(x, 0) = \delta(x - x_0), \quad (34)$$

решение уравнения (33) имеет вид

$$f(x_0, x, t) = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D(1-e^{-2\gamma t})}} \exp\left[-\frac{\gamma(x-e^{-\gamma t}x_0)^2}{2D(1-e^{-2\gamma t})}\right]. \quad (35)$$

Решение для стационарного случая ($\frac{\partial f}{\partial t} = 0$) имеет вид

$$f = \sqrt{\frac{\gamma}{2\pi D}} \exp\left[-\frac{\gamma x^2}{2D}\right]. \quad (36)$$

Заметим, что данное уравнение Фоккера-Планка воспроизводит следующий закон сохранения:

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, t) dx = 0. \quad (37)$$

Здесь мы рассмотрим уравнение Фоккера-Планка на метрическом графе, которое описывает броуновское движение в разветвленной структуре низкой размерности. Для простоты рассмотрим звездообразный граф, состоящий из трех ребер. На каждом ребре графа e_j , введем координату x_j , частицы в данном ребре. Координату на ребре e_1 рассмотрим в интервале $x_1 \in (-\infty, 0]$, а координаты на ребрах $e_{2,3}$ в интервале $x_{2,3} \in [0, +\infty)$. Далее, будем использовать обозначению $f_j(x)$ для функции $f_j(x_j)$ понимая при этом, что x означает координату на ребре j . Уравнение Фоккера-Планка на таком графе можно записать как

$$\frac{\partial f_j}{\partial t} = \gamma_j \frac{\partial}{\partial x} (x f_j) + D_j \frac{\partial^2}{\partial x^2} f_j, \quad j = 1, 2, 3. \quad (38)$$

где j – номер ребра, D_j – коэффициент диффузии для j -го ребра, а f_j – плотность вероятности на j -м ребре. Для решения уравнения (38) необходимо также задать граничные условия на узле графа. Здесь мы будем задавать их в виде непрерывности решения на узле:

$$\sqrt{\frac{D_1}{\gamma_1}} f_1(0, t) = \sqrt{\frac{D_2}{\gamma_2}} f_2(0, t) = \sqrt{\frac{D_3}{\gamma_3}} f_3(0, t), \quad (39)$$

и в виде сохранения тока (правила Кирхгофа):

$$D_1 \frac{\partial f_1}{\partial x} = D_2 \frac{\partial f_2}{\partial x} + D_3 \frac{\partial f_3}{\partial x}. \quad (40)$$

Также зададим начальное условие в виде

$$f_j(x, 0) = \delta(x - x_{0j}). \quad (41)$$

Для таких граничных и начальных условий решение уравнения (38) имеет вид

$$f_j(x_{0j}, x, t) = \sqrt{\frac{\gamma_j}{2\pi D_j(1-e^{-2\gamma_j t})}} \exp\left[-\frac{\gamma_j(x-e^{-\gamma_j t}x_{0j})^2}{2D_j(1-e^{-2\gamma_j t})}\right]. \quad (42)$$

Здесь коэффициенты диффузии удовлетворяют следующему правилу сумм:

$$\frac{1}{\sqrt{D_1}} = \frac{1}{\sqrt{D_2}} + \frac{1}{\sqrt{D_3}}, \quad (43)$$

где $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = \gamma$, $x_{0j} = \pm\sqrt{D_j}$. Выполнение правила сумм (43) является доказательством следующей теоремы.

ТЕОРЕМА. Граничные условия вершин (39) и (40) являются эквивалентными ПГУ на вершине, при условии выполнения правила сумм (43).

Правило сумм (43) является необходимым и достаточным условием для того, чтобы функция заданная в (43) удовлетворяло уравнения Фоккера-Планка (38) на звездообразном графе. На Рис. 1 представлены графики решений уравнения (38) в различных моментах времени, ($t = 150$, $t = 700$ и $t = 1000$), для случая, когда коэффициенты диффузии удовлетворяют условию (12). Рис. 2 представляет собой аналогичные графики для случая, когда условие в (43) не выполняются. Для такого случая уравнение (38) может быть решено только численно, для чего мы используем метод дискретизации Кранка-Никольсона (Crank-Nicolson). Можно наблюдать существенные качественные и количественные различия между графиками на данных рисунках.

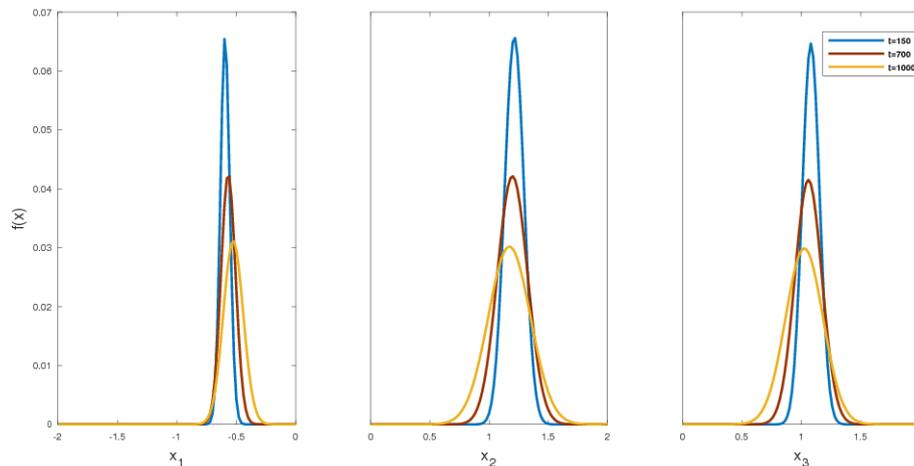


Рис. 1 : Плотность распределение, $f(x)$ для звездообразного графа, полученный путём решение уравнение (38) при выполнении правила сумм (43), с $x_{01} = 0.7$, $x_{02} = 0.3$, $x_{03} = 0.5$ $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1.5$ и $D_2 = 0.9$, $D_3 = 0.7$.

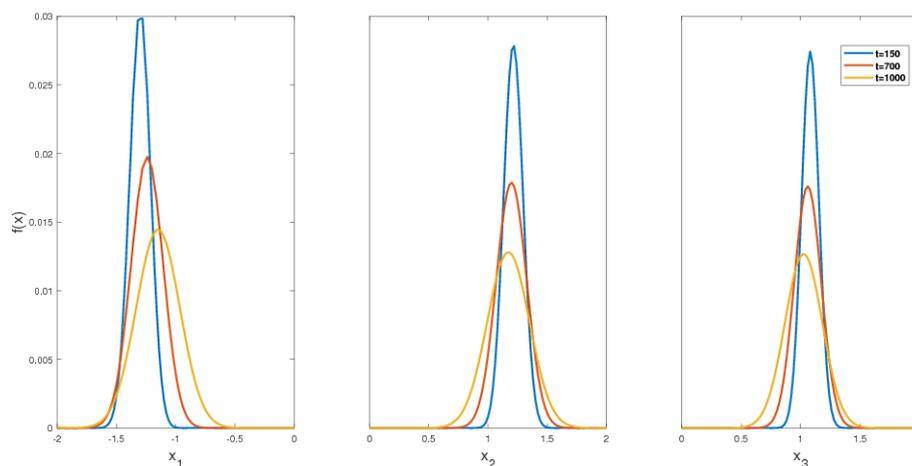


Рис. 2: Плотность распределение, $f(x)$ для звездообразного графа, полученный путём решение уравнение (38) при нарушении правила сумм (43), с $x_{01} = 0.7$, $x_{01} = 0.3$, $x_{01} = 0.5$ $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma_3 = 1.5$ и $D_1 = 0.5$ $D_2 = 0.9$, $D_3 = 0.7$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная диссертационная работа посвящена решению проблем математического моделирования управляемой адиабатической квантовой эволюции и стохастических процессов простейших систем низкой размерности путем ускорения или замедления их эволюции. На основе проведенных в диссертационной работе исследований представлены следующие выводы:

1. Предложена математическая модель ускоренной эволюции квантового идеального газа в квантовом ящике с адиабатически движущимися стенками. Расчитаны термодинамические характеристики такой системы;
2. Предложена математическая модель ускорения диффузионных процессов в системах низкой размерности при наличии динамического конфайнмента;
3. Предложена математическая модель стохастического теплового двигателя в системах низкой размерности;
4. Разработан алгоритм ускорения эволюции броуновской частицы в параболической ловушке с зависящими от времени шириной;
5. Получены аналитические формулы для термодинамических величин теплового двигателя с ускоренной эволюцией;
6. Предложена математическая модель броуновской частицы в разветвленных структурах низкой размерности;
7. Получены аналитические и численные решения уравнения Фоккера-Планка на графах;

8. Разработаны алгоритмы и комплекс программ для численного решения начально-краевых задач для уравнения Фоккера-Планка на метрических графах.

INTRODUCTION (abstract of a PhD dissertation)

The aim of the research. The purpose of this dissertation work is to model accelerated and decelerated adiabatic evolution of quantum systems and application the proposed models to the problem of quantum heat engines. Another goal of the work is to model the tunable evolution of stochastic systems.

The object of the research. Low-dimensional quantum systems, quantum ideal gas under dynamical confinement, stochastic heat engine, Brownian particle in low-dimensional branched structures.

The scientific novelty of the research is as follows:

Method for accelerating (decelerating) the evolution of low-dimensional quantum systems in the presence of dynamic confinement is proposed;

An explicit form of the “accelerating potential”, which makes it possible to experimentally realize the process of accelerating evolution is obtained;

A model of a stochastic heat engine and a method for controlling its operation by accelerating the evolution of the process of its functioning is proposed;

A model of tunable Brownian motion in low-dimensional network-like systems is proposed;

A scheme for acceleration of heat transfer in low-dimensional systems in the presence of dynamical confinement is developed;

New equations of state for a quantum ideal Fermi gas in the presence of dynamical confinement are obtained;

Implementation of the research results. Based on scientific results of “Quantum gas in the fast forward scheme of adiabatically expanding cavities: Force and equation of state”:

analytical expression of the wave function has been used in foreign scientific papers (Philosophical Transactions of Royal Society A, Volume 380, 20210278, November 2022; Reviews of Modern Physics, Volume 91, 045001, October 2019; Physical Review A, Volume 99, 062116, June 2019; Physical Review E, Volume 102, 012129, July 2020; Applied Mathematics Letters, Volume 143, 108684, September 2023) in order to calculate such physical expected quantities as quantum force, kinetic energy, internal energy. The application of the scientific result allowed us to construct the model of tunable of an adiabatic quantum ideal gas trapped in hard wall and soft wall confinements;

Based on scientific results of “Fast-forward approach to stochastic heat engine”:

fast-forward potential for isothermal and adiabatic processes obtained in the paper are used in foreign scientific papers (Frontiers in Physics, Volume 16, 33202, December 2021; Physical Review Letters, Volume 128, 230603, June 2022; Physical Review E, Volume 106, 054108, November 2022; Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment, Volume 2020, 093207, September 2020; Physical Review E, Volume 106, 024105, August 2022; Physical Review E, Volume 106, 064117, December 2022; Physical Review Research, Volume 4, 023157, May 2022; The European Physical Journal Plus, Volume 137, 1011, September 2022; Physical Review E, Volume 103, 032146, March 2021; The European Physical

Journal B, Volume 96, 22, February 2023; Reports on Progress in Physics, Volume 86, 035902, January 2023) to study thermodynamic characteristics of stochastic heat engine.

based on the results of the research work, certificates were obtained " Modeling of stochastic processes using the Fokker-Planck equation on metric graphs" (DGU 2022 2974, 23.05.2022) and "A software package for modeling Brownian motion in networks via Fokker-Planck equation" (№ DGU 20237477, 18.10.2023) based on the Law of the Republic of Uzbekistan "On the Legal Protection of Software of Electronic Computing Machines and Databases".

Structure and volume of the dissertation. The structure of the dissertation consists of an introduction, four chapters, a conclusion, a list of references, and appendices. The volume of the thesis is 110 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
LIST OF PUBLISHED WORKS
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

I bo'lim (Part I; Часть I)

1. G. Babajanova, J. Matrasulov, K. Nakamura, Quantum gas in the fast forward scheme of adiabatically expanding cavities: Force and equation of state // *Physical Review E*, **97**, 042104, 2018 (Web of Science, Scopus, IF=2.7).
2. K. Nakamura, J. Matrasulov, Y. Izumida, Fast-forward approach to stochastic heat engine // *Physical Review E*, **102**, 012129, 2020 (Web of Science, Scopus, IF=2.7).
3. J. Matrasulov, K. Sabirov, Fokker–Planck equation on metric graphs // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, **608**, 128279, 2022 (Web of Science, Scopus, IF=3.7).
4. J. Matrasulov, J. Yusupov, A. Saidov, Fast forward evolution in heat equation: Tunable heat transport in adiabatic regime // *Nanosystems: Physics, Chemistry, Mathematics*, **14**, 421, 2023 (Web of Science, Scopus, IF=1.13).
5. D. Syafitri, A. Dari, I. Setiawan, J. Matrasulov, Introduction of Quantum System, Step Potential and Barrier Potential to Class X Students of SMA Budi Utomo Bengkulu City // *Jurnal Pengabdian Kepada Masyarakat*, **2**, 1–7, (2024) (IF=0.75).

II bo'lim (Part II; Часть II)

6. J. Matrasulov, J. Yusupov, Classical and quantum dynamics of relativistic two-dimensional atom in graphene interacting with constant uniform magnetic field // *The 8th international conference on superconductivity and magnetism, Ölüdeniz-Fethiye, Turkey*, P. 344
7. J. Matrasulov, O. Karpova, I. Ibragimov, Brownian motion n networks: metric graph approach // *Сборник материалов конференции “Физика ва электрониканинг долзарб муаммолари” Ташкентский государственный технический университет, 2023 г.*

Бичими: 84x60 ¹/₁₆. «Times New Roman» гарнитураси.
Рақамли босма усулда босилди.
Шартли босма табағи: 3. Адади 100. Буюртма № 65/21.

Гувоҳнома № 851684.
«Тірографф» МЧЖ босмаҳонасида чоп этилган.
Босмаҳона манзили: 100011, Тошкент ш., Беруний кўчаси, 83-уй.