

**V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSC.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

KARIMOV KAMOLIDDIN TO‘YCHIBOYEVICH

**UCH O‘LCHOVLI FAZODA SINGULYAR KOEFFITSIENTLI ELLIPTIK
VA ARALASH TIPDAGI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN
CHEGARAVIY VA SPEKTRAL MASALALAR**

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI DOKTORI (DSc) DISSERTATSIYASI
AVTOREFERATI**

Toshkent – 2024

Doktorlik (DSc) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Contents of the Doctoral (DSc) Dissertation Abstract

Karimov Kamoliddin To‘uchiboyevich

Uch o‘lchovli fazoda singulyar koeffitsientli elliptik va aralash tipdagi differensial tenglamalar uchun chegaraviy va spektral masalalar..... 3

Каримов Камолиддин Туйчибоевич

Краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений эллиптического и смешанного типов с сингулярными коэффициентами в трехмерном пространстве..... 27

Karimov Kamoliddin Tuychiboevich

Boundary-value and spectral problems for differential equations of elliptic and mixed types with singular coefficients in three-dimensional space 51

E‘lon qilingan ishlar ro‘yxati

Список опубликованных работ
List of published works..... 55

**V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSC.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

KARIMOV KAMOLIDDIN TO‘YCHIBOYEVICH

**UCH O‘LCHOVLI FAZODA SINGULYAR KOEFFITSIENTLI ELLIPTIK
VA ARALASH TIPDAGI DIFFERENSIAL TENGLAMALAR UCHUN
CHEGARAVIY VA SPEKTRAL MASALALAR**

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI DOKTORI (DSc) DISSERTATSIYASI
AVTOREFERATI**

Toshkent – 2024

Fizika-matematika fanlari doktori (DSc) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2017.3.DSc/FM100 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Farg'ona davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz(rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (<http://kengash.mathinst.uz>) va Ziyonet Axborot ta'lim portalida (<https://ziyonet.uz>) joylashtirilgan.

Ilmiy maslahatchi:

Urinov Axmadjon Kushakovich

fizika-matematika fanlari doktori, professor

Rasmiy opponentlar:

Ashurov Ravshan Radjabovich

fizika-matematika fanlari doktori, professor

Sitnik Sergey Mixaylovich

fizika-matematika fanlari doktori, professor

Mirsaburov Miraxmat

fizika-matematika fanlari doktori, professor

Yetakchi tashkilot:

Samarqand davlat universiteti

Dissertatsiya himoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2024 yil 12-noyabr soat 16:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi. Tel.:(+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz. Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika Institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (189 - raqam bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent shahri, Olmazor tumani, Universitet ko'chasi. Tel.:(+99871)-207-91-40).

Dissertatsiya avtoreferati 2024 yil 28 - oktyabr kuni tarqatildi.
(2024 yil 28 - oktyabrdagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).



O'.A. Roziqov

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash
raisi, f.-m.f.d., akademik

J.K. Adashev

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash
ilmiy kotibi, f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

A. Azamov

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash
huzuridagi Ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d.,
akademik

KIRISH (doktorlik dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyati. Hozirgi vaqtda dunyoning ko‘plab ilmiy maktablarida singulyar koeffitsientli differensial tenglamalar uchun lokal va nolokal shartli chegaraviy masalalar nazariyasi jadal rivojlanmoqda. Chegaraviy masalalar nazariyasiga bunday e‘tibor tasodifiy emas, chunki singulyar koeffitsientli differensial tenglamalar matematik fizika, kimyo va boshqa sohalarining turli muammolarida qo‘llanilishi topilgan. Xususan, ular neft qatlamlari holatini o‘rganishni matematik modellashtirishda, yer osti suvlarini filtrlashda, murakkab tuzilishga ega bo‘lgan ob‘ektida issiqlik va massani uzatishda, simlardagi elektr tebranishlarda, g‘ovak muhit bilan o‘ralgan kanalda suyuqlik harakatida, tebranish jarayonlarida, issiqlik o‘tkazuvchanlikda, diffuziya, filtratsiya va boshqa hodisalarda katta ahamiyatga ega. Shunday qilib, nazariy tadqiqotlarni mantiqiy rivojlanishi, singulyar koeffitsientli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun masalalarni yechishning umumiy nazariyasi va usullari yo‘qligi hamda muhokama etilayotgan tenglamalarning amaliyotda keng qo‘llanilayotganligi, bunday tipdagi tenglamalar uchun masalalarni tadqiq etishning dolzarbligiga asos bo‘ladi.

Dunyoda hozirgi vaqtda xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun lokal va nolokal chegaraviy masalalarni spektral analiz usuli yordamida o‘rganish dolzarb hisoblanadi. Shu bilan birga, har xil tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun spektral masalalarni o‘rganishga qiziqish ortdi. Spektral nazariya bo‘yicha olib borilayotgan tadqiqotlarni shartli ravishda ikki yo‘nalishga bo‘lish mumkin. Bulardan birinchisi chegaraviy masalalar yechimlarining yagonaligi haqidagi teoremlarni isbotlash bo‘lsa, ikkinchisi esa ko‘rib chiqilayotgan chegaraviy masalalarning xos qiymatlari va xos funksiyalarini topishdir. Bu yo‘nalishlardagi ilmiy izlanishlar hozirda jadal davom etmoqda va rivojlanmoqda. Shu munosabat bilan, elliptik va aralash tipdagi singulyar koeffitsientli differensial tenglamalar uchun chegaraviy va spektral masalalarni o‘rganish maqsadli ilmiy tadqiqot hisoblanadi.

Mamlakatimizda hozirgi vaqtda amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan ilmiy yo‘nalishlarga e‘tibor kuchaytirildi, xususan, mamlakatimiz olimlari tomonidan ikkinchi va yuqori tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishning samarali usullarini izlash va tadqiq qilishga alohida e‘tibor qaratildi. Differensial tenglamalar va matematik fizika, funksional analiz, dinamik sistemalar nazariyasi, shuningdek, amaliy matematika va matematik modellashtirish bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish tadqiqotchilar faoliyatining asosiy vazifalari va faoliyat yo‘nalishlari etib belgilandi¹. Qarorning ijrosini ta‘minlashda ilmiy natijalardan ilm-fanning turdosh sohalarida foydalanish maqsadida uch o‘lchovli fazoda singulyar koeffitsientli differensial tenglamalar uchun chegaraviy va spektral masalalarni tadqiq qilish muhim ahamiyatga ega.

¹ O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017-yil 18-maydagi “O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy-tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi 292-son qarori.

Mazkur dissertatsiya O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7 fevraldagi PF-4947-son «O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida»gi Farmoni, 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-son «Matematika ta‘limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi va 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son «Matematika sohasidagi ta‘lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. «Matematika, mexanika va informatika» ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi².

Singulyar koeffitsientli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy va spektral masalalarni tadqiq qilish va ularni yechish usullarini ishlab chiqish yo‘nalishida xorijiy mamlakatlarning yetakchi ilmiy markazlari va universitetlarida, jumladan, Nyu-York va Texas universitetlarida (AQSh), Turin universitetida (Italiya), Afina universitetida (Gretsiya), Santyago-de-Kompostela universitetida (Ispaniya), Upsala universitetida (Shvetsiya), Yaqin sharq universitetida (Turkiya), Moskva, Novosibirsk, Sankt-Peterburg, Orlov, Qozon, Kamchatka va Samara davlat universitetlarida (Rossiya), Belgorod davlat milliy tadqiqot universitetida (Rossiya), Rossiya FA Sibir bo‘limining Matematika institutida (Rossiya), Rossiya FA Kabardin-Bolqor ilmiy markazining Amaliy matematika va avtomatlashtirish institutida, Qozog‘iston matematika va matematik modellashtirish institutida hamda Qozog‘iston milliy universitetida (Qozog‘iston), Armaniston milliy FA fizik tadqiqotlar institutida, Armaniston davlat pedagogika universitetida (Armaniston), Tomsk milliy tadqiqot politexnika universitetida, Moskva fizika-texnika institutida, Sterlitamak davlat pedagogika akademiyasida (Rossiya); Belarus davlat universitetida (Belarusiya), Tojikiston Milliy universiteti ilmiy-tadqiqot institutida (Tojikiston) va boshqa xorijiy ilmiy muassasalarda keng qamrovli ilmiy tadqiqotlar olib borilmoqda.

Jahon miqyosida olib borilgan ilmiy tadqiqotlar natijasida bir qator dolzarb masalalar yechilgan bo‘lib, jumladan, quyidagi ilmiy natijalarga erishilgan: aralash tipdagi differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechish nazariyasi ishlab chiqildi (Turin universiteti, Italiya); aralash elliptiko-giperbolik tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalar o‘rganildi (Upsala universiteti, Shvetsiya; Rossiya FA Kabardin-Bolqor ilmiy markazining Amaliy matematika va

² Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi: Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, <http://www.springer.com/series/10533>; Oliy o‘quv yurtlari yangiliklari. Matematika, <http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm>; Umumrossiya matematika portali, <http://www.mathnet.ru>; Differensial tenglamalar elektron jurnali, <https://ejde.math.txstate.edu>; Differensial tenglamalar jurnali, <https://www.springer.com/journal/10625> va shunga o‘xshash manbalar asosida ishlab chiqilgan.

avtomatlashtirish instituti, Moskva, Novosibirsk, Orlov, Qozon, Samara, Sterlitamak davlat universitetlari); aralash va aralash qo'shma tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechish usuli ishlab chiqildi (Rossiya FA Sibir bo'limi Matematika instituti, Rossiya FA Kabardin-Bolqor ilmiy markazining Amaliy matematika va avtomatlashtirish instituti); elliptiko-giperbolik va parabolo-giperbolik tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni o'rganish usullari topildi (Rossiya FA Sibir bo'limi Matematika instituti, Rossiya FA Kabardin-Bolqor ilmiy markazining Amaliy matematika va avtomatlashtirish instituti, Qozog'iston matematika va matematik modellashtirish instituti); to'rtta maxsus nuqtaga ega bo'lgan Fuks sinfiga qarashli ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamasining umumiy yechimi topildi (Armaniston Milliy FA fizik tadqiqotlar instituti, Armaniston davlat pedagogika universiteti, Tomsk politexnika milliy tadqiqot universiteti, Moskva fizika-texnika instituti, Sank-Peterburg davlat universiteti).

Jahon amaliyotida hozirgi vaqtda ustuvor yo'nalishlarda, xususan, koeffitsientlarida maxsusligi bo'lgan differensial tenglamalarga va bunday tenglamalar uchun lokal va nolokal chegaraviy masalalarning regulyar yechimlarini topishda spektral analiz nazariyasini qo'llash bo'yicha bir qator ilmiy tadqiqotlar olib borilmoqda.

Muammoning o'rganilganlik darajasi. Har xil tipdagi buziladigan differensial tenglamalar uchun, xususan singulyar koeffitsientli elliptik va aralash tipdagi tenglamalar uchun asosiy chegaraviy masalalarni qo'yish va tekshirish A.V.Bitsadze, R.Gilbert, M.M.Smirnov, I.A.Kipriyanov, M.S.Salohiddinov, M.Mirsaburov, A.K.Urinov, B.Islamov va K.B.Sabitovlarning ishlarida batafsil bayon qilingan. Singulyar koeffitsientli ikki va ko'p o'lchovli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar bilan M.N.Olevskiy, A.Weinstein, E.Young, D.W.Fox, E.I.Moiseev, M.S.Salohiddinov, N.R.Radjabov, I.A.Kipriyanov, M.B.Kapilevich, S.P.Pulkin, O.A.Marichev, M.E.Lerner, O.A.Repin, A.P.Soldatov, S.M.Sitnik, M.Mirsaburov, A.K.Urinov, B.Islomov, K.B.Sabitov, R.S.Xayrullin, A.Xasanov, Sh.T.Karimov va boshqalar shug'ullanishgan.

Nolokal shartli chegaraviy masala birinchi bo'lib 1956 yilda F.I.Frankl tomonidan Chaplign tenglamasi uchun aralash sohada qo'yilgan va tadqiq qilingan. O'tgan yillar davomida xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun nolokal shartli chegaraviy masalalarni o'rganish bo'yicha ko'plab olimlar shug'ullandilar. Jumaladan, E.I.Moiseev, N.I.Ionkin, M.E.Lerner, O.A.Repin, Yu.K.Sabitova, A.A.Abashkin va boshqalar tomonidan salmoqli ilmiy natijalar olingan. Aralash tipdagi tenglamalar uchun masalalarni o'rganishga qiziqish F.I.Frankl ishidan keyin ortdi, bu yerda birinchi marta transtovush gaz dinamikasi masalalari ushbu tipdagi tenglamalarga keltirilishiga e'tibor qaratildi. Ma'lumki, aralash tipdagi tenglamalar uchun Dirixle masalasi har doim ham Adamar ma'nosida korrekt qo'yilmaydi. Lavrentev-Bitsadze tenglamasi uchun Dirixle masalasi nokorrekt qo'yilganligi A.V.Bitsadze tomonidan ko'rsatildi. Ushbu ishdan so'ng, Dirixle masalasi korrekt qo'yilgan aralash sohani topish muammosi

paydo bo'ldi. Agar aralash tipdagi tenglama giperbolik tipdagi tenglamani o'z ichiga olsa va sohaning giperbolik qismi to'rtburchakdan iborat bo'lsa, masalaning yechilishi uchun to'rtburchak tomonlarining o'lchamiga bog'liq bo'lgan shart paydo bo'ladi. Agar masala yechimga ega bo'lsa, u holda u hamma to'rtburchak uchun o'rinli bo'lmaydi. To'g'ri to'rtburchak va yarimpolosada aralash tipdagi tenglamalar uchun Dirixle masalasi ko'plab mualliflar tomonidan o'rganilgan. Masalan B.V.Shabat, N.N.Vaxaniya, J.R.Cannon, R.I.Soxadze, A.P.Soldatov, K.B.Sabitov, R.S.Xayrullin, M.M.Xachev va boshqalarning ishlarini qayd etib o'tish mumkin.

Ma'lumki, buziladigan va singulyar koeffitsientli elliptik tipdagi tenglamalar uchun tekislikda Dirixle masalasi har doim ham korrekt qo'yilmaydi. Dirixle masalasi nokorrekt qo'yilgan hollarda, M.V.Keldish "E masala" deb nomlangan masalani o'rganishni taklif qilgan. Bu masalada tenglama qaralayotgan soha chegarasining buzilish chizig'i (yoki singulyarlik chizig'i) bo'lgan qismida tenglama yechimining chegaralangan bo'lishi, qolgan qismida esa Dirixle shartlari berilishi talab qilinadi. Bu masalalar hozirgi paytda "Keldish masalasi" deb nom olgan. Ko'pgina tadqiqotlar tekislikdagi singulyar koeffitsientli elliptik va aralash tipdagi turli xil tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning xos qiymatlari va xos funksiyalarini topishga bag'ishlangan. Ular orasida M.S.Salohiddinov va A.K.Urinov, E.I.Moiseev, S.M.Ponomarev, T.Sh.Kalmenov, K.B.Sabitov, N.V.Chiganova va boshqalar tomonidan olingan ilmiy natijalar katta salmoqqa ega. Hozirgi vaqtda singulyar koeffitsientli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun spektral masalalarni o'rganishga kam sonli ishlar bag'ishlangan. Qayd etish kerakki, sharning qismlarida singulyar koeffitsientli elliptik tipdagi uch o'lchovli tenglamalar uchun spektral masalalarni o'rganishda buzilgan Goyn oddiy differensial tenglamasi hosil bo'ladi. Hozirgi vaqtda bu tenglama to'liq o'rganilmagan. Shu sababli, buzilgan Goyn tenglamasi va uch o'lchovli fazoda singulyar koeffitsientli elliptik tipdagi tenglamalar uchun xos qiymat masalalarini o'rganish dolzarb hisoblanadi.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta'lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog'liqligi. Tadqiqot Farg'ona davlat universitetining Φ -4-59 «Ikkinchi tartibli chizikli singulyar koeffitsientli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang'ich va chegaraviy masalalar» ilmiy-tadqiqot rejasiga muvofiq bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi uch o'lchovli singulyar koeffitsientli elliptik va aralash tipdagi differensial tenglamalar uchun chegaraviy va spektral masalalarni yechishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari quyidagilardan iborat:

parallelepiped, yarim cheksiz parallelepiped va chorak silindrda uchta singulyar koeffitsientga ega bo'lgan uch o'lchovli elliptik tenglama uchun Dirixle, Keldish va Dirixle-Neyman masalalarining bir qiymatli yechilishini tadqiq qilish;

ikkita singulyar koeffitsientga ega bo'lgan uch o'lchovli elliptik tenglama uchun o'z-o'ziga qo'shma va o'z-o'ziga qo'shma bo'lmagan nolokal chegaraviy masalalar yechimini parallelepiped va yarim cheksiz parallelepipedda qurish;

parallelepiped va yarim cheksiz parallelepipedda uchta singulyar koeffitsientga ega bo'lgan uch o'lchovli aralash tipdagi tenglama uchun Dirixle va Keldish masalalari yechimining yagonaligi va mavjudligi haqidagi teoremlarni isbotlash;

chorak silindr va uchburchakli to'g'ri prizmadan tashkil topgan sohada uchta singulyar koeffitsientga ega bo'lgan uch o'lchovli aralash tipdagi tenglama uchun Trikomi va Trikomi-Neyman masalasini yechish;

buzilgan Goyn tenglamasining umumiy yechimini topish. Sharning qismlaridan iborat sohalarda ikkita va uchta singulyar koeffitsientga ega bo'lgan uch o'lchovli elliptik tipdagi tenglamalar uchun spektral masalalarini o'rganish.

Tadqiqotning ob'ekti singulyar koeffitsientli uch o'lchovli xususiy hosilali differensial tenglamalar hisoblanadi.

Tadqiqotning predmeti uch o'lchovli fazoda singulyar koeffitsientli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy va spektral masalalardan iborat.

Tadqiqot usullari. Dissertatsiyada matematik fizika, spektral analiz va maxsus funksiyalar nazariyasi usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

parallelepiped, yarim cheksiz parallelepiped va chorak silindrda uchta singulyar koeffitsientga ega bo'lgan uch o'lchovli elliptik tipdagi tenglama uchun Dirixle, Keldish va Dirixle-Neyman masalalarining bir qiymatli yechilishi isbotlangan;

parallelepiped va yarim cheksiz parallelepipedda ikkita singulyar koeffitsientga ega bo'lgan uch o'lchovli elliptik tenglama uchun o'z-o'ziga qo'shma va o'z-o'ziga qo'shma bo'lmagan nolokal chegaraviy masalalarning bir qiymatli yechilishi isbotlangan;

uchta singulyar koeffitsientga ega bo'lgan uch o'lchovli aralash tipdagi tenglama uchun parallelepiped va yarim cheksiz parallelepipedda Dirixle va Keldish masalalari hamda bu tenglama uchun chorak silindr va uchburchakli to'g'ri prizmadan tashkil topgan sohada Trikomi va Trikomi-Neyman masalalari bir qiymatli yechilgan;

sharning qismlarida ikkita va uchta singulyar koeffitsientlarga ega bo'lgan uch o'lchovli elliptik tipdagi tenglamalar uchun spektral masalalar tadqiq qilingan bo'lib, bunda masalalarning xos qiymatlari topilgan va topilgan xos qiymatlarga mos keladigan xos funksiyalar qurilgan.

Tadqiqotning amaliy natijasi singulyar koeffitsientli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning olingan yechimlaridan shu kabi matematik modellarga keltirilishi mumkin bo'lgan jarayonlarning sifat xususiyatlarini o'rganishda foydalanish imkoniyatidan iborat. Ushbu yechimlar o'rganilgan jarayonlar va hodisalarning xususiyatlarini, matematik modellarning xususiyatlarini yaxshiroq tushunishga imkon beradi, shuningdek, asipmtotik, taqribiy va sonli usullar uchun sinov holatlari sifatida foydalanish mumkin.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi matematik fikrlashning qat'iyiligi, xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining klassik usullaridan, spektral analiz va energiya integrallari usullaridan foydalanish, shuningdek

teoremlarning qat'iy va to'liq isboti bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot ishida olingan natijalar xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasini va spektral analiz nazariyasini yanada rivojlantirishda foydalaniladi.

Tadqiqotning amaliy ahamiyati olingan ilmiy natijalardan singulyar koeffitsientli xususiy hosilali tenglamalarga keltiriladigan amaliy masalalarga tatbiq qilish va foydalanish mumkinligi bilan belgilanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Uch o'lchovli fazoda singulyar koeffitsientli elliptik va aralash tipdagi differensial tenglamalar uchun chegaraviy va spektral masalalari bo'yicha olingan natijalar asosida:

singulyar koeffitsientli uch o'lchovli elliptik tenglama uchun o'z-o'ziga qo'shma va o'z-o'ziga qo'shma bo'lmagan nolokal chegaraviy masalalarning yechimlaridan FZVG-2020-0029 raqamli "Agrosanoat majmui tabiiy resurslarini geoekologik monitoring qilish uchun telekommunikatsiya tizimlarini axborot-tahliliy ta'minotini qurishning nazariy asoslarini ishlab chiqish" mavzusidagi xorijiy loyihada nolokal shartli chegaraviy masalalarni yechishda foydalanilgan (Belgorod davlat milliy tadqiqot universitetining 2021-yil 6-sentyabrdagi №O-2038-sonli ma'lumotnomasi, Rossiya Federatsiyasi). Ilmiy natijalarning qo'llanishi aralash tipdagi tenglamalar uchun nolokal shartli chegaraviy masalalarning yechimlarini sonli qayta ishlash hamda bu masalalarning matematik modellarni qurish imkonini bergan;

singulyar koeffitsientli elliptik va aralash tipdagi tenglamalar uchun lokal va nolokal chegaraviy masalalarning yechimidan AAAA-A19-119072290002-9 raqamli "Kamchatkaning tabiiy ofatlari - zilzilalar va vulqonlar otilishi" mavzusidagi xorijiy tadqiqot doirasida lokal va nolokal masalalarni bir qiymatli yechishda foydalanilgan (Kamchatka davlat universitetining 2021-yil 6-sentyabrdagi №456-01-sonli ma'lumotnomasi, Rossiya Federatsiyasi). Ilmiy natijalarning qo'llanilishi lokal va nolokal masalalarning yechilish mezonlarini topish va ularni amaliy masalalarda qo'llash imkonini bergan;

singulyar koeffitsientli elliptik va aralash tipdagi differensial tenglamalar uchun chegaraviy va spektral masalalarning yechimlaridan HIOKTP 122041800029-5 raqamli "Asosiy va aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy va boshqaruv masalalari hamda ularni taqsimlangan parametrlarga ega sistemalarni o'rganishda qo'llash" mavzusidagi xorijiy loyihada taqsimlangan parametrlil differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning yechimlarini topishda foydalanilgan (Kabardin-Bolqor ilmiy markazi qoshidagi Amaliy matematika va avtomatizatsiyalash institutining 2023-yil 30-oktyabrdagi №01-13/79-sonli ma'lumotnomasi, Rossiya Federatsiyasi). Ilmiy natijalarning qo'llanishi asosiy va aralash tipdagi buziladigan va yuklangan tenglamalar uchun lokal va nolokal masalalarning yechimini topish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiya asosiy natijalari 20 ta xalqaro va 7 ta respublika anjumanlarida muhokamadan o'tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e'lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo'yicha jami 48 ta ilmiy ish chop qilingan, shulardan, O'zbekiston Respublikasi Oliy

attestatsiyasi komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop qilish tavsiya qilingan ilmiy nashrlarda 21 ta maqola, jumladan, 13 tasi xorijiy ilmiy jurnallarda va 8 tasi respublika jurnallarida nashr qilingan.

Dissertatsiya tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish, to‘rtta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiya hajmi 200 betdan iborat.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi va muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, ob‘ekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiyaning tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar berilgan.

Dissertatsiyaning **“Uchta singulyar koeffitsientlarga ega bo‘lgan uch o‘lchovli elliptik tenglama uchun Dirixle, Keldish va Dirixle-Neyman chegaraviy masalalari”** deb nomlangan birinchi bobida uchta singulyar koeffitsientga ega bo‘lgan uch o‘lchovli elliptik tipdagi tenglama uchun Dirixle (D masala), Keldish (E masala) va Dirixle-Neyman (DN masala) chegaraviy masalalari qo‘yilgan va tadqiq qilingan.

Birinchi bobning birinchi paragrafida chiziqli differensial operatorlar nazariyasi va spektral analizdan yordamchi ma’lumotlar keltirilgan.

Birinchi bobning ikkinchi paragrafida uchta singulyar koeffitsientga ega bo‘lgan ushbu

$$L_{\alpha\beta\gamma}u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z = 0 \quad (1)$$

tenglama $\Omega_+ = \{(x, y, z) : x \in (0, a), y \in (0, b), z \in (0, c)\}$ parallelepipedda qaralgan, bu yerda $a, b, c \in R^+$, $R^+ = \{t \in R : t > 0\}$.

Ω_+ sohada (1) tenglama uchun α, β, γ parametrlarning sonlar o‘qida joylashuviga qarab Dirixle, Keldish va Dirixle-Neyman chegaraviy masalalari qo‘yilgan.

$\alpha, \beta, \gamma \in (-\infty, 1/2)$ bo‘lganda quyidagi masala qaralgan:

D masala. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, y, z)$ funksiya topilsin:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &\in C(\bar{\Omega}_+) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_+), \quad x^{2\alpha}u_x, \quad z^{2\gamma}u_z \in C(\bar{\Omega}_+); \\ L_{\alpha\beta\gamma}u &= 0, \quad (x, y, z) \in \Omega_+; \\ u(0, y, z) &= 0, \quad u(a, y, z) = 0, \quad y \in [0, b], \quad z \in [0, c]; \\ u(x, 0, z) &= \psi_1(x, z), \quad u(x, b, z) = \psi_2(x, z), \quad x \in [0, a], \quad z \in [0, c]; \\ u(x, y, 0) &= 0, \quad u(x, y, c) = 0, \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, b], \end{aligned} \quad (2)$$

bu yerda $\psi_1(x, z)$ va $\psi_2(x, z)$ – berilgan funksiyalar.

$\alpha, \beta, \gamma \in [1/2, +\infty)$ bo‘lganda quyidagi masala qaralgan:

E masala. Quyidagi xossalarga ega bo‘lgan

$$u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_+ \setminus \Delta_{xyz}) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_+)$$

funksiya topilsin:

1) $x=0$, $y=0$ va $z=0$ tekisliklarda $u(x, y, z)$ funksiya chegaralangan;

2) $x=0$ va $z=0$ tekisliklarda $u_x, u_z \in C(\bar{\Omega}_+ \setminus \Delta_{xz})$ funksiyalar chegaralangan;

3) $u(x, y, z)$ funksiya (2) va

$$u(x, b, z) = \psi_2(x, z), \quad x \in [0, a], \quad z \in [0, c];$$

$$u(a, y, z) = 0, \quad y \in [0, b], \quad z \in [0, c]; \quad u(x, y, c) = 0, \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, b] \quad (3)$$

shartlarni qanoatlantiradi, bu yerda $\Delta_{xyz} = \{(x, y, z) : xyz = 0\}$, $\Delta_{xz} = \{(x, z) : xz = 0\}$,

$\psi_2(x, z)$ – berilgan funksiya.

$\alpha, \gamma \in (-1/2, +\infty)$, $\beta \in (-1/2, 1/2)$ bo‘lganda quyidagi masala qaralgan:

DN masala. (2), (3),

$$u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_+) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_+), \quad x^{2\alpha}u_x, \quad y^{2\beta}u_y, \quad z^{2\gamma}u_z \in C(\bar{\Omega}_+);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\alpha}u_x(x, y, z) = 0, \quad y \in (0, b), \quad z \in (0, c);$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{2\beta}u_y(x, y, z) = f_1(x, z), \quad x \in (0, a), \quad z \in (0, c),$$

$$u(x, b, z) = f_2(x, z), \quad x \in [0, a], \quad z \in [0, c],$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{2\gamma}u_z(x, y, z) = 0, \quad x \in (0, a), \quad y \in (0, b)$$

shartlarni qanoatlantiradigan $u(x, y, z)$ funksiya topilsin, bu yerda $f_1(x, z)$ va $f_2(x, z)$ – berilgan funksiyalar.

Bu paragrafda olingan asosiy natijalar quyidagi teoremlar ko‘rinishida shakllantirilgan.

1-teorema. Agar D, E va DN masalalarning yechimi mavjud bo‘lsa, u holda ular yagonadir.

2-teorema. Aytaylik, $\alpha, \gamma \in (0, 1/2)$, $\beta \in (-\infty, 1/2)$ bo‘lsin va $\psi_1(x, z)$, $\psi_2(x, z)$ funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$\text{I. } \psi_l(x, z) \in C_{x,z}^{5,5}(\bar{\Pi}), \quad l = \overline{1, 2}, \quad \text{bu yerda } \Pi = \{(x, z) : 0 < x < a, 0 < z < c\};$$

$$\text{II. } \frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi_l(x, z) \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi_l(x, z) \Big|_{x=a} = 0, \quad \frac{\partial^j}{\partial z^j} \psi_l(x, z) \Big|_{z=0} = 0,$$

$$\frac{\partial^j}{\partial z^j} \psi_l(x, z) \Big|_{z=c} = 0, \quad j = \overline{0, 4}.$$

U holda D masalaning yechimi mavjud va u

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_n(x) Z_m(z) \omega_{nm}(y), \quad (4)$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda

$$X_n(x) = x^{1/2-\alpha} J_{1/2-\alpha}(\sigma_{\alpha n} x/a), \quad Z_m(z) = z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sigma_{\gamma m} z/c), \quad n, m \in N; \quad (5)$$

$J_l(x)$ - l tartibli birinchi tur Bessel funksiyasi,

$$\omega_{nm}(y) = P_{nm}(y) \psi_{2nm} + \left[\bar{K}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} y) - P_{nm}(y) \bar{K}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b) \right] \psi_{1nm},$$

$$P_{nm}(y) = \left(\frac{y}{b} \right)^{1/2-\beta} \frac{I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} y)}{I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b)}, \quad \bar{K}_\nu(x) = \frac{2^{1-\nu} x^\nu K_\nu(x)}{\Gamma(\nu)}, \quad \nu > 0; \quad I_l(x) \text{ va}$$

$K_l(x)$ - mos holda l tartibli, mavhum argumentli Bessel va Makdonald

funksiyalari, $\psi_{lnm} = d_{nm} \int_0^a \int_0^c \psi_l(x, z) x^{2\alpha} X_n(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz$, $l = \overline{1, 2}$,

$$d_{nm} = \left[\|X_n\|_{L_{2,\rho}(0,a)} \|Z_m\|_{L_{2,q}(0,c)} \right]^{-2},$$

$$\|X_n\|_{L_{2,\rho}(0,a)} = \left(\int_0^a \rho(x) X_n^2(x) dx \right)^{1/2} = |a J_{3/2-\alpha}(\sigma_{\alpha n})| / \sqrt{2}, \quad \rho(x) = x^{2\alpha},$$

$$\|Z_m\|_{L_{2,q}(0,c)} = \left(\int_0^c q(z) Z_m^2(z) dz \right)^{1/2} = |c J_{3/2-\gamma}(\sigma_{\gamma m})| / \sqrt{2}, \quad q(z) = z^{2\gamma},$$

$\sigma_{\alpha n}$ va $\sigma_{\gamma n}$ mos holda $J_{1/2-\alpha}(x)$ va $J_{1/2-\gamma}(x)$ funksiyalarning musbat nollari,

$$\lambda_{nm} = (\sigma_{\alpha n}/a)^2 + (\sigma_{\gamma m}/c)^2, \quad n, m \in N.$$

3-teorema. Aytaylik, $\alpha, \gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2) \operatorname{sgn}(k-1)]$, $k \in N$, $\beta \in (-\infty, 1/2)$ bo'lsin va $\psi_1(x, z)$, $\psi_2(x, z)$ funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

I. $\psi_l(x, z) \in C_{x,z}^{2k+4, 2k+4}(\bar{\Pi})$, $l = \overline{1, 2}$, bu yerda

$$\Pi = \{(x, z) : 0 < x < a, 0 < z < c\};$$

II. $\frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi_l(x, z)|_{x=0} = 0$, $\frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi_l(x, z)|_{x=a} = 0$, $\frac{\partial^j}{\partial z^j} \psi_l(x, z)|_{z=0} = 0$,

$$\frac{\partial^j}{\partial z^j} \psi_l(x, z)|_{z=c} = 0, \quad j = \overline{0, 2k+2};$$

U holda D masalaning yechimi (4) formula bilan aniqlanadi.

4-teorema. Aytaylik, $\alpha, \gamma \in [k - 1/2, k + 1/2)$, $k \in N$, $\beta \in [1/2, +\infty)$ bo'lsin va $\psi_2(x, z)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

I. $\psi_2(x, z) \in C_{x,z}^{2k+4, 2k+4}(\bar{\Pi})$, bu yerda $\Pi = \{(x, z): 0 < x < a, 0 < z < c\}$;

II. $\frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi_2(x, z)|_{x=0} = 0$, $\frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi_2(x, z)|_{x=a} = 0$, $\frac{\partial^j}{\partial z^j} \psi_2(x, z)|_{z=0} = 0$,

$\frac{\partial^j}{\partial z^j} \psi_2(x, z)|_{z=c} = 0$, $j = \overline{0, 2k+2}$.

U holda E masalaning yechimi mavjud va u

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_n(x) Z_m(z) \mathcal{G}_{nm}(y),$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda $X_n(x)$, $Z_m(z)$, $\mathcal{G}_{nm}(y)$ funksiyalar

$$X_n(x) = x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\delta_{\alpha n} x/a), \quad Z_m(z) = z^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(\delta_{\gamma m} z/c), \quad n, m \in N, \quad (6)$$

$$\mathcal{G}_{nm}(y) = P_{1nm}(y) \psi_{2nm}, \quad P_{1nm}(y) = (y/b)^{1/2-\beta} I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm}} y) / I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm}} b),$$

tengliklar bilan aniqlanadi,

$$\psi_{2nm} = s_{nm} \int_0^c \int_0^a \psi_2(x, z) x^{2\alpha} X_n(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz, \quad \delta_{\alpha n} \text{ va } \delta_{\gamma m} \text{ mos holda}$$

$J_{\alpha-1/2}(x)$ va $J_{\gamma-1/2}(x)$ funksiyalarning musbat nollari,

$$\lambda_{nm} = (\delta_{\alpha n}/a)^2 + (\delta_{\gamma m}/c)^2, \quad s_{nm} = \left[\|X_n\|_{L_{2,\xi}(0,a)} \|Z_m\|_{L_{2,\eta}(0,c)} \right]^{-2},$$

$$\|X_n\|_{L_{2,\xi}(0,a)} = \left(\int_0^a \xi(x) X_n^2(x) dx \right)^{1/2} = |a J_{\alpha+1/2}(\delta_{\alpha n})| / \sqrt{2}, \quad \xi(x) = x^{2\alpha},$$

$$\|Z_m\|_{L_{2,\eta}(0,c)} = \left(\int_0^c \eta(z) Z_m^2(z) dz \right)^{1/2} = |c J_{\gamma+1/2}(\delta_{\gamma m})| / \sqrt{2}, \quad \eta(z) = z^{2\gamma}.$$

5-teorema. Aytaylik, $\alpha, \gamma \in [(k-1/2)\text{sgn}(k), k+1/2)$, $k = 0, 1, \dots$,

$\beta \in (-1/2, 1/2)$ bo'lsin va $f_1(x, z)$, $f_2(x, z)$ funksiyalar 4-teoremaning shartlarini qanoatlantirsin. U holda DN masalaning yechimi mavjud va u

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_n(x) Z_m(z) \mathcal{G}_{nm}(y), \quad (7)$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda $X_n(x)$, $Z_m(z)$ – funksiyalar (6) tenglik bilan aniqlanadi,

$$\mathcal{G}_{nm}(y) = P_{1nm}(y) [f_{2nm} + P_{2nm}(b) f_{1nm}] - P_{2nm}(y) f_{1nm},$$

$$P_{1nm}(y) = (y/b)^{1/2-\beta} I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm}} y) / I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm}} b),$$

$$P_{2nm}(y) = (2y/\sqrt{\lambda_{nm}})^{1/2-\beta} K_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm}} y) / \Gamma(1/2 + \beta),$$

$$f_{lnm} = s_{nm} \int_0^c \int_0^a f_l(x, z) x^{2\alpha} X_n(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz, \quad l=1,2,$$

$$s_{nm} = \left[2/(ac J_{\alpha+1/2}(\delta_{\alpha n}) J_{\gamma+1/2}(\delta_{\gamma m})) \right]^2.$$

6-teorema. Aytaylik, $\alpha, \gamma \in (-1/2, 0)$, $\beta \in (-1/2, 1/2)$ bo'lsin va $f_1(x, z)$, $f_2(x, z)$ funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

I. $f_l(x, z) \in C_{x,z}^{4,4}(\bar{\Pi})$, $l = \overline{1,2}$, $j = \overline{0,4}$, bu yerda

$$\Pi = \{(x, z) : 0 < x < a, 0 < z < c\};$$

II. $x^{2\alpha} \frac{\partial^j}{\partial x^j} f_l(x, z)|_{x=0} = 0$, $j = \overline{1,3}$; $\frac{\partial^j}{\partial x^j} f_l(x, z)|_{x=a} = 0$, $j = \overline{0,3}$, jumladan,

$f_{lxxx}(x, z)$ funksiyaning $x=0$ dagi nolining tartibi -2α dan kichik emas;

III. $z^{2\gamma} \frac{\partial^j}{\partial z^j} f_l(x, z)|_{z=0} = 0$, $j = \overline{1,3}$, $\frac{\partial^j}{\partial z^j} f_l(x, z)|_{z=c} = 0$, $j = \overline{0,3}$, jumladan,

$f_{lzzz}(x, z)$ funksiyaning $z=0$ dagi nolining tartibi -2γ dan kichik emas;

U holda, DN masalaning yechimi mavjud va u (7) formula bilan aniqlanadi.

Birinchi bobning uchinchi paragrafda (1) tenglama uchun $\Omega_+^\infty = \{(x, y, z) : x \in (0, a), y \in (0, +\infty), z \in (0, c)\}$ yarim cheksiz parallelepipedda quyidagi chegaraviy masalalar qaralgan.

$\alpha, \beta, \gamma \in (-\infty, 1/2)$ bo'lganda quyidagi masala tadqiq qilingan:

D[∞] masala. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, y, z)$ funksiya topilsin:

$$u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_+^\infty) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_+^\infty), \quad x^{2\alpha} u_x, z^{2\gamma} u_z \in C(\bar{\Omega}_+^\infty);$$

$$L_{\alpha\beta\gamma} u = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega_+^\infty; \quad (8)$$

$$u(0, y, z) = 0, \quad u(a, y, z) = 0, \quad y \in [0, +\infty), z \in [0, c];$$

$$u(x, 0, z) = \psi_1(x, z), \quad x \in [0, a], z \in [0, c];$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y, z) = 0, \quad x \in [0, a], z \in [0, c]; \quad (9)$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u(x, y, c) = 0, \quad x \in [0, a], y \in [0, +\infty),$$

bu yerda $\bar{\Omega}_+^\infty = \{(x, y, z) : x \in [0, a], y \in [0, \infty), z \in [0, c]\}$, $\psi_1(x, z)$ esa berilgan funksiya.

$\alpha, \beta, \gamma \in [1/2, +\infty)$ bo'lganda quyidagi masala tadqiq qilingan:

E[∞] masala. Quyidagi xossalarga ega bo'lgan $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_+^\infty \setminus \Delta_{xz}) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_+^\infty)$ funksiya topilsin:

1) $x=0$, $z=0$ tekisliklarda $u, u_x, u_z \in C(\bar{\Omega}_+^\infty \setminus \Delta_{xz})$ funksiyalar chegaralangan,

2) (8), (9), $u(a, y, z) = 0$, $y \in [0, +\infty)$, $z \in [0, c]$, $u(x, y, c) = 0$, $x \in [0, a]$, $y \in [0, +\infty)$ va quyidagi

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta-1} u(x, y, z) = \chi(x, z), \quad x \in [0, a], \quad z \in [0, c] \text{ agar } \beta > 1/2 \text{ bo'lsa,}$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} \frac{u(x, y, z)}{\ln y} = \chi(x, z), \quad x \in [0, a], \quad z \in [0, c] \text{ agar } \beta = 1/2 \text{ bo'lsa,}$$

shartlardan birini qanoatlantirsin, bu yerda $\Delta_{xz}^\infty = \{(x, y, z) : y \in [0, +\infty), xz = 0\}$, $\chi(x, z)$ – berilgan funksiya.

$\alpha, \gamma \in (-1/2, +\infty)$, $\beta \in (-1/2, 1/2)$ bo'lganda quyidagi masala tadqiq qilingan:

DN $^\infty$ masala. (8), (9) va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, y, z)$ funksiya topilsin:

$$u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_+^\infty) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_+^\infty), \quad x^{2\alpha} u_x, y^{2\beta} u_y, z^{2\gamma} u_z \in C(\bar{\Omega}_+^\infty);$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\alpha} u_x(x, y, z) = 0, \quad y \in (0, \infty), \quad z \in (0, c), \quad u(a, y, z) = 0, \quad y \in [0, +\infty), \quad z \in [0, c];$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{2\beta} u_y(x, y, z) = \nu(x, z), \quad x \in (0, a), \quad z \in (0, c);$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{2\gamma} u_z(x, y, z) = 0, \quad x \in (0, a), \quad y \in (0, \infty), \quad u(x, y, c) = 0, \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, +\infty),$$

bu yerda $\nu(x, z)$ – berilgan funksiya.

Birinchi bobning to'rtinchi paragrafida

$$L_{\beta\beta\gamma} U \equiv U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} + \frac{2\beta}{x} U_x + \frac{2\beta}{y} U_y + \frac{2\gamma}{z} U_z = 0$$

tenglama uchun $\Sigma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0, z \in (0, c)\}$ chorak silindrda Dirixle va Dirixle-Neyman masalalari tadqiq qilingan. Bu yerda ham β va γ parametrlarning qo'yilgan masalalar bir qiymatli yechilishi mumkin bo'lgan qiymatlari qaralgan.

Dissertatsiyaning “**Ikkita singulyar koeffitsientlarga ega bo'lgan uch o'lchovli elliptik tenglama uchun nolokal shartli chegaraviy masalalar**” deb nomlangan ikkinchi bobi $\Omega_+ = \{(x, y, z) : x \in (0, a), y \in (0, b), z \in (0, c)\}$ va $\Omega_+^\infty = \{(x, y, z) : x \in (0, a), y \in (0, +\infty), z \in (0, c)\}$, $a, b, c \in R^+$ sohalarda

$$L_{0\beta\gamma} u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\beta}{y} u_y + \frac{2\gamma}{z} u_z = 0, \quad \beta, \gamma \in (-\infty, 1/2) \quad (10)$$

tenglama uchun nolokal masalalarni o'rganishga bag'ishlangan.

2.1 masala. Ω_+ sohada (10) tenglamani va

$$u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_+) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_+), \quad u_x, z^{2\gamma} u_z \in C(\bar{\Omega}_+); \quad (11)$$

$$u(0, y, z) = u(a, y, z), \quad u_x(0, y, z) = u_x(a, y, z), \quad y \in [0, b], \quad z \in [0, c]; \quad (12)$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u(x, y, c) = 0, \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, b]; \quad (13)$$

$$u(x,0,z) = \tau_1(x,z), \quad x \in [0,a], \quad z \in [0,c]; \quad (14)$$

$$u(x,b,z) = \tau_2(x,z), \quad x \in [0,a], \quad z \in [0,c], \quad (15)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y,z)$ funksiya topilsin, bu yerda $\tau_1(x,z), \tau_2(x,z)$ – berilgan funksiyalar.

2.2 masala. Ω_+^∞ sohada (10) tenglamani va (12)-(14),

$$u(x,y,z) \in C(\bar{\Omega}_+^\infty) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_+^\infty), \quad u_x, z^{2\gamma} u_z \in C(\bar{\Omega}_+^\infty); \quad (16)$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} u(x,y,z) = 0, \quad x \in [0,a], \quad z \in [0,c], \quad (17)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y,z)$ funksiya topilsin, bu yerda $\bar{\Omega}_+^\infty = \{(x,y,z): x \in [0,a], y \in [0,+\infty), z \in [0,c]\}$.

2.3 masala. Ω_+ sohada (10) tenglamani va (11), (13)-(15), $u(0,y,z) = 0, y \in [0,b], z \in [0,c]$ chegaraviy shartlarni hamda

$$\int_0^a u(x,y,z) dx = 0, \quad y \in [0,b], \quad z \in [0,c]$$

nolokal integral shartni qanoatlantiruvchi $u(x,y,z)$ funksiya topilsin.

2.4 masala. Ω_+^∞ sohada (10) tenglamani va (16), (13), (14), (17),

$$u(0,y,z) = u(a,y,z), \quad u_x(0,y,z) = 0, \quad y \in [0,+\infty), \quad z \in [0,c]$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y,z)$ funksiya topilsin.

2.5 masala. Ω_+^∞ sohada (10) tenglamani va (16), (13), (14), (17),

$$u_x(0,y,z) = u_x(a,y,z), \quad u(a,y,z) = 0, \quad y \in [0,+\infty), \quad z \in [0,c]$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x,y,z)$ funksiya topilsin.

Ta'kidlash lozimki, 2.2, 2.4, 2.5 masalalarni o'rganishda (12) va (13) shartlarda y o'zgaruvchi $[0,+\infty)$ oraliqda o'zgaradi. Yana qayd etib o'tish lozimki, 2.1 va 2.2 masalalar o'z-o'ziga qo'shma masalalar, 2.3, 2.4 va 2.5 masalalar esa o'z-o'ziga qo'shma bo'lmagan masalalar hisoblanadi.

2.1-2.5 masalalar bittadan ortiq yechimga ega emasli isbotlangan.

Quyidagi teoremlarning o'rinli ekanligi isbotlangan.

7-teorema. Aytaylik $\beta, \gamma \in (-\infty, 1/2)$ bo'lsin va $\tau_1(x,z), \tau_2(x,z)$ funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

I. $\tau_l(x,z) \in C_{x,z}^{4,5}(\bar{\Pi})$, $l = \overline{1,2}$ agar $\gamma \in (0, 1/2)$ bo'lsa, $\tau_l(\varphi, z) \in C_{x,z}^{4,2k+4}(\bar{\Pi})$, $l = \overline{1,2}$ agar $\gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2) \operatorname{sgn}(k-1)]$, $k \in \mathbb{N}$ bo'lsa, bu yerda $\Pi = \{(x,z): x \in (0,a), z \in (0,c)\}$;

II. $(\partial^j / \partial x^j) \tau_l(x,z) \Big|_{x=0} = (\partial^j / \partial x^j) \tau_l(x,z) \Big|_{x=a}$, $l = \overline{1,2}$, $j = \overline{0,3}$;

III. $(\partial^j / \partial z^j) \tau_l(x, z) \Big|_{z=0} = 0$, $(\partial^j / \partial z^j) \tau_l(x, z) \Big|_{z=c} = 0$, $l = \overline{1, 2}$, bu yerda agar $\gamma \in (0, 1/2)$ bo'lsa $j = \overline{0, 4}$; agar $\gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2) \operatorname{sgn}(k - 1))$, $k \in N$ bo'lsa, $j = \overline{0, 2k + 2}$. U holda 2.1 masalaning yechimi mavjud va u

$$u(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_n(x) \omega_{nm}^{21}(y) Z_m(z),$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda

$$X_0(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad X_{2n-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi n x}{a}, \quad X_{2n}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{2\pi n x}{a}, \quad n \in N, \quad (18)$$

$$Z_m(z) = z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sigma_{\gamma m} z / c), \quad m \in N, \quad (19)$$

$$\omega_{nm}^{21}(y) = P_{nm}(y) \tau_{2nm} + \left[\bar{K}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} y) - P_{nm}(y) \bar{K}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b) \right] \tau_{1nm},$$

$$P_{nm}(y) = y^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} y) / \left[b^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b) \right],$$

$$\tau_{l_{nm}} = d_m \int_0^c \int_0^a \tau_l(x, z) X_n(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz, \quad l = \overline{1, 2}, \quad d_m = 2 / \left[c J_{3/2-\gamma}(\sigma_{\gamma m}) \right]^2, \quad (20)$$

$\sigma_{\gamma m} = J_{1/2-\gamma}(x)$ funksiyaning musbat nollari, $\lambda_{nm} = (2\pi n / a)^2 + (\sigma_{\gamma m} / c)^2$, $n+1, m \in N$.

8-teorema. Agar $\beta, \gamma \in (-\infty, 1/2)$ va $\tau_1(x, z)$ funksiya 7-teoremaning shartlarini $l = 1$ bo'lganda qanoatlantirsa, u holda 2.2 masalaning yechimi mavjud va u

$$u(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_n(x) Z_m(z) \bar{K}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} y) \tau_{1nm},$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda $X_n(x)$, $Z_m(z)$ va τ_{1nm}, d_m lar mos holda (18), (19) va (20) tengliklar bilan aniqlanadi.

9-teorema. Aytaylik, $\beta, \gamma \in (-\infty, 1/2)$ bo'lsin va $\tau_1(x, z)$, $\tau_2(x, z)$ funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

I. $\tau_l(x, z) \in C_{x,z}^{4,5}(\bar{\Pi})$, $l = \overline{1, 2}$ bo'ladi, agar $\gamma \in (0, 1/2)$ bo'lsa, $\tau_l(x, z) \in C_{x,z}^{4,2k+4}(\bar{\Pi})$, $l = \overline{1, 2}$ bo'ladi, agar $\gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2) \operatorname{sgn}(k - 1))$, $k \in N$ bo'lsa, bu yerda $\Pi = \{(x, z) : x \in (0, a), z \in (0, c)\}$;

II. $(\partial^j / \partial x^j) \tau_l(x, z) \Big|_{x=0} = 0$, $(\partial^j / \partial x^j) \tau_l(x, z) \Big|_{x=a} = 0$, $l = \overline{1, 2}$, $j = \overline{0, 3}$;

III. $(\partial^j / \partial z^j) \tau_l(x, z) \Big|_{z=0} = 0$, $(\partial^j / \partial z^j) \tau_l(x, z) \Big|_{z=c} = 0$, $l = \overline{1, 2}$, bu yerda agar $\gamma \in (0, 1/2)$ bo'lsa $j = \overline{0, 4}$ bo'ladi; agar $\gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2) \operatorname{sgn}(k - 1))$ bo'lsa, $j = \overline{0, 2k + 2}$ bo'ladi.

U holda 2.3 masalaning yechimi mavjud bo'ladi.

10-teorema. Aytaylik, $\beta, \gamma \in (-\infty, 1/2)$ bo'lsin va $\tau_1(x, z)$ funksiya 9-teoremaning shartlarini $l=1$ bo'lganda qanoatlantirsa, u holda 2.4 va 2.5 masalalarning yechimlari mavjud bo'ladi.

Dissertatsiyaning “**Uchta singulyar koeffitsientlarga ega bo'lgan uch o'lchovli aralash tipdagi tenglama uchun chegaraviy masalalar**” nomli uchinchi bobida chegaralangan va yarim cheksiz parallelepipedda uchta singulyar koeffitsientli aralash tipdagi uch o'lchovli tenglama uchun Dirixle va Keldish masalalari tadqiq qilingan. Yana bu bobda elliptik qismi chorak silindrdan, giperbolik qismi esa uchburchakli to'g'ri prizmadan iborat sohada Trikomi va Trikomi-Neyman masalalari tadqiq qilingan.

Uchinchi bobning birinchi paragrafida α, β, γ parametrlarning qiymatlariga qarab, $\Omega = \{(x, y, z): x \in (0, a), y \in (-b_0, b), z \in (0, c)\}$ sohada quyidagi

$$u_{xx} + (\text{sgn } y)u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{|y|}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z = 0 \quad (21)$$

aralash tipdagi tenglama uchun D va E masalalar tadqiq qilingan, bu yerda $a, b_0, b, c \in R^+$.

$\beta \in (0, 1/2)$, $\alpha, \gamma \in (-\infty, 1/2)$ bo'lganda quyidagi masala qaralgan:

D masala. $\Omega_+ \cup \Omega_-$ sohada (21) tenglamani va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x, y, z)$ funksiya topilsin:

$$u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_+ \cup \Omega_-), \quad x^{2\alpha}u_x, z^{2\gamma}u_z \in C(\bar{\Omega}); \quad (22)$$

$$u(0, y, z) = 0, \quad y \in [-b_0, b], \quad z \in [0, c]; \quad u(x, y, 0) = 0, \quad x \in [0, a], \quad y \in [-b_0, b]; \quad (23)$$

$$u(a, y, z) = 0, \quad y \in [-b_0, b], \quad z \in [0, c]; \quad u(x, y, c) = 0, \quad x \in [0, a], \quad y \in [-b_0, b]; \quad (24)$$

$$u(x, -b_0, z) = f_1(x, z); \quad u(x, b, z) = f_2(x, z), \quad x \in [0, a], \quad z \in [0, c]; \quad (25)$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} u_y(x, y, z) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} u_y(x, y, z), \quad x \in (0, a), \quad z \in (0, c), \quad (26)$$

bu yerda $\Omega_+ = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_- = \Omega \cap \{y < 0\}$, $f_1(x, z), f_2(x, z)$ -berilgan funksiyalar.

$\beta \in (0, 1/2)$, $\alpha, \gamma \in [1/2, +\infty)$ bo'lganda quyidagi masala qaralgan:

E masala. $\Omega_+ \cup \Omega_-$ sohada (21) tenglamani va (24), (25), (26) shartlarni qanoatlantiruvchi hamda $x=0$ va $z=0$ tekisliklarda chegaralangan $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega} \setminus \Delta_{xz}) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_+ \cup \Omega_-)$ funksiya topilsin, bu yerda $\Delta_{xz} = \{(x, z): xz = 0\}$.

D (E) masalalarni tadqiq qilishda quyidagi belgilashlardan foydalanilgan:

$$\Delta_{nm}(b_0, b) = I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b) \bar{Y}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b_0) + K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b) J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b_0),$$

bu yerda $\lambda_{nm} = (\sigma_{\alpha n}/a)^2 + (\sigma_{\gamma m}/c)^2$ ($\lambda_{nm} = (\delta_{\alpha n}/a)^2 + (\delta_{\gamma m}/c)^2$), $n, m \in N$,
 $\sigma_{\alpha n}$ va $\sigma_{\gamma m}$ ($\delta_{\alpha n}$ va $\delta_{\gamma m}$) lar mos holda $J_{1/2-\alpha}(x)$ va $J_{1/2-\gamma}(x)$ ($J_{\alpha-1/2}(x)$ va
 $J_{\gamma-1/2}(x)$) funksiyalarning musbat nollari,

$$\bar{Y}_{1/2-\beta} \left[\sqrt{\lambda_{nm}}(-y) \right] = \frac{\pi}{2 \cos \beta \pi} \left\{ J_{1/2-\beta} \left[\sqrt{\lambda_{nm}}(-y) \right] + J_{\beta-1/2} \left[\sqrt{\lambda_{nm}}(-y) \right] \right\}.$$

1-lemma. Aytaylik, agar b_0 – ixtiyoriy natural son yoki $b_0 = p/q$ – ixtiyoriy kasr son bo‘lsin, bu yerda $(p, q) = 1$, $(4, q) = 1$, $p, q \in N$, jumladan $(n - \alpha/2)^2/a^2 + (m - \gamma/2)^2/c^2 \neq (d - 1/4)^2 q^2/p^2$, $d \in Z$, $\forall n, m \in N$ tengsizlik bajarilsa u holda shunday C_0 musbat son va n_0, m_0 natural sonlar mavjud bo‘ladiki, barcha $n > n_0$ va $m > m_0$ natural sonlar uchun $|\Delta_{nm}(b_0, b)| \geq C_0 e^{\sqrt{\lambda_{nm}} b}$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Bu paragrafning asosiy natijalari quyidagi teoremlardan iborat.

11-teorema. Agar D (E) masalaning yechimi mavjud bo‘lib, barcha $n, m \in N$ uchun $\Delta_{nm}(b_0, b) \neq 0$ shart bajarilsa, u holda masala yechimi yagona bo‘ladi.

12-teorema. Aytaylik, $\alpha, \gamma \in (-\infty, 1/2)$, $\beta \in (0, 1/2)$ va 1-lemmaning shartlari bajarilsin, hamda $f_1(x, z)$, $f_2(x, z)$ funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

I. $f_l(x, z) \in C_{x,z}^{5,5}(\bar{\Pi})$, $l = \overline{1, 2}$, agar $\alpha, \gamma \in (0, 1/2)$ bo‘lsa;
 $f_l(x, z) \in C_{x,z}^{2k+4, 2k+4}(\bar{\Pi})$, $l = \overline{1, 2}$, agar $\alpha, \gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2) \operatorname{sgn}(k - 1)]$,
 $k \in N$ bo‘lsa, bu yerda $\Pi = \{(x, z) : x \in (0, a), z \in (0, c)\}$;

II. $(\partial^j / \partial x^j) f_l(x, z) \Big|_{x=0} = 0$, $(\partial^j / \partial x^j) f_l(x, z) \Big|_{x=a} = 0$, $(\partial^j / \partial z^j) f_l(x, z) \Big|_{z=0} = 0$,
 $(\partial^j / \partial z^j) f_l(x, z) \Big|_{z=c} = 0$, $l = \overline{1, 2}$ bu yerda agar $\alpha, \gamma \in (0, 1/2)$ bo‘lsa, $j = \overline{0, 4}$;
 agar $\alpha, \gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2) \operatorname{sgn}(k - 1)]$ bo‘lsa, $j = \overline{0, 2k + 2}$.

U holda quyidagi tasdiqlar o‘rinli:

1) agar barcha $n = 1, 2, \dots, n_0$, $m = 1, 2, \dots, m_0$ lar uchun $\Delta_{nm}(b_0, b) \neq 0$ bo‘lsa, u holda D masalaning yagona yechimi mavjud bo‘ladi;

2) agar ayrim $n = s_1, s_2, \dots, s_j \leq n_0$, $m = t_1, t_2, \dots, t_i \leq m_0$ larda $\Delta_{nm}(b_0, b) = 0$ bo‘lsa, u holda D masalaning yechimi quyidagi

$$\begin{cases} f_{1lk} b^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{lk}} b) + f_{2lk} b_0^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{lk}} b_0) = 0, \\ f_{1lk} b^{1/2-\beta} I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{lk}} b) - f_{2lk} b_0^{1/2-\beta} J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{lk}} b_0) = 0, \end{cases}$$

shartlar bajarilgandagina mavjud bo‘ladi, bu yerda $l = s_1, s_2, \dots, s_n$, $k = t_1, t_2, \dots, t_m$;

$s_i, t_j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$, n, m – berilgan natural sonlar,

$$f_{jlk} = d_{lk} \int_0^c \int_0^a f_j(x, z) x^{2\alpha} X_l(x) z^{2\gamma} Z_k(z) dx dz, \quad j = \overline{1, 2}; \quad X_l(x), \quad Z_k(z) \text{ funksiyalar}$$

esa (5) tengliklar bilan aniqlanadi, $d_{lk} = 4 / \left[ac J_{3/2-\alpha}(\delta_{al}) J_{3/2-\alpha}(\delta_{\gamma k}) \right]^{-2}$.

13-teorema. Aytaylik, $\alpha, \gamma \in [k - 1/2, k + 1/2), k \in N, \beta \in (0, 1/2)$ bo'lsin va 1-lemmaning shartlari bajarilsin hamda $f_1(x, z), f_2(x, z)$ funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

- I. $f_l(x, z) \in C_{x,z}^{2k+4, 2k+4}(\bar{\Pi})$, $l = \overline{1, 2}$, bu yerda $\Pi = \{(x, z): 0 < x < a, 0 < z < c\}$;
 II. $(\partial^j / \partial x^j) f_l(x, z) \Big|_{x=0} = 0$, $(\partial^j / \partial x^j) f_l(x, z) \Big|_{x=a} = 0$, $(\partial^j / \partial z^j) f_l(x, z) \Big|_{z=0} = 0$,
 $(\partial^j / \partial z^j) f_l(x, z) \Big|_{z=c} = 0$, $l = \overline{1, 2}$, $j = \overline{0, 2k+2}$.

U holda quyidagi tasdiqlar o'rinli:

1) agar $\Delta_{nm}(b_0, b) \neq 0$ shart barcha $n = 1, 2, \dots, n_0, m = 1, 2, \dots, m_0$ natural sonlar uchun bajarilsa, u holda E masalaning yagona yechimi mavjud bo'ladi;

2) agar ayrim $n = s_1, s_2, \dots, s_j \leq n_0, m = t_1, t_2, \dots, t_i \leq m_0$ natural sonlarda $\Delta_{nm}(b_0, b) = 0$ bo'lsa, u holda E masalaning yechimi

$$\begin{cases} F_{1lk} b^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{lk}} b) + F_{2lk} b_0^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{lk}} b_0) = 0, \\ F_{1lk} b^{1/2-\beta} I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{lk}} b) - F_{2lk} b_0^{1/2-\beta} J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{lk}} b_0) = 0, \end{cases}$$

shartlar bajarilgandagina mavjud bo'ladi, bu yerda

$$F_{jnm} = s_{nm} \int_0^c \int_0^a f_j(x, z) x^{1/2+\alpha} J_{\alpha-1/2}(\delta_{\alpha n} x/a) z^{1/2+\gamma} J_{\gamma-1/2}(\delta_{\gamma m} z/c) dx dz,$$

$$s_{nm} = 4 / \left[ac J_{\alpha+1/2}(\delta_{\alpha n}) J_{\gamma+1/2}(\delta_{\gamma m}) \right]^{-2}.$$

Bu bobning ikkinchi paragrafida $\Omega^\infty = \{(x, y, z): x \in (0, a), y \in (-b_0, +\infty), z \in (0, c)\}$ sohada D va E tipidagi masalalar o'rganilib, ularning bir qiymatli yechilishi isbotlangan.

Uchinchi bobning uchinchi paragrafida $\Omega_{01} = \{(x, y, z): (x, y) \in \Delta, z \in (0, c)\}$ sohada quyidagi

$$U_{xx} + (\text{sgny})U_{yy} + U_{zz} + \frac{2\beta}{x}U_x + \frac{2\beta}{|y|}U_y + \frac{2\gamma}{z}U_z = 0 \quad (27)$$

tenglama qaralgan, bu yerda $\Delta - xOy$ tekisligining bir bog'lami sohasi bo'lib, $y \geq 0$ bo'lganda $\bar{\sigma}_0 = \{(x, y): x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ egri chiziq va $\overline{OM} = \{(x, y): x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$ kesma bilan, $y \leq 0$ bo'lganda esa $\overline{OQ} = \{(x, y): x + y = 0, 0 \leq x \leq 1/2\}$ va $\overline{QP} = \{(x, y): x - y = 1, 1/2 \leq x \leq 1\}$ kesmalar bilan chegaralangan.

Quyidagi belgilashlarni kiritaylik: $\Omega_0 = \Omega_{01} \cap (y > 0)$, $\Omega_1 = \Omega_{01} \cap (y < 0)$;
 $\Delta_0 = \Delta \cap (y > 0)$, $\Delta_1 = \Delta \cap (y < 0)$; $S_0 = \{(x, y, z) : \sigma_0 \times (0, c)\}$,
 $S_1 = \{(x, y, z) : OM \times (0, c)\}$, $S_2 = \{(x, y, z) : OQ \times (0, c)\}$;
 $\bar{S}_3 = \{(x, y, z) : \bar{\Omega}_{01} \cap (z = 0)\}$, $\bar{S}_4 = \{(x, y, z) : \bar{\Omega}_{01} \cap (z = c)\}$.

Ω_{01} sohada (27) tenglama uchun $\beta \in (0, 1/2)$, $\gamma \in (-\infty, 1/2)$ bo'lganda quyidagi masalalar tadqiq qilingan.

T (Trikomi) masala. Ω_{01} sohada (27) tenglamani va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $U(x, y, z)$ funksiya topilsin:

$$U(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_{01}) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_0 \cup \Omega_1), x^{2\beta}U_x, y^{2\beta}U_y, z^{2\gamma}U_z \in C(\bar{\Omega}_0); \quad (28)$$

$$U(x, y, z)|_{\bar{S}_0} = F(x, y, z); \quad (29)$$

$$U(x, y, z)|_{\bar{S}_1} = 0, \quad U(x, y, z)|_{\bar{S}_2} = 0, \quad (30)$$

$$U(x, y, z)|_{\bar{S}_3} = 0, \quad U(x, y, z)|_{\bar{S}_4} = 0, \quad (31)$$

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} U_y(x, y, z) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} U_y(x, y, z), \quad x \in (0, 1), z \in (0, c), \quad (32)$$

bu yerda $F(x, y, z)$ – berilgan funksiya.

TN (Trikomi-Neyman) masala. Ω_{01} sohada (27) tenglamani va (28), (31), (32), $\frac{\partial}{\partial n} U(x, y, z)|_{S_0} = F_1(x, y, z)$, $x^{2\beta}U_x(x, y, z)|_{S_1} = 0$, $U(x, y, z)|_{\bar{S}_2} = 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi $U(x, y, z)$ funksiya topilsin, bu yerda $n - S_0$ ga o'tkazilgan tashqi normal, $F_1(x, y, z)$ – berilgan funksiya.

Aytaylik, $U(x, y, z) = V(\rho, \varphi, z)$ – Ω_0 sohada T masalaning yechimi bo'lsin, bu yerda ρ, φ, z silindrik koordinatalar bo'lib, dekart koordinatalari bilan $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctg(y/x)$, $z = z$ formulalar orqali bog'langan. Bu koordinatalar sistemasida (29) shart

$$V(1, \varphi, z) = f(\varphi, z), \quad \varphi \in [0, \pi/2], z \in [0, c],$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerda $f(\varphi, z) = F(\cos \varphi, \sin \varphi, z)$.

Quyidagi teoremlar isbotlangan.

14-teorema. Aytaylik $\beta \in (0, 1/2)$, $\gamma \in (-\infty, 1/2)$ bo'lsin va $f(\varphi, z)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

I. $f(\varphi, z) \in C_{\varphi, z}^{3,5}(\bar{\Pi})$ bo'ladi, agar $\gamma \in (0, 1/2)$ bo'lsa va $f(\varphi, z) \in C_{\varphi, z}^{3,2k+4}(\bar{\Pi})$

bo'ladi, agar $\gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2) \operatorname{sgn}(k - 1)]$, $k \in N$ bo'lsa, bu yerda

$$\Pi = \{(\varphi, z) : \varphi \in (0, \pi/2), z \in (0, c)\};$$

$$\text{II. } \frac{\partial^j}{\partial \varphi^j} f(\varphi, z) \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad \frac{\partial^j}{\partial \varphi^j} f(\varphi, z) \Big|_{\varphi=\pi/2} = 0, \quad j = \overline{0, 1, 2};$$

$$\text{III. } \frac{\partial^j}{\partial z^j} f(\varphi, z) \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial^j}{\partial z^j} f(\varphi, z) \Big|_{z=c} = 0, \quad j = \overline{0, 4}, \quad \text{agar } \gamma \in (0, 1/2) \text{ bo'lsa};$$

$j = \overline{0, 2k+2}$ agar $\gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2)\text{sgn}(k-1)]$, $k \in \mathbb{N}$ bo'lsa.

U holda T masalaning yagona yechimi mavjud bo'ladi.

15-teorema. Aytaylik $\beta \in (0, 1/2)$, $\gamma \in (-\infty, 1/2)$ bo'lsin va $f_1(\varphi, z) = F_1(\cos \varphi, \sin \varphi, z)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

$$\text{I. } f_1(\varphi, z) \in C_{\varphi, z}^{4,5}(\overline{\Pi}) \text{ agar } \gamma \in (0, 1/2) \text{ bo'lsa}; \quad f_1(\varphi, z) \in C_{\varphi, z}^{4, 2k+4}(\overline{\Pi}), \text{ agar}$$

$\gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2)\text{sgn}(k-1)]$, $k \in \mathbb{N}$ bo'lsa, bu yerda

$$\Pi = \{(\varphi, z) : \varphi \in (0, \pi/2), z \in (0, c)\};$$

$$\text{II. } \frac{\partial^j}{\partial \varphi^j} f_1(\varphi, z) \Big|_{\varphi=0} = 0, \quad \frac{\partial^j}{\partial \varphi^j} f_1(\varphi, z) \Big|_{\varphi=\pi/2} = 0, \quad j = \overline{0, 3};$$

$$\text{III. } \frac{\partial^j}{\partial z^j} f_1(\varphi, z) \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial^j}{\partial z^j} f_1(\varphi, z) \Big|_{z=c} = 0, \quad j = \overline{0, 4} \text{ agar } \gamma \in (0, 1/2) \text{ bo'lsa};$$

$j = \overline{0, 2k+2}$ agar $\gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2)\text{sgn}(k-1)]$, $k \in \mathbb{N}$ bo'lsa.

U holda TN masalaning yagona yechimi mavjud bo'ladi.

Dissertatsiyaning **“Uch o'lchovli ikkita va uchta singulyar koeffitsientlarga ega bo'lgan elliptik tenglamalar uchun spektral masalalar”** deb nomlangan to'rtinchi bobi sharning qismlaridan iborat bo'lgan sohalarda ikkita va uchta singulyar koeffitsientlarga ega bo'lgan uch o'lchovli elliptik tenglama uchun spektral masalalarning tadqiqotiga bag'ishlangan.

To'rtinchi bobning birinchi paragrafida ushbu

$$t(1-t)T''(t) + [a_3 - (a_3 + a_4)t]T'(t) - \left(a_1a_2 - \frac{q}{t}\right)T(t) = 0 \quad (33)$$

buzilgan Goyn tenglamasining umumiy yechimi topilgan, bu yerda $a_j = \overline{1, 4}$ va q – berilgan sonli parametrlar, jumladan $a_j, j = \overline{1, 4}$ parametrlar $1 + a_1 + a_2 = a_3 + a_4$ Fuks shartini qanoatlantiradi.

$t = 0$ nuqta atrofida (33) tenglamaning umumiy yechimi topilgan. Topilgan yechim quyida o'rganiladigan spektral masalalarni tadqiq qilishda ishlatilgan.

Aytaylik $\Omega_{1/4}$ uch o'lchovli soha bo'lib, $S_0 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, y > 0, z > 0\}$ sferaning qismi va ikkita

$$S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 < 1, y = 0, z > 0\}, \quad S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1, y > 0, z = 0\}$$

yarimdoiralar bilan chegaralangan.

To‘rtinchi bobning ikkinchi paragrafida $\Omega_{1/4}$ sohada

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\beta}{y}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z + \lambda u = 0, \quad \beta, \gamma \in (0, 1/2), \quad (34)$$

elliptik tipdagi tenglama qaralgan, bu yerda $u = u(x, y, z)$ – noma’lum funksiya, λ – sonli parametr.

Quyidagi xos qiymat haqidagi masala tadqiq qilingan:

DN ^{$\beta\gamma$} masala. λ parametrning shunday qiymatlari topilsinki, $\Omega_{1/4}$ sohada (34) tenglamani va $u(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in \bar{S}_0, \lim_{y \rightarrow 0} y^{2\beta} u_y(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in S_1, \lim_{z \rightarrow 0} z^{2\beta} u_z(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in S_2$ shartlarni qanoatlantiruvchi trivial bo‘lmagan $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_{1/4}) \cap C^2(\Omega_{1/4})$ funksiya mavjud bo‘lsin.

Energiya integrallari usuli bilan quyidagi teorema isbotlangan.

16-teorema. Agar $\lambda \leq 0$ bo‘lsa, u holda DN ^{$\beta\gamma$} masala faqat trivial yechimga ega bo‘ladi.

So‘ngra DN ^{$\beta\gamma$} masalaning xos qiymatlari $\lambda_{ml} = (\sigma_{ml})^2, m, l \in N$ ko‘rinishda bo‘lishi va bularga mos keladigan xos funksiyalar

$$u_{nlm}(x, y, z) = b_{nml}^{dn_1} r^{-(1/2 + \beta + \gamma)} J_{\nu_l}(\sigma_{ml} r) F\left(-n, n + 2\beta; \beta + \frac{1}{2}; \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) \times \\ \times F_3\left(1/2 + \beta + \gamma + l, \beta + n/2, -l, -n/2; 1 + \beta; \sin^2 \theta, 1\right),$$

ko‘rinishda ekanligi topilgan, bu yerda $b_{nml}^{dn_1} \neq 0$ – ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \varphi = \arctg(y/x), \theta = \arccos(z/r), F_3(a, a', b, b'; c; w, z)$ – Appelning gipergeometrik funksiyasi, $\nu_l = 2l + 1/2 + \beta + \gamma, l \in N, \sigma_{ml}$ esa $J_{\nu_l}(\sqrt{\lambda}) = 0$ tenglamaning m -chi musbat ildizlari.

To‘rtinchi bobning uchunchi paragrafida $\Omega_{1/8} = \Omega_{1/4} \cap \{x > 0\}$ sohada quyidagi masala tadqiq qilingan.

DN ^{$\alpha\beta\gamma$} masala. λ parametrning shunday qiymatlari topilsinki, $\Omega_{1/8}$ sohada

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z + \lambda u = 0, \quad \alpha, \beta, \gamma \in (0, 1/2)$$

tenglamani va

$$u(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in \bar{S}_3, \lim_{x \rightarrow 0} x^{2\alpha} u_x(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in S_4,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{2\beta} u_y(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in S_5, \lim_{z \rightarrow 0} z^{2\gamma} u_z(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in S_6,$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi trivial bo‘lmagan $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_{1/8}) \cap C^2(\Omega_{1/8})$ funksiya mavjud bo‘lsin, bu yerda

$$S_3 = S_0 \cap \{x > 0\}, \quad S_4 = \{(x, y, z): y^2 + z^2 < 1, x = 0, y > 0, z > 0\}, \quad S_5 = S_1 \cap \{x > 0\}, \\ S_6 = S_2 \cap \{x > 0\}.$$

DN^{αβγ} masalaning λ ≤ 0 bo'lganda trivial bo'lmagan yechimlari mavjud emasligi isbotlangan. So'ngra DN^{αβγ} masalaning xos qiymatlari J_{ν̃_l}(√λ) = 0 tenglamaning λ̃_{ml} = (σ̃_{ml})², m, l ∈ N ildizlari ko'rinishida topilganligi ko'rsatilgan. Bu yerda ν̃_l = 2l + 1/2 + α + β + γ, l ∈ N.

Bu xos qiymatlarga mos keluvchi masalaning xos funksiyalari esa quyidagi

$$u_{nlm}(x, y, z) = \tilde{b}_{nlm} r^{-(1/2 + \alpha + \beta + \gamma)} J_{\tilde{\nu}_l}(\tilde{\sigma}_{ml} r) F(n + \alpha + \beta, -n; 1/2 + \beta; \sin^2 \varphi) \times \\ F_3(1/2 + \alpha + \beta + \gamma + l, \beta + n/2, -l, -n/2; 1 + \alpha + \beta; \sin^2 \theta, 1), \quad n, m, l \in N,$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda φ, θ ∈ [0, π/2], r ∈ [0, 1], b̃_{nlm} ≠ 0 – ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

XULOSA

Dissertatsiya ishi uch o'lovli singulyar koeffitsientlarga ega bo'lgan elliptik va aralash tipdagi differensial tenglamalar uchun chegaraviy va spektral masalalarni tadqiq qilishga bag'ishlangan.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1. Parallelepiped va yarim cheksiz parallelepiped uchta singulyar koeffitsientga ega bo'lgan uch o'lovli elliptik tipdagi tenglama uchun Dirixle, Keldish va Dirixle-Neyman masalalarining bir qiymatli yechilishi isbotlangan.

2. Chorak silindrda uchta singulyar koeffitsientga ega bo'lgan uch o'lovli elliptik tipdagi tenglama uchun Dirixle va Dirixle-Neyman masalalarining bir qiymatli yechilishi isbotlangan.

3. Ikkita singulyar koeffitsientga ega bo'lgan uch o'lovli elliptik tenglama uchun parallelepiped va yarim cheksiz parallelepiped o'z-o'ziga qo'shma va o'z-o'ziga qo'shma bo'lmagan nolokal chegaraviy masalalarning bir qiymatli yechilishi isbotlangan.

4. Parallelepiped va yarim cheksiz parallelepiped uchta singulyar koeffitsientga ega bo'lgan uch o'lovli aralash tipdagi tenglama uchun Dirixle va Keldish masalalarining bir qiymatli yechilishi isbotlangan.

5. Chorak silindr va ucburchakli to'g'ri prizmadan tashkil topgan sohada uchta singulyar koeffitsientlarga ega bo'lgan aralash tipdagi tenglama uchun Triкоми va Triкоми-Neyman masalalarining bir qiymatli yechilishi isbotlangan.

6. Buzilgan Goyn tenglamasining umumiy yechimi hadlari gipergeometrik funksiyalardan iborat bo'lgan qator ko'rinishida topilgan.

7. Sharning qismlaridan iborat bo'lgan sohalarda ikkita va uchta singulyar koeffitsientlarga ega bo'lgan elliptik tipdagi tenglamalar uchun spektral masalalar qo'yilgan va tadqiq qilingan. Masalalarning xos qiymatlari mavjud bo'lmagan λ parametrning qiymatlar sohasi aniqlangan hamda masalaning sanoqli sondagi xos qiymatlari va ularga mos keladigan xos funksiyalari topilgan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSC.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ
УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ
В.И.РОМАНОВСКОГО**

ФЕРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАРИМОВ КАМОЛИДДИН ТУЙЧИБОВИЧ

**КРАЕВЫЕ И СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО И
СМЕШАННОГО ТИПОВ С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ
В ТРЕХМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ**

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ
ДОКТОРА (DSc) ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК**

Ташкент – 2024

Тема докторской (Doctor of Science) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за № В2017.3.DSc/FM100.

Диссертация выполнена в Ферганском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу <http://kengash.mathinst.uz> и на информационно-образовательном портале «ZIYONET» по адресу www.ziyonet.uz.

Научный консультант: Уринов Ахмаджон Кушакович
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: Ашуров Равшан Раджабович
доктор физико-математических наук, профессор

Ситник Сергей Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор

Мирсабуров Мирахмат
доктор физико-математических наук, профессор

Ведущая организация: Самаркандский государственный университет

Защита диссертации состоится 12 ноября 2024 года в 16:00 часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская. Тел.:(+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (регистрационный номер 189). (Адрес: 100174, г.Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская. Тел.: (+99871)-207-91-40).

Автореферат диссертации разослан 28 октября 2024 года.
(протокол рассылки № 2 от 28 октября 2024 года).



У.А. Розиков

Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

Ж.К. Адашев

Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

А. Азамов

Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. В настоящее время во многих мировых научных школах бурно развивается теория краевых задач с локальными и нелокальными краевыми условиями для дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами. Такое внимание к теории краевых задач неслучайно, так как дифференциальные уравнения в частных производных с сингулярными коэффициентами нашли важные применения в различных разделах математической физики, химии и т.п. В частности, они имеют большое значение при математическом моделировании состояния нефтяных пластов, фильтрации грунтовых вод, переноса тепла и массы в объекте, имеющем сложное строение, электрических колебаний в проводах, движения жидкости в канале, окруженном пористой средой, в процессах колебаний, теплопроводности, диффузии, фильтрации и других явлений. Таким образом, актуальность исследования и разработка методов решения задач для дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами обусловлена как логикой развития теоретических исследований, отсутствием общих методов решения задач для таких уравнений, так и востребованностью обсуждаемых уравнений в приложениях.

Во всем мире в настоящее время актуальным является исследование локальных и нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными с помощью метода спектрального анализа. Наряду с этим возрос интерес к исследованию спектральных задач для дифференциальных уравнений в частных производных разного типа. Научно-исследовательские работы, проведенные по спектральной теории, условно можно разделить на два направления. Первое из них – это доказательство теорем о единственности решения краевых задач, а второе – нахождение собственных значений и собственных функций рассматриваемых краевых задач. Научные исследования по этим направлениям в настоящее время продолжаются и развиваются. В связи с этим, исследования краевых и спектральных задач для дифференциальных уравнений эллиптического и смешанного типов с сингулярными коэффициентами считаются целевыми научными исследованиями.

В нашей стране в настоящее время усилилось внимание к актуальным научным направлениям, имеющим прикладное значение, в частности, учеными нашей страны особое внимание уделяется исследованию и поиску эффективных методов решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных второго и высокого порядков. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по дифференциальным уравнениям и математической физике, функциональному анализу, теории динамических систем, а также по прикладной математике и математическому моделированию является

основной задачей и направлением деятельности исследователей¹. В целях использования научных результатов в смежных областях науки и для обеспечения реализации постановлений, исследования краевых и спектральных задач для дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами в трехмерном пространстве, имеет важное значение.

Настоящая диссертация в определенной степени служит осуществлению задач, обозначенных в Указах и Постановлениях Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в Постановлениях ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан», ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно–правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации²

В направлении исследования краевых и спектральных задач для дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами и разработки методов их нахождения осуществляются широкие научные исследования в ведущих научных центрах и университетах зарубежных стран, в том числе, в университетах Нью-Йорка и Техаса (США), в Туринском университете (Италия), в Афинском университете (Греция), в университете Сантьяго-де-Компостела (Испания), в университете Уппсала (Швеция), в Ближневосточном университете (Турция), в Московском, Новосибирском, Санкт-Петербургском, Орловском, Казанском, Камчатском и Самарском государственных университетах (Россия), в Белгородском государственном национальном исследовательском университете (Россия), в Математическом институте Сибирского отделения РАН (Россия), в институте прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, в Институте математики и математического моделирования Казахстана и в Казахском национальном университете (Казахстан), в Институте физических исследований НАН Армении, в Армянском

¹ Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан № 292 от 18 мая 2017 года «О мерах по организации деятельности вновь созданных научных организаций Академии Наук Республики Узбекистан».

² Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации: Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, <http://www.springer.com/series/10533>; Известия высших учебных заведений. Математика, <http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm>; Общероссийский математический портал, <http://www.mathnet.ru>; Электронный журнал дифференциальных уравнений, <https://ejde.math.txstate.edu>; Дифференциальные уравнения, <https://www.springer.com/journal/10625>; также были использованы и другие источники.

государственном педагогическом университете (Армения), в Томском национальном исследовательском политехническом университете, в Московском физико-техническом институте, в Стерлитамакской государственной педагогической академии (Россия); в Белорусском государственном университете (Белоруссия), в научно-исследовательском институте Таджикского Национального университета (Таджикистан) и другие.

В результате научных исследований в мировом масштабе решен целый ряд актуальных задач, в том числе были получены следующие научные результаты: разработана теория краевых задач для дифференциальных уравнений смешанного типа (Туринский университет, Италия); изучены краевые задачи для дифференциальных уравнений смешанного эллиптического-гиперболического типа (Университет Уппсала; Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Московский, Новосибирский, Орловский, Казанский, Самарский, Стерлитамакский государственные университеты); разработан способ решения краевых задач для дифференциальных уравнений смешанного и смешанно-составного типов (Математический институт Сибирского отделения РАН, Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН); найдены способы исследования краевых задач для эллиптического-гиперболического и параболического-гиперболического уравнений (Математический институт Сибирского отделения РАН, Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, Институт математики и математического моделирования Казахстана); построено общее решение линейного дифференциального уравнения второго порядка класса Фукса с четырьмя особыми точками (Институт физических исследований НАН Армении, Армянский государственный педагогический университет, Национальный исследовательский Томский политехнический университет, Московский физико-технический институт, Санкт-Петербургский государственный университет).

В мировой практике в настоящее время осуществляется ряд научных исследований по приоритетным направлениям, а именно: по применению теории спектрального анализа к дифференциальным уравнениям с особенностями в коэффициентах и по построению регулярных решений локальных и нелокальных краевых задач для таких уравнений.

Степень изученности проблемы. Наиболее полная библиография и постановка основных краевых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений в частных производных различных типов, в частности, для эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами приведена в монографиях А.В.Бицадзе, Р.Гильберта, М.М.Смирнова, И.А.Киприянова, М.С.Салахитдинова и М.Мирсабурова, М.С.Салахитдинова и А.К.Уринова, М.С.Салахитдинова и Б.Исламова, К.Б.Сабитова и др.

Краевыми задачами для двумерных и многомерных дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами занимались М.Н.Олевский, А.Weinstein, E.Young, D.W.Fox, Е.И.Моисеев, М.С.Салахитдинов, Н.Р.Раджабов, И.А.Киприянов, М.Б.Капилевич, С.П.Пулькин, О.А.Маричев, М.Е.Лернер, О.А.Репин, А.П.Солдатов, С.М.Ситник, М.Мирсабуров, А.К.Уринов, Б.Исломов, К.Б.Сабитов, Р.С.Хайруллин, А.Хасанов, Ш.Т.Каримов и др.

В 1956 г. Ф.И. Франкль, рассматривая обтекание конечного симметричного профиля потоком дозвуковой скорости со сверхзвуковой зоной, оканчивающейся прямым скачком уплотнения, поставил задачу для уравнения Чаплыгина в смешанной области с нелокальным условием. За прошедшие годы изучению краевых задач с нелокальным условием для дифференциальных уравнений в частных производных на плоскости посвящены многочисленные работы. Отметим работы Е.И.Моисеева, Н.И.Ионкина, М.Е.Лернера и О.А.Репина, Ю.К.Сабитовой, А.А.Абашкина и др.

Интерес к изучению задач для уравнений смешанного типа возрос после работы Ф.И. Франкля, где впервые обращено внимание на то, что задачи трансзвуковой газовой динамики сводятся к уравнениям этого типа. Известно, что задача Дирихле для уравнений смешанного типа является не всегда корректно поставленной в смысле Адамара. А.В.Бицадзе показал, что задача Дирихле для уравнения Лаврентьева-Бицадзе поставлена некорректно и после этой работы возникла проблема поиска смешанных областей, для которых задача Дирихле является корректно поставленной. Если уравнение смешанного типа содержит гиперболическое уравнение и гиперболическая часть области является прямоугольником, то для разрешимости задачи возникает условие, зависящее от размеров сторон прямоугольника. Если при этом задача разрешима, то она разрешима не для любого прямоугольника. Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольнике и полуполосе изучалась многими авторами. Отметим работы, Б.В.Шабата, Н.Н.Вахания, J.R.Cannon, Р.И.Сохадзе, А.П.Солдатова, К.Б.Сабитова, Р.С.Хайруллина, М.М.Хачева и др. Известно, что на плоскости для вырождающихся дифференциальных уравнений и уравнений с сингулярными коэффициентами эллиптического типа задача Дирихле не всегда будет корректно поставленной. В тех случаях, когда задача Дирихле поставлена некорректно, М.В.Келдышем предложено изучать, так называемую «задачу E». В этой задаче на части границы области рассмотрения уравнения, совпадающей с линией вырождения (или сингулярности), требуется ограниченность решения уравнения, а в остальной части границы задаются условия Дирихле. Такие задачи в настоящее время получили название «задача Келдыша».

Нахождению собственных значений и собственных функций краевых задач для различных уравнений эллиптического и смешанного типов с сингулярными коэффициентами на плоскости посвящено много исследований, среди которых следует отметить работы М.С.Салахитдинова и

А.К.Уринова, Е.И.Моисеева, С.М.Пономарева, Т.Ш.Кальменова, К.Б.Сабитова, Н.В.Чигановой и др. В настоящее время изучению спектральных задач для дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами посвящено сравнительно мало работ. Отметим, что при исследовании спектральных задач для трехмерных уравнений эллиптического типа с сингулярными коэффициентами в частях шара возникает вырожденное обыкновенное дифференциальное уравнение Гойна. В настоящее время это уравнение изучено недостаточно полно. Поэтому изучение вырожденного уравнения Гойна и задач на собственные значения для уравнений эллиптического типа с сингулярными коэффициентами в трехмерном пространстве является актуальным.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования Ф-4-59 «Начальные и граничные задачи для линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка с сингулярными коэффициентами» Ферганского государственного университета.

Целью исследования является решение краевых и спектральных задач для дифференциальных уравнений эллиптического и смешанного типов с сингулярными коэффициентами в трехмерном пространстве.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

исследование однозначной разрешимости задачи Дирихле, Келдыша и Дирихле-Неймана для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в параллелепипеде, в полубесконечном параллелепипеде и в четверти цилиндра;

построение решения самосопряженных и несамосопряженных нелокальных краевых задач для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами в параллелепипеде и в полубесконечном параллелепипеде;

доказательство теоремы о единственности и существовании решения задач Дирихле и Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в параллелепипеде и в полубесконечном параллелепипеде, а также решения задачи Трикоми и Трикоми-Неймана в области, состоящей из четверти цилиндра и треугольной прямой призмы;

нахождение общего решения вырожденного обыкновенного дифференциального уравнения Гойна. Исследование спектральных задач для трехмерного эллиптического уравнения с двумя и тремя сингулярными коэффициентами в частях шара.

Объектом исследования являются трехмерные дифференциальные уравнения в частных производных с сингулярными коэффициентами.

Предметом исследования являются краевые и спектральные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами в трехмерном пространстве.

Методы исследования. В диссертации использованы методы математической физики, спектрального анализа и теории специальных функций.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

доказана однозначная разрешимость задач Дирихле, Келдыша и Дирихле-Неймана для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в параллелепипеде, полубесконечном параллелепипеде и в четверти цилиндра;

доказана однозначная разрешимость самосопряженной и несамосопряженной нелокальной краевой задачи для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами в параллелепипеде и в полубесконечном параллелепипеде;

для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами доказана однозначная разрешимость задач Дирихле и Келдыша в параллелепипеде и полубесконечном параллелепипеде, а также задач Трикоми и Трикоми-Неймана в области, состоящей из четверти цилиндра и треугольной прямой призмы;

исследованы спектральные задачи для трехмерных уравнений эллиптического типа с двумя и тремя сингулярными коэффициентами в частях шара, найдены собственные значения задач и построены собственные функции, соответствующие найденным собственным значениям.

Практические результаты исследования состоят в возможности применения полученных решений краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами при исследовании качественных особенностей процессов, приводимых к таким математическим моделям. Эти решения позволяют глубже понять качественные особенности описываемых процессов и явлений, свойства математических моделей, а также могут быть использованы в качестве тестовых примеров для асимптотических, приближенных и численных методов.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений, использованием классических методов теории дифференциальных уравнений в частных производных, теории спектрального анализа и метода интегралов энергии, а также строгими и полными доказательствами теорем.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе результаты могут быть использованы для дальнейшей разработки теории дифференциальных уравнений в частных производных, а также теории спектрального анализа. Практическое значение исследования определяется применением полученных результатов в математической

физике при интегрировании дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами.

Внедрение результатов исследования. Результаты по исследованиям краевых и спектральных задач для дифференциальных уравнений эллиптического и смешанного типов с сингулярными коэффициентами в трехмерном пространстве, использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

формулы решения самосопряженных и несамосопряженных нелокальных краевых задач для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами было использовано при исследовании решений краевых задач с нелокальными условиями в рамках зарубежной государственной программы № FZWG-2020-0029 «Разработка теоретических основ построения информационно-аналитического обеспечения телекоммуникационных систем геоэкологического мониторинга природных ресурсов АПК» (Справка Белгородского государственного национального исследовательского университета № О-2038 от 6 сентября 2021 г., Россия). Использование научных результатов позволило численно обработать решения краевых задач с нелокальными условиями для уравнений смешанного типа и построить математические модели этих задач;

решения локальных и нелокальных краевых задач для уравнений эллиптического и смешанного типов с сингулярными коэффициентами было использовано при изучении локальных и нелокальных краевых задач в рамках научно-исследовательской деятельности интегративной лаборатории «Природные катастрофы Камчатки– землетрясения и извержение вулканов» № АААА-А19-119072290002-9 (Справка Камчатского государственного университета имени Витуса Беринга № 456-01 от 6 сентября 2021 г., Россия). Применение научных результатов позволило найти критерии решения локальных и нелокальных задач и применить их в прикладных задачах;

решения краевых и спектральных задач для дифференциальных уравнений эллиптического и смешанного типов с сингулярными коэффициентами были использованы при нахождении решения краевых задач для дифференциальных уравнений с распределёнными параметрами в зарубежном проекте № НИОКТР 122041800029-5 «Краевые задачи и задачи управления для основных и смешанного типов уравнений и их применение к исследованию систем с распределёнными параметрами» (Справка Института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН № 01-13/79 от 30 октября 2023 г., Россия). Использование научного результата позволило построить решения локальных и нелокальных задач для вырождающихся и нагруженных уравнений основных и смешанных типов.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертации обсуждались на 20 международных и 7 республиканских конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 48 научных работ, из них 21 входит в перечень научных

изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе, из них 13 опубликованы в зарубежных журналах и 8 в республиканских научных изданиях.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 200 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цель и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «**Краевые задачи Дирихле, Келдыша и Дирихле-Неймана для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами**», поставлены и исследованы краевые задачи Дирихле (задача D), Келдыша (задача E) и Дирихле-Неймана (задача DN) для трехмерного уравнения эллиптического типа с тремя сингулярными коэффициентами.

В первом параграфе первой главы приводятся вспомогательные сведения из теории линейных дифференциальных операторов и спектрального анализа.

Во втором параграфе первой главы рассмотрено следующее уравнение с тремя сингулярными коэффициентами

$$L_{\alpha\beta\gamma}u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{y}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z = 0 \quad (1)$$

в параллелепипеде $\Omega_+ = \{(x, y, z) : x \in (0, a), y \in (0, b), z \in (0, c)\}$, где $a, b, c \in R^+$, $R^+ = \{t \in R : t > 0\}$.

Краевые задачи Дирихле, Келдыша и Дирихле-Неймана для уравнения (1) в области Ω_+ поставлены в зависимости от места нахождения параметров α, β, γ на числовой оси.

При $\alpha, \beta, \gamma \in (-\infty, 1/2)$ рассмотрена

Задача D. Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_+) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_+), \quad x^{2\alpha}u_x, z^{2\gamma}u_z \in C(\bar{\Omega}_+); \\ L_{\alpha\beta\gamma}u = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega_+; \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned}
u(0, y, z) = 0, \quad u(a, y, z) = 0, \quad y \in [0, b], \quad z \in [0, c]; \\
u(x, 0, z) = \psi_1(x, z), \quad u(x, b, z) = \psi_2(x, z), \quad x \in [0, a], \quad z \in [0, c]; \\
u(x, y, 0) = 0, \quad u(x, y, c) = 0, \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, b],
\end{aligned}$$

где $\psi_1(x, z)$ и $\psi_2(x, z)$ – заданные функции.

При $\alpha, \beta, \gamma \in [1/2, +\infty)$ рассмотрена

Задача Е. Найти функцию $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_+ \setminus \Delta_{xyz}) \cap C_{x, y, z}^{2,2,2}(\Omega_+)$,

обладающую следующими свойствами:

- 1) $u(x, y, z)$ ограничены в плоскостях $x=0$, $y=0$ и $z=0$;
- 2) функции $u_x, u_z \in C(\bar{\Omega}_+ \setminus \Delta_{xz})$ ограничены в плоскостях $x=0$ и $z=0$;
- 3) $u(x, y, z)$ удовлетворяет условию (2) и

$$\begin{aligned}
u(x, b, z) = \psi_2(x, z), \quad x \in [0, a], \quad z \in [0, c]; \\
u(a, y, z) = 0, \quad y \in [0, b], \quad z \in [0, c]; \quad u(x, y, c) = 0, \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, b], \quad (3)
\end{aligned}$$

где $\Delta_{xyz} = \{(x, y, z) : xyz = 0\}$, $\Delta_{xz} = \{(x, z) : xz = 0\}$, $\psi_2(x, z)$ – заданная функция.

При $\alpha, \gamma \in (-1/2, +\infty)$, $\beta \in (-1/2, 1/2)$ рассмотрена

Задача DN. Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую условиям (2), (3), $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_+) \cap C_{x, y, z}^{2,2,2}(\Omega_+)$, $x^{2\alpha}u_x, y^{2\beta}u_y, z^{2\gamma}u_z \in C(\bar{\Omega}_+)$;

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\alpha}u_x(x, y, z) = 0, \quad y \in (0, b), \quad z \in (0, c); \\
\lim_{y \rightarrow 0} y^{2\beta}u_y(x, y, z) = f_1(x, z), \quad x \in (0, a), \quad z \in (0, c), \\
u(x, b, z) = f_2(x, z), \quad x \in [0, a], \quad z \in [0, c]; \\
\lim_{z \rightarrow 0} z^{2\gamma}u_z(x, y, z) = 0, \quad x \in (0, a), \quad y \in (0, b),
\end{aligned}$$

где $f_1(x, z)$ и $f_2(x, z)$ – заданные функции.

Результаты этого параграфа сформулированы в виде следующих теорем.

Теорема 1. Если существуют решения задач D, E и DN, то они единственны.

Теорема 2. Пусть $\alpha, \gamma \in (0, 1/2)$, $\beta \in (-\infty, 1/2)$ и функции $\psi_1(x, z)$ и $\psi_2(x, z)$ удовлетворяют следующим условиям:

I. $\psi_l(x, z) \in C_{x, z}^{5,5}(\bar{\Pi})$, $l = \overline{1, 2}$, где $\Pi = \{(x, z) : 0 < x < a, 0 < z < c\}$;

$$\text{II.} \quad \frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi_l(x, z) \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi_l(x, z) \Big|_{x=a} = 0, \quad \frac{\partial^j}{\partial z^j} \psi_l(x, z) \Big|_{z=0} = 0,$$

$$\frac{\partial^j}{\partial z^j} \psi_l(x, z) \Big|_{z=c} = 0, \quad j = \overline{0, 4}.$$

Тогда решение задачи D существует и определяется формулой

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_n(x) Z_m(z) \omega_{nm}(y), \quad (4)$$

где

$$X_n(x) = x^{1/2-\alpha} J_{1/2-\alpha}(\sigma_{\alpha n} x/a), \quad Z_m(z) = z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sigma_{\gamma m} z/c), \quad n, m \in N, \quad (5)$$

$J_l(x)$ - функция Бесселя порядка l первого рода,

$$\omega_{nm}(y) = P_{nm}(y) \psi_{2nm} + \left[\bar{K}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} y) - P_{nm}(y) \bar{K}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b) \right] \psi_{1nm},$$

$$P_{nm}(y) = \left(\frac{y}{b} \right)^{1/2-\beta} \frac{I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} y)}{I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b)}, \quad \bar{K}_\nu(x) = \frac{2^{1-\nu} x^\nu K_\nu(x)}{\Gamma(\nu)}, \quad \nu > 0,$$

$I_l(x)$ и $K_l(x)$ - функция Бесселя мнимого аргумента и функция Макдональда

порядка l , $\psi_{lnm} = d_{nm} \int_0^a \int_0^c \psi_l(x, z) x^{2\alpha} X_n(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz$, $l = \overline{1, 2}$,

$$d_{nm} = \left[\|X_n\|_{L_{2,\rho}(0,a)} \|Z_m\|_{L_{2,q}(0,c)} \right]^{-2},$$

$$\|X_n\|_{L_{2,\rho}(0,a)} = \left(\int_0^a \rho(x) X_n^2(x) dx \right)^{1/2} = |a J_{3/2-\alpha}(\sigma_{\alpha n})| / \sqrt{2}, \quad \rho(x) = x^{2\alpha},$$

$$\|Z_m\|_{L_{2,q}(0,c)} = \left(\int_0^c q(z) Z_m^2(z) dz \right)^{1/2} = |c J_{3/2-\gamma}(\sigma_{\gamma m})| / \sqrt{2}, \quad q(z) = z^{2\gamma},$$

$\sigma_{\alpha n}$ и $\sigma_{\gamma m}$ - положительные нули функций $J_{1/2-\alpha}(x)$ и $J_{1/2-\gamma}(x)$

соответственно, $\lambda_{nm} = (\sigma_{\alpha n}/a)^2 + (\sigma_{\gamma m}/c)^2$, $n, m \in N$.

Теорема 3. Пусть $\alpha, \gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2) \operatorname{sgn}(k-1)]$, $k \in N$, $\beta \in (-\infty, 1/2)$ и функции $\psi_1(x, z)$ и $\psi_2(x, z)$ удовлетворяют следующим условиям:

I. $\psi_l(x, z) \in C_{x,z}^{2k+4, 2k+4}(\bar{\Pi})$, $l = \overline{1, 2}$, где $\Pi = \{(x, z) : 0 < x < a, 0 < z < c\}$;

II. $\frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi_l(x, z)|_{x=0} = 0$, $\frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi_l(x, z)|_{x=a} = 0$, $\frac{\partial^j}{\partial z^j} \psi_l(x, z)|_{z=0} = 0$,

$\frac{\partial^j}{\partial z^j} \psi_l(x, z)|_{z=c} = 0$, $j = \overline{0, 2k+2}$.

Тогда решение задачи D существует и определяется формулой (4).

Теорема 4. Пусть $\alpha, \gamma \in [k - 1/2, k + 1/2)$, $k \in N$, $\beta \in [1/2, +\infty)$ и функция $\psi_2(x, z)$ удовлетворяет следующим условиям:

I. $\psi_2(x, z) \in C_{x,z}^{2k+4, 2k+4}(\bar{\Pi})$, где $\Pi = \{(x, z) : 0 < x < a, 0 < z < c\}$;

$$\text{II.} \quad \frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi_2(x, z) \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^j}{\partial x^j} \psi_2(x, z) \Big|_{x=a} = 0, \quad \frac{\partial^j}{\partial z^j} \psi_2(x, z) \Big|_{z=0} = 0, \\ \frac{\partial^j}{\partial z^j} \psi_2(x, z) \Big|_{z=c} = 0, \quad j = \overline{0, 2k+2}.$$

Тогда решение задачи E существует и определяется формулой

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_n(x) Z_m(z) \mathcal{G}_{nm}(y),$$

где $X_n(x)$, $Z_m(z)$, $\mathcal{G}_{nm}(y)$ – функции, определяемые равенствами

$$X_n(x) = x^{1/2-\alpha} J_{\alpha-1/2}(\delta_{\alpha n} x/a), \quad Z_m(z) = z^{1/2-\gamma} J_{\gamma-1/2}(\delta_{\gamma m} z/c), \quad n, m \in N, \quad (6)$$

$$\mathcal{G}_{nm}(y) = P_{1nm}(y) \psi_{2nm}, \quad P_{1nm}(y) = (y/b)^{1/2-\beta} I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm}} y) / I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm}} b),$$

$$\psi_{2nm} = s_{nm} \int_0^c \int_0^a \psi_2(x, z) x^{2\alpha} X_n(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz, \quad \delta_{\alpha n} \text{ и } \delta_{\gamma m} - \text{положительные}$$

нули функций $J_{\alpha-1/2}(x)$ и $J_{\gamma-1/2}(x)$ соответственно,

$$\lambda_{nm} = (\delta_{\alpha n}/a)^2 + (\delta_{\gamma m}/c)^2,$$

$$s_{nm} = \left[\|X_n\|_{L_{2,\xi}(0,a)} \|Z_m\|_{L_{2,\eta}(0,c)} \right]^{-2},$$

$$\|X_n\|_{L_{2,\xi}(0,a)} = \left(\int_0^a \xi(x) X_n^2(x) dx \right)^{1/2} = |a J_{\alpha+1/2}(\delta_{\alpha n})| / \sqrt{2}, \quad \xi(x) = x^{2\alpha},$$

$$\|Z_m\|_{L_{2,\eta}(0,c)} = \left(\int_0^c \eta(z) Z_m^2(z) dz \right)^{1/2} = |c J_{\gamma+1/2}(\delta_{\gamma m})| / \sqrt{2}, \quad \eta(z) = z^{2\gamma}.$$

Теорема 5. Пусть $\alpha, \gamma \in [(k-1/2) \operatorname{sgn}(k), k+1/2)$, $k = 0, 1, \dots$, $\beta \in (-1/2, 1/2)$ и функции $f_1(x, z)$ и $f_2(x, z)$ удовлетворяют условиям теоремы 4. Тогда решение задачи DN существует и определяется формулой

$$u(x, y, z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_n(x) Z_m(z) \mathcal{G}_{nm}(y), \quad (7)$$

где $X_n(x)$, $Z_m(z)$ – функции, определяемые равенствами (6),

$$\mathcal{G}_{nm}(y) = P_{1nm}(y) [f_{2nm} + P_{2nm}(b) f_{1nm}] - P_{2nm}(y) f_{1nm},$$

$$P_{1nm}(y) = (y/b)^{1/2-\beta} I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm}} y) / I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm}} b),$$

$$P_{2nm}(y) = \left(2y / \sqrt{\lambda_{nm}} \right)^{1/2-\beta} K_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{nm}} y) / \Gamma(1/2 + \beta),$$

$$f_{lnm} = s_{nm} \int_0^c \int_0^a f_l(x, z) x^{2\alpha} X_n(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz, \quad l = 1, 2,$$

$$s_{nm} = \left[2 / (ac J_{\alpha+1/2}(\delta_{\alpha n}) J_{\gamma+1/2}(\delta_{\gamma m})) \right]^2.$$

Теорема 6. Пусть $\alpha, \gamma \in (-1/2, 0)$, $\beta \in (-1/2, 1/2)$ и функции $f_1(x, z)$ и $f_2(x, z)$ удовлетворяют следующим условиям:

I. $f_l(x, z) \in C_{x,z}^{4,4}(\bar{\Pi})$, $l = \overline{1, 2}$, где $\Pi = \{(x, z) : 0 < x < a, 0 < z < c\}$;

II. $x^{2\alpha} \frac{\partial^j}{\partial x^j} f_l(x, z)|_{x=0} = 0$, $j = \overline{1, 3}$; $\frac{\partial^j}{\partial x^j} f_l(x, z)|_{x=a} = 0$, $j = \overline{0, 3}$, причем порядок нуля функции $f_{lxxx}(x, z)$ при $x=0$ не меньше -2α ;

III. $z^{2\gamma} \frac{\partial^j}{\partial z^j} f_l(x, z)|_{z=0} = 0$, $j = \overline{1, 3}$, $\frac{\partial^j}{\partial z^j} f_l(x, z)|_{z=c} = 0$, $j = \overline{0, 3}$, причем порядок нуля функции $f_{lzzz}(x, z)$ при $z=0$ не меньше -2γ ;

Тогда решение задачи DN существует и определяется формулой (7).

В третьем параграфе первой главы для уравнения (1) в полубесконечном параллелепипеде $\Omega_+^\infty = \{(x, y, z) : x \in (0, a), y \in (0, +\infty), z \in (0, c)\}$, $a, c \in R^+$, рассмотрены следующие краевые задачи.

При $\alpha, \beta, \gamma \in (-\infty, 1/2)$ исследована следующая задача:

Задача D[∞]. Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_+^\infty) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_+^\infty), \quad x^{2\alpha} u_x, z^{2\gamma} u_z \in C(\bar{\Omega}_+^\infty);$$

$$L_{\alpha\beta\gamma} u = 0, \quad (x, y, z) \in \Omega_+^\infty; \quad (8)$$

$$u(0, y, z) = 0, \quad u(a, y, z) = 0, \quad y \in [0, +\infty), z \in [0, c];$$

$$u(x, 0, z) = \psi_1(x, z), \quad x \in [0, a], z \in [0, c];$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} u(x, y, z) = 0, \quad x \in [0, a], z \in [0, c]; \quad (9)$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u(x, y, c) = 0, \quad x \in [0, a], y \in [0, +\infty),$$

где $\bar{\Omega}_+^\infty = \{(x, y, z) : x \in [0, a], y \in [0, \infty), z \in [0, c]\}$, а $\psi_1(x, z)$ – заданная функция.

При $\alpha, \beta, \gamma \in [1/2, +\infty)$ исследована следующая задача:

Задача E[∞]. Найти функцию $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_+^\infty \setminus \Delta_{xz}^\infty) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_+^\infty)$, обладающую следующими свойствами:

1) функции $u, u_x, u_z \in C(\bar{\Omega}_+^\infty \setminus \Delta_{xz}^\infty)$ ограничены в плоскостях $x=0$ и $z=0$;

2) $u(x, y, z)$ удовлетворяет условию (8), (9) и

$$u(a, y, z) = 0, \quad y \in [0, +\infty), z \in [0, c], \quad u(x, y, c) = 0, \quad x \in [0, a], y \in [0, +\infty),$$

а также одному из следующих условий

$$\lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta-1} u(x, y, z) = \chi(x, z), \quad x \in [0, a], z \in [0, c] \quad \text{при } \beta > 1/2,$$

$$\lim_{y \rightarrow +0} \frac{u(x, y, z)}{\ln y} = \chi(x, z), \quad x \in [0, a], \quad z \in [0, c] \quad \text{при } \beta = 1/2,$$

где $\Delta_{xz}^\infty = \{(x, y, z) : y \in [0, +\infty), xz = 0\}$, а $\chi(x, z)$ – заданная функция.

При $\alpha, \gamma \in (-1/2, +\infty)$, $\beta \in (-1/2, 1/2)$ исследована следующая задача:

Задача DN[∞]. Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую условиям (8), (9) и $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_+^\infty) \cap C_{x, y, z}^{2, 2, 2}(\Omega_+^\infty)$, $x^{2\alpha} u_x, y^{2\beta} u_y, z^{2\gamma} u_z \in C(\bar{\Omega}_+^\infty)$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^{2\alpha} u_x(x, y, z) = 0, \quad y \in (0, \infty), \quad z \in (0, c), \quad u(a, y, z) = 0, \quad y \in [0, +\infty), \quad z \in [0, c];$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{2\beta} u_y(x, y, z) = \nu(x, z), \quad x \in (0, a), \quad z \in (0, c);$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} z^{2\gamma} u_z(x, y, z) = 0, \quad x \in (0, a), \quad y \in (0, \infty), \quad u(x, y, c) = 0, \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, +\infty),$$

где $\nu(x, z)$ – заданная функция.

В четвертом параграфе первой главы для уравнения

$$L_{\beta\beta\gamma} U \equiv U_{xx} + U_{yy} + U_{zz} + \frac{2\beta}{x} U_x + \frac{2\beta}{y} U_y + \frac{2\gamma}{z} U_z = 0$$

в четверти цилиндра $\Sigma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1, x > 0, y > 0, z \in (0, c)\}$ исследованы краевые задачи Дирихле и Дирихле-Неймана. Здесь также рассмотрены значения параметров β и γ , для которых изучаемые задачи были однозначно разрешимы.

Вторая глава диссертации, названная «**Краевые задачи с нелокальными условиями для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами**», посвящена исследованию нелокальных задач для уравнения

$$L_{0\beta\gamma} u \equiv u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\beta}{y} u_y + \frac{2\gamma}{z} u_z = 0 \quad (10)$$

в областях $\Omega_+ = \{(x, y, z) : x \in (0, a), y \in (0, b), z \in (0, c)\}$ и $\Omega_+^\infty = \{(x, y, z) : x \in (0, a), y \in (0, +\infty), z \in (0, c)\}$, где $a, b, c, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, причем $a, b, c > 0$, $\beta, \gamma \in (-\infty, 1/2)$.

Задача 2.1. Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую уравнению (10) в области Ω_+ и условиям

$$u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_+) \cap C_{x, y, z}^{2, 2, 2}(\Omega_+), \quad u_x, z^{2\gamma} u_z \in C(\bar{\Omega}_+); \quad (11)$$

$$u(0, y, z) = u(a, y, z), \quad u_x(0, y, z) = u_x(a, y, z), \quad y \in [0, b], \quad z \in [0, c]; \quad (12)$$

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u(x, y, c) = 0, \quad x \in [0, a], \quad y \in [0, b]; \quad (13)$$

$$u(x, 0, z) = \tau_1(x, z), \quad x \in [0, a], \quad z \in [0, c]; \quad (14)$$

$$u(x, b, z) = \tau_2(x, z), \quad x \in [0, a], \quad z \in [0, c], \quad (15)$$

где $\tau_1(x, z), \tau_2(x, z)$ – заданные функции.

Задача 2.2. Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую уравнению (10) в области Ω_+^∞ и условиям (12)-(14),

$$u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_+^\infty) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_+^\infty), \quad u_x, z^{2\gamma} u_z \in C(\bar{\Omega}_+^\infty); \quad (16)$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y, z) = 0, \quad x \in [0, a], \quad z \in [0, c] \text{ равномерно по } x \text{ и } z, \quad (17)$$

где $\bar{\Omega}_+^\infty = \{(x, y, z): x \in [0, a], y \in [0, +\infty), z \in [0, c]\}$.

Задача 2.3. Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую уравнению (10) в области Ω_+ и краевым условиям (11), (13)-(15),

$$u(0, y, z) = 0, \quad y \in [0, b], \quad z \in [0, c],$$

а также нелокальным интегральным условиям

$$\int_0^a u(x, y, z) dx = 0, \quad y \in [0, b], \quad z \in [0, c].$$

Задача 2.4. Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую уравнению (10) в области Ω_+^∞ и условиям (16), (13), (14), (17),

$$u(0, y, z) = u(a, y, z), \quad u_x(0, y, z) = 0, \quad y \in [0, +\infty), \quad z \in [0, c].$$

Задача 2.5. Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую уравнению (10) в области Ω_+^∞ и условиям (16), (13), (14), (17),

$$u_x(0, y, z) = u_x(a, y, z), \quad u(a, y, z) = 0, \quad y \in [0, +\infty), \quad z \in [0, c].$$

Отметим, что при рассмотрении задач 2.2, 2.4, 2.5 в условиях (12) и (13) переменная y принимает значения в $[0, +\infty)$. Также отметим, что задачи 2.1 и 2.2 являются самосопряженными задачами, а задачи 2.3, 2.4 и 2.5 – несамосопряженными задачами.

Доказано, что задачи 2.1-2.5 не имеют более одного решения.

Установлена справедливость следующих теорем.

Теорема 7. Пусть $\beta, \gamma \in (-\infty, 1/2)$ и функции $\tau_1(x, z)$, $\tau_2(x, z)$ удовлетворяют следующим условиям:

I. $\tau_l(x, z) \in C_{x,z}^{4,5}(\bar{\Pi})$, $l = \overline{1,2}$ при $\gamma \in (0, 1/2)$ и $\tau_l(x, z) \in C_{x,z}^{4,2k+4}(\bar{\Pi})$, $l = \overline{1,2}$ при $\gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2) \operatorname{sgn}(k - 1)]$, $k \in N$, где $\Pi = \{(x, z): x \in (0, a), z \in (0, c)\}$;

II. $(\partial^j / \partial x^j) \tau_l(x, z) \Big|_{x=0} = (\partial^j / \partial x^j) \tau_l(x, z) \Big|_{x=a}$, $l = \overline{1,2}$, $j = \overline{0,3}$;

III. $(\partial^j / \partial z^j) \tau_l(x, z) \Big|_{z=0} = 0$, $(\partial^j / \partial z^j) \tau_l(x, z) \Big|_{z=c} = 0$, $l = \overline{1,2}$, а $j = \overline{0,4}$ при $\gamma \in (0, 1/2)$ и $j = \overline{0, 2k+2}$ при $\gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2) \operatorname{sgn}(k - 1)]$, $k \in N$.

Тогда решение задачи 2.1 существует и определяется формулой

$$u(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_n(x) \omega_{nm}^{21}(y) Z_m(z),$$

где

$$X_0(x) = \frac{1}{\sqrt{a}}, \quad X_{2n-1}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi nx}{a}, \quad X_{2n}(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \cos \frac{2\pi nx}{a}, \quad n \in N, \quad (18)$$

$$Z_m(z) = z^{1/2-\gamma} J_{1/2-\gamma}(\sigma_{\gamma m} z/c), \quad m \in N, \quad (19)$$

$$\omega_{nm}^{21}(y) = P_{nm}(y) \tau_{2nm} + \left[\bar{K}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} y) - P_{nm}(y) \bar{K}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b) \right] \tau_{1nm},$$

$$P_{nm}(y) = y^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} y) / \left[b^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} b) \right],$$

$$\tau_{lnm} = d_m \int_0^c \int_0^a \tau_l(x, z) X_n(x) z^{2\gamma} Z_m(z) dx dz, \quad l = \overline{1, 2}, \quad d_m = 2 / \left[c J_{3/2-\gamma}(\sigma_{\gamma m}) \right]^2. \quad (20)$$

$\sigma_{\gamma m}$ – положительные нули функции $J_{1/2-\gamma}(x)$, $\lambda_{nm} = (2\pi n/a)^2 + (\sigma_{\gamma m}/c)^2$, $n+1, m \in N$.

Теорема 8. Пусть $\beta, \gamma \in (-\infty, 1/2)$ и функция $\tau_1(x, z)$ удовлетворяет условию теоремы 7 при $l=1$, тогда решение задачи 2.2 существует и определяется формулой

$$u(x, y, z) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} X_n(x) Z_m(z) \bar{K}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}} y) \tau_{1nm},$$

где $X_n(x)$, $Z_m(z)$ и τ_{1nm} , d_m определяются формулами (18), (19) и (20).

Теорема 9. Пусть $\beta, \gamma \in (-\infty, 1/2)$ и функции $\tau_1(x, z)$, $\tau_2(x, z)$ удовлетворяют следующим условиям:

I. $\tau_l(x, z) \in C_{x,z}^{4,5}(\bar{\Pi})$, $l = \overline{1, 2}$ при $\gamma \in (0, 1/2)$ и $\tau_l(x, z) \in C_{x,z}^{4,2k+4}(\bar{\Pi})$, $l = \overline{1, 2}$ при $\gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2) \operatorname{sgn}(k-1)]$, $k \in N$, где $\Pi = \{(a, z) : x \in (0, a), z \in (0, c)\}$;

II. $(\partial^j / \partial x^j) \tau_l(x, z) \Big|_{x=0} = 0$, $(\partial^j / \partial x^j) \tau_l(x, z) \Big|_{x=a} = 0$, $l = \overline{1, 2}$, $j = \overline{0, 3}$;

III. $(\partial^j / \partial z^j) \tau_l(x, z) \Big|_{z=0} = 0$, $(\partial^j / \partial z^j) \tau_l(x, z) \Big|_{z=c} = 0$, $l = \overline{1, 2}$, а $j = \overline{0, 4}$ при $\gamma \in (0, 1/2)$ и $j = \overline{0, 2k+2}$ при $\gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2) \operatorname{sgn}(k-1)]$.

Тогда решение задачи 2.3 существует.

Теорема 10. Пусть $\beta, \gamma \in (-\infty, 1/2)$, а функция $\tau_1(x, z)$ удовлетворяет условиям теоремы 9 при $l=1$, тогда решение задач 2.4 и 2.5 существует.

В третьей главе диссертации, названной «**Краевые задачи для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами**», в ограниченном и полубесконечном параллелепипедах для уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами исследованы задачи Дирихле и Келдыша. Также исследованы задачи Трикоми и Трикоми-Неймана в смешанной области, для которой эллиптическая часть состоит из четверти цилиндра, а гиперболическая часть – из треугольной прямой призмы.

В первом параграфе третьей главы в зависимости от значений параметров α, β, γ , для следующего уравнения смешанного типа

$$u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x}u_x + \frac{2\beta}{|y|}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z = 0 \quad (21)$$

в области $\Omega = \{(x, y, z): x \in (0, a), y \in (-b_0, b), z \in (0, c)\}$, где $a, b_0, b, c \in R^+$, сформулированы и исследованы задачи D и E.

При $\beta \in (0, 1/2)$, $\alpha, \gamma \in (-\infty, 1/2)$ рассмотрена

Задача D. Найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую в области $\Omega_+ \cup \Omega_-$ уравнению (21) и условиям

$$u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_+ \cup \Omega_-), \quad x^{2\alpha}u_x, z^{2\gamma}u_z \in C(\bar{\Omega}); \quad (22)$$

$$u(0, y, z) = 0, \quad y \in [-b_0, b], \quad z \in [0, c]; \quad u(x, y, 0) = 0, \quad x \in [0, a], \quad y \in [-b_0, b]; \quad (23)$$

$$u(a, y, z) = 0, \quad y \in [-b_0, b], \quad z \in [0, c]; \quad u(x, y, c) = 0, \quad x \in [0, a], \quad y \in [-b_0, b]; \quad (24)$$

$$u(x, -b_0, z) = f_1(x, z); \quad u(x, b, z) = f_2(x, z), \quad x \in [0, a], \quad z \in [0, c], \quad (25)$$

а также условию склеивания

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} u_y(x, y, z) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} u_y(x, y, z), \quad x \in (0, a), \quad z \in (0, c), \quad (26)$$

где $\Omega_+ = \Omega \cap \{y > 0\}$, $\Omega_- = \Omega \cap \{y < 0\}$, а $f_1(x, z), f_2(x, z)$ – заданные функции.

При $\beta \in (0, 1/2)$, $\alpha, \gamma \in [1/2, +\infty)$ рассмотрена

Задача E. Найти ограниченную в плоскостях $x=0$ и $z=0$, функцию $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega} \setminus \Delta_{xz}) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_+ \cup \Omega_-)$, удовлетворяющую в области $\Omega_+ \cup \Omega_-$ уравнению (21) и условиям (24), (25), (26), где $\Delta_{xz} = \{(x, z): xz = 0\}$.

При исследовании задачи D (E) использовались следующие обозначения:

$$\Delta_{nm}(b_0, b) = I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b) \bar{Y}_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b_0) + K_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b) J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{nm}}b_0),$$

где $\lambda_{nm} = (\sigma_{\alpha n}/a)^2 + (\sigma_{\gamma m}/c)^2$, $(\lambda_{nm} = (\delta_{\alpha n}/a)^2 + (\delta_{\gamma m}/c)^2)$, $n, m \in N$, а $\sigma_{\alpha n}$ и $\sigma_{\gamma m}$ ($\delta_{\alpha n}$ и $\delta_{\gamma m}$) положительные нули функций $J_{1/2-\alpha}(x)$ и $J_{1/2-\gamma}(x)$ ($J_{\alpha-1/2}(x)$ и $J_{\gamma-1/2}(x)$) соответственно,

$$\bar{Y}_{1/2-\beta}[\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)] = \frac{\pi}{2 \cos \beta \pi} \left\{ J_{1/2-\beta}[\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)] + J_{\beta-1/2}[\sqrt{\lambda_{nm}}(-y)] \right\}.$$

Лемма 1. Пусть b_0 – любое натуральное число или $b_0 = p/q$ – любое дробное число, где $(p, q) = 1$, $(4, q) = 1$, $p, q \in N$, причем

$$(n - \alpha/2)^2/a^2 + (m - \gamma/2)^2/c^2 \neq (d - 1/4)^2 q^2/p^2, \quad d \in Z, \quad \forall n, m \in N,$$

тогда существуют положительные числа C_0 и $n_0, m_0 \in N$, такие, что при всех $n > n_0$ и $m > m_0$ справедлива оценка $|\Delta_{nm}(b_0, b)| \geq C_0 e^{\sqrt{\lambda_{nm} b}}$.

Основные результаты этого параграфа сформулированы в виде следующих теорем:

Теорема 11. Если существует решение задачи D (E), то оно единственно только тогда, когда $\Delta_{nm}(b_0, b) \neq 0$ при всех $n, m \in N$.

Теорема 12. Пусть $\alpha, \gamma \in (-\infty, 1/2)$, $\beta \in (0, 1/2)$ и выполнены условия леммы 1, а функции $f_1(x, z)$ и $f_2(x, z)$ удовлетворяют следующим условиям:

I. $f_l(x, z) \in C_{x,z}^{5,5}(\bar{\Pi})$, $l = \overline{1, 2}$ при $\alpha, \gamma \in (0, 1/2)$ и $f_l(x, z) \in C_{x,z}^{2k+4, 2k+4}(\bar{\Pi})$, $l = \overline{1, 2}$ при $\alpha, \gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2) \operatorname{sgn}(k - 1)]$, $k \in N$, где

$\Pi = \{(x, z) : x \in (0, a), z \in (0, c)\}$;

II. $(\partial^j / \partial x^j) f_l(x, z)|_{x=0} = 0$, $(\partial^j / \partial x^j) f_l(x, z)|_{x=a} = 0$, $(\partial^j / \partial z^j) f_l(x, z)|_{z=0} = 0$, $(\partial^j / \partial z^j) f_l(x, z)|_{z=c} = 0$, $l = \overline{1, 2}$, а $j = \overline{0, 4}$ при $\alpha, \gamma \in (0, 1/2)$ и $j = \overline{0, 2k + 2}$ при $\alpha, \gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2) \operatorname{sgn}(k - 1)]$.

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $\Delta_{nm}(b_0, b) \neq 0$ при всех $n = 1, 2, \dots, n_0$, $m = 1, 2, \dots, m_0$, то существует единственное решение задачи D;

2) если $\Delta_{nm}(b_0, b) = 0$ при некоторых $n = s_1, s_2, \dots, s_j \leq n_0$, $m = t_1, t_2, \dots, t_i \leq m_0$, то задача D разрешима только тогда, когда выполнены условия

$$\begin{cases} f_{1lk} b^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{lk} b}) + f_{2lk} b_0^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{lk} b_0}) = 0, \\ f_{1lk} b^{1/2-\beta} I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{lk} b}) - f_{2lk} b_0^{1/2-\beta} J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{lk} b_0}) = 0, \end{cases}$$

где $l = s_1, s_2, \dots, s_n$, $k = t_1, t_2, \dots, t_m$; $s_i, t_j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}$, n, m – заданные

натуральные числа, $f_{jlk} = d_{lk} \int_0^c \int_0^a f_j(x, z) x^{2\alpha} X_l(x) z^{2\gamma} Z_k(z) dx dz$, $j = \overline{1, 2}$, а

функции $X_l(x)$ и $Z_k(z)$ определяются формулами (5),

$$d_{lk} = 4 / \left[ac J_{3/2-\alpha}(\delta_{\alpha l}) J_{3/2-\alpha}(\delta_{\gamma k}) \right]^{-2}.$$

Теорема 13. Пусть $\alpha, \gamma \in [k - 1/2, k + 1/2)$, $k \in N$, $\beta \in (0, 1/2)$ и выполнены условия леммы 1, а функции $f_l(x, z)$, $l = \overline{1, 2}$ удовлетворяют следующим условиям:

I. $f_l(x, z) \in C_{x,z}^{2k+4, 2k+4}(\bar{\Pi})$, $l = \overline{1, 2}$, где $\Pi = \{(x, z) : 0 < x < a, 0 < z < c\}$;

$$\text{II. } \left. (\partial^j / \partial x^j) f_l(x, z) \right|_{x=0} = 0, \left. (\partial^j / \partial x^j) f_l(x, z) \right|_{x=a} = 0, \left. (\partial^j / \partial z^j) f_l(x, z) \right|_{z=0} = 0, \\ \left. (\partial^j / \partial z^j) f_l(x, z) \right|_{x=c} = 0, l = \overline{1, 2}, j = \overline{0, 2k+2}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1) если $\Delta_{nm}(b_0, b) \neq 0$ при всех $n = 1, 2, \dots, n_0, m = 1, 2, \dots, m_0$, то существует единственное решение задачи E;

2) если $\Delta_{nm}(b_0, b) = 0$ при некоторых $n = s_1, s_2, \dots, s_j \leq n_0, m = t_1, t_2, \dots, t_i \leq m_0$, то задача E разрешима только тогда, когда выполняются следующие условия

$$\begin{cases} F_{1lk} b^{1/2-\beta} I_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{lk} b}) + F_{2lk} b_0^{1/2-\beta} J_{1/2-\beta}(\sqrt{\lambda_{lk} b_0}) = 0, \\ F_{1lk} b^{1/2-\beta} I_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{lk} b}) - F_{2lk} b_0^{1/2-\beta} J_{\beta-1/2}(\sqrt{\lambda_{lk} b_0}) = 0, \end{cases}$$

где $l = s_1, s_2, \dots, s_n, k = t_1, t_2, \dots, t_m; s_i, t_j, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, m}, n, m$ – заданные натуральные числа,

$$F_{jnm} = s_{nm} \int_0^c \int_0^a f_j(x, z) x^{1/2+\alpha} J_{\alpha-1/2}(\delta_{\alpha n} x/a) z^{1/2+\gamma} J_{\gamma-1/2}(\delta_{\gamma m} z/c) dx dz, \\ s_{nm} = 4 / \left[ac J_{\alpha+1/2}(\delta_{\alpha n}) J_{\gamma+1/2}(\delta_{\gamma m}) \right]^{-2}.$$

Во втором параграфе этой главы доказана однозначная разрешимость аналогии задачи D и E в области $\Omega^\infty = \{(x, y, z) : x \in (0, a), y \in (-b_0, +\infty), z \in (0, c)\}$.

В третьем параграфе третьей главы в области $\Omega_{01} = \{(x, y, z) : (x, y) \in \Delta, z \in (0, c)\}$ рассмотрено уравнение

$$U_{xx} + (\text{sgny})U_{yy} + U_{zz} + \frac{2\beta}{x}U_x + \frac{2\beta}{|y|}U_y + \frac{2\gamma}{z}U_z = 0, \quad (27)$$

где Δ – конечная односвязная область плоскости xOy , ограниченная при $y \geq 0$ дугой $\bar{\sigma}_0 = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, y \geq 0\}$ и отрезком $\overline{OM} = \{(x, y) : x = 0, 0 \leq y \leq 1\}$, а при $y \leq 0$ – отрезками $\overline{OQ} = \{(x, y) : x + y = 0, 0 \leq x \leq 1/2\}$ и $\overline{QP} = \{(x, y) : x - y = 1, 1/2 \leq x \leq 1\}$, $O = O(0, 0), M = M(0, 1), P = P(1, 0), Q = Q(1/2, -1/2)$.

Введем обозначения: $\Omega_0 = \Omega_{01} \cap (y > 0), \Omega_1 = \Omega_{01} \cap (y < 0)$,

$$\Delta_0 = \Delta \cap (y > 0), \Delta_1 = \Delta \cap (y < 0); S_0 = \{(x, y, z) : \sigma_0 \times (0, c)\},$$

$$S_1 = \{(x, y, z) : OM \times (0, c)\}, \bar{S}_2 = \{(x, y, z) : \overline{OQ} \times [0, c]\},$$

$$\bar{S}_3 = \{(x, y, z) : \bar{\Omega}_{01} \cap (z = 0)\}, \bar{S}_4 = \{(x, y, z) : \bar{\Omega}_{01} \cap (z = c)\}.$$

В области Ω_{01} для уравнения (27) при $\beta \in (0, 1/2)$, $\gamma \in (-\infty, 1/2)$ исследованы следующие задачи:

Задача Т (Трикоми). Найти функцию $U(x, y, z)$, удовлетворяющую в области Ω_{01} уравнению (27) и следующим условиям:

$$U(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_{01}) \cap C_{x,y,z}^{2,2,2}(\Omega_0 \cup \Omega_1), \quad x^{2\beta}U_x, y^{2\beta}U_y, z^{2\gamma}U_z \in C(\bar{\Omega}_0); \quad (28)$$

$$U(x, y, z)|_{\bar{S}_0} = F(x, y, z); \quad (29)$$

$$U(x, y, z)|_{S_1} = 0, \quad U(x, y, z)|_{\bar{S}_2} = 0, \quad (30)$$

$$U(x, y, z)|_{\bar{S}_3} = 0, \quad U(x, y, z)|_{\bar{S}_4} = 0, \quad (31)$$

а также условию склеивания

$$\lim_{y \rightarrow -0} (-y)^{2\beta} U_y(x, y, z) = \lim_{y \rightarrow +0} y^{2\beta} U_y(x, y, z), \quad x \in (0, 1), \quad z \in (0, c), \quad (32)$$

где $F(x, y, z)$ – заданная функция.

Задача TN (Трикоми-Нейман). Найти функцию $U(x, y, z)$, удовлетворяющую в области Ω_{01} уравнению (27) и условиям (28), (31), (32),

$$\frac{\partial}{\partial n} U(x, y, z) \Big|_{S_0} = F_1(x, y, z), \quad x^{2\beta}U_x(x, y, z) \Big|_{S_1} = 0, \quad U(x, y, z) \Big|_{\bar{S}_2} = 0,$$

где n – внешняя нормаль к S_0 , а $F_1(x, y, z)$ – заданная функция.

Пусть $U(x, y, z) = V(\rho, \varphi, z)$ – решение задачи Т в области Ω_0 , где ρ, φ, z – цилиндрические координаты, связанные с декартовыми координатами равенствами $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \arctg(y/x)$, $z = z$. В этих координатах условие (29) запишется в виде $V(1, \varphi, z) = f(\varphi, z)$, $\varphi \in [0, \pi/2]$, $z \in [0, c]$, где $f(\varphi, z) = F(\cos \varphi, \sin \varphi, z)$.

Доказаны следующие теоремы:

Теорема 14. Пусть $\beta \in (0, 1/2)$, $\gamma \in (-\infty, 1/2)$ и функция $f(\varphi, z)$ удовлетворяет следующим условиям:

I. $f(\varphi, z) \in C_{\varphi,z}^{3,5}(\bar{\Pi})$ при $\gamma \in (0, 1/2)$ и $f(\varphi, z) \in C_{\varphi,z}^{3,2k+4}(\bar{\Pi})$ при $\gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2)\text{sgn}(k - 1)]$, $k \in N$, где

$$\Pi = \{(\varphi, z) : \varphi \in (0, \pi/2), z \in (0, c)\};$$

II. $\frac{\partial^j}{\partial \varphi^j} f(\varphi, z) \Big|_{\varphi=0} = 0$, $\frac{\partial^j}{\partial \varphi^j} f(\varphi, z) \Big|_{\varphi=\pi/2} = 0$, $j = 0, 1, 2$;

III. $\frac{\partial^j}{\partial z^j} f(\varphi, z) \Big|_{z=0} = 0$, $\frac{\partial^j}{\partial z^j} f(\varphi, z) \Big|_{z=c} = 0$, $j = \overline{0, 4}$ при $\gamma \in (0, 1/2)$ и $j = \overline{0, 2k + 2}$ при $\gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2)\text{sgn}(k - 1)]$, $k \in N$.

Тогда существует единственное решение задачи Т.

Теорема 15. Пусть $\beta \in (0, 1/2)$, $\gamma \in (-\infty, 1/2)$ и функция $f_1(\varphi, z) = F_1(\cos \varphi, \sin \varphi, z)$ удовлетворяет следующим условиям:

I. $f_1(\varphi, z) \in C_{\varphi, z}^{4,5}(\bar{\Pi})$ при $\gamma \in (0, 1/2)$ и $f_1(\varphi, z) \in C_{\varphi, z}^{4, 2k+4}(\bar{\Pi})$ при $\gamma \in (-k + 1/2, (-k + 3/2)\text{sgn}(k - 1)]$, $k \in N$, где

$\Pi = \{(\varphi, z) : \varphi \in (0, \pi/2), z \in (0, c)\}$;

II. $\frac{\partial^j}{\partial \varphi^j} f_1(\varphi, z) \Big|_{\varphi=0} = 0, \frac{\partial^j}{\partial \varphi^j} f_1(\varphi, z) \Big|_{\varphi=\pi/2} = 0, j = \overline{0, 3}$;

III. $\frac{\partial^j}{\partial z^j} f_1(\varphi, z) \Big|_{z=0} = 0, \frac{\partial^j}{\partial z^j} f_1(\varphi, z) \Big|_{z=c} = 0, j = \overline{0, 4}$ при $\gamma \in (0, 1/2)$ и $j = \overline{0, 2k+2}$ при $\gamma \in (1/2 - k, (3/2 - k)\text{sgn}(k - 1)]$, $k \in N$.

Тогда существует единственное решение задачи TN.

В четвертой главе диссертации, названной «Спектральные задачи для трехмерных эллиптических уравнений с двумя и тремя сингулярными коэффициентами», в области, состоящей из частей шара, для трехмерного эллиптического уравнения с двумя и тремя сингулярными коэффициентами исследованы спектральные задачи.

В первом параграфе четвертой главы рассмотрено вырожденное уравнение Гойна вида

$$t(1-t)T''(t) + [a_3 - (a_3 + a_4)t]T'(t) - \left(a_1a_2 - \frac{q}{t}\right)T(t) = 0, \quad (33)$$

где $a_j = \overline{1, 4}$ и q – заданные числовые параметры, причем параметры $a_j, j = \overline{1, 4}$ удовлетворяют условию Фукса $1 + a_1 + a_2 = a_3 + a_4$.

Найдено общее решение уравнения (33) в окрестности точки $t = 0$. Найденное решение использовано при исследовании спектральных задач, изучаемые ниже.

Пусть $\Omega_{1/4}$ – трехмерная область, ограниченная частью сферы $S_0 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 1, y > 0, z > 0\}$ и двумя полукругами $S_1 = \{(x, y, z) : x^2 + z^2 < 1, y = 0, z > 0\}$, $S_2 = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1, y > 0, z = 0\}$.

Во втором параграфе четвертой главы в области $\Omega_{1/4}$ рассмотрено уравнение эллиптического типа в виде

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\beta}{y}u_y + \frac{2\gamma}{z}u_z + \lambda u = 0, \quad \beta, \gamma \in (0, 1/2), \quad (34)$$

где $u = u(x, y, z)$ – неизвестная функция, λ – числовой параметр, и исследована следующая задача на собственные значения:

Задача DN ^{$\beta\gamma$} . Найти значения параметра λ и соответствующие им

нетривиальные функции $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_{1/4}) \cap C^2(\Omega_{1/4})$, удовлетворяющие уравнению (34) в области $\Omega_{1/4}$ и краевому условию $u(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in \bar{S}_0$, $\lim_{y \rightarrow 0} y^{2\beta} u_y(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in S_1$, $\lim_{z \rightarrow 0} z^{2\beta} u_z(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in S_2$.

Методом интегралов энергии доказана следующая

Теорема 16. Если $\lambda \leq 0$, то задача $DN^{\beta\gamma}$ имеет только тривиальное решение.

Далее, доказано, что собственными значениями задачи $DN^{\beta\gamma}$, являются числа $\lambda_{ml} = (\sigma_{ml})^2$, $m, l \in N$, где σ_{ml} – m -ый положительный корень уравнения $J_{\nu_l}(\sqrt{\lambda}) = 0, l \in N$, а собственные функции, соответствующие этим собственным значениям, определяются равенствами

$$u_{nlm}(x, y, z) = b_{nlm} r^{-(1/2 + \beta + \gamma)} J_{\nu_l}(\sigma_{ml} r) F\left(-n, n + 2\beta; \beta + \frac{1}{2}; \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right) \times \\ \times F_3\left(1/2 + \beta + \gamma + l, \beta + n/2, -l, -n/2, 1 + \beta; \sin^2 \theta, 1\right), \\ r \in [0, 1], \varphi \in [0, \pi], \theta \in [0, \pi/2],$$

где $b_{nlm} \neq 0$ – произвольные постоянные, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $\varphi = \arctg(y/x)$, $\theta = \arccos(z/r)$, а $F_3(a, a', b, b'; c; w, z)$ – гипергеометрическая функция Аппеля, $\nu_l = 2l + 1/2 + \beta + \gamma, l \in N$.

В третьем параграфе четвертой главы в области $\Omega_{1/8} = \Omega_{1/4} \cap \{x > 0\}$ исследована следующая задача:

Задача $DN^{\alpha\beta\gamma}$. Найти значения параметра λ и соответствующие им нетривиальные функции $u(x, y, z) \in C(\bar{\Omega}_{1/8}) \cap C^2(\Omega_{1/8})$, удовлетворяющие уравнению

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} + \frac{2\alpha}{x} u_x + \frac{2\beta}{y} u_y + \frac{2\gamma}{z} u_z + \lambda u = 0, \alpha, \beta, \gamma \in (0, 1/2)$$

в области $\Omega_{1/8}$ и краевым условиям

$$u(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in \bar{S}_3, \lim_{x \rightarrow 0} x^{2\alpha} u_x(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in S_4,$$

$$\lim_{y \rightarrow 0} y^{2\beta} u_y(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in S_5, \lim_{z \rightarrow 0} z^{2\gamma} u_z(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in S_6,$$

где $S_3 = S_0 \cap \{x > 0\}$, $S_5 = S_1 \cap \{x > 0\}$, $S_6 = S_2 \cap \{x > 0\}$, $S_4 = \{(x, y, z) : y^2 + z^2 < 1, x = 0, y > 0, z > 0\}$.

Доказано, что при $\lambda \leq 0$ задача $DN^{\alpha\beta\gamma}$ не имеет нетривиальных решений. Далее, показано, что собственными значениями задачи $DN^{\alpha\beta\gamma}$,

являются числа $\tilde{\lambda}_{ml} = (\tilde{\sigma}_{ml})^2$, $m, l \in N$, определяющиеся как корни уравнений $J_{\tilde{\nu}_l}(\sqrt{\lambda}) = 0$. Здесь $\tilde{\nu}_l = 2l + 1/2 + \alpha + \beta + \gamma$, $l \in N$, а собственные функции, соответствующие этим собственным значениям определяются равенствами

$$u_{nlm}(x, y, z) = \tilde{b}_{nlm} r^{-(1/2 + \alpha + \beta + \gamma)} J_{\tilde{\nu}_l}(\tilde{\sigma}_{ml} r) F(n + \alpha + \beta, -n; 1/2 + \beta; \sin^2 \varphi) \times \\ F_3(1/2 + \alpha + \beta + \gamma + l, \beta + n/2, -l, -n/2; 1 + \alpha + \beta; \sin^2 \theta, 1), n, m, l \in N,$$

где $\varphi, \theta \in [0, \pi/2]$, $r \in [0, 1]$, $\tilde{b}_{nlm} \neq 0$ – произвольные постоянные.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена исследованию краевых и спектральных задач для дифференциальных уравнений эллиптического и смешанного типов с сингулярными коэффициентами в трехмерном пространстве.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Доказана однозначная разрешимость задач Дирихле, Келдыша и Дирихле-Неймана для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в параллелепипеде и полубесконечном параллелепипеде.

2. Доказана однозначная разрешимость задач Дирихле и Дирихле-Неймана для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в четверти цилиндра.

3. Для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами в параллелепипеде и полубесконечном параллелепипеде доказана однозначная разрешимость самосопряженных и несамосопряженных нелокальных краевых задач.

4. В параллелепипеде и полубесконечном параллелепипеде доказана существование и единственность решения задач Дирихле и Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами;

5. Доказана однозначная разрешимость задач Трикоми и Трикоми-Неймана для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в области, состоящей из четверти цилиндра и треугольной прямой призмы.

6. Найдено общее решение вырожденного уравнения Гойна в виде ряда по гипергеометрическим функциям.

7. Сформулированы и исследованы спектральные задачи для трехмерных эллиптических уравнений с двумя и тремя сингулярными коэффициентами в частях шара. Выделена область значений параметра λ , где нет собственных значений задачи, а также найдено счетное число положительных собственных значений задачи и построены собственные функции соответствующие найденным собственным значениям.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF
MATHEMATICS**

FERGANA STATE UNIVERSITY

KARIMOV KAMOLIDDIN TUYCHIBOEVICH

**BOUNDARY-VALUE AND SPECTRAL PROBLEMS FOR
DIFFERENTIAL EQUATIONS OF ELLIPTIC AND MIXED TYPES WITH
SINGULAR COEFFICIENTS IN THREE-DIMENSIONAL SPACE**

01.01.02 – Differential Equations and Mathematical Physics

**DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

Tashkent – 2024

The theme of dissertation of doctor of science (DSc) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number B2017.3.DSc/FM100

Dissertation has been prepared at Fergana State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website <http://kengash.mathinst.uz> and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal <http://www.ziyo.net.uz/>.

Scientific consultant: **Urinov Akhmadjon Kushakovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

Official opponents: **Ashurov Ravshan Radjabovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

Sitnik Sergei Mikhailovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

Mirsaburov Mirakhmat
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

Leading organization: **Samarkand State University**

Defense will take place November 12, 2024 at 16:00 at the meeting of Scientific council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at V.I.Romanovsky Institute of Mathematics (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)-207-91-40). E-mail: uzbmth@umail.uz, Website: www.mathinst.uz.

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre of V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics (is registered № 189) (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)-207-91-40, E-mail: uzbmth@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Abstract of dissertation sent out on October 28, 2024.
(mailing report № 2 on October 28, 2024).



U.A. Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Academician

J.K. Adashev
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Senior researcher

A. Azamov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Academician

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The aim of the research work is to solve boundary-value and spectral problems for three-dimensional differential equations of elliptic and mixed types with singular coefficients.

The object of the study is partial differential equations with singular coefficients.

The scientific novelty of the study is as follows:

the unique solvability of the Dirichlet, Keldysh and Dirichlet-Neumann problems for a three-dimensional elliptic equation with three singular coefficients in a parallelepiped, a semi-infinite parallelepiped and a quarter of a cylinder has been proved;

the unique solvability of the self-adjoint and non-self-adjoint non-local boundary value problem for a three-dimensional elliptic equation with two singular coefficients in a parallelepiped and a semi-infinite parallelepiped has been proved;

for a three-dimensional equation of mixed type with three singular coefficients, the unique solvability of the Dirichlet and Keldysh problem in a parallelepiped and a semi-infinite parallelepiped, as well as the Tricomi and Tricomi-Neumann problems in a domain consisting of a quarter of a cylinder and a triangular right prism has been proved;

spectral problems for three-dimensional elliptic equations with two and three singular coefficients in parts of the sphere were investigated, eigenvalues of the problems were found, and eigenfunctions corresponding to the found eigenvalues were constructed.

Implementation of research results. The results obtained in the study of boundary value and spectral problems for differential equations of elliptic and mixed types with singular coefficients in three-dimensional space were used in the following research projects:

the solution of self-adjoint and non-self-adjoint non-local boundary value problems for a three-dimensional elliptic equation with singular coefficients was used within the framework of the foreign state program No. FZWG-2020-0029 "Development of theoretical foundations for the construction of information and analytical support for telecommunication systems for geocological monitoring of natural resources of the agro-industrial complex" in the study of solutions to boundary value problems with non-local conditions (Certificate of Belgorod State National Research University No. O-2038 dated September 6, 2021, Russia). The application of these results made it possible to investigate the correctness of non-local boundary value problems for differential equations with singularities in the coefficients;

the solution of local and nonlocal boundary value problems for equations of elliptic and mixed types with singular coefficients was used within the framework of the research activities of the integrative laboratory "Natural Disasters of Kamchatka - Earthquakes and Volcanic Eruptions" No. AAAA-A19-119072290002-9 in the study of local and nonlocal boundary value problems (Certificate of Vitus Bering Kamchatka State University No. 456-01 dated

September 6, 2021, Russia). The application of the scientific result made it possible to use in the subject matter of the specified laboratory to find criteria for the solvability of local and nonlocal boundary value problems, which are models of natural disasters, earthquakes and volcanic eruptions;

the solutions of boundary value and spectral problems for differential equations of elliptic and mixed types with singular coefficients were used in the foreign project No. ИИОКТР 122041800029-5 “Boundary value problems and control problems for basic and mixed types of equations and their application to the study of systems with distributed parameters” when finding solutions to boundary value problems for differential equations with distributed parameters (Reference of the Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences No. 01-13/79 dated October 30, 2023, Russia). The use of the scientific result made it possible to construct a solution to local and nonlocal problems for degenerate and loaded equations of basic and mixed types.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, four chapters, conclusion and references. The full volume of the thesis is 200 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo'lim (Часть I; Part I)

1. Urinov A.K., Karimov K.T. The Tricomi–Neumann problem for a three-dimensional mixed-type equation with singular coefficients // *Siberian Mathematical Journal*. –2024. –V. 65, –No. 3. –P. 725-736. (3.Scopus. IF=0.66)

2. Urinov A.K., Karimov K.T. Nonlocal boundary value problems for a three-dimensional elliptic equation with singular coefficients in a semi-infinite parallelepiped // *Siberian Electronic Mathematical Reports*, –2020. –V.17. –P.161-178. (3.Scopus. IF=0.468).

3. Urinov A.K., Karimov K.T. The third boundary problem for a mixed-type equation with three singular coefficients // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. – 2023. –V. 44, –No. 8. –P. 3582-3593. (3.Scopus. IF=0,453).

4. Urinov A.K., Karimov K.T. The unique solvability of boundary value problems for a 3D elliptic equation with three singular coefficients // *Russian Mathematics*. –2019. –Vol. 63, –No.2, –P. 61-72. (3.Scopus. IF=0,397).

5. Karimov K.T. Boundary Value Problems in a Semi-infinite Parallelepiped for an Elliptic Equation with Three Singular Coefficients // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. –2021. –V. 42, –No.3, –P. 560-571. (3.Scopus. IF=0,378).

6. Urinov A.K., Karimov K.T. Dirichlet problem for an elliptic equation with three singular coefficients// *Journal of Mathematical Sciences*. –2021. –V. 254, –No. 6. –P. 731-742. (3.Scopus. IF=0,357).

7. Каримов К.Т. Задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки*. –2020. –Т.30. –№1, –С. 31-48. (3.Scopus. IF=0.354).

8. Karimov K.T. Nonlocal Problem for an Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Semi-infinite Parallelepiped // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. –2020. –V. 41, –No. 1. –P. 46-57. (3.Scopus. IF=0.346).

9. Urinov A.K., Karimov K.T. The Dirichlet Problem for an Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Semi-Cylindrical Domain // *Lobachevskii Journal of Mathematics*. –2020. –V. 41, –No. 9. –P. 1891-1902. (3.Scopus. IF=0,346).

10. Urinov A.K., Karimov K.T. The Dirichlet problem for an elliptic equation with three singular coefficients and negative parameters // *Journal of Mathematical Sciences*. –2023. –V. 274, –No. 2. –P. 285-300. (3.Scopus. IF=0,302).

11. Karimov K.T., Shokirov A.M. Dirichlet-Neumann spectral problems for three-dimensional elliptic equations with singular coefficients// *International Journal of Applied Mathematics*. –2022. –V.35, –No. 4. –P. 633-648. (3.Scopus. IF=0.3).

12. Karimov K.T. Nonlocal Problem for a Three-dimensional Elliptic Equation with Singular Coefficients in a Rectangular Parallelepiped // *Journal of*

Siberian Federal University. Mathematics and Physics. –2020. –V.13, –No.5. –P. 533-546. (3.Scopus. IF=0.268).

13. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами и // Вестник Самарского гос.тех.университета. Серия физ.-мат. науки, –2017, –Т.21, –№ 4. –С. 665–683. (1.WoS).

14. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Трикоми для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами// Вестник Национального университета Узбекистана. Серия: Математика, Механика, Физика, Информатика. –2016. –2/1. –С.14-25. (01.00.00, №8).

15. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Дирихле-Неймана для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами// Вестник Национального университета Узбекистана. Серия: Математика, Механика, Физика, Информатика. –2017. –2/1. –С.195-206. (01.00.00, №8).

16. Каримов К.Т. Задача Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами// Узбекский математический журнал. –2017. –№1. –С.96-105. (01.00.00, №6).

17. Каримов К.Т. Краевая задача для эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в трехмерном пространстве// Узбекский математический журнал. –2017. –№4. –С. 58-66. (01.00.00, №6).

18. Karimov K.T. On one version of the Dirichlet-Neumann problem for a three- dimensional elliptic equation with two singular coefficients// Uzbek mathematical journal. –2018. –№3, –P. 102-115. (01.00.00, №6).

19. Каримов К.Т. Нелокальная задача с интегральным условием для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами// Бюллетень Института математики. –2018. –№6, –С.10-24. (01.00.00, №17).

20. Каримов К.Т. Задача типа Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде// Бюллетень Института математики. – 2020. –№2, –С. 68-82. (01.00.00, №17).

21. Каримов К.Т. Краевые задачи для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярным коэффициентом в цилиндрической области// Бюллетень Института математики. –2020. –№4, –С. 75-97. (01.00.00, №17).

II bo‘lim (Часть II; Part II)

22. Каримов К.Т. Задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами// Вестник КРАУНЦ. Физико-математические науки. –2021. –Т. 34, –№ 1. –С. 29-46.

23. Уринов А.К., Каримов К.Т. Об одном методе нахождения общего решения вырожденного уравнения Гойна// Тезисы докладов республиканской научной конференции «Современные методы математической физики и их приложения», 15-17 апреля 2015 г. –С. 298-300.

24. Каримов К.Т. Задача Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами//Тезисы докладов международной конференции «Дифференциальные уравнения и математическое моделирование», 22-27 июня 2015 г. –Улан-Удэ. –С.140-141.

25. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Трикоми для трехмерного уравнения смешанного типа с двумя сингулярными коэффициентами// Материалы республиканской научной конференции «Математическая физика и родственные проблемы современного анализа», 27-28 ноября 2015 г. – Бухара. –С. 279-281.

26. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в трехмерном пространстве// Тезисы докладов международной научной конференции «Актуальные проблемы теории уравнений в частных производных». 16-18 июня 2016 г. – Москва. –С. 28.

27. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Дирихле-Неймана для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами// Тезисы докладов международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль-Хорезми 2016», 9-10 ноября 2016 г. –Бухара. –С. 142-143.

28. Каримов К.Т. Краевая задача для эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в трехмерном пространстве// Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и физики», 17-21 мая 2017 г. –Нальчик. –С. 100.

29. Каримов К.Т. Об одном варианте задачи Дирихле-Неймана для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами// Республиканская научная конференция с участием зарубежных ученых «Актуальные проблемы динамических систем и их приложений», 1-3 мая 2017 г. –Ташкент. –С. 120-121.

30. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Дирихле для эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами// Тезисы докладов VIII международной конференции по математическому моделированию. 4-8 июля 2017 г. –Якутск.–С.59.

31. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами// Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения», 15-17 декабря 2017 г. – Ташкент. –С.72-74.

32. Каримов К.Т. Задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами// Материалы международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики», 22-26 мая. 2018 г. – Нальчик-Эльбрус. –С 253.

33. Urinov A.K., Karimov K.T. On the unique solvability of a nonlocal problem for an equation with singular coefficients in a prismatic domain// Abstracts of the VI international scientific conference “Modern problems of the

applied mathematics and information technology-Al-Khorezmiy 2018”, September 13-15, 2018, – Tashkent. –P. 200-201.

34. Каримов К.Т. Нелокальная задача для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами// Abstracts of the international scientific conference "Mathematical analysis and its application to mathematical physics", september 17-20, 2018 y. –Samarkand. –P. 38-39.

35. Каримов К.Т. Нелокальная задача для трехмерного уравнения эллиптического типа с сингулярными коэффициентами// Материалы V Международной научной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», 4-7 декабря 2018 г., –Нальчик. –С. 95.

36. Каримов К.Т. Об одной нелокальной краевой задаче для трехмерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами// Материалы XIX Международной научной конференции по дифференциальным уравнениям «Еругинские чтения–2019», 14-17 мая 2019 г. – Минск. –С. 18-19.

37. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Келдыша для эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде// Сборник материалов I Международной научно-практической конференции, 24-25 мая 2019 г. – Фергана . –С. 501-502.

38. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача типа задачи Дирихле в полубесконечном параллелепипеде для эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами// Материалы международной конференции “Современные проблемы математики и механики”. 13–15 мая 2019 г. – Москва. –С.373-375.

39. Каримов К.Т. Задача Келдыша для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде// Материалы республиканской научной конференции “Актуальные проблемы и применения анализа”, 4-5 октября 2019 г. – Карши. –С. 154-157.

40. Каримов К.Т. Краевая задача для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде// Тезисы международной научной конференции «Обратные и некорректные задачи», 2-4 октября 2019 г.– Самарканд. –С. 89-90.

41. Каримов К.Т. Нелокальная задача для эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде// Тезисы докладов республиканской научной конференции «Управление, оптимизация и динамические системы». CODS-2019. 17-19 октября 2019 г. – Андижан. –С. 122-124.

42. Каримов К.Т. Задача типа Дирихле для трехмерного уравнения смешанного типа с тремя сингулярными коэффициентами в полубесконечном параллелепипеде// Тезисы докладов Узбекско-Российской научной конференции «Неклассические уравнения математической физики и их приложения». 24-26 октября 2019 г. – Ташкент. –С.118-120.

43. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Дирихле для эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами в полуцилиндрической области// Тезисы международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики», 12-13 марта 2020 г. – Фергана. –С. 157-160.

44. Каримов К.Т. Задача Дирихле-Неймана для эллиптического уравнения с сингулярным коэффициентом в цилиндрической области// Сборник тезисов научной онлайн-конференции «Современные проблемы математики», 20 мая 2020 года. – Нукус. –С. 158-160.

45. Уринов А.К., Каримов К.Т. Спектральная задача Дирихле-Неймана для трехмерного эллиптического уравнения с двумя сингулярными коэффициентами// Сборник трудов международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, информатики и механики», 7–9 декабря 2020 г. –Воронеж. – С. 206-209.

46. Уринов А.К., Каримов К.Т. Задача Дирихле для трехмерного эллиптического уравнения в четверти цилиндрической области// Материалы IX международной научной конференции «Современные проблемы математики и физики» 12-15 сентября 2021 г. –Стрелитамак. –С. 225-229.

47. Каримов К.Т. Задача Дирихле-Неймана в четверти цилиндра// Тезисы докладов международной научной конф. «Неклассические уравнения математической физики и их приложения», 6-8 октября 2022 г. – Ташкент. – С. 114-115.

48. Urinov A.K., Karimov K.T. The Dirichlet problem for an elliptic equation with three singular coefficients with negative parameters//Abstracts of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (TWMS Congress-2023), September 20-23, 2023 y. –Turkestan. –P. 30.

Avtoreferat «O‘zbekiston matematika jurnali » jurnali tahririyatida
2024 yil 7-oktyabrda tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar
o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:



9338

Bichimi: 84x60 ¹/₁₆. «Times New Roman» garniturası.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 4. Adadi 100 dona. Buyurtma № 42/24.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.