ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ҚАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

Қўл ёзма ҳуқуқида
УДК 539.3

РАВШАНОВ АНВАР АСОДУЛЛАЕВИЧ

ҒОВАК-ИЗОТРОПИК ЯРИМ ФАЗОДА ҚАТТИҚ ШАРНИНГ НОСТАЦИОНАР ИЛГАРИЛАНМА ҲАРАКАТИНИ ЎРГАНИШ

5А130202 – амалий математика ва ахборот технологиялари

Магистр

академик даражасини олиш учун ёзилган

ДИССЕРТАЦИЯ

Илмий раҳбар:
ф.-м.ф.д. Шукуров О.М.

ҚАРШИ 2013 йил

М У Н Д А Р И Ж А

КИРИШ

Мавзунинг долзарблиги. Замонавий техниканинг ҳар хил сохаларини ривожланиши ва ностационар ўзаро таъсирда ишлайдиган янги конструкцияларни яратиш туташ муҳитларда тўлқин тарқалишлари ва қаттиқ ҳамда деформацияланувчи жисмлар билан ўзаро таъсири билан боғлиқ бўлган ностационар тўлқин жараёнларини тадқиқотисиз мумкин эмас. Уларга мисол сифатида сейсмик ва зарбали тўлқинлар таъсири натижасида изотропик ва ғовак-изотропик муҳитда жойлашган ҳар хил резервуарларни, метро тоннелларини, сферик қаттиқ тўсиқларни атроф мухит билан ўзаро таъсирини ўрганиш муҳимдир.

Иншоатларни, биноларни, саноат қурилишларини тупроқ асос (фундамент) билан ўзаро таъсири ҳақидаги кўп сонли масалаларни ечиш вақтида ярим текислик кўринишидаги асос(фундамент)нинг динамик кўчишини аниқлаш зарурияти туғилади. Асосга таъсир этувчи кучланишлар табиатига кўра вақтга ва масофага боғлиқ ҳолда мураккаб қонунлар бўйича ўзгаради. Яримтекислик кўринишидаги асос (фундамент)ларни кўпинча тупроқ (ер) ташкил этиб, унинг таркибида намлик, ҳар хил қаттиқ жисмлар бўлиши мумкин. Бу ҳолда асосни кўп компонентали муҳит деб қараш мумкин. Кўп компонентали муҳитларнинг деформацияси билан боғлиқ жараёнларнинг мураккаблиги, уларни ўрганиш учун турли хил моделларга олиб келади. Кўп компонентали муҳитларнинг ҳар хил моделлари Я.И.Френкель, М.А.Био, Г.М.Ляхов, Х.А. Рахматуллин ва бошқаларнинг илмий тадқиқот ишларида ўрганилган ва ривожлантирилган. Икки компонентали муҳитнинг модели биринчи марта Я.И. Френкель томонидан ўрганилган. У нам тупроқда тўлқин жараёнини тасвирловчи тенгламаларни келтириб чиқарди ва икки типдаги бўйлама тўлқин мавжудлигини исботлади.

Суюқлик билан тўйинган ғовак изотропик муҳитнинг чизиқли деформация назарияси М.А.Био томонидан ўрганилган. У ҳам ғовак изотропик муҳитда иккита бўйлама тўлқин тарқалишини исботлаб берди.

Кўпгина амалий масалаларда атроф муҳит текисликлар (қаттиқ ёки эркин сирт) билан чегараланган бўлиши мумкин. Улар кўп ҳолларда муҳитнинг деформация-кучланиш ҳолатининг ўзгаришига олиб келади. Бундай жараёнлар учун масаланинг қўйилиши ва унинг самарали ечиш усулларини ишлаб чиқиш ҳамда чегараловчи сиртлардан тўлқинларнинг кўпмарта қайтишининг таъсирини ўрганиш деформацияланувчи қаттиқ жисмлар механикасининг замонавий муҳим ва долзарб муаммосини ифодалайди.

Юқоридагилардан хулоса қилиб, суюқлик билан тўйинган ғовак-изотропик муҳитли ярим фазоларда ностационар эластик тўлқинларнинг тарқалишини умумий қонуниятларини ўрганиш муҳим аҳамиятга эга ва долзарбдир.

Муаммонинг ўрганилганлиги. Ҳозирги вақтгача бу йўналиши бўйича акустик ва эластик зарбали тўлқинлар натижасида бир боғламли соҳаларда ягона тўсиқ билан атроф муҳитнинг ўзаро таъсири тўлиқ ўрганилган. Уларнинг натижалари [5, 7, 8, 9, 12, 14] ишларда келтирилган.

Ҳозирги вақтда катта аҳамиятга эга бўлган, лекин кўпбоғламли соҳаларда ностационар зарбали тўлқин тарқалиши ва дифракцияси кам ўрганилган. Жумладан, бир координатали сиртлар оиласига тегишли бўлмаган сиртлар чегараланган соҳаларда ностационар тўлқин жараёнларини ўрганиш катта қизиқиш уйғотади.

Масалан, чегараланмаган эластик ва ғовак-изотропик муҳитларда ҳамда эластик ярим фазода кўндаланг тўлқинларини тарқалиши ва дифракцияси натижалари [4, 14, 18, 21, 22] илмий тадқиқот ишларида келтирилган.

Тадқиқот объекти ва предмети. Ушбу магистрлик диссертация сининг тадқиқот объекти суюқлик билан тўйинган ғовак изотропик муҳитли ярим фазода жойлашган абсолют қаттиқ шарнинг берилган қонун бўйича ҳамда берилган куч таъсирда ностационар илгариланма ҳаракати масалаларининг ечиш алгоритмини ишлаб чиқиш ва қаттиқ шар ҳаракатига атрофи муҳитнинг акс таъсири жараёнларини ўрганишдир.

Тадқиқот вазифалари. Ушбу магистрлик диссертацияси қуйидаги масалаларни тадқиқ қилишга бағишланган:

- Суюқлик билан тўйинган ғовак изотропик муҳитли ярим фазода жойлашган абсолют қаттиқ шарнинг берилган қонун бўйича ҳамда берилган куч таъсирда ностационар илгариланма ҳаракати жараёнини математик ифодалаш.
- Ўрганиладиган жараёнларга мос бошланғич чегаравий масалаларнинг ечиш алгоритмини ишлаб чиқиш.
- Ишлаб чиқилган алгоритмлар асосида сонли натижалар олиш ва уларининг таҳлили.
- Абсолют қаттиқ шарнинг ностационар илгариланма ҳаракатига атроф муҳитнинг акс таъсирини ва шар атрофидиги тўлқин жараёнларига чегаравий сиртларнинг таъсирини ўрганиш.

Тадқиқот методлари. Магистрлик диссертациясида суюқлик билан тўйинган ғовак изотропик муҳитнинг асосий муносабатлари ва тушунчалари, муҳитнинг ҳаракат тенгламалари, Лежандр ҳамда Гегенбауэр ортогонал кўпхадлардан, Лаплас интеграл алмаштиришларидан ва Бессель функция-лари учун қўшиш теоремаларидан фойдаланилди.

Мавзунинг илмийлиги, янгилиги. Ушбу магистрлик диссертацияси да ўрганилган натижалар қуйидагилар:

- Суюқлик билан тўйинган ғовак изотропик муҳитли ярим фазода жойлашган жойлашган абсолют қаттиқ шарнинг берилган қонун бўйича ҳамда берилган куч таъсирда ностационар илгариланма ҳаракатлари натижасида юзга келган ностационар тўлқин жараёнларини ифодаловчи бошланғич-чегаравий масала қўйилди.

- Ўрганиладиган жараёнларга мос бошланғич-чегаравий масаланинг ечиш алгоритмини ишлаб чиқилди.
- Ишлаб чиқилган алгоритм асосида сонли натижалар олинди ва улар асосида ностационар тўлқин жараёни таҳлил қилинди.
- Абсолют қаттиқ шар атрофидиги тўлқин жараёнларига чегаравий сиртларнинг таъсири ҳамда шар ҳаракатига атроф муҳитнинг қаршилик кучи учун формула топилди ва формула асосида куч таъсири ўрганилди.
- Шарнинг берилган куч таъсирда ностационар илгариланма ҳаракати натижасида шар маркази кўчиши учун аниқ ифода олинди.

Тадқиқот натижаларини амалий аҳамияти. Диссертацияда ўрганилган масалаларнинг ечиш алгоритмларини, олинган натижаларни геофизика, сейсмологиянинг амалий масалаларини ечишда, ер ости ва усти иншоатларини лойиҳалаштиришда ҳамда деформацияланувчи қаттиқ жисмлар механикасининг масалаларини сонли усуллар ёрдамида ечишда олинган натижаларини ишончлигини баҳолашда, қўлланилган усулларни ихтисослик фанлари бўйича махсус курсларни укитишда фойдаланилиши мумкин.

Магистрлик диссертациясининг тузилиши ва ҳажми. Магистрлик диссертацияси кириш, иккита боб, хулоса ва фойдаланилган адабиётлар рўйхатидан иборат. Биринчи бобда ғовак изотропик муҳитнинг асосий тушунчалар, ҳаракат тенгламалари, муҳит учун чегаравий шартларнинг турлари ва зарур маълумотлар ҳамда Лежандр ва Гегенбауэр ортогонал кўпҳадларининг хоссалари, иккинчи бобда ўрганилган асосий масаланинг ечиш алгоритмини ишлаб чиқиш учун фойдаланиладиган математик методлар, учинчи бобда эса ўрганиладиган ностационар жараённинг математик тасвири, унинг ечиш алгоритми, муҳит параметрлари учун аниқ формулалар ва сонли натижалар график кўринишда келтирилган. Диссертация ҳажми 68 бетдан иборат. Фойдаланилган адабиётлар рўйхати 23 та адабиёт ва журнал мақолаларидан иборат. Магистрлик диссертациясида формулалар, рақамлари иккита номердан иборат, бу номерлардан бири бобнинг номерини, иккинчиси эса формуланинг номерини билдиради.

1-БОБ.
СУЮҚЛИК БИЛАН ТЎЙИНГАН ҒОВАК-ИЗОТРОПИК МУҲИТЛАРНИНГ АСОСИЙ МУНОСАБАТЛАРИ

Суюқлик билан тўйинган ғовак изотропик муҳитларда ностационар тўлқин жараёнларини математик моделлаштириш муҳитнинг харакат тенгламаларини танлаш билан боғланган бўлиб, улар қўллаш лозим бўлган чегарада ҳар бир муҳитнинг нотинч ҳаракатини белгилайди. Куйида ўрганиладиган ишга ностационар масалаларни ечишда кўп марта синовлар дан мувофаққиятли ўтган классик математик модел қўлланилган. Чоп этилган илмий ишларни ўрганиш кўрсатадики, маханиканинг кўпгина муҳим амалий ечишда уларни танлаш ўринлидир.

Бу бобда чизиқли ғовак изотропик муҳитнинг асосий муносабатлари ҳамда ғовак изотропик мухит учун нотационар масалаларининг қўйилиши ва Гегенбауэр ортогонал кўпҳадлари нинг хоссалари келтирилган.

1.1. Суюқлик билан тўйинган ғовак-изотропик муҳитларнинг ҳаракат тенгламалари.

Франкель Био моделига кўра, суюқлик билан тўйинган ғовак изотропик муҳитининг диссипатив кучларнинг таъсирисиз ҳаракат тенгламаси вектор формада куйидаги кўринишга эга [2, 14, 16]:

$$N\Delta\mathbf{u} + (A+N)\mathrm{graddiv}\mathbf{u} + Q\mathrm{graddiv}\mathbf{U} = \rho_{11}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{12}\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2},$$

$$Q\mathrm{graddiv}\mathbf{u} + R\mathrm{graddiv}\mathbf{U} = \rho_{12}\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2} + \rho_{22}\frac{\partial^2\mathbf{U}}{\partial t^2}. \qquad (1.1)$$

Бу ерда $\mathbf{u}$ ва $\mathbf{U}$ - лар мос равишда скелетда ва суюқликда кўчиш векторлари; A, N – лар муҳит скелетининг эластиклик константлари; R – ғовак ҳажмни тўлдирувчи суюқликга қўйилувчи босим (бунда умумий ҳажм ўзгармасдан қолади); Q – деформация пайтида қаттиқ ва суюқлик компоненталари ўртасидаги маҳкамланиш миқдори; ρ_{11} , ρ_{22} - уларнинг нисбий ҳаракати пайтидаги эффектив массалари; ρ_{12} - қаттиқ ва суюқлик компоненталари орасидаги динамик боғланиш коэффициенти; Δ - оператор Лаплас оператори.

$$\rho_{11} = (1-\beta_0)\rho_m - \rho_{12},\ \rho_{22} = \beta_0\rho_{ж} - \rho_{12}$$

Бу ерда β_0 - муҳит ғоваклиги; ρ_m ва $\rho_{ж}$ - алоҳида ҳолда қаттиқ ва суюқлик компоненталарининг зичлиги.

Муҳитнинг эластик параметрлари куйидаги [2, 14]

$$\rho_{11} > 0,\ \rho_{22} > 0,\ \rho_{12} < 0,\quad \rho_{11}\rho_{22} - \rho^2{}_{12} > 0,\quad (A+2N)R - Q^2 > 0$$

$$P\rho_{11} - 2Q\rho_{12} > 0,\qquad P = A + 2N$$

шартларни канаотлантиради.

u ва **U** векторларни мос равишда u_1, u_2, u_3 векторларнинг йиғиндиси ва чизиқли комбинацияси кўринишида

$$\mathbf{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \vec{u}_3,\ \ \mathbf{U} = \beta_1\vec{u}_1 + \beta_2\vec{u}_2 + \beta_3\vec{u}_3 \qquad (1.2)$$

тасвирлаймиз.

Бу ерда β_1 ва β_2 - ҳозирча чизиқли комбинациянинг номаълум коэффициент-лари, $\beta_3 = -\rho_{12}/\rho_{22}$.

u_1, u_2, u_3 векторлар куйидаги қўшимча шартларни қаноатлантиради:

$$\mathrm{div}\vec{u}_3 = 0,\quad \mathrm{rot}\vec{u}_1 = \mathrm{rot}\vec{u}_2 = 0. \qquad (1.3)$$

Бу шартларни куйидаги Ламе тасвирланишлари каноатлантиради:

$$\mathbf{u} = \mathrm{grad}(\varphi_1 + \varphi_2) + \mathrm{rot}\vec{\psi},\qquad \mathbf{U} = \mathrm{grad}(\beta_1\varphi_1 + \beta_2\varphi_2) + \mathrm{rot}\beta_3\vec{\psi} \qquad (1.4)$$

Бу ерда φ_k лар кўчиш векторининг скаляр ва $\vec{\psi}$ векторли потенциаллари маъносига эга. (1.4) Ламе тасвирланишларини (1.1) тенгламаларга қўйганимиздан сўнг учта ўзаро боғлиқсиз тўлқин тенгламаларини оламиз:

$$\Delta\varphi_k = \frac{1}{c_k^2}\frac{\partial^2\varphi_k}{\partial t^2},\quad (k=1,2),\qquad \Delta\vec{\psi} = \frac{1}{c_3^2}\frac{\partial^2\vec{\psi}}{\partial t^2} \qquad (1.5)$$

(1.5) дан биринчи иккитаси мос равишда c_1 ва c_2 тезликлар билан тарқалувчи I ва II тип бўйлама тўлқинларни тасвирлайди, учинчи тенглама эса c_3 тезлик билан тарқалувчи кўндаланг тўлқинни ифодалайди.

Тўлқин тарқалиш тезликлари муҳит параметрлари орқали куйидагича

$$c_k^2 = \frac{P + Q\beta_k}{\rho_{11} + \rho_{12}\beta_k}, \qquad c_3^2 = \frac{N}{\rho_{11} + \beta_3\rho_{12}} \tag{1.6}$$

ифодаланади. Бу ерда β_k - лар куйидаги квадрат тенгламанинг илдизлари:

$$(\rho_{22}Q - \rho_{12}R)\beta^2 + (\rho_{22}P - \rho_{11}R)\beta + \rho_{12}P - \rho_{11}Q = 0. \tag{1.7}$$

(1.1) тенгламалардан ва (1.5) - (1.7) муносабатлардан лимитга ўтиш йўли билан алоҳида ҳар бир компонента учун ҳаракат тенгламаларини олиш мумкин, яъни изотропик ва суюқлик учун: $Q \to 0$, $R \to 0$, $\rho_{12} \to 0$, $\rho_{22} \to 0$ ларда (бу ҳолда мос равишда $c_2 \to 0$, $c_3 \to \mu/\rho$ $c_1 \to {(\lambda + 2\mu)}/{\rho}$) идеал изотропик муҳитнинг $c_1, c_3; \lambda, \mu$ ва ρ - характерли тезликлар ва изотропик муҳит зичлиги билан ҳаракат тенгламасини: $N \to 0$, $Q \to 0$, $R \to 0$, $A \to \lambda_0$, $\rho_{11} \to 0$, $\rho_{12} \to 0$ ҳолда (бунда мос равишда $c_1 \to 0$, $c_2 \to \lambda_0/\rho_0$, $c_3 = 0$) суюқликнинг $c_2; \lambda_0, \rho_0$ - тезлик ва параметрлар билан ҳаракат тенгламасини оламиз.

Муҳит ҳаракатларини бошланғич нўқтаси сфера маркази билан устма-уст тушувчи (R, θ, ϑ) сферик координаталар системасида қараймиз. ϑ бурчак O_x ўқига перпендикуляр текисликда ҳисобланади, θ бурчак эса радиал нур билан O_x ўқининг мусбат йўналиши орасидаги бурчакдир.

(1.4) кўчиш вектори компоненталари сферик координаталар системаси-да куйидаги кўринишга эга:

$$u_r = \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ \psi_\vartheta \sin\theta\ - \frac{\partial\psi_\theta}{\partial\vartheta}\right],$$

$$u_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2)}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi_r}{\partial\vartheta} - \frac{\partial(r\psi_\vartheta)}{\partial r}\right],$$

$$u_\vartheta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\psi_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial\psi_r}{\partial\theta}\right], \tag{1.8}$$

$$U_r = \frac{\partial(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\ \beta_3\psi_\vartheta\sin\theta\ - \frac{\partial\beta_3\psi_\theta}{\partial\vartheta}\right],$$

$$U_\theta = \frac{1}{r}\frac{\partial(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)}{\partial\theta} + \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial\psi_r}{\partial\vartheta} - \frac{\partial(r\beta_3\psi_\vartheta)}{\partial r}\right],$$

$$U_\vartheta = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)}{\partial\vartheta} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(r\beta_3\psi_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial\beta_3\psi_r}{\partial\theta}\right],$$

суюқлик билан тўйинган ғовак муҳитнинг геометрик чизиқли муносабатларида деформация тензори компоненталарини қаттиқ ва суюқлик фазаларнинг кўчиш векторларининг ташкил этувчилари орқали куйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r},\ e_{\theta\vartheta} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{r}\left(\frac{\partial u_\vartheta}{\partial\theta} - u_\vartheta ctg\theta\right) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\vartheta}\right],\ e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta} + \frac{u_r}{r},$$

$$e_{r\vartheta} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\vartheta} + \frac{\partial u_\vartheta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r}\right),\ e_{\vartheta\vartheta} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{u_\theta}{r}ctg\theta + \frac{u_r}{r},$$

$$e_{r\theta} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\vartheta}{r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right),\ e = e_{rr} + e_{\theta\theta} + e_{\vartheta\vartheta}, \tag{1.9}$$

$$\varepsilon = \frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial U_\theta}{\partial\theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial U_\vartheta}{\partial\vartheta} + \frac{U_\theta}{r}ctg\theta + \frac{2}{r}U_r,$$

кучланиш тензори компонентлари эса куйидаги кўринишга [14]:

$$\sigma_{rr} = 2Ne_{rr} + Ae + Q\varepsilon,\quad \sigma_{\vartheta\vartheta} = 2Ne_{\vartheta\vartheta} + Ae + Q\varepsilon,\quad \sigma_{\theta\theta} = 2Ne_{\theta\theta} + Ae + Q\varepsilon,$$

$$\sigma_{\vartheta r} = \sigma_{r\vartheta} = 2Ne_{r\vartheta},\qquad \sigma_{\theta r} = \sigma_{r\theta} = 2Ne_{r\theta},\qquad \sigma_{\vartheta\theta} = \sigma_{\theta\vartheta} = 2Ne_{\theta\vartheta},$$

$$\sigma = Qe + R\varepsilon. \tag{1.10}$$

эга.

Ғовак изотропик мухит учун куйидаги ўлчовсиз миқдорларни киритамиз:

$$r' = \frac{r}{R_0},\ \tau = \frac{c_1 t}{R_0},\ \sigma'_{\alpha\beta} = \frac{\sigma_{\alpha\beta}}{H},\ \sigma'_m = \frac{\sigma_m}{H},\ \chi = \frac{A}{H},\ \eta_1 = \frac{P}{H},\ \eta_2 = \frac{Q}{H},\ \xi = \frac{R}{H},$$

$$\gamma_i=\frac{c_1}{c_i},\ (i=1,2,3),\ H=P+2Q+R,\quad u_1'=\frac{u_1}{R_0},\ u_2'=\frac{u_2}{R_0},\ v_1'=\frac{v_1}{R_0},\ v_2'=\frac{v_2}{R_0},$$

$$\varphi_1'=\frac{\varphi_1}{R_0^2},\ \varphi_2'=\frac{\varphi_2}{R_0^2},\ \vec{\psi}'=\frac{\vec{\psi}}{R_0^2}.$$

Бу ерда R_0- қандайдир характерли чизиқли ўлчов; u_1, v_1 ва u_2, v_2- лар скелетда ва суюқликда кўчишнинг мос равишда радиал ва тангенциал компоненталари; $\sigma_{\alpha\beta}(\alpha,\beta=r,\theta,\vartheta)$ - кучланиш тензор компонентлари; σ_m - суюқликдаги босим (куйида барча жойда ўлчовсиз миқдорлар белгилардаги штрихлар қўйилмайди).

Муҳитнинг ҳаракат тенгламалари кўчишининг ўлчовсиз φ_1, φ_2 скаляр потенциали ва вектор потенциалнинг нолдан фарқли ψ компонентасига нисбатан сферик координаталар системасида ўқсимметрик ҳоли учун куйидаги кўринишга эга:

$$\gamma_1^2\frac{\partial^2\varphi_1}{\partial\tau^2}=\Delta\varphi_1,\qquad \gamma_2^2\frac{\partial^2\varphi_2}{\partial\tau^2}=\Delta\varphi_2,\qquad \gamma_3^2\frac{\partial^2\psi}{\partial\tau^2}=\Delta\psi-\frac{\psi}{r^2\sin^2\theta}.\tag{1.11}$$

Бу ерда $\Delta=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right).$

Сферик координаталар системасида кўчиш вектори ва кучланиш тензори компоненталари потенциал функциялар билан куйидаги дифференциал ифодалар билан боғланган:

$$u_1=\frac{\partial(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\psi_3\sin\theta),\ v_1=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(\varphi_1+\varphi_2)}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial r}(r\psi_3)\right],$$

$$u_2=\frac{\partial(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\beta_3\psi_3\sin\theta),\tag{1.12}$$

$$v_2=\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(\beta_1\varphi_1+\beta_2\varphi_2)}{\partial\theta}-\frac{\partial}{\partial r}(\beta_3 r\psi_3)\right],$$

$$\sigma_{rr}=\eta_1\frac{\partial u_1}{\partial r}+2\chi\frac{u_1}{r}+\frac{\chi}{r}\left(\frac{\partial v_1}{\partial\theta}+v_1 ctg\theta\right)+\eta_2\left[\frac{\partial u_2}{\partial r}+\frac{2}{r}u_2+\frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_2}{\partial\theta}+v_2 ctg\theta\right)\right],$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{\eta_1 - \chi}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial u_1}{\partial\theta} + \frac{\partial v_1}{\partial r} - \frac{v_1}{r}\right], \tag{1.13}$$

$$\sigma_m = \eta_2\left[\frac{\partial u_1}{\partial r} + \frac{2}{r}u_1 + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_1}{\partial\theta} + v_1 ctg\theta\right)\right] + \xi\left[\frac{\partial u_2}{\partial r} + \frac{2}{r}u_2 + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial v_2}{\partial\theta} + v_2 ctg\theta\right)\right].$$

1.2. Ғовак-изотропик муҳит учун чегаравий шартларнинг қўйилиши

Ушбу магистрлик диссертациясида суюқлик билан тўйинган ғовак-изотропик муҳитли икки боғламли соҳага тегишли масала қаралади.

Айтайлик, G икки боғламли соҳа P_1 ва P_2, $\partial G = P_1 \bigcup P_2$, $P_1 \bigcap P_2 = \varnothing$ сиртлар билан чегараланган бўлсин (1- расм) ва бу соҳа суюқлик билан туйинган ғовак-изотропик муҳит билан банд, яъни тўлдирилган.

Муҳитнинг нотинч ҳаракатини ифодаловчи кўчиш векторининг потенциал (φ_i, $i = 1,2$ ва $\mathbf{ш}$) лари (1.5) тўлқин тенгламаларини қаноатлантиради.

Ўрганилаётган ностационар масалаларнинг барчасида, одатда бошланғич ($\tau = 0$) вақтда муҳит тинч ҳолатда бўлади, яъни бунга куйидаги бир жинсли бошлангич шартга мос келади:

$$\varphi_i\big|_{\tau=0} = \dot{\varphi}_i\big|_{\tau=0} = \mathbf{ш}\big|_{\tau=0} = \dot{\mathbf{ш}}\big|_{\tau=0} = 0,\ (i = 1,2) \tag{1.14}$$

∂G сиртда чегаравий шартлар берилган бўлиши керак. Чегаравий шартлардан куйидаги икки тури энг кўп тарқалган: чегарада кучланишлар маълум, яъни

$$\mathbf{T}_n\big|_{P_k} = \mathbf{T}_k, \tag{1.15}$$

ёки чегаравий сиртда кўчиш вектори берилган, яъни

$$\mathbf{u}_n\big|_{P_k} = \mathbf{U}_k, \tag{1.16}$$

бу ерда $\mathbf{T}_n$ ва $\mathbf{T}_k$ - $\mathbf{n}$ нормалга эга P_k чегаравий сиртдаги кучланиш тензори ва берилган кучланиш вектори; $\mathbf{U}_k$ - P_k сиртда берилган кучиш вектори.

P_1 ва P_2 сиртларнинг ҳар хил участкаларида ҳар хил типдаги шартлар берилган бўлиши ҳам мумкин.

Умуман олганда, (x^1, x^2, x^3) координатлар системаси шундай танланадики, унда P_1 ёки P_2 сиртлардан бири координаталидир, яъни содда тенглама билан берилади.

Агар иккинчи сирт ҳам биринчига ўхшаш координатали содда тенглама билан берилса, у ҳолда бошланғич-чегаравий масалани ечиш кийинчилиги фақат координата системаси билан боғланган.

Агарда иккинчи сиртнинг содда тенгламаси биринчи сирт билан битта координата системасида бўлмаса, у ҳолда чегаравий шартларни қаноатлантириш билан боғлиқ ҳолда юзага келувчи қўшимча қийинчиликлар пайдо бўлади. Ихтиёрий эгричизиқли координаталар системаси учун юқоридаги бошланғич –чегаравий масалаларнинг ечишни тузиш жуда қийин ишдир.

Шунинг учун, ушбу магистрлик диссертацияси ишида факат куйидаги хусусий ҳолни қараймиз.

P_2 – текислик ($z=0$), а P_1 – эса $z \geq 0$ ярим фазонинг ясси сиртидан h ($h > R$) чуқурликда жойлашган R радиусли сферик сиртдир (2–расм). Бу ярим фазода жойлашган сферик кўринишдаги бўшлиқ, қобиқлардан тўлқин тарқалишлари тўғрисидаги масалаларига мос келади.

Айтайлик, ярим фазонинг ясси сирти кучланишдан (зўрикишдан) ҳоли

$$\mathbf{T}_n\big|_{P_2} = 0 \qquad (1.17)$$

ёки кўчиш вектор нолга тенг

$$\mathbf{u}\big|_{P_2} = 0. \qquad (1.18)$$

Сферик бўшлиқ чегарасида кучланиш берилган

$$\mathbf{T}_n\big|_{P_1} = \mathbf{T}_1 \qquad (1.19)$$

ёки кўчиш вектори маълум

$$\mathbf{u}\big|_{P_1} = \mathbf{U}_1. \qquad (1.20)$$

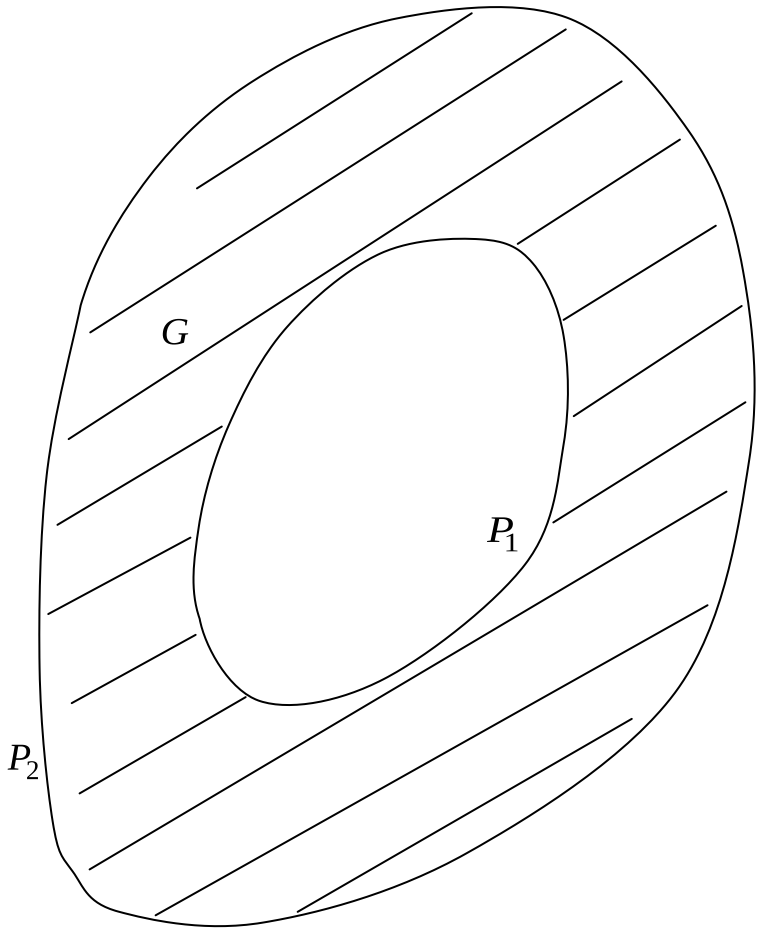
Бу масаланинг хусусий ҳоли сифатида ярим фазода жойлашган сферик бўшлиқда ясси тўлқин дифракциясини қараш мумкин.

У ҳолда бўшлиқ сиртдаги чегаравий шартлар куйидагича бўлади:

$$\left(\mathbf{T}_n + \mathbf{T}_{ns}^*\right)\Big|_{P_1} = 0, \tag{1.21}$$

ёки абсолют каттик шар

$$\left(\mathbf{u} + \mathbf{u}_s^*\right)\Big|_{P_1} = 0. \tag{1.22}$$



1 – расм.

Бу масала учун ярим фазо текис сиртда чегаравий шартлар куйидаги тенгликлар билан берилади:

$$\left(\mathbf{T}_n + \mathbf{T}_{ns}^*\right)\Big|_{P_2} = 0, \tag{1.23}$$

ёки

$$\left(\mathbf{u}+\mathbf{u}_s^*\right)\Big|_{P_2}=0. \tag{1.24}$$

(1.21) – (1.24) шартларда s индекс билан тушувчи ва текис сиртдан қайтувчи тўлқинларининг таъсири натажасида муҳитда юзага келувчи кучланиш ҳамда кўчишнинг натижаловчи векторлари белгиланган.

Қаралаётган масалада чегаравий шартлар сферик координаталар системасида ечимни ϑ бурчакка боғлиқмаслигини таъминлайди.

Агар қаралаётган G соҳада муҳит бошқа деформацияланувчи жисмлар билан контактга эга бўлса, у ҳолда янада қийин масала ва чегаравий шартлар юзага келади. Бу ҳолда P_k сиртларда шартларнинг тури ўзаро уринувчи муҳитларининг табиатига боғлиқдир, эластик объектлар учун эса уларнинг ўзаро маҳкамланишига боғлиқдир.

Айтайлик, P_k сирт (x^1, x^2, x^3) эгричизиқли координаталар системасида $x^3=\mathrm{const}$ бир координатали сирт билан устма-уст тушсин. Бу ҳолда $[x^3]$ координата чизиғи P_k сирт нормали бўйича йўналган, $[x^1]$, $[x^2]$ чизиқлар эса P_k сиртнинг бош эгриликлари билан мос тушади.

Жумладан, дифракция масаласида келиб тушувчи тўлқинни ясси эластик бўйлама тўлқин сифатида қараймиз. Унинг тарқалиш фронти P_2 ярим фазо текис сиртига параллел ва куйидаги потенциалга эга

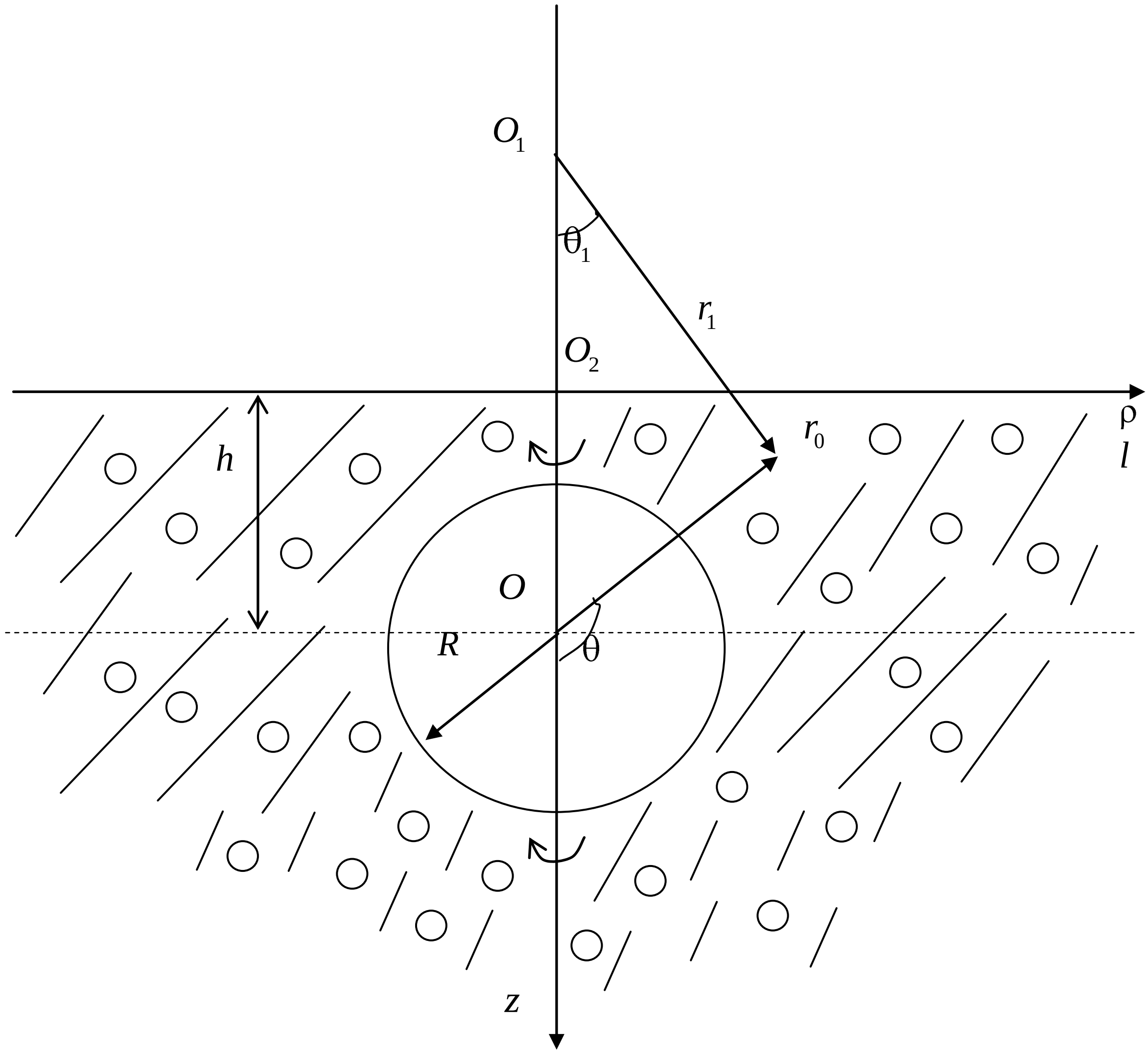
$$\varphi_s(r,\theta,\tau)=f(\tau+r\cos\theta-1)H(\tau+r\cos\theta-1), \tag{1.25}$$

бу ерда $f(\tau)$ – потенциалнинг вақт бўйича ўзгариши қонунини берувчи ихтиёрий функция; $H(\tau)$ – Хевисайднинг бирлик функцияси.

Ҳар хил хоссага эга бўлган икки эластик муҳитнинг ўзаро контакт шартиларини умумий кўринишда куйидагича ёзиш мумкин [7]:

$$\begin{gathered}
\sigma_{33}^{(1)}\Big|_{P_k}=\sigma_{33}^{(2)}\Big|_{P_k},\quad u_3^{(1)}\Big|_{P_k}=u_3^{(2)}\Big|_{P_k},\\
\sigma_{13}^{(1)}\Big|_{P_k}=\sigma_{13}^{(2)}\Big|_{P_k}=k_1\left(u_1^{(2)}-u_1^{(1)}\right)\Big|_{P_k},\\
\sigma_{23}^{(1)}\Big|_{P_k}=\sigma_{23}^{(2)}\Big|_{P_k}=k_2\left(u_2^{(2)}-u_2^{(1)}\right)\Big|_{P_k},
\end{gathered} \tag{1.26}$$

у ерда юқори индекслар муҳитларнинг номерини билдиради.



2 - расм

(1.22) тенгликларда $k_{1,2}$ коэффициентларнинг киритилиши чегаравий шартларнинг икки турини қараш имконини беради: $k_{1,2} = 0$ - эркин сирпаниш (силжиш), $k_{1,2} = \infty$ - қаттиқ (маҳкам) боғланиш.

Агар P_k сирт $r = R_k$ сфера билан устма-уст тушса, у холда уксимметрик деформация ҳолатида сферик системасида (1.22) муносабатларнинг ифодаси куйидаги кўринишга келади:

$$\sigma_{rr}^{(1)}\Big|_{r=R} = \sigma_{rr}^{(2)}\Big|_{r=R}, \quad u^{(1)}\Big|_{r=R} = u^{(2)}\Big|_{r=R},$$

$$\sigma_{r\theta}^{(1)}\Big|_{r=R} = \sigma_{r\theta}^{(2)}\Big|_{r=R} = k \;\; v^{(2)} - v^{(1)} \;\; \Big|_{r=R}. \qquad (1.27)$$

R радиусли сферик юпқа қобиқнинг эластик муҳит билан ўзаро контакт ҳолида юқоридаги шартларни куйидагича ёзамиз:

$$\sigma_{rr}\Big|_{r=R} = \beta p_0, \qquad u\Big|_{r=R} = w_1, \qquad (1.28)$$

$$\sigma_{r\theta}\Big|_{r=R} = \beta q_0 = k\left(v\Big|_{r=R} - u_1 + \frac{\delta_1}{2}\Phi_1 \right), \; \beta = E_1/(\lambda + 2\mu).$$

β коэффициентнинг (1.28) муносабатларда киритилишининг сабаби босим билан кучланишларнинг ҳар хил ўлчовсизликлар билан боғлангандир.

1.3. Лежандр ва Гегенбауэр ортогонал кўпҳадлари ҳамда Бессель функциясининг баъзи хоссалари

Сонли усулларнинг кенг кўламда ривожланиши ҳамда сонли эксприментнинг ахамиятини ошиши муносабати билан махсус функцияларга кизикиш юкори даражада усди. Бу икки ҳолат билан боғланган. Биринчидан, физик ходисаларнинг математик модели ишлаб чиқишда баъзи эффектларнинг нисбий ролини аниқлаш максадида дастлабки масалани аналитик формада ечимини олиш учун соддалаштиришга тўғри келади. Иккинчидан, ЭҲМ ёрдамида мураккаб масалаларни ечишда ишончли ва самарали ҳисоблаш алгоритмларни танлаш учун соддалаштирилган масалаларни фойдаланиш қулайдир.

Энг кўп фойдаланиладиган махсус функциялар сифатида ортогонал кўпҳадлар, цилиндрик ва сферик функцияларни келтириш мумкин.

Назарий ва математик физиканинг кўп масаласини ечиш, жумладан, иссиклик жараёнларини ўрганиш, муҳитларда электромагнит, ностационар акустик ва эластик тўлқинларнинг тарқалишини ўрганиш ҳар хил махсус функциялардан фойдаланишга олиб келади. Сабаби, амалиётда махсус функциялар ҳар хил дифференциал тенгламаларнинг ечими кўриншида пайдо бўлади.

Энди (1.11) тўлқин тенгламаларининг умумий ечимларини топиш учун ўзгарувчиларни тўлиқ бўлмаган ажратиш методини қўллаймиз ва изланаётган потенциалларни Лежандр ва Гегенбауэр ортогонал кўпҳадлари бўйича қаторлар кўринишида тасвирлаймиз:

$$\varphi_i = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{in}(r,\tau) P_n(\cos\theta), \qquad \psi = -\sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(r,\tau) C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta) \tag{1.29}$$

Бу ерда $P_n(x)$ ва $C_{n-1}^{3/2}(x)$ - Лежандр ва Гегенбауэр ортогонал кўпҳадлари [1, 6, 13].

$P_n(x)$ кўпҳадлар куйидаги оддий дифференциал тенгламани каноатлантиради (штрих билан x бўйича ҳосила белгиланган):

$$\left[(1-x^2) P_n'(x) \right]' = -n(n+1) P_n(x) \cdot \tag{1.30}$$

Бундан $P_n(\cos\theta)$ функция

$$\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left[\sin\theta \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} \right] = -n(n+1) P_n(\cos\theta) \cdot \tag{1.31}$$

дифференциал тенгламанинг ечими эканлиги келиб чикади.

(1.31) тенгликни дифференциаллаб ва баъзи алмаштиришлардан сўнг, куйидаги тенгликни оламиз:

$$\left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) - \frac{1}{\sin^2\theta} \right] \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} = -n(n+1) \frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}. \tag{1.32}$$

Лежандра ва Гегенбауэра ортогонал кўпҳадларининг

$$P_n'(x) = C_{n-1}^{3/2}(x)$$

ўзаро боғланишини эътиборга олиб [8, 15, 22], ва (1.29) қаторларни (1.11) тенгламаларга қўйиб ҳамда (1.31) тенгликни ҳисобга олиб, $[0,\pi]$ оралиқда $P_n(\cos\theta)$ и $C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta)$ функциялар системси тўлалиги сабабли, куйидаги гиперболик типдаги тенгламаларни оламиз:

$$\gamma_i^2\frac{\partial^2\varphi_{in}}{\partial\tau^2}=\Delta_n\varphi_{in},\quad (i=1,2,3),\quad \Delta_n=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)-\frac{n(n+1)}{r^2}, \tag{1.33}$$

Бу ерда $\varphi_{3n}=\psi_n$.

Кўчиш вектори ва кучланиш тензори компоненталарини Лежандр и Гегенбауэр ортогонал кўпҳадлари бўйича қаторлар кўринишида тасвирлаймиз:

$$u_i=\sum_{n=0}^{\infty}u_{in}(r,\tau)P_n(\cos\theta),\qquad v_i=-\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}v_{in}(r,\tau)C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta),$$

$$\sigma_{rr}=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{rrn}(r,\tau)P_n(\cos\theta),\qquad \sigma_m=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{mn}(r,\tau)P_n(\cos\theta), \tag{1.34}$$

$$\sigma_{r\theta}=-\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{r\theta n}(r,\tau)C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta).$$

(1.34) қаторларни (1.12), (1.31) ларга қўйиб, қаторлар коэффициентларига нисбатан қуйидаги формулаларни оламиз:

$$u_{in}=\frac{\partial(\varphi_{1n}+\varphi_{2n})}{\partial r}-\frac{n(n+1)}{r}\psi_n,\qquad v_{1n}=\frac{\varphi_{1n}+\varphi_{2n}-\psi_n}{r}-\frac{\partial\psi_n}{\partial r}, \tag{1.35}$$

$$u_{2n}=\frac{\partial(\beta_1\varphi_{1n}+\beta_2\varphi_{2n})}{\partial r}-\frac{n(n+1)}{r}\beta_3\psi_n,\ v_{2n}=\frac{\beta_1\varphi_{1n}+\beta_2\varphi_{2n}-\beta_3\psi_n}{r}-\beta_3\frac{\partial\psi_n}{\partial r}$$

$$\sigma_{rrn}=\eta_1\frac{\partial u_{1n}}{\partial r}-n(n+1)\frac{\chi}{r}v_{1n}+\frac{2\chi}{r}u_{1n}+\eta_2\frac{\partial u_{2n}}{\partial r}+\frac{2}{r}u_{2n}-\frac{n(n+1)}{r}v_{2n}$$

$$\sigma_{r\theta n}=-\frac{\eta_1-\chi}{2}\left[\frac{1}{r}(u_{1n}-v_{1n})+\frac{\partial v_{1n}}{\partial r}\right], \tag{1.36}$$

$$\sigma_{mn}=\eta_2\left[\frac{\partial u_{1n}}{\partial r}+\frac{2}{r}u_{1n}-n(n+1)\frac{v_{1n}}{r}\right]+\xi\left[\frac{\partial u_{2n}}{\partial r}+\frac{2}{r}u_{2n}-n(n+1)\frac{v_{2n}}{r}\right].$$

φ_1 , φ_2 ва ψ ларни ҳамда кўчиш вектори ва кучланиш тензори компонента-ларини бир қийматли аниқлаш учун (1.11) тенгламаларга ва (1.12), (1.13) боғланиш формулаларига чегаравий ва бошланғич шартларни қўшиш керак.

Лежандра ортогонал кўпҳадлари учун куйидаги рекуррент муносабат-лар ўринли [8, 13, 15]:

$$P_n(\cos\theta) = \frac{1}{(2n+1)\cos\theta} \;\; nP_{n-1}(\cos\theta) + (n+1)P_{n+1}(\cos\theta) \;\; ,$$

$$\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta} = \frac{n(n+1)}{(2n+1)\sin^2\theta} \;\; P_{n-1}(\cos\theta) - P_{n+1}(\cos\theta) \;\; ,$$

$$\frac{d^2P_n(\cos\theta)}{d\theta^2} = -n(n+1)P_n(\cos\theta) - \mathrm{ctg}\theta\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta},$$

$$\frac{d^3P_n(\cos\theta)}{d\theta^3} = n(n+1)\mathrm{ctg}\theta P_n(\cos\theta) + \tag{1.37}$$

$$+\left[-n(n+1) + \frac{1}{\sin^2\theta} + \mathrm{ctg}^2\theta\right]\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta},$$

$$\frac{d^4P_n(\cos\theta)}{d\theta^4} = \left[n(n+1) - \frac{2}{\sin^2\theta} - \mathrm{ctg}^2\theta\right]n(n+1)P_n(\cos\theta) +$$

$$+\mathrm{ctg}\theta\left[2n(n+1) - \frac{5}{\sin^2\theta} - \mathrm{ctg}^2\theta\right]\frac{dP_n(\cos\theta)}{d\theta}.$$

Берилган ва номаълум функцияларнинг Лежандра ва Гегенбауэра ортогонал кўпҳадлар буйича каторларига ёйилмасининг коэффициентларни аниқлашда бу кўпҳадларнинг

$$\int_0^\pi P_n(\cos\theta)P_m(\cos\theta)\sin\theta d\theta = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn},$$

$$\int_0^\pi C_n^{3/2}(\cos\theta)C_m^{3/2}(\cos\theta)\sin^3\theta d\theta = \frac{2(n+1)(n+2)}{2n+3}\delta_{mn}, \tag{1.38}$$

$$P_1(\cos\theta) = \cos\theta, \qquad\qquad C_0^{3/2}(\cos\theta) = 1$$

ортогоналлигини эътиборга оламиз. δ_{mn} - Кронекер белгиси.

(1.11) тенгламалар учун қўйилган бошланғич-чегаравий масалаларни ечишда кўп фойдаланиладиган усуллардан бири ф вақт бўйича Лаплас интеграл алмаштиришларини қўллашдир. Лаплас интеграл алмаштиришларининг тасвирлар фазосида улар

$$\Delta\varphi^L - s^2\varphi^L = 0, \tag{1.39}$$

$$\Delta\psi^L - \left(s^2\eta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\right)\psi^L = 0, \tag{1.40}$$

кўринишга эга. Бу ерда s - алмаштириш параметри, L индекс эса трансформантни билдиради.

(1.29) қаторларга асосланиб, бу тенгламаларнинг умумий ечимини

$$\varphi^L = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{r}}\left[A_n^L(s)K_{n+1/2}(rs) + B_n^L(s)I_{n+1/2}(rs)\right]P_n(\cos\theta), \tag{1.41}$$

$$\psi^L = -\sin\theta\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{r}}\left[A_n^L(s)K_{n+1/2}(r\eta s) + B_n^L(s)I_{n+1/2}(r\eta s)\right]C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta), \tag{1.42}$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Бу ерда $I_{n+1/2}(x)$ ва $K_{n+1/2}(x)$ - Бесселнинг биринчи ва иккинчи тур модифицирланган функциялари.

Агар муҳитнинг ҳаракати чегараланмаган соҳада қаралса, у ҳолда чексизликда нотинчлик бўлмаслигини эътиборга олиш зарур. Бу Бессель функцияларининг хоссаларига кўра $B_n^L(s)\equiv 0$, $D_n^L(s)\equiv 0$ тенгликларга олиб келади. Чегараланган соҳаларда эса потенциалларни чегараланганлиги шарти фойдаланилади. Бу ҳолда (1.41) ва (1.42) ифодаларда $A_n^L(s)\equiv 0$ ва $C_n^L(s)\equiv 0$ деб олиш керак бўлади.

Кейин ишда $K_{n+1/2}(x)$ ва $I_{n+1/2}(x)$ Бессель функцияларининг куйидаги баъзи хоссалари фойдаланилади. $f_n(s)$ орқали $\sqrt{\frac{\pi}{2s}}I_{n+1/2}(x)$ ёки $\sqrt{\frac{\pi}{2s}}K_{n+1/2}(x)$ функциялардан бирини белгилаймиз. У холда $f_n(s)$ функциялар учун куйидаги муносабатлар ўринли бўлади [5]:

$$f_{n-1}(s)+f_{n+1}(s)=\frac{2n+1}{s}f_n(s),$$

$$\frac{n+1}{s}f_n(s)+\frac{d}{ds}f_n(s)=f_{n-1}(s), \tag{1.43}$$

$$nf_{n-1}(s)-(n+1)f_{n+1}(s)=(2n+1)\frac{d}{ds}f_n(s).$$

Функция ва кўпҳадлар учун куйидаги белгилашлардан фойдаланамиз:

$$J_{ni}(s)=Q_{ni}(-s)e^{s}-Q_{ni}(s)e^{-s},\qquad i=1,3,$$

$$G_{nj}(s)=R_{nj}(-s)e^{s}-R_{nj}(s)e^{-s},\qquad j=0,4,$$

$$Q_{n1}(s)=R_{n2}(s)-2\chi R_{n1}(s)-n(n+1)\chi R_{n0}(s), \tag{1.44}$$

$$Q_{n2}(s)=(1-\chi)\ \ R_{n1}(s)+R_{n0}(s)\ \ ,$$

$$Q_{n3}(s)=\frac{1-\chi}{2}\ \ R_{n2}(s)+(n+2)(n-1)R_{n0}(s)\ \ ,$$

$$R_{n3}(s)=R_{n1}(s)-R_{n0}(s),\qquad R_{n4}(s)=R_{n2}(s)-R_{n0}(s),$$

$$R_{n0}(s)=\sum_{k=0}^{n}A_{nk}s^{n-k},\qquad R_{n1}(s)=\sum_{k=0}^{n+1}B_{nk}s^{n+1-k},$$

$$R_{n2}(s)=\sum_{k=0}^{n+2}C_{nk}s^{n+2-k},\qquad A_{nk}=\frac{(n+k)!}{(n-k)!k!2^{k}},$$

$$B_{nk}=A_{nk}+kA_{n,k-1}\ \ k\neq 0\ \ ,\qquad B_{n0}=A_{n0},$$

$$C_{nk}=B_{nk}+kB_{n,k-1}\ \ k\neq 0\ \ ,\qquad C_{n0}=B_{n0}.$$

$R_{n1}(s)$ ва $R_{n2}(s)$ купхадлар $R_{n0}(s)$ билан куйидаги муносаматлар билан боғланган [5]:

$$\left[R_{n0}(s)s^{-n-1}e^{-s}\right]'=-R_{n1}(s)s^{-n-2}e^{-s},$$

$$\left[R_{n1}(s)s^{-n-2}e^{-s}\right]'=-R_{n2}(s)s^{-n-3}e^{-s}, \tag{1.45}$$

$$R_{n1}(s)=R_{n+1,0}(s)-nR_{n0}(s).$$

Биринчи ва иккинчи тур Бесселнинг сферик функцияларини эса эле-ментар функциялар орқали ифодаси [3, 5, 8, 19]:

$$I_{n+1/2}(s) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2\pi s}s^n} G_{n0}(s), \qquad K_{n+1/2}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2s}} \frac{e^{-s}}{s^n} R_{n0}(s). \qquad (1.46)$$

1 боб бўйича хулосалар

Магистрлик диссертациясининг биринчи бобидаги материаллари ёрдамчи характерга эга бўлиб, улар иккинчи ва учинчи боблардаги масалаларнинг математик ифодалаш ва уларнинг ечиш алгоритмини ишлаб чиқиш учун фойдаланилади.

Шу сабабли, биринчи бобда суюқликлар билан тўйинган ғовак изотропик муҳитнинг сферик координаталар системасида ҳаракат тенгламалари, деформация ва кучланиш тензори компоненталари ҳамда улар ўртасидаги боғланишни ифодаловчи муҳит учун Гук қонуни, суюқликлар билан тўйинган ғовак-изотропик муҳитнинг ҳар хил ҳолатларда чегаравий шартларнинг турлари ва математик ифодаси, Лежандр ва Гегенбауэр ортогонал кўпҳадлари ҳамда Бессель функциясининг баъзи хоссаларидан фойдаланиб, ўзгарувчиларнинг тўлиқ бўлмаган ажратиш усули келтирилган.

2-БОБ
ҒОВАК ИЗОТРОПИК ЯРИМ ФАЗОДА ҚАТТИҚ ШАРНИНГ БЕРИЛГАН ҚОНУН БЎЙИЧА НОСТАЦИОНАР ИЛГАРИЛАНМА ҲАРАКАТИ

Магистрлик диссертациясининг бу бўлимида суюқлик билан тўйинган ғовак изотропик ярим фазода жойлашган абсолют қаттиқ шарнинг берилган қонун бўйича ностационар илгариланма ҳаракати ўрганилган бўлиб, шарнинг ҳаракатига атроф муҳитнинг реакция кучи учун аниқ формула олинган. Сонли натижалар асосида ярим фазонинг текис сиртининг таъсири аниқланган.

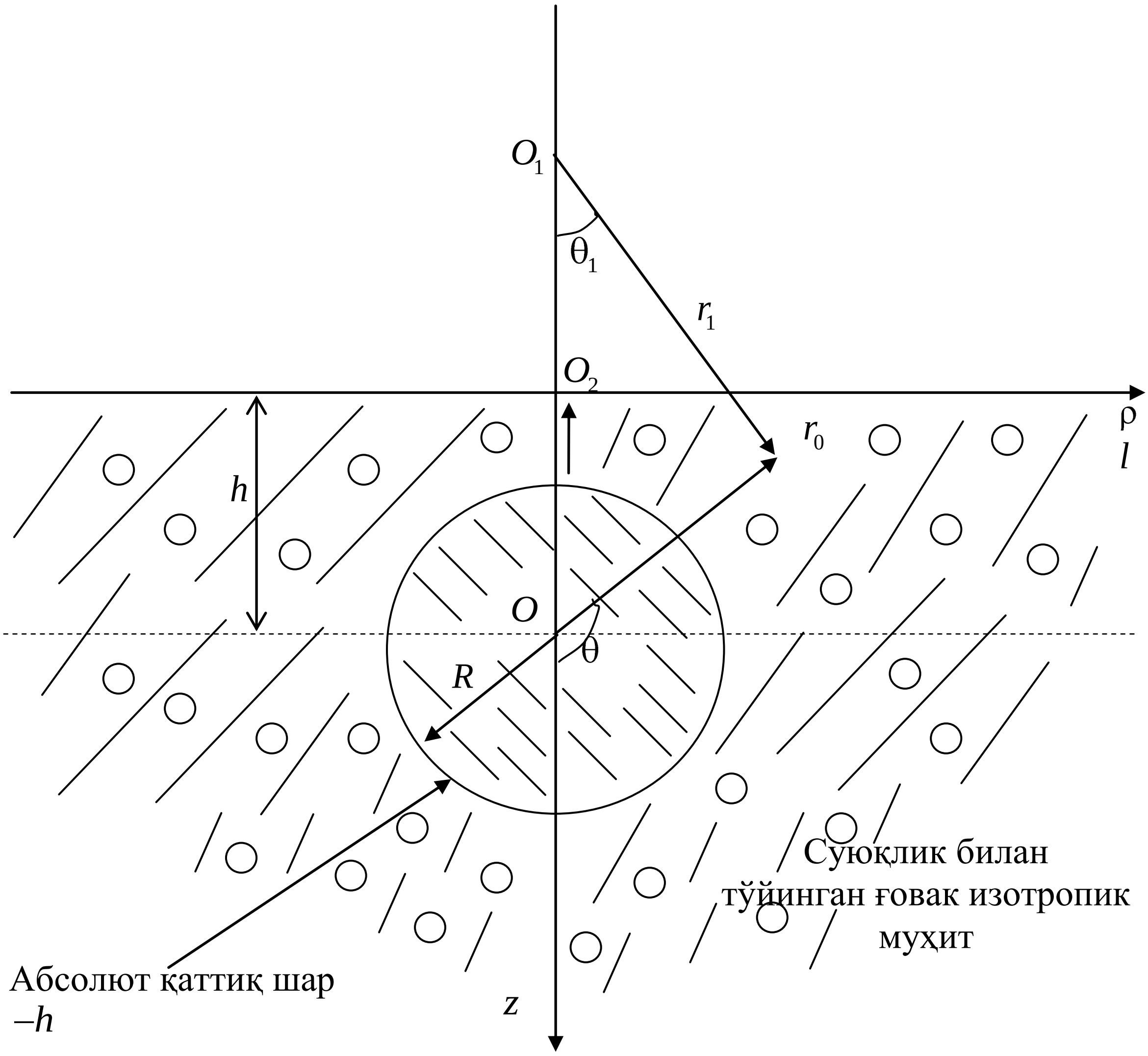
2.1. Масаланинг математик тасвири.

Айтайлик, ярим фазо ($z \geq 0$) суюқлик тўйинган ғовак изотропик муҳит билан тўлдирилган бўлсин ҳамда ярим фазонинг ($z = 0$) текис сиртидан h масофа(чуқурлик)да $R = 1$ ($h > 1$) ўлчовсиз радиусли абсолют қаттиқ шарнинг маркази жойлашган бўлсин.

Абсолют қаттиқ шарнинг Oz ўқи бўйлаб, унинг йўналишига қарама қарши ностационар илгариланма ҳаракати $z(\tau)$ қонун бўйича берилган. Суюқлик билан тўйинган ғовак изотропик муҳитнинг ностационар нотинч ҳаракати бошланғич нуқтаси шар маркази бўлган (r , θ , ϑ) сферик координаталар системасида ҳамда O_2xyz декарт координаталар системасида қаралади.

Маълумки, кўчиш векторининг скаляр ва вектор потенциаллари мавжуддир. Скаляр φ_1, φ_3 потенциаллар ва вектор потенциалнинг нолдан фарқли φ_2 компонентасига нисбатан ғовак-изотропик муҳитнинг ҳаракати

$$\gamma_1^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} = \Delta \varphi_1, \qquad \gamma_2^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} = \Delta \varphi_2, \qquad \gamma_3^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \tau^2} = \Delta \varphi_3 - \frac{\varphi_3}{r^2 \sin^2 \theta} \qquad (2.1)$$


O_1
θ_1
r_1
O_2
ρ
l
r_0
h
O
θ
R
Суюқлик билан
тўйинган ғовак изотропик
муҳит
Абсолют қаттиқ шар
$-h$
z

3 - расм

тўлқин тенгламалари билан тасвирланади.

Ярим фазонинг текис $z=0$ сиртида ёки кучланиш мавжуд эмас, яъни нолга тенг:

$$\sigma_{zz}\big|_{z=0}=0,\qquad \sigma_{zx}\big|_{z=0}=0,\qquad \sigma_{m}\big|_{z=0}=0 \qquad (2.2)$$

ёки кўчиш компоненталари нолга тенг

$$u_{1z}\big|_{z=0}=0,\qquad u_{1x}\big|_{z=0}=0,\qquad u_{2z}\big|z=0. \qquad (2.3)$$

Абсолют қаттиқ шар сиртида чегаравий шарт

$$u_1\big|_{r=1}=z(\tau)\cos\theta,\qquad \sigma_{r\theta}\big|_{r=1}=k\ \ z(\tau)\sin\theta-v_1\big|_{r=1}\ ,$$

$$u_2\big|_{r=1}=z(\tau)\cos\theta \qquad (2.4)$$

кўринишга эга.

Бу ерда коэффициент k чегаравий шартнинг икки турини қараш имконини беради: $k=0$ да чегаравий сиртларнинг эркин сирпанишига эга бўламиз, $k=\infty$ да эса шар сирти муҳит билан қаттиқ маҳкамланган.

Бошланғич шартлар бир жинсли:

$$\varphi_1\big|_{\tau=0}=\dot{\varphi}_1\big|_{\tau=0}=\varphi_2\big|_{\tau=0}=\dot{\varphi}_2\big|_{\tau=0}=\varphi_3\big|_{\tau=0}=\dot{\varphi}_3\big|_{\tau=0}=0. \qquad (2.5)$$

Чексизликда нотинчлик йўқ, яъни тўлқин сўнади:

$$\lim_{r\to\infty}\varphi_1=0,\qquad \lim_{r\to\infty}\varphi_2=0,\qquad \lim_{r\to\infty}\varphi_3=0. \qquad (2.6)$$

2.2. Масаланинг ечиш алгоритми

Юқоридаги (2.1) - (2.6) бошланғич чегаравий масалага ўлчовсиз τ вақт бўйича Лаплас интеграл алмаштиришларини қўллаймиз. Бу ҳолда Лаплас интеграл алмаштиришларининг тасвирлар фазосида бошланғич чегаравий масаланинг қўйилиши (L белги алмаштириш трансформантасини, s - эса параметрини билдиради):

$$\Delta\varphi_1^L-\gamma_1^2 s^2\varphi_1^L=0,\ \Delta\varphi_2^L-\gamma_2^2 s^2\varphi_2^L=0,\ \Delta\varphi_3^L-\frac{\varphi_3^L}{r^2\sin^2\theta}-\gamma_3^2 s^2\varphi_3^L=0, \qquad (2.7)$$

$$\sigma_{zz}^L\Big|_{z=0}=0, \qquad \sigma_{zx}^L\Big|_{z=0}=0, \qquad \sigma_{m}^L\Big|_{z=0}=0 \tag{2.8}$$

$$u_{1z}^L\Big|_{z=0}=0, \qquad u_{1x}^L\Big|_{z=0}=0, \qquad U_{2z}^L\Big|_{z=0}=0 \tag{2.9}$$

$$u_1^L\Big|_{r=1}=z^L(s)\cos\theta, \quad \sigma_{r\theta}^L\Big|_{r=1}=k\ \ z^L(s)\sin\theta-v_1^L\Big|_{r=1}, \quad U_2^L\Big|_{r=1}=z^L(s)\cos\theta \tag{2.10}$$

$$\lim_{r\to\infty}\varphi_1^L=0, \qquad \lim_{r\to\infty}\varphi_2^L=0, \qquad \lim_{r\to\infty}\varphi_3^L=0. \tag{2.11}$$

кўринишга эга бўлади.

Чексизликда тўлқиннинг сўнишини, яъни (2.11) шартни эътиборга олиб, (2.7) тенгламаларининг ечимларини Лаплас интеграл алмаштиришларининг тасвирлар фазосида куйидаги

$$\varphi_1^L=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{r}}A_{1n}^L(s)K_{n+1/2}(r\gamma_1 s)P_n(\cos\theta)+\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{r_1}}B_p^L(s)K_{p+1/2}(r_1\gamma_1 s)P_p(\cos\theta_1),$$

$$\varphi_2^L=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{r}}A_{2n}^L(s)K_{n+1/2}(r\gamma_2 s)P_n(\cos\theta)+\sum_{p=0}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{r_1}}C_p^L(s)K_{p+1/2}(r_1\gamma_2 s)P_p(\cos\theta_1)$$

$$\varphi_3^L=-\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{r}}A_{3n}^L(s)K_{n+1/2}(r\gamma_3 s)C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta)- \tag{2.12}$$

$$-\sin\theta_1\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{r_1}}D_p^L(s)K_{p+1/2}(r_1\gamma_3 s)C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta_1),$$

кўринишда ёзиб оламиз.

Бу ерда $A_{in}^L(s), i=1\div 3$, $B_n^L(s)$, $C_n^L(s)$ ва $D_n^L(s)$ - лар s параметрнинг номаълум функциялари; r_1 ва θ_1 - сферик координат системасининг радиус ва бурчак координаталари (3 расмга қаранг).

Ярим фазонинг $z=0$ чегарасида r, θ ва r_1, θ_1 координаталарнинг

$$r\big|_{z=0}=r_1\big|_{z=0}, \qquad \theta\big|_{z=0}+\theta_1\big|_{z=0}=\pi \tag{2.13}$$

боғланишини ҳамда Лежандра ва Гегенбауэра кўпҳадларининг хоссаларини [15, 19]

$$(-1)^n P_n(\cos\theta)\Big|_{z=0}=P_n(\cos\theta_1)\Big|_{z=0}, \ (-1)^n C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta)\Big|_{z=0}=C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta_1)\Big|_{z=0}, \tag{2.14}$$

хоссаларидан фойдаланиб, $P_n(\cos\theta)$ кўпҳадларнинг (1.37) хоссалари, $K_{n+1/2}(x)$ функция (1.43) хоссаларига кўра ҳамда (2.8) ёки (2.9) чегаравий шартларни қанаотлантириб ихтиёрий номаълум функциялар ўртасида:

$$C_n^L(s) = \pm(-1)^n \tilde{A}_n^L(s), \qquad D_n^L(s) = \pm(-1)^n \tilde{B}_n^L(s) \tag{2.15}$$

боғланишларни оламиз. Бу ерда юқори ишора қаттиқ сиртга мос келади, пастги ишора эса эркин сиртга мос келади.

$K_{n+1/2}(x)$ функциялар учун қўшиш теоремасини (2.12) потенциал функциялар ифодаларига қўллаб, улар учун (r,θ,ϑ) сферик координаталар системасида куйидаги ифодаларни оламиз:

$$\varphi_1^L = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{1n}^L(r,s) P_n(\cos\theta), \tag{2.16}$$

$$\varphi_{1n}^L(r,s) = \frac{1}{\sqrt{r}}\ A_{1n}^L(s) K_{n+1/2}(r\gamma_1 s) + (-1)^n (2n+1) I_{n+1/2}(r\gamma_1 s) \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} \left[\pm(-1)^p A_{1p}^L(s)\right] \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} b_\sigma^{(n0p0)} \sqrt{\frac{\pi}{4h\gamma_1 s}} K_{\sigma+1/2}(2h\gamma_1 s) \Bigg\},$$

$$\varphi_2^L = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_{2n}^L(r,s) P_n(\cos\theta),$$

$$\varphi_{2n}^L(r,s) = \frac{1}{\sqrt{r}}\ A_{2n}^L(s) K_{n+1/2}(r\gamma_2 s) + (-1)^n (2n+1) I_{n+1/2}(r\gamma_2 s) \times$$

$$\times \sum_{p=0}^{\infty} \left[\pm(-1)^p A_{2p}^L(s)\right] \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} b_\sigma^{(n0p0)} \sqrt{\frac{\pi}{4h\gamma_2 s}} K_{\sigma+1/2}(2h\gamma_2 s) \Bigg\}$$

$$\varphi_3^L = -\sin\theta \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_{3n}^L(r,s) C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta), \tag{2.17}$$

$$\varphi_{3n}^L(r,s) = \frac{1}{\sqrt{r}} \Bigg\{ A_{3n}^L(s) K_{n+1/2}(r\gamma_3 s) + \frac{(-1)^n (2n+1)}{n(n+1)} I_{n+1/2}(r\gamma_3 s) \times$$

$$\times \sum_{p=1}^{\infty} \left[\pm(-1)^p A_{3p}^L(s)\right] \sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n} b_\sigma^{(n1p1)} \sqrt{\frac{\pi}{4h\gamma_3 s}} K_{\sigma+1/2}(2h\gamma_3 s) \Bigg\},$$

(1.46) ифодаларни ҳисобга олиб, $\varphi_n^L(r,s)$, $\psi_n^L(r,s)$ ларнинг элементлар функциялар орқали ифодасини оламиз:

$$\varphi_{1n}^L(r,s)=\frac{1}{r^{n+1}(\gamma_1 s)^n}\Big[R_{n0}(r\gamma_1 s)A_{1n}^L(s)e^{-r\gamma_1 s}+$$

$$+G_{n0}(r\gamma_1 s)\sum_{p=0}^{\infty}C_{np}^{(1)}(s)A_{1p}^L(s)e^{-2h\gamma_1 s}\Big],\qquad(2.18)$$

$$\varphi_{2n}^L(r,s)=\frac{1}{r^{n+1}(\gamma_2 s)^n}\Big[R_{n0}(r\gamma_2 s)A_{2n}^L(s)e^{-r\gamma_2 s}+$$

$$+G_{n0}(r\gamma_2 s)\sum_{p=0}^{\infty}C_{np}^{(2)}(s)A_{2p}^L(s)e^{-2h\gamma_2 s}\Big]$$

$$\varphi_{3n}^L(r,s)=\frac{1}{r^{n+1}(\gamma_3 s)^n}\Big[R_{n0}(r\gamma_3 s)A_{3n}^L(s)e^{-r\gamma_3 s}+$$

$$+G_{n0}(r\gamma_3 s)\sum_{p=1}^{\infty}S_{np}(s)A_{3p}^L(s)e^{-2h\gamma_3 s}\Big]$$

$$C_{np}^{(i)}(s)=\frac{\pm(-1)^p(2n+1)}{4h\gamma_i s}\sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n}b_\sigma^{(n0p0)}\frac{R_{\sigma0}(2h\gamma_i s)}{(2h\gamma_i s)^\sigma},$$

$$S_{np}(s)=\frac{\pm(-1)^p(2n+1)}{4n(n+1)h\gamma_3 s}\sum_{\sigma=|p-n|}^{p+n}b_\sigma^{(n1p1)}\frac{R_{\sigma0}(2h\gamma_3 s)}{(2h\gamma_3 s)^\sigma},\qquad A_{in}^L(s)=\sqrt{\frac{\pi}{2s}}A_{in}^L(s).$$

У ҳолда (2.14) ва (2.15) қаторларнинг коэффициентлари билан

$$u_i^L=\sum_{n=0}^{\infty}u_{in}^L P_n(\cos\theta),\qquad v_i^L=-\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}v_{in}^L C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta),$$

$$\sigma_{rr}^L=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{rrn}^L P_n(\cos\theta),\qquad \sigma_m^L=\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{mn}^L P_n(\cos\theta),\qquad(2.19)$$

$$\sigma_{r\theta}^L=-\sin\theta\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{r\theta n}^L C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta).$$

кўчиш вектори ва кучланиш тензори компоненталар қаторларининг коэффициентлари ўртасидаги

$$u_{in}^L=\frac{\partial(\varphi_{1n}^L+\varphi_{2n}^L)}{\partial r}-\frac{n(n+1)}{r}\psi_n^L,\qquad v_{1n}^L=\frac{\varphi_{1n}^L+\varphi_{2n}^L-\psi_n^L}{r}-\frac{\partial\psi_n^L}{\partial r},\qquad(2.20)$$

$$u_{2n}^L=\frac{\partial(\beta_1\varphi_{1n}^L+\beta_2\varphi_{2n}^L)}{\partial r}-\frac{n(n+1)}{r}\beta_3\psi_n^L,\ v_{2n}^L=\frac{\beta_1\varphi_{1n}^L+\beta_2\varphi_{2n}^L-\beta_3\psi_n^L}{r}-\beta_3\frac{\partial\psi_n^L}{\partial r}$$

$$\sigma_{rrn}^L=\eta_1\frac{\partial u_{1n}^L}{\partial r}-n(n+1)\frac{\chi}{r}v_{1n}^L+\frac{2\chi}{r}u_{1n}^L+\eta_2\frac{\partial u_{2n}^L}{\partial r}+\frac{2}{r}u_{2n}^L-\frac{n(n+1)}{r}v_{2n}^L$$

$$\sigma_{r\theta n}^L=-\frac{\eta_1-\chi}{2}\left[\frac{1}{r}(u_{1n}^L-v_{1n}^L)+\frac{\partial v_{1n}^L}{\partial r}\right],\tag{2.21}$$

$$\sigma_{mn}^L=\eta_2\left[\frac{\partial u_{1n}^L}{\partial r}+\frac{2}{r}u_{1n}^L-n(n+1)\frac{v_{1n}^L}{r}\right]+\xi\left[\frac{\partial u_{2n}^L}{\partial r}+\frac{2}{r}u_{2n}^L-n(n+1)\frac{v_{2n}^L}{r}\right].$$

боғланишларга кўра кўчиш вектори ва тензори компонеталарининг тасвирлари учун куйидаги ифодаларни оламиз:

$$u_{1n}^L(r,s)=-\frac{1}{r^{n+2}s^n}\Bigg[\gamma_1^{-n}\left[R_{n1}(r\gamma_1 s)A_{1n}^L(s)e^{-r\gamma_1 s}+G_{n1}(r\gamma_1 s)\sum_{p=0}^{\infty}C_{np}^{(1)}(s)A_{1p}^L(s)e^{-2h\gamma_1 s}\right]+$$

$$+\gamma_2^{-n}\left[R_{n1}(r\gamma_2 s)A_{2n}^L(s)e^{-r\gamma_2 s}+G_{n1}(r\gamma_2 s)\sum_{p=0}^{\infty}C_{np}^{(2)}(s)A_{2p}^L(s)e^{-2h\gamma_2 s}\right]+$$

$$+n(n+1)\gamma_3^{-n}\left[R_{n0}(r\gamma_3 s)A_{3n}^L(s)e^{-r\gamma_3 s}+G_{n0}(r\gamma_3 s)\sum_{p=1}^{\infty}S_{np}(s)A_{3p}^L(s)e^{-2h\gamma_3 s}\right]\Bigg],$$

$$v_{1n}^L(r,s)=\frac{1}{r^{n+2}s^n}\Bigg[\gamma_1^{-n}\left[R_{n0}(r\gamma_1 s)A_{1n}^L(s)e^{-r\gamma_1 s}+G_{n0}(r\gamma_1 s)\sum_{p=0}^{\infty}C_{np}^{(1)}(s)A_{1p}^L(s)e^{-2h\gamma_1 s}\right]+$$

$$+\gamma_2^{-n}\left[R_{n0}(r\gamma_2 s)A_{2n}^L(s)e^{-r\gamma_2 s}+G_{n0}(r\gamma_2 s)\sum_{p=0}^{\infty}C_{np}^{(2)}(s)A_{2p}^L(s)e^{-2h\gamma_2 s}\right]+$$

$$+\gamma_3^{-n}\left[R_{n3}(r\gamma_3 s)A_{3n}^L(s)e^{-r\gamma_3 s}+G_{n3}(r\gamma_3 s)\sum_{p=1}^{\infty}S_{np}(s)A_{3p}^L(s)e^{-2h\gamma_3 s}\right]\Bigg];\tag{2.22}$$

$$U_{2n}^L(r,s)=-\frac{1}{r^{n+2}s^n}\Bigg[\frac{\beta_1}{\gamma_1^n}\left[R_{n1}(r\gamma_1 s)A_{1n}^L(s)e^{-r\gamma_1 s}+G_{n1}(r\gamma_1 s)\sum_{p=0}^{\infty}C_{np}^{(1)}(s)A_{1p}^L(s)e^{-2h\gamma_1 s}\right]+$$

$$+\frac{\beta_2}{\gamma_2^n}\left[R_{n1}(r\gamma_2 s)A_{2n}^L(s)e^{-r\gamma_2 s}+G_{n1}(r\gamma_2 s)\sum_{p=0}^{\infty}C_{np}^{(2)}(s)A_{2p}^L(s)e^{-2h\gamma_2 s}\right]+$$

$$+\frac{n(n+1)\beta_3}{\gamma_3^n}\left[R_{n0}(r\gamma_3 s)A_{3n}^L(s)e^{-r\gamma_3 s}+G_{n0}(r\gamma_3 s)\sum_{p=1}^{\infty}S_{np}(s)A_{3p}^L(s)e^{-2h\gamma_3 s}\right]\Bigg],$$

$$V_{2n}^L(r,s)=\frac{1}{r^{n+2}s^n}\left[\frac{\beta_1}{\gamma_1^n}\left[R_{n0}(r\gamma_1 s)A_{1n}^L(s)e^{-r\gamma_1 s}+G_{n0}(r\gamma_1 s)\sum_{p=0}^{\infty}C_{np}^{(1)}(s)A_{1p}^L(s)e^{-2h\gamma_1 s}\right]+\right.$$

$$+\frac{\beta_2}{\gamma_2^n}\left[R_{n0}(r\gamma_2 s)A_{2n}^L(s)e^{-r\gamma_2 s}+G_{n0}(r\gamma_2 s)\sum_{p=0}^{\infty}C_{np}^{(2)}(s)A_{2p}^L(s)e^{-2h\gamma_2 s}\right]+$$

$$\left.+\frac{\beta_3}{\gamma_3^n}\left[R_{n3}(r\gamma_3 s)A_{3n}^L(s)e^{-r\gamma_3 s}+G_{n3}(r\gamma_3 s)\sum_{p=1}^{\infty}S_{np}(s)A_{3p}^L(s)e^{-2h\gamma_3 s}\right]\right];$$

$$\sigma_{rrn}^L(r,s)=\frac{1}{r^{n+3}s^n}\left[\sum_{i=1}^{3}Q_{1in}(s)A_{in}^L(s)e^{-r\gamma_i s}+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{2}Q_{1in}(-s)\sum_{p=0}^{\infty}C_{np}^{(i)}(s)A_{ip}^L(s)e^{-2h\gamma_i s}e^{r\gamma_i s}-\sum_{i=1}^{2}Q_{1in}(s)\sum_{p=0}^{\infty}C_{np}^{(i)}(s)A_{ip}^L(s)e^{-2h\gamma_i s}e^{-r\gamma_i s}+$$

$$\left.+Q_{13n}(-s)\sum_{p=1}^{\infty}S_{np}(s)A_{3p}^L(s)e^{-2h\gamma_3 s}e^{r\gamma_3 s}-Q_{13n}(s)\sum_{p=1}^{\infty}S_{np}(s)A_{3p}^L(s)e^{-2h\gamma_3 s}e^{-r\gamma_3 s}\right],$$

$$\sigma_{r\theta n}^L(r,s)=\frac{1}{r^{n+3}s^n}\left[\sum_{i=1}^{3}Q_{2in}(s)A_{in}^L(s)e^{-r\gamma_i s}+\right. \qquad (2.23)$$

$$+\sum_{i=1}^{2}Q_{2in}(-s)\sum_{p=0}^{\infty}C_{np}^{(i)}(s)A_{ip}^L(s)e^{-2h\gamma_i s}e^{r\gamma_i s}-\sum_{i=1}^{2}Q_{2in}(s)\sum_{p=0}^{\infty}C_{np}^{(i)}(s)A_{ip}^L(s)e^{-2h\gamma_i s}e^{-r\gamma_i s}+$$

$$\left.+Q_{23n}(-s)\sum_{p=1}^{\infty}S_{np}(s)A_{3p}^L(s)e^{-2h\gamma_3 s}e^{r\gamma_3 s}-Q_{23n}(s)\sum_{p=1}^{\infty}S_{np}(s)A_{3p}^L(s)e^{-2h\gamma_3 s}e^{-r\gamma_3 s}\right],$$

$$\sigma_{rnn}^L(r,s)=\frac{1}{r^{n+3}s^n}\left[\sum_{i=1}^{3}Q_{3in}(s)A_{in}^L(s)e^{-r\gamma_i s}+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{2}Q_{3in}(-s)\sum_{p=0}^{\infty}C_{np}^{(i)}(s)A_{ip}^L(s)e^{-2h\gamma_i s}e^{r\gamma_i s}-\sum_{i=1}^{2}Q_{3in}(s)\sum_{p=0}^{\infty}C_{np}^{(i)}(s)A_{ip}^L(s)e^{-2h\gamma_i s}e^{-r\gamma_i s}+$$

$$\left.+Q_{33n}(-s)\sum_{p=1}^{\infty}S_{np}(s)A_{3p}^L(s)e^{-2h\gamma_3 s}e^{r\gamma_3 s}-Q_{33n}(s)\sum_{p=1}^{\infty}S_{np}(s)A_{3p}^L(s)e^{-2h\gamma_3 s}e^{-r\gamma_3 s}\right].$$

Ихтиёрий $n\geq 0$ учун θ бурчакни ажратилишидан сўнг, шар сиртида қатор коэффициентларига нисбатан куйидаги чегаравий шартларга келамиз:

$$u_{11}^L\Big|_{r=1}=z^L(s), \qquad \sigma_{r\theta 1}^L\Big|_{r=1}=k\ v_{11}^L\Big|_{r=1}+z^L(s)\ , \qquad U_{21}^L\Big|_{r=1}=z^L(s) \qquad (2.24)$$

$$u_{1n}^{L}\Big|_{r=1}=0, \qquad \sigma_{r\theta n}^{L}\Big|_{r=1}=k\,v_{1n}^{L}\Big|_{r=1}, \quad (n\neq 1), \qquad U_{2n}^{L}\Big|_{r=1}=0 \qquad (2.25)$$

(2.22) ва (2.23) ифодаларни (2.2) ва (2.25) чегаравий шартларга қўйиб, баъзи элементар амлаштиришлардан сўнг $A_{in}^{L}(s)$ номаълум функцияларига нисбатан чексиз чизиқли алгебраик тенгламалар системасини оламиз ва уни учта матрицали тенгламалар системаси кўринишида ёзиб қўямиз:

$$\begin{gathered}
\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}_1 t^2uw+\mathbf{F}^{(1)}\mathbf{A}_1 xuw-\mathbf{F}^{(2)}\mathbf{A}_1 xt^2uw+\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{A}_2 tu^2w+\mathbf{F}^{(3)}\mathbf{A}_2 ytw-\\
-\mathbf{F}^{(4)}\mathbf{A}_2 ytu^2w+\mathbf{M}^{(3)}\mathbf{A}_3 tuw^2+\mathbf{F}^{(5)}\mathbf{A}_3 ztu-\mathbf{F}^{(6)}\mathbf{A}_3 z^2tuw^2=\mathbf{k}^{(1)}tuw,\\
\mathbf{N}^{(1)}\mathbf{A}_1 t^2uw+\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{A}_1 xuw-\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{A}_1 xt^2uw+\mathbf{N}^{(2)}\mathbf{A}_2 tu^2w+\mathbf{H}^{(3)}\mathbf{A}_2 ytw-\\
-\mathbf{H}^{(4)}\mathbf{A}_2 ytu^2w+\mathbf{N}^{(3)}\mathbf{A}_3 tuw^2+\mathbf{H}^{(5)}\mathbf{A}_3 ztu-\mathbf{H}^{(6)}\mathbf{A}_3 z^2tuw^2=\mathbf{k}^{(2)}tuw, \quad (2.26)\\
\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{A}_1 t^2uw+\mathbf{T}^{(1)}\mathbf{A}_1 xuw\mathbf{T}^{(2)}\mathbf{A}_1 xt^2uw+\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{A}_2 tu^2w+\mathbf{T}^{(3)}\mathbf{A}_2 ytw-\\
-\mathbf{T}^{(4)}\mathbf{A}_2 ytu^2w+\mathbf{L}^{(3)}\mathbf{A}_3 tuw^2+\mathbf{T}^{(5)}\mathbf{A}_3 ztu-\mathbf{T}^{(6)}\mathbf{A}_3 z^2tuw^2=\mathbf{k}^{(3)}tuw,\\
x=e^{-2h\gamma_1 s}, \quad y=e^{-2h\gamma_2 s}, \quad z=e^{-2h\gamma_3 s}, \quad t=e^{-\gamma_1 s}, \quad u=e^{-\gamma_2 s}, \quad w=e^{-\gamma_3 s}
\end{gathered}$$

Бу ерда $\mathbf{F}^{(k)}$, $\mathbf{H}^{(k)}$ ва $\mathbf{T}^{(k)}$ - лар элементлари $F_{np}^{(k)}(s)$, $H_{np}^{(k)}(s)$ ва $T_{np}^{(k)}(s)$ $(k=\overline{1,6})$ бўлган чексиз матрицалар; $\mathbf{M}^{(i)}$, $\mathbf{N}^{(i)}$ ва $\mathbf{L}^{(i)}$ - лар эса элементлари мос равишда $M_n^{(i)}(s)$, $N_n^{(i)}(s)$ ва $L_n^{(i)}(s)$ бўлган чексиз диагонал матрицалар; $\mathbf{k}^{(i)}$ - элементлари $k_n^{(i)}(s)$ лар маълум бўлган чексиз векторлар; $\mathbf{A}_i$ – элементлари $A_{in}^{L}(s)$, $(i=1,3)$ номаълум бўлган чексиз векторлар.

(2.26) системадаги матрица ва векторларнинг компоненталари куйидаги кўринишга эса:

$$M_n^{(1)}(s)=\gamma_1^{-n}R_{n1}(\gamma_1 s), \qquad M_n^{(2)}(s)=\gamma_2^{-n}R_{n0}(\gamma_2 s) \qquad ,$$

$$M_n^{(3)}(s)=\gamma_3^{-n}n(n+1)R_{n0}(\gamma_3 s)$$

$$F_{np}^{(1)}(s)=M_n^{(1)}(-s)C_{np}^{(1)}(s), \qquad F_{np}^{(2)}(s)=M_n^{(1)}(s)C_{np}^{(1)}(s),$$

$$F_{np}^{(3)}(s)=M_n^{(2)}(-s)C_{np}^{(2)}(s), \qquad F_{np}^{(4)}(s)=M_n^{(2)}(s)C_{np}^{(2)}(s),$$

$$F_{np}^{(5)}(s)=M_n^{(3)}(-s)S_{np}(s), \qquad F_{np}^{(6)}(s)=M_n^{(3)}(s)S_{np}(s),$$

$$N_n^{(1)}(s)=Q_{21n}(s)-k\gamma_1^{-n}R_{n0}(\gamma_1 s),\qquad N_n^{(2)}(s)=Q_{22n}(s)-k\gamma_2^{-n}R_{n0}(\gamma_2 s),$$

$$N_n^{(3)}(s)=Q_{23n}(s)-k\gamma_3^{-n}R_{n3}(\gamma_3 s),\tag{2.27}$$

$$H_{np}^{(1)}(s)=N_n^{(1)}(-s)C_{np}^{(1)}(s),\qquad H_{np}^{(2)}(s)=N_n^{(1)}(s)C_{np}^{(1)}(s),$$

$$H_{np}^{(3)}(s)=N_n^{(2)}(-s)C_{np}^{(2)}(s),\qquad H_{np}^{(4)}(s)=N_n^{(2)}(s)C_{np}^{(2)}(s),$$

$$H_{np}^{(5)}(s)=N_n^{(3)}(-s)S_{np}(s),\qquad H_{np}^{(6)}(s)=N_n^{(3)}(s)S_{np}(s),$$

$$L_n^{(1)}(s)=\beta_1\gamma_1^{-n}R_{n0}(\gamma_1 s),\quad L_n^{(2)}(s)=\beta_2\gamma_2^{-n}R_{n0}(\gamma_2 s)\qquad ,$$

$$L_n^{(1)}(s)=n(n+1)\beta_3\gamma_3^{-n}R_{n0}(\gamma_3 s)$$

$$T_{np}^{(1)}(s)=L_n^{(1)}(-s)C_{np}^{(1)}(s),\qquad T_{np}^{(2)}(s)=L_n^{(1)}(s)C_{np}^{(1)}(s),$$

$$T_{np}^{(3)}(s)=L_n^{(2)}(-s)C_{np}^{(2)}(s),\qquad T_{np}^{(4)}(s)=L_n^{(2)}(s)C_{np}^{(2)}(s),$$

$$T_{np}^{(5)}(s)=L_n^{(3)}(-s)S_{np}(s),\qquad T_{np}^{(6)}(s)=L_n^{(3)}(s)S_{np}(s),$$

$$k_1^{(1)}(s)=-sz^L(s),\quad k_2^{(1)}(s)=sz^L(s),\qquad k_1^{(n)}(s)=0,\quad k_2^{(n)}(s)=0,\quad n\neq 1$$

$$k_3^{(1)}(s)=-sz^L(s),\qquad k_3^{(n)}(s)=0.$$

(2.26) чексиз матрицали тенгламалар системаси анча мурракабдир. У уч номаълумли векторларнинг учта матрицали тенгламасидан ва олтита x, y, z, t, u, v экспоненциал функциялардан иборатдир.

(2.26) системанинг ечимини x, y, z, t, u, v экспоненталарнинг чексиз қаторлари кўринишида тасвирлаймиз:

$$\mathbf{A}_1=\sum_{ijnklm=0}^{\infty}\mathbf{a}_{ijnklm}^{(1)}(s)x^i y^j z^n t^{-k-1}u^{-l}w^{-m},\quad \mathbf{A}_2=\sum_{ijnklm=0}^{\infty}\mathbf{a}_{ijnklm}^{(2)}(s)x^i y^j z^n t^{-k}u^{-l-1}w^{-m},$$

$$\mathbf{A}_3=\sum_{ijnklm=0}^{\infty}\mathbf{a}_{ijnklm}^{(3)}(s)x^i y^j z^n t^{-k}u^{-l}w^{-m-1}.\tag{2.28}$$

Бу ерда $\mathbf{a}_{ijnklm}^{(p)}(s)$ - лар элементлари $a_{ijnklm}^{(p,q)}(s)$ бўлган чексиз номаълум векторлардир.

(2.28) чексиз қаторларни (2.26) матрицали тенгламалар системасига қўйиб, тенгликларнинг чап ва ўнг томонларидаги x, y, z, t, u ва v

экспоненталарнинг бир хил даражалари олдидаги коэффициентларини тенглаб, $a_{ijnklm}^{(p,q)}(s)$ номаълум функциялар учун куйидаги бошланғич шартлар ва рекуррент муносабатларни оламиз:

1) $a_{000000}^{(1,p)}(s)=\dfrac{\Delta_p^{(1)}(s)}{\Delta_p(s)},\ a_{000000}^{(2,p)}(s)=\dfrac{\Delta_p^{(2)}(s)}{\Delta_p(s)},\ a_{000000}^{(3,p)}(s)=\dfrac{\Delta_p^{(3)}(s)}{\Delta_p(s)},\ p\ge 1;$

2) $a_{000klm}^{(1,p)}(s)=0,\ a_{000klm}^{(2,p)}(s)=0,\ a_{000klm}^{(3,p)}(s)=0,\ p\ge 0,\ k+l+m\ne 0,$

3) $a_{ijnklm}^{(1,p)}(s)=\sum\limits_{q=0}^{\infty}C_{pq}^{(1)}(s)a_{i-1,jnklm}^{(1,q)}(s),\ a_{ijnklm}^{(2,p)}(s)=0,\ a_{ijnklm}^{(3,p)}(s)=0;\ i\ge 1;\ j,n=0;k,l,m=0,1;$

$a_{ijnklm}^{(1,p)}(s)=0,\ a_{ijnklm}^{(2,p)}(s)=\sum\limits_{q=0}^{\infty}C_{pq}^{(2)}(s)a_{i,j-1,nklm}^{(2,q)}(s),\ a_{ijnklm}^{(3,p)}(s)=0;\ j\ge 1;\ i,n=0;k,l,m=0,1;$

$a_{ijnklm}^{(1,p)}(s)=0,\ a_{ijnklm}^{(2,p)}(s)=0,\ a_{ijnklm}^{(3,p)}(s)=\sum\limits_{q=1}^{\infty}S_{pq}(s)a_{i-1,jnklm}^{(3,q)}(s),\ n\ge 1,\ i,\ j=0;\ k,l,m=0,1;$

4) $a_{ijnklm}^{(1,p)}(s)=-\dfrac{\Delta_{1n}(s)}{\Delta_n(s)}\sum\limits_{q=0}^{\infty}C_{pq}^{(1)}(s)a_{i-1,jn,k-1,lm}^{(1,q)}(s)+\sum\limits_{q=0}^{\infty}C_{pq}^{(1)}(s)a_{i-1,jnklm}^{(1,q)}(s)$

$a_{ijnklm}^{(2,p)}(s)=-\dfrac{\Delta_{4n}(s)}{\Delta_n(s)}\sum\limits_{q=0}^{\infty}C_{pq}^{(1)}(s)a_{i-1,jn,k-1,lm}^{(1,q)}(s);\ i\ge 1;\ j,n=0;\ k\ge 1;\ l,m=0,1;$

$$a_{ijnklm}^{(3,p)}(s)=-\frac{\Delta_{7n}(s)}{\Delta_n(s)}\sum_{q=0}^{\infty}C_{pq}^{(1)}(s)a_{i-1,jn,k-1,lm}^{(1,q)}(s);\ i\ge 1;\ j,n=0;\ k\ge 1;\ l,m=0,1; \qquad (2.29)$$

5) $a_{ijnklm}^{(1,p)}(s)=-\dfrac{\Delta_{2n}(s)}{\Delta_n(s)}\sum\limits_{q=0}^{\infty}C_{pq}^{(2)}(s)a_{i,j-1,n,k,l-1,m}^{(2,q)}(s);\ j\ge 1;\ i,n=0;\ l\ge 1;\ k,m=0,1;$

$$a_{ijnklm}^{(2,p)}(s)=-\frac{\Delta_{5n}(s)}{\Delta_n(s)}\sum_{q=0}^{\infty}C_{pq}^{(2)}(s)a_{i,j-1,n,k-1,lm}^{(2,q)}(s)+\sum_{q=0}^{\infty}C_{pq}^{(2)}(s)a_{i,j-1,nklm}^{(2,q)}(s)$$

$$a_{ijnklm}^{(3,p)}(s)=-\frac{\Delta_{8n}(s)}{\Delta_n(s)}\sum_{q=0}^{\infty}C_{pq}^{(2)}(s)a_{i,j-1,n,k,l-1,m}^{(2,q)}(s);\ j\ge 1;\ i,n=0;\ l\ge 1;\ k,m=0,1;$$

6) $a_{ijnklm}^{(1,p)}(s)=-\dfrac{\Delta_{3n}(s)}{\Delta_n(s)}\sum\limits_{q=0}^{\infty}S_{pq}(s)a_{ij,n-1,kl,m-1}^{(3,q)}(s);\ n\ge 1;\ i,j=0;\ m\ge 1;\ k,l=0,1;$

$$a_{ijnklm}^{(2,p)}(s)=-\frac{\Delta_{6n}(s)}{\Delta_n(s)}\sum_{q=0}^{\infty}S_{pq}(s)a_{ij,n-1,kl,m-1}^{(3,q)}(s);\ n\ge 1;\ i,j=0;\ m\ge 1;\ k,l=0,1;$$

$$a^{(3,p)}_{ijnklm}(s)=-\frac{\Delta_{9n}(s)}{\Delta_n(s)}\sum_{q=1}^{\infty}S_{pq}(s)a^{(3,q)}_{ij,n-1,kl,m-1}(s)+\sum_{q=1}^{\infty}S_{pq}(s)a^{(3,q)}_{ij,n-1,km}(s)$$

7)
$$a^{(1,p)}_{ijn,k+1,p+1,m+1}(s)=-\frac{\Delta_{1n}(s)}{\Delta_n(s)}\sum_{q=0}^{\infty}C^{(1)}_{pq}(s)a^{(1,q)}_{i-1\,jnk-1,l+1,m+1}(s)+\sum_{q=0}^{\infty}C^{(1)}_{pq}(s)a_{i-1,\,jn,k+1,l+1,m+1}-$$
$$-\frac{\Delta_{2n}(s)}{\Delta_n(s)}\sum_{q=0}^{\infty}C^{(2)}_{pq}(s)a^{(2,q)}_{i,\,j-1,k+1,l-1,m+1}(s)-\frac{\Delta_{3n}(s)}{\Delta_n(s)}\sum_{q=1}^{\infty}S_{pq}(s)a^{(3,q)}_{ij,n-1,k+1,l+1,m-1}(s);$$

$$a^{(2,p)}_{ijnk+1,l+1,m+1}(s)=-\frac{\Delta_{4n}(s)}{\Delta_n(s)}\sum_{q=0}^{\infty}C^{(1)}_{pq}(s)a^{(1,q)}_{i-1,\,jn,k-1,l+1,m+1}(s)-\frac{\Delta_{5n}(s)}{\Delta_n(s)}\sum_{q=0}^{\infty}C^{(2)}_{pq}(s)a^{(2,q)}_{ij-1,nk+1,l-1,m+1}(s)+$$
$$+\sum_{q=0}^{\infty}C^{(2)}_{pq}(s)a^{(2,q)}_{ij-1,nk+1,l+1,m+1}(s)-\frac{\Delta_{6n}(s)}{\Delta_n(s)}\sum_{q=1}^{\infty}S_{pq}(s)a^{(3,q)}_{ijn-1,k+1,l+1m-1}(s);$$

$$a^{(3,p)}_{ijnk+1,l+1,m+1}(s)=-\frac{\Delta_{7n}(s)}{\Delta_n(s)}\sum_{q=0}^{\infty}C^{(1)}_{pq}(s)a^{(1,q)}_{i-1,\,jn,k-1,l+1,m+1}(s)-\frac{\Delta_{8n}(s)}{\Delta_n(s)}\sum_{q=0}^{\infty}C^{(2)}_{pq}(s)a^{(2,q)}_{ij-1,n,k+1,l-1,m+1}(s)-$$
$$-\frac{\Delta_{9n}(s)}{\Delta_n(s)}\sum_{q=1}^{\infty}S_{pq}(s)a^{(3,q)}_{ijn-1,k+1,l+1,m-1}(s)+\sum_{q=1}^{\infty}S_{pq}(s)a^{(3,q)}_{ij,n-1,k+1,l+1,m+1}(s);$$

Бу ерда

$$\Delta_{1n}(s)=\mathrm{M}^{(1)}_p(-s)N^{(2)}_p(s)L^{(3)}_p(s)+M^{(3)}_p(s)N^{(1)}_p(s)L^{(2)}_p(s)+M^{(2)}_p(s)N^{(3)}_p(s)L^{(1)}_p(-s)-$$
$$-M^{(3)}_p(s)N^{(2)}_p(s)L^{(1)}_p(s)-M^{(2)}_p(s)N^{(1)}_p(s)L^{(3)}_p(s)-M^{(1)}_p(s)N^{(3)}_p(s)L^{(2)}_p(s);$$

$$\Delta_{2n}(s)=M^{(2)}_p(-s)N^{(2)}_p(s)L^{(3)}_p(s)+M^{(2)}_p(s)N^{(3)}_p(s)L^{(2)}_p(-s)+M^{(3)}_p(s)N^{(2)}_p(-s)L^{(2)}_p(s)-$$
$$-M^{(3)}_p(s)N^{(2)}_p(s)L^{(2)}_p(-s)-M^{(2)}_p(-s)N^{(3)}_p(s)L^{(2)}_p(s)-M^{(2)}_p(s)N^{(2)}_p(-s)L^{(3)}_p(s);$$
$$\Delta_{3n}(s)=M^{(3)}_p(-s)N^{(2)}_p(s)L^{(3)}_p(s)-M^{(3)}_p(s)N^{(3)}_p(-s)L^{(2}_p(s)+M^{(2)}_p(s)N^{(3)}_p(s)L^{(3)}_p(-s)-$$
$$-M^{(3)}_p(s)N^{(2)}_p(s)L^{(3)}_p(-s)-M^{(3)}_p(-s)N^{(3)}_p(s)L^{(2)}_p(s)-M^{(2)}_p(s)N^{(3)}_p(-s)L^{(3)}_p(s);$$

$$\Delta_{4n}(s)=M^{(1)}_p(s)N^{(1)}_p(-s)L^{(3)}_p(s)+M^{(3)}_p(s)N^{(1)}_p(s)L^{(1)}_p(-s)+M^{(1)}_p(-s)N^{(3)}_p(s)L^{(1)}_p(s)-$$
$$-M^{(3)}_p(s)N^{(1)}_p(-s)L^{(1)}_p(s)-M^{(1)}_p(-s)N^{(1)}_p(s)L^{(3)}_p(s)-M^{(1)}_p(s)N^{(3)}_p(s)L^{(1)}_p(-s);$$

$$\Delta_{5n}(s)=M^{(1)}_p(s)N^{(2)}_p(-s)L^{(3)}_p(s)+M^{(3)}_p(s)N^{(1)}_p(s)L^{(2)}_p(-s)+M^{(2)}_p(-s)N^{(3)}_p(s)L^{(1)}_p(s)-$$
$$-M^{(3)}_p(s)N^{(2)}_P(-s)L^{(1)}_p-M^{(2)}_p(-s)N^{(1)}_p(s)L^{(3)}_p(s)-M^{(1)}_p(s)N^{(3)}_p(s)L^{(2)}_p(-s);$$

$$\Delta_{7n}(s)=M^{(1)}_p(s)N^{(2)}_p(s)L^{(1)}_p(-s)+M^{(1)}_p(-s)N^{(1)}_p(s)L^{(2)}_p(s)+M^{(2)}_p(s)N^{(1)}_p(-s)L^{(1)}_p(s)-$$
$$-M^{(1)}_p(-s)N^{(2)}_p(s)L^{(1)}_p(s)-M^{(1)}_p(s)N^{(1)}_p(-s)L^{(2)}_p(s)-M^{(1)}_p(s)N^{(1)}_p(s)L^{(1)}_p(-s);$$
$$\Delta_{8n}(s)=M^{(1)}_p(s)N^{(2)}_p(s)L^{(3)}_p(-s)+M^{(2)}_p(-s)N^{(1)}_p(s)L^{(2)}_p(s)+M^{(2)}_p(s)N^{(2)}_p(-s)L^{(1)}_p(s)-$$
$$-M^{(2)}_p(-s)N^{(2)}_p(s)L^{(1)}_p(s)-M^{(1)}_p(s)N^{(1)}_p(-s)L^{(2)}_p(s)-M^{(2)}_p(s)N^{(1)}_p(s)L^{(3)}_p(-s);$$

$$\Delta_{9n}(s)=M_p^{(1)}(s)N_p^{(2)}(s)L_p^{(3)}(-s)+M_p^{(3)}(-s)N_p^{(1)}(s)L_p^{(2)}(s)+M_p^{(2)}(s)N_p^{(3)}(-s)L_p^{(1)}(s)-$$
$$-M_p^{(3)}(-s)N_p^{(2)}(s)L_p^{(1)}(s)-M_p^{(1)}(s)N_p^{(3)}(-s)L_p^{(2)}(s)-M_p^{(2)}(s)N_p^{(1)}(s)L_p^{(3)}(-s);$$

$$\Delta_0(s)=M_0^{(1)}(s),$$

$$\Delta_p(s)=M_p^{(1)}(s)N_p^{(2)}(s)L_p^{(3)}(s)+M_p^{(2)}(s)N_p^{(3)}(s)L_p^{(1)}(s)+M_p^{(3)}(s)N_p^{(1)}(s)L_p^{(2)}(s)-$$
$$-M_p^{(3)}(s)N_p^{(2)}(s)L_p^{(1)}(s)-M_p^{(2)}(s)N_p^{(1)}(s)L_p^{(3)}(s)-M_p^{(1)}(s)N_p^{(3)}(s)L_p^{(2)}(s),$$

$$\Delta_p^{(1)}(s)=k_p^{(1)}(s)N_p^{(2)}(s)L_p^{(3)}(s)+M_p^{(2)}(s)N_p^{(3)}(s)k_p^{(3)}(s)+M_p^{(3)}(s)k_p^{(2)}(s)L_p^{(2)}(s)-$$
$$-M_p^{(3)}(s)N_p^{(2)}(s)k_p^{(3)}(s)-M_p^{(2)}(s)k_p^{(2)}(s)L_p^{(3)}(s)-k_p^{(1)}(s)N_p^{(3)}(s)L_p^{(2)}(s),$$

$$\Delta_p^{(2)}(s)=M_p^{(1)}(s)k_p^{(2)}(s)L_p^{(3)}(s)+k_p^{(1)}(s)N_p^{(3)}(s)L_p^{(1)}(s)+M_p^{(3)}(s)N_p^{(1)}(s)k_p^{(3)}(s)-$$
$$-M_p^{(3)}(s)k_p^{(2)}(s)L_p^{(1)}(s)-k_p^{(1)}(s)N_p^{(1)}(s)L_p^{(3)}(s)-M_p^{(1)}(s)N_p^{(3)}(s)k_p^{(3)}(s),$$

$$\Delta_p^{(3)}(s)=M_p^{(1)}(s)N_p^{(2)}(s)k_p^{(3)}(s)+M_p^{(2)}(s)k_p^{(2)}(s)L_p^{(1)}(s)+k_p^{(1)}(s)N_p^{(1)}(s)L_p^{(2)}(s)-$$
$$-k_p^{(1)}(s)N_p^{(2)}(s)L_p^{(1)}(s)-M_p^{(2)}(s)N_p^{(1)}(s)k_p^{(3)}(s)-M_p^{(1)}(s)k_p^{(2)}(s)L_p^{(2)}(s).$$

Айтиш мумкинки, (2.29) рекуррент муносабатлар (2.28) қаторларнинг $\mathbf{a}_{ijnklm}^{(p)}(s)$ коэффициент векторларининг барча $a_{ijnklm}^{(p,q)}(s)$ компоненталарини s параметрнинг рационал функциялари сифатида аниқлаш имконини беради.

(2.22), (2.23) ва (2.28) лардан келиб чиқадики, кўчиш вектори ва кучланиш тензори компоненталари қаторларининг $u_{1n}^L(r,s)$, $u_{2n}^L(r,s)$, $v_{2n}^L(r,s)$, $\sigma_{rrn}^L(r,s)$, $\sigma_{r\theta n}^L(r,s)$ ва $\sigma_{mn}^L(r,s)$ коэффициентлари қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$u_p^L(r,s)=-\frac{1}{r^{p+2}s^p}\sum_{ijnklm=0}^{\infty}\Big[\gamma_1^{-p}\Big[R_{p1}(r\gamma_1 s)a_{ijnklm}^{(1,p)}(s)t^{r-1}+G_{p1}(r\gamma_1 s)C_p^{(1)}(s)xt^{-1}\Big]+$$
$$+\gamma_2^{-p}\Big[R_{p1}(r\gamma_2 s)a_{ijnklm}^{(2,p)}(s)u^{r-1}+G_{p1}(r\gamma_2 s)C_p^{(2)}(s)yu^{-1}\Big]+$$
$$+p(p+1)\gamma_3^{-p}\Big[R_{p0}(r\gamma_3 s)a_{ijnklm}^{(3,p)}(s)w^{r-1}+G_{p0}(r\gamma_3 s)S_p(s)zw^{-1}\Big]\Big]x^i y^j z^n t^{-k}u^{-l}w^{-m},$$

$$v_{1p}^L(r,s)=\frac{1}{r^{p+2}s^p}\sum_{ijnklm=0}^{\infty}\Big[\gamma_1^{-p}\Big[R_{p0}(r\gamma_1 s)a_{ijnklm}^{(1,p)}(s)t^{r-1}+G_{p0}(r\gamma_1 s)C_p^{(1)}(s)xt^{-1}\Big]+$$

$$+\gamma_2^{-p}\left[R_{p0}(r\gamma_2 s)a_{ijnklmn}^{(2,p)}(s)u^{r-1}+G_{p0}(r\gamma_2 s)C_p^{(2)}(s)yu^{-1}\right]+ \tag{2.30}$$

$$+\gamma_3^{-p}\left[R_{p3}(r\gamma_3 s)a_{ijnklm}^{(3,p)}(s)w^{r}+G_{p3}(r\gamma_3 s)S_p(s)zw^{-1}\right]\Big]x^i y^j z^n t^{-k}u^{-l}w^{-m},$$

$$u_{2p}^L(r,s)=-\frac{1}{r^{p+2}s^p}\sum_{ijnklm=0}^{\infty}\left[\frac{\beta_1}{\gamma_1^p}\left[R_{p1}(r\gamma_1 s)a_{ijnklm}^{(1,p)}(s)t^{r-1}+G_{p1}(r\gamma_1 s)C_p^{(1)}(s)xt^{-1}\right]+\right.$$

$$+\frac{\beta_2}{\gamma_2^p}\left[R_p(r\gamma_2 s)a_{ijnklm}^{(2,p)}(s)u^{r-1}+G_{p1}(r\gamma_2 s)C_p^{(2)}(s)yu^{-1}\right]+$$

$$\left.+\frac{p(p+1)\beta_3}{\gamma_3^p}\left[R_{p0}(r\gamma_3 s)a_{ijnklm}^{(3,p)}(s)w^{r-1}+G_{p0}(r\gamma_3 s)S_p(s)zw^{-1}\right]\right]x^i y^j z^n t^{-k}u^{-l}w^{-m},$$

$$v_{2p}^L(r,s)=\frac{1}{r^{p+2}s^p}\sum_{ijnklm=0}^{\infty}\left[\frac{\beta_1}{\gamma_1^p}\left[R_{p0}(r\gamma_1 s)a_{ijnklm}^{(1,p)}(s)t^{r-1}+G_{p0}(r\gamma_1 s)C_p^{(1)}(s)xt^{-1}\right]+\right.$$

$$+\frac{\beta_2}{\gamma_2^p}\left[R_{p0}(r\gamma_2 s)a_{ijnklm}^{(2,p)}(s)u^{r-1}+G_{p0}(r\gamma_2 s)C_p^{(2)}(s)yu^{-1}\right]+$$

$$\left.+\frac{\beta_3}{\gamma_3^p}\left[R_{p3}(r\gamma_3 s)a_{ijnklm}^{(3,p)}(s)w^{r-1}+G_{p3}(r\gamma_3 s)S_p(s)zw^{-1}\right]\right]x^i y^j z^n t^{-k}u^{-l}w^{-m};$$

$$\sigma_{rrp}^L(r,s)=\frac{1}{r^{p+3}s^p}\sum_{ijnklm=0}^{\infty}\left[\sum_{q=1}^{3}Q_{1qp}(s)a_{ijnklm}^{(q,p)}(s)e^{-r\gamma_q s}e^{\gamma_q s}+\right.$$

$$\left.+\sum_{q=1}^{2}J_{1qp}(s)C_p^{(q)}(s)e^{-2h\gamma_q s}e^{\gamma_q s}+J_{13p}(s)S_p(s)e^{-2h\gamma_3 s}e^{\gamma_3 s}\right]x^i y^j z^n t^{-k}u^{-l}w^{-m},$$

$$\sigma_{r\theta p}^L(r,s)=\frac{1}{r^{p+3}s^p}\sum_{ijnklm=0}^{\infty}\left[\sum_{q=1}^{3}Q_{2qp}(s)a_{ijnklm}^{(q,p)}(s)e^{-r\gamma_q s}e^{\gamma_q s}+\right. \tag{2.31}$$

$$\left.+\sum_{q=1}^{2}J_{2qp}(s)C_p^{(q)}(s)e^{-2h\gamma_q s}e^{\gamma_q s}+J_{23p}(s)S_p(s)e^{-2h\gamma_3 s}e^{\gamma_3 s}\right]x^i y^j z^n t^{-k}u^{-l}w^{-m},$$

$$\sigma_{mp}^L(r,s)=\frac{1}{r^{p+3}s^p}\sum_{ijnklm=0}^{\infty}\left[\sum_{q=1}^{3}Q_{3qp}(s)a_{ijnklm}^{(q,p)}(s)e^{-r\gamma_q s}e^{\gamma_q s}+\right.$$

$$\left.+\sum_{q=1}^{2}J_{3qp}(s)C_p^{(q)}(s)e^{-2h\gamma_q s}e^{\gamma_q s}+J_{33p}(s)S_p(s)e^{-2h\gamma_3 s}e^{\gamma_3 s}\right]x^i y^j z^n t^{-k}u^{-l}w^{-m}.$$

Бу ерда

$$Q_{1qp}(s) = (\eta_1 + \eta_2\beta_q)R_{p2}(s) - 2(\chi + \beta_q\eta_2)R_{p1}(s) - p(p+1)(\chi + \eta_2\beta_q)R_{p0}(s)$$

$$Q_{2qp}(s) = (\eta_1 - \chi)(R_{p1}(s) + R_{p0}(s)/2)$$

$$Q_{3qp}(s) = (\eta_2 + \beta_q\xi)(R_{p2}(s) - 2R_{p1}(s) - p(p+1)R_{p0}(s)), \quad (q = 1,2),$$

$$Q_{13p}(s) = p(p+1)(\eta_1 - \xi)(R_{p1}(s) + R_{p0}(s)), \qquad Q_{33p}(s) = 0,$$

$$Q_{23p}(s) = (\eta_1 - \xi)(R_{p2}(s) + (p+2)(p-1)R_{p0}(s))/2,$$

$$J_{kqp}(s) = Q_{kqp}(-s)e^{s} - Q_{kqp}(s)e^{-s}, \qquad (k = 1,3), q = 1,2$$

$$C_p^{(r)}(s) = \sum_{q=0}^{\infty} C_{pq}^{(r)}(s) a_{ijnklm}^{(r,q)}(s), \qquad S_p(s) = \sum_{q=1}^{\infty} S_{pq}(s) a_{ijnklm}^{(3,q)}(s).$$

Ғовак изотропик муҳитнинг ихтиёрий нуқтасидаги кўчиш вектори ва кучланиш тензори компонентаси учун

$$u_1^L(r,s) = u_{11}^L(r,s)\cos\theta, \quad v_1^L(r,s) = v_{11}^L(r,s)\cos\theta, \quad u_2^L(r,s) = u_{21}^L(r,s)\cos\theta$$

$$\sigma_{rr}^L(r,s) = \sigma_{rr1}^L(r,s)\cos\theta, \; \sigma_{r\theta}^L(r,s) = \sigma_{r\theta1}^L(r,s)\cos\theta, \; \sigma_m^L(r,s) = \sigma_{m1}^L(r,s)\cos\theta$$

ифодаларни оламиз.

Туташ муҳитда шар ҳаракатининг муҳим характеристикаларидан бири шар ҳаракатига атроф муҳитнинг қаршилик кучдир.

Бу кучни куйидаги

$$R_z^L = \frac{4\pi}{3}\left[\sigma_{rr1}^L + \sigma_{m1}^L - 2\sigma_{r\theta1}^L\right]_{r=1}$$

ёки

$$\begin{aligned} R_z^L(s) = \frac{4\pi}{3s} \sum_{ijnklm=0}^{\infty} \Bigg[& \sum_{q=1}^{3} Q_{1q1}(s) + Q_{3q1}(s) - 2Q_{2q1}(s) \; a_{ijnklm}^{(q,1)}(s) + \\ & + \sum_{q=1}^{2} J_{1q1}(s) + J_{3q1}(s) - 2J_{2q1}(s) \; C_1^{(q)}(s)e^{-2h\gamma_q s} + \\ & + J_{131}(s) + J_{331}(s) - 2J_{231}(s) \; S_1(s)e^{-2h\gamma_3 s} \Bigg]. \end{aligned} \tag{2.32}$$

формула аниқланади.

2.3. Оригиналга ўтиш

Оригиналга ўтиш, дастлаб, шуни таъкидлаш керакки, (2.32) даги ташқи чексиз қаторлар экспоненталар бўйича бўлиб, оригиналлар фазосида улар чекли вақт оралиғида чекли йиғиндига айланади.

Бундан ташқари, (2.19) қаторда чекли сондаги ҳадларни олинганда, (2.30), (2.31) ва (2.32) формулалардаги экспоненталар олдидаги $a_{ijnklm}^{(1,p)}(s)$ коэффициентлар ҳам s Лаплас интеграл алмаштиришлари параметрининг рационал функциялардир. Бу эса жуда содда ҳолда чегирмалар назарияси ёрдамида уларнинг оригиналларини топиш имконини беради.

Буни, мисол сифатида, масаланинг соддароқ $a_{100100}^{(1,p)}(s)$ коэффициент-ларининг оригиналларини топишда кўрсатамиз.

Бу коэффициентлар (2.29) рекуррент муносабатлардан аниқланади:

$$a_{100100}^{(1,p)}(s) = \sum_{q=0}^{\infty} C_{pq}^{(1)}(s) a_{000100}^{(1,q)}(s) - \frac{\Delta_{1p}(s)}{\Delta_p(s)} \sum_{q=0}^{\infty} C_{pq}^{(1)}(s) a_{000000}^{(1,q)}(s)$$

бу ерда

$$a_{000000}^{(1,p)}(s) = \frac{\Delta_p^{(1)}(s)}{\Delta_p(s)}, \qquad p \geq 0, \qquad a_{000100}^{(1,p)}(s) = 0, \ p \geq 0.$$

$a_{000000}^{(1,p)}(s)$ коэффициентлар ва $C_{pq}^{(1)}(s)$ функциялар чекли q ва p лар $(1 \leq q, p \ \leq \ N)$ учун (2.29) лардан келиб чиқадики, рационал функциялар-дир.

Демак, чекли q, p лар учун $a_{100100}^{(1,p)}(s)$ коэффициентлар

$$f_{2n}(s) = s^{l_n} M_n^2(s) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq n}}^{N} M_k(s)$$

махраж эга бўлган рационал функциялардир. Бу ерда l_n - натурал сонлар.

Шундай қилиб, (2.29) рекуррент муносабатлар ва (2.30), (2.31) формулалар кўрсатадики, экспоненталар олдидаги барча коэффициентлар куйидаги кўринишга эга:

$$F(s)=\frac{f_1(s)}{f_2(s)}, \tag{2.33}$$

бу ерда

$$f_2(s)=s^{l_*}\prod_{k=1}^{N}M_n^{l_k}(\eta s)$$

- кўпхад, l_* ва l_k - сонлар мос равишда махраж илдизларининг карралиги, $f_1(s)$ кўпхад тартиби $f_2(s)$ кўпхад тартибидан кичик.

Маълумки, $F(s)$ функция чекли сондаги полюслардан ташкари нуқталарда регулярдир, у ҳолда Жордан леммаси ва Коши теоремасига асосланиб, $F(s)$ функциянинг оригинали $f(t)$ ни

$$f(s)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{res}_{s=s_k}\frac{f_1(s)}{f_2(s)}e^{st}, \qquad f_2(s_k)=0 \tag{2.34}$$

формула ёрдамида хисоблаш мумкин [5, 15].

(2.34) дан фойдаланишда $f_2(s)$ кўпҳаднинг илдизлари маълум бўлиши керак. Уларни ҳар қандай мавжуд усуллар билан топиш мумкин.

(2.34) дан келиб чикадики, $F(s)$ функция ихтиёрий тартибли полюсларга эга бўлиши мумкин. Агар s_k - $F(s)$ функциянинг оддий полюси бўлса, у ҳолда бу нуқтада чегирма

$$\operatorname*{res}_{s=s_k}F(s)=\frac{f_1(s_k)}{f_2(s_k)}e^{s_k t}$$

формула ёрдамида топилади.

Айтайлик, энди s_k - $F(s)$ функциянинг m -инчи тартибли полюси. У ҳолда операцион ҳисобнинг теоремалари ва Лейбницнинг формуласидан [5, 15] фойдаланиб,

$$\operatorname*{res}_{s=s_k}F(s)e^{st}=\frac{1}{(m-1)!}\frac{d^{m-1}}{ds^{m-1}}\Big[(s-s_k)^m F(s)\Big]_{|s=s_k}= \tag{2.35}$$

$$=\sum_{k=0}^{m-1}\frac{t^k e^{s_k t}}{k!}G^{(m-1-k)}(s)_{|s=s_k}, \qquad G^{(j)}(s)=\frac{1}{j!}\Big[(s-s_k)^m F(s)\Big]^{(j)}$$

ни топамиз.

Оригиналга ўтиш алгоритмини туғаллаш учун $G(s)$ функциянинг ҳосилаларини ҳисоблашни

$$G^{(j)}(s) = \frac{1}{j!}\left[\frac{g_1(s)}{g_2(s)}\right]^{(j)}, \qquad \frac{g_1(s)}{g_2(s)} = (s - s_k)^m \frac{f_1(s)}{f_2(s)}, \qquad (2.36)$$

кетма-кетлик ёрдамида амалга ошириш керак. Бу ерда $g_1(s)$ ва $g_2(s)$ – кўпҳадлар.

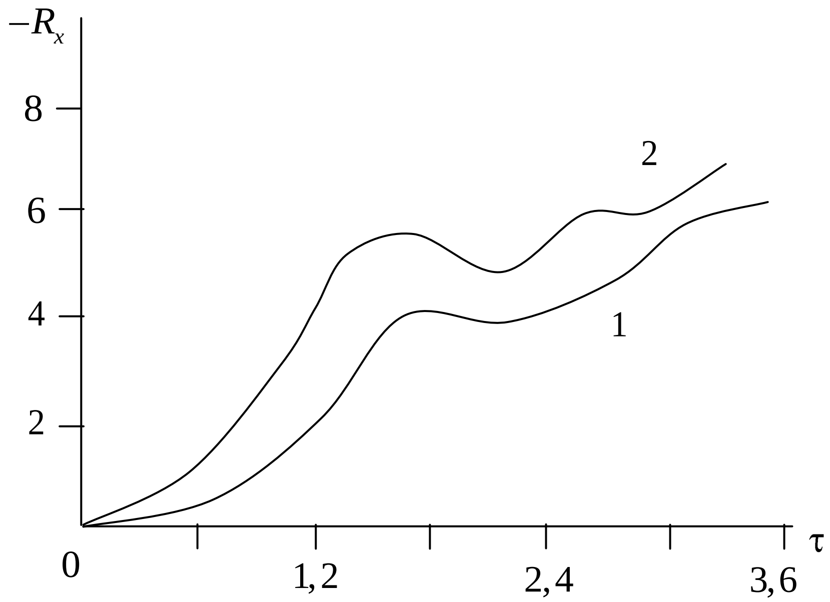
$G(s)$ функциянинг $s = s_k$ нуқтадаги ҳосилалари кетма-кетлигини Лейбниц формуласидан келиб чикадиган куйидаги рекуррент формулалар буйича ҳисоблаш мумкин:

$$G_j = \frac{G^{(j)}(s_k)}{j!} = \frac{g_{1j}}{g_{2j}} - \frac{1}{g_{2j}}\sum_{k=0}^{j-1} G_k g_{2,j-k}, \qquad g_{ij} = g_i^{(j)} \big/ j!, (i = 1,2). \qquad (2.37)$$

Бу оригиналга ўтиш алгоритми бўйича баъзи сонли экспериментларнинг натижаларини оламиз.

2.4. Сонли натижалар

Графикли расмда ғовак изотропик муҳитли ярим фазодаги абсолют қаттиқ шарнинг илгариланма ҳаракатига атроф муҳитнинг реакция кучи учун ўтказилган сонли экспериментларнинг натижалари тасвирланган. Бунда муҳит характеристикалари учун $\beta_1 = 0,8757$; $\beta_2 = -10,3287$; $\beta_3 = 0,0088$; $\gamma_1 = 1$; $\gamma_2 = 2,1662$; $\gamma_3 = 1,963$ қийматлар олинди ва шарнинг илгариланма ҳаракати қонуни $z(\tau) = \tau^2 H(\tau)$ функция орқали берилди. Бу ерда 1 чи график шарнинг муҳит билан эркин сирпанишига мос ($k = 0$), 2 чи график эса – шарнинг муҳит билан қаттиқ маҳкамланишига мос келади ($k = \infty$). $h = 1,5$. Текис чегаравий сирт ($z = 0$) – эркин деб, яъни унда кучланиш нолга тенг. График ўзгаришилар чегаравий текисликдан қайтган тўлқин ҳисобига мос келади.



4 - расм

2 боб бўйича хулосалар

Магистрлик диссертациясининг иккинчи бобида суюқлик билан тўйинган ғовак изотропик ярим фазода қаттиқ шарнинг берилган қонун бўйича ностационар илгариланма ҳаракати масаласининг математик модели, унга мос бошланғич чегаравий масаланинг ечиш алгоритми ишлаб чиқилди.

Қаттиқ шар ҳаракатига атроф муҳитнинг акс таъсирини ифодаловчи куч учун аниқ формула олинди. Унинг оригиналини топиш асосида сонли натижалар олинди. Бу сонли натижаларни таҳлили кўра атроф муҳитнинг реакция кучи графиги ўзгаришига чегаравий текисликнинг таъсири аниқланди.

Бу натижаларни ер ости иншоатларнинг ҳар хил зарбали тўлқинланинг таъсирига чидамлилигин ўрганишда ва уларни лойиҳалаштиришда ҳамда шу каби масалаларнинг сонли ечишда олинган натижаларни ишончлигини баҳолашда фойдаланиш мумкин.

3-БОБ
ҒОВАК ИЗОТРОПИК ЯРИМ ФАЗОДА ҚАТТИҚ ШАРНИНГ БЕРИЛГАН КУЧ ТАЪСИРИДА НОСТАЦИОНАР ИЛГАРИЛАНМА ҲАРАКАТИ

Магистрлик диссертациясининг бу бобида суюқлик билан тўйинган ғовак изотропик ярим фазода жойлашган симметрик массали абсолют қаттиқ шарнинг берилган куч таъсирида бўйича ностационар илгариланма ҳаракати ўрганилган бўлиб, шарнинг ҳаракатига атроф муҳитнинг реакция кучи ҳамда шар марказининг кўчиши учун аниқ формулалар олинган. Сонли натижалар асосида ярим фазонинг текис сиртининг таъсири аниқланган.

3.1. Масаланинг математик тасвири.

Айтайлик, ярим фазо ($z \geq 0$) суюқлик тўйинган ғовак изотропик муҳит билан тўлдирилган бўлсин ҳамда ярим фазонинг ($z = 0$) текис сиртидан h масофа(чуқурлик)да $R = 1$ ($h > 1$) ўлчовсиз радиусли, симметрик M массага эга бўлган абсолют қаттиқ шарнинг маркази жойлашган бўлсин ва унга берилган R_e куч таъсир қилади. Кучнинг таъсир чизиғи йўналиши Oz ўқининг қарама қарши йўналиши билан мос тушади. Бошланғич вақтда, яъни шарга куч таъсир этгунча шар ва атроф муҳит тинч ҳолатда бўлади.

Масаланинг ўқсимметриклигига кўра шар Oz ўқи бўйлаб, унинг қарама қарши йўналиши бўйича шар илгариланма ҳаракат қилади.

Шарнинг ўлчовсиз миқдорлардаги ҳаракат тенгламаси

$$\frac{4\pi}{3} m_0 \ddot{z} = R_e + R_z \,, \; z(0) = \dot{z}(0) = 0 \,, \qquad m_0 = \mathrm{M} \Big/ \left(\frac{4\pi}{3} \rho_* R^3 \right) \tag{3.1}$$

кўринишга эга. Бу ерда нуқта ўлчовсиз τ вақт бўйича ҳосилани билдиради; R_z- шар ҳаракатига қаршилик қилувчи атроф муҳитнинг ўлчовсиз реакция кучи.

Суюқлик билан тўйинган ғовак изотропик муҳитнинг ностационар нотинч ҳаракати бошланғич нуқтаси шар маркази бўлган (r, θ, ϑ) сферик координаталар системасида ҳамда O_2xyz декарт координаталар системасида қаралади.

Скаляр φ_1, φ_3 ва вектор потенциалнинг нолдан фарқли φ_2 компонента-ларига нисбатан ғовак изотропик муҳитнинг ҳаракати

$$\gamma_1^2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \tau^2} = \Delta \varphi_1, \qquad \gamma_2^2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \tau} = \Delta \varphi_2, \qquad \gamma_3^2 \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial \tau^2} = \Delta \varphi_3 - \frac{\varphi_3}{r^2 \sin^2 \theta}. \qquad (3.2)$$

тўлқин тенгламалари билан тасвирланади.

Ярим фазонинг чегаравий сиртида $(z = 0)$ ёки кучланиш мавжуд эмас, яъни

$$\sigma_{zz}\big|_{z=0} = 0, \qquad \sigma_{zx}\big|_{z=0} = 0, \qquad \sigma_m\big|_{z=0} = 0 \qquad (3.3)$$

ёки кўчиш векторининг компоненталари нолга тенг

$$u_{1z}\big|_{z=0} = 0, \qquad u_{1x}\big|_{z=0} = 0, \qquad u_{2z}\big|z = 0 \qquad (3.4)$$

Шар сиртида чегаравий шарт

$$u_1\big|_{r=1} = z(\tau)\cos\theta, \quad \sigma_{r\theta}\big|_{r=1} = k \;\; z(\tau)\sin\theta - v_1\big|_{r=1} \;\;, \qquad u_2\big|_{r=1} = z(\tau)\cos\theta \quad (3.5)$$

кўринишга эга.

Бу ерда коэффициент k чегаравий шартнинг икки турини қараш имконини беради: $k = 0$ да чегаравий сиртларнинг эркин сирпанишига эга бўламиз, $k = \infty$ да эса шар сирти муҳит билан қаттиқ маҳкамланган.

Бошланғич шартлар бир жинсли:

$$\varphi_1\big|_{\tau=0} = \dot{\varphi}_1\big|_{\tau=0} = \varphi_2\big|_{\tau=0} = \dot{\varphi}_2\big|_{\tau=0} = \varphi_3\big|_{\tau=0} = \dot{\varphi}_3\big|_{\tau=0} = 0. \qquad (3.6)$$

Чексизликда нотинчлик мавжуд эмас:

$$\lim_{r\to\infty} \varphi_1 = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} \varphi_2 = 0, \qquad \lim_{r\to\infty} \varphi_3 = 0. \qquad (3.7)$$

3.2. Масаланинг ечиш алгоритми

Юқоридаги (3.1)-(3.7) бошланғич чегаравий масалага ўлчовсиз τ вақт бўйича Лаплас интеграл алмаштиришларини қўллаймиз. Бу ҳолда Лаплас интеграл алмаштиришларининг тасвирлар фазосида бошланғич чегаравий масаланинг кўриниши (бу ерда ҳам L белги алмаштириш трансформантасини, s - эса параметрини билдиради):

$$\Delta\varphi_1^L - \gamma_1^2 s^2 \varphi_1^L = 0,\ \Delta\varphi_2^L - \gamma_2^2 s^2 \varphi_2^L = 0,\ \Delta\varphi_3^L - \frac{\varphi_3^L}{r^2 \sin^2\theta} - \gamma_3^2 s^2 \varphi_3^L = 0, \quad (3.8)$$

$$\sigma_{zz}^L\Big|_{z=0} = 0, \qquad \sigma_{zx}^L\Big|_{z=0} = 0, \qquad \sigma_m^L\Big|_{z=0} = 0 \qquad (3.9)$$

$$u_{1z}^L\Big|_{z=0} = 0, \qquad u_{1x}^L\Big|_{z=0} = 0, \qquad U_{2z}^L\Big|_{z=0} = 0 \qquad (3.10)$$

$$u_1^L\Big|_{r=1} = z^L(s)\cos\theta,\ \sigma_{r\theta}^L\Big|_{r=1} = k\ \ z^L(s)\sin\theta - v_1^L\Big|_{r=1}\ ,U_2^L\Big|_{r=1} = z^L(s)\cos\theta, \quad (3.11)$$

$$\lim_{r\to\infty}\varphi_1^L = 0, \qquad \lim_{r\to\infty}\varphi_2^L = 0, \qquad \lim_{r\to\infty}\varphi_3^L = 0. \qquad (3.12)$$

Чексизликда тўлқиннинг сўнишини, яъни (3.12) шартни эътиборга олиб, (3.8) тенгламаларининг ечимларини ифодаларини Лаплас интеграл алмаштиришларининг тасвирлар фазосида (2.12) кўринишда ёзиб оламиз.

Ярим фазонинг $z=0$ чегарасида r, θ ва r_1, θ_1 координаталарнинг

$$r\big|_{z=0} = r_1\big|_{z=0}, \qquad \theta\big|_{z=0} + \theta_1\big|_{z=0} = \pi \qquad (3.13)$$

боғланишини ҳамда Лежандра ва Гегенбауэра кўпҳадларининг хоссаларини [15, 19]

$$(-1)^n P_n(\cos\theta)\Big|_{z=0} = P_n(\cos\theta_1)\Big|_{z=0},\ (-1)^n C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta)\Big|_{z=0} = C_{n-1}^{3/2}(\cos\theta_1)\Big|_{z=0}, \quad (3.14)$$

хоссаларидан фойдаланиб, $P_n(\cos\theta)$ кўпҳадларнинг (1.37) хоссалари, $K_{n+1/2}(x)$ функция (1.43) хоссаларига кўра ҳамда (3.9) ёки (3.10) чегаравий шартларни қанаотлантириб ихтиёрий номаълум функциялар ўртасида:

$$C_n^L(s) = \pm(-1)^n \tilde{A}_n^L(s), \qquad D_n^L(s) = \pm(-1)^n \tilde{B}_n^L(s) \qquad (3.15)$$

боғланишларни оламиз. Бу ерда юқори ишора қаттиқ сиртга мос келади, пастги ишора эса эркин сиртга мос келади.

Бу ерда ҳам олдинги бобдаги масала каби кўчиш вектори ва кучланиш тензори компоненталарининг тасвирлари (2.20), (2.21) формулалар билан аниқланади.

Ихтиёрий $n \geq 0$ учун θ бурчакни ажратилишидан сўнг, шар сиртида қатор коэффициентларига нисбатан куйидаги чегаравий шартларга келамиз:

$$u_{11}^L\Big|_{r=1} = z^L(s), \qquad \sigma_{r\theta 1}^L\Big|_{r=1} = k\ v_{11}^L\Big|_{r=1} + z^L(s)\ , \qquad u_{21}^L\Big|_{r=1} = z^L(s) \tag{3.16}$$

$$u_{1n}^L\Big|_{r=1} = 0, \qquad \sigma_{r\theta n}^L\Big|_{r=1} = k\, v_{1n}^L\Big|_{r=1}, \qquad u_{2n}^L\Big|_{r=1} = 0, \quad (n \neq 1). \tag{3.17}$$

(2.20) нинг биринчи ифодаси ва (3.16) чегаравий шартларнинг биринчисидан $z^L(s)$ учун куйидаги

$$\begin{aligned} z^L(s) = -\frac{1}{s}\Bigg[\gamma_1^{-1}\Bigg[R_{11}(\gamma_1 s)A_{11}^L(s)e^{-\gamma_1 s} + G_{11}(\gamma_1 s)\sum_{p=0}^{\infty} C_{1p}^{(1)}(s)A_{1p}^L(s)e^{-2h\gamma_1 s}\Bigg] + \\ +\gamma_2^{-1}\Bigg[R_{11}(\gamma_2 s)A_{21}^L(s)e^{-\gamma_2 s} + G_{11}(\gamma_2 s)\sum_{p=0}^{\infty} C_{1p}^{(2)}(s)A_{2p}^L(s)e^{-2h\gamma_2 s}\Bigg] + \\ +2\gamma_3^{-1}\Bigg[R_{10}(\gamma_3 s)A_{31}^L(s)e^{-\gamma_3 s} + G_{10}(\gamma_3 s)\sum_{p=1}^{\infty} S_{1p}(s)A_{3p}^L(s)e^{-2h\gamma_3 s}\Bigg]\Bigg] \end{aligned} \tag{3.18}$$

ифодани оламиз.

Лаплас интгерал алмаштиришларининг тасвирлар фазосида шарининг ҳаракат тенгламаси

$$\frac{4\pi}{3} m_0 s^2 z^L = R_e^L + R_z^L \tag{3.19}$$

кўринишга эга бўлади. Бу ерда атроф муҳитнинг реакция R_z^L кучи

$$R_z^L = \frac{4\pi}{3}\left[\sigma_{rr1}^L + \sigma_{m1}^L - 2\sigma_{r\theta 1}^L\right]_{r=1}$$

ёки

$$R_z^L(s)=\frac{4\pi}{3s}\left[\sum_{i=1}^{3}\; Q_{1i1}(s)+Q_{3i1}(s)-2Q_{2i1}(s)\;\; A_{i1}^L(s)e^{-\gamma_i s}+\right.$$

$$+\sum_{i=1}^{2}\; J_{1i1}(s)+J_{3i1}(s)-2J_{2i1}(s)\;\; \sum_{p=0}^{\infty}C_{1p}^{(i)}(s)A_{ip}^L(s)e^{-2h\gamma_i s}+ \qquad (3.20)$$

$$\left.+\;\; J_{131}(s)+J_{331}(s)-2J_{231}(s)\;\; \sum_{p=1}^{\infty}S_{1p}(s)A_{3p}^L(s)e^{-2h\gamma_3 s}\right]$$

формула билан аниқланади.

$z^L(s)$ нинг (3.18) ифодасини (3.16) ва (3.17) чегаравий шартларга ҳамда уни ва R_z^L нинг (3.20) ифодасини (3.19) тенгламага қўйиб, баъзи элементар амлаштиришлардан сўнг $A_{in}^L(s)$ номаълум функцияларга нисбатан чексиз чизиқли алгебраик тенгламалар системасини оламиз ва уни учта матрицали тенгламалар системаси кўринишида ёзиб қўямиз:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{M}^{(1)}\mathbf{A}_1 t^2uw+\mathbf{F}^{(1)}\mathbf{A}_1 xuw-\mathbf{F}^{(2)}\mathbf{A}_1 xt^2uw+\mathbf{M}^{(2)}\mathbf{A}_2 tu^2w+\mathbf{F}^{(3)}\mathbf{A}_2 ytw-\\
&-\mathbf{F}^{(4)}\mathbf{A}_2 ytu^2w+\mathbf{M}^{(3)}\mathbf{A}_3 tuw^2+\mathbf{F}^{(5)}\mathbf{A}_3 ztu-\mathbf{F}^{(6)}\mathbf{A}_3 z^2tuw^2=\mathbf{k}^{(1)}tuw,\\
&\mathbf{N}^{(1)}\mathbf{A}_1 t^2uw+\mathbf{H}^{(1)}\mathbf{A}_1 xuw-\mathbf{H}^{(2)}\mathbf{A}_1 xt^2uw+\mathbf{N}^{(2)}\mathbf{A}_2 tu^2w+\mathbf{H}^{(3)}\mathbf{A}_2 ytw-\\
&-\mathbf{H}^{(4)}\mathbf{A}_2 ytu^2w+\mathbf{N}^{(3)}\mathbf{A}_3 tuw^2+\mathbf{H}^{(5)}\mathbf{A}_3 ztu-\mathbf{H}^{(6)}\mathbf{A}_3 z^2tuw^2=\mathbf{k}^{(2)}tuw, \qquad (3.21)\\
&\mathbf{L}^{(1)}\mathbf{A}_1 t^2uw+\mathbf{T}^{(1)}\mathbf{A}_1 xuw\mathbf{T}^{(2)}\mathbf{A}_1 xt^2uw+\mathbf{L}^{(2)}\mathbf{A}_2 tu^2w+\mathbf{T}^{(3)}\mathbf{A}_2 ytw-\\
&-\mathbf{T}^{(4)}\mathbf{A}_2 ytu^2w+\mathbf{L}^{(3)}\mathbf{A}_3 tuw^2+\mathbf{T}^{(5)}\mathbf{A}_3 ztu-\mathbf{T}^{(6)}\mathbf{A}_3 z^2tuw^2=\mathbf{k}^{(3)}tuw,\\
&x=e^{-2h\gamma_1 s},\quad y=e^{-2h\gamma_2 s},\quad z=e^{-2h\gamma_3 s},\quad t=e^{-\gamma_1 s},\quad u=e^{-\gamma_2 s},\quad w=e^{-\gamma_3 s}.
\end{aligned}$$

Бу ерда $\mathbf{F}^{(k)}$, $\mathbf{H}^{(k)}$ ва $\mathbf{T}^{(k)}$ - лар элементлари $F_{np}^{(k)}(s)$, $H_{np}^{(k)}(s)$ ва $T_{np}^{(k)}(s)$ $(k=\overline{1,6})$ бўлган чексиз матрицалар; $\mathbf{M}^{(i)}$, $\mathbf{N}^{(i)}$ ва $\mathbf{L}^{(i)}$ - лар эса элементлари мос равишда $M_n^{(i)}(s)$, $N_n^{(i)}(s)$ ва $L_n^{(i)}(s)$ бўлган чексиз диагонал матрицалар; $\mathbf{k}^{(i)}$ - элементлари $k_n^{(i)}(s)$ лар маълум бўлган чексиз векторлар; $\mathbf{A}_i$ – элементлари $A_{in}^L(s)$, $(i=1,3)$ номаълум бўлган чексиз векторлар.

(3.21) системадаги матрица ва векторларнинг компоненталари куйидаги кўринишга эса:

$n=1$ бўлганда

$$M_1^{(1)}(s)=\gamma_1^{-1}m_0 s^2 R_{11}(\gamma_1 s)+Q_{111}(s)+Q_{311}(s)-2Q_{211}(s),$$

$$M_1^{(2)}(s)=\gamma_2^{-1}m_0 s^2 R_{11}(\gamma_2 s)+Q_{121}(s)+Q_{321}(s)-2Q_{221}(s)$$

$$M_1^{(3)}(s)=2\gamma_3^{-1}m_0 s^2 R_{10}(\gamma_3 s)+Q_{131}(s)+Q_{331}(s)-2Q_{231}(s)$$

$$F_{1p}^{(1)}(s)=M_1^{(1)}(-s)C_{1p}^{(1)}(s),\qquad F_{1p}^{(2)}(s)=M_1^{(1)}(s)C_{1p}^{(1)}(s),\qquad (3.22)$$

$$F_{1p}^{(3)}(s)=M_1^{(2)}(-s)C_{1p}^{(2)}(s),\qquad F_{1p}^{(4)}(s)=M_1^{(2)}(s)C_{1p}^{(2)}(s),$$

$$F_{1p}^{(5)}(s)=M_1^{(3)}(-s)S_{1p}(s),\qquad F_{1p}^{(6)}(s)=M_1^{(3)}(s)S_{1p}(s),$$

$$N_1^{(1)}(s)=Q_{211}(s)+k\gamma_1^{-1}\ \ R_{11}(\gamma_1 s)-R_{10}(\gamma_1 s)$$

$$N_1^{(2)}(s)=Q_{211}(s)+k\gamma_2^{-1}\ \ R_{11}(\gamma_2 s)-R_{10}(\gamma_2 s)$$

$$N_1^{(3)}(s)=Q_{231}(s)+k\gamma_3^{-1}\ \ R_{11}(\gamma_3 s)-R_{10}(\gamma_3 s)\ \ ,$$

$$H_{1p}^{(1)}(s)=N_1^{(1)}(-s)C_{1p}^{(1)}(s),\qquad H_{1p}^{(2)}(s)=N_1^{(1)}(s)C_{1p}^{(1)}(s),$$

$$H_{1p}^{(3)}(s)=N_1^{(2)}(-s)C_{1p}^{(2)}(s),\qquad H_{1p}^{(4)}(s)=N_1^{(2)}(s)C_{1p}^{(2)}(s),$$

$$H_{1p}^{(5)}(s)=N_1^{(3)}(-s)S_{1p}(s),\qquad H_{1p}^{(6)}(s)=N_1^{(3)}(s)S_{1p}(s),$$

$$L_1^{(1)}(s)=\gamma_1^{-1}(1-\beta_1)R_{11}(\gamma_1 s),\qquad L_1^{(2)}(s)=\gamma_2^{-1}(1-\beta_2)R_{11}(\gamma_2 s),$$

$$L_1^{(3)}(s)=2\gamma_3^{-1}(1-\beta_3)R_{10}(\gamma_3 s),$$

$$T_{1p}^{(1)}(s)=L_1^{(1)}(-s)C_{1p}^{(1)}(s),\qquad T_{1p}^{(2)}(s)=L_1^{(1)}(s)C_{1p}^{(1)}(s),$$

$$T_{1p}^{(3)}(s)=L_1^{(2)}(-s)C_{1p}^{(2)}(s),\qquad T_{1p}^{(4)}(s)=L_1^{(2)}(s)C_{1p}^{(2)}(s),$$

$$T_{1p}^{(5)}(s)=L_1^{(3)}(-s)S_{1p}(s),\qquad T_{1p}^{(6)}(s)=L_1^{(3)}(s)S_{1p}(s),$$

$$k_1^{(1)}(s)=-\frac{3s}{4\pi}R_e^L(s),\qquad k_2^{(1)}(s)=0,\qquad k_3^{(1)}(s)=0,$$

$n\neq 1$ бўлганда эса бу коэффициентлар

$$M_n^{(1)}(s)=\gamma_1^{-n}R_{n1}(\gamma_1 s),\qquad M_n^{(2)}(s)=\gamma_2^{-n}R_{n1}(\gamma_2 s),$$

$$M_n^{(3)}(s)=\frac{n(n+1)}{\gamma_3^n}R_{n0}(\gamma_3 s),$$

$$F_{np}^{(1)}(s)=M_n^{(1)}(-s)C_{np}^{(1)}(s)\,, \qquad F_{np}^{(2)}(s)=M_n^{(1)}(s)C_{np}^{(1)}(s)\,, \qquad (3.23)$$

$$F_{np}^{(3)}(s)=M_n^{(2)}(-s)C_{np}^{(2)}(s)\,, \qquad F_{np}^{(4)}(s)=M_n^{(2)}(s)C_{np}^{(2)}(s)\,,$$

$$F_{np}^{(5)}(s)=M_n^{(3)}(-s)S_{np}(s)\,, \qquad F_{np}^{(6)}(s)=M_n^{(3)}(s)S_{np}(s)\,,$$

$$N_n^{(1)}(s)=Q_{21n}(s)-k\gamma_1^{-n}R_{n0}(\gamma_1 s)\,, \qquad N_n^{(2)}(s)=Q_{22n}(s)-k\gamma_2^{-n}R_{n0}(\gamma_2 s)$$

$$N_n^{(1)}(s)=Q_{23n}(s)-k\gamma_3^{-n}R_{n0}(\gamma_3 s)\,,$$

$$H_{np}^{(1)}(s)=N_n^{(1)}(-s)C_{np}^{(1)}(s)\,, \qquad H_{np}^{(2)}(s)=N_n^{(1)}(s)C_{np}^{(1)}(s)\,,$$

$$H_{np}^{(3)}(s)=N_n^{(2)}(-s)C_{np}^{(2)}(s)\,, \qquad H_{np}^{(4)}(s)=N_n^{(2)}(s)C_{np}^{(2)}(s)\,,$$

$$H_{np}^{(5)}(s)=N_n^{(3)}(-s)S_{np}(s)\,, \qquad H_{np}^{(6)}(s)=N_n^{(3)}(s)S_{np}(s)\,,$$

$$L_n^{(1)}(s)=\gamma_1^{-n}\beta_1 R_{n1}(\gamma_1 s)\,, \quad L_n^{(2)}(s)=\gamma_2^{-n}\beta_2 R_{n1}(\gamma_2 s)\,,\ L_n^{(3)}(s)=\frac{n(n+1)}{\gamma_3^n}\beta_3 R_{n0}(\gamma_3 s)\,,$$

$$T_{np}^{(1)}(s)=L_n^{(1)}(-s)C_{np}^{(1)}(s)\,, \qquad T_{np}^{(2)}(s)=L_n^{(1)}(s)C_{np}^{(1)}(s)\,,$$

$$T_{np}^{(3)}(s)=L_n^{(2)}(-s)C_{np}^{(2)}(s)\,, \qquad T_{np}^{(4)}(s)=L_n^{(2)}(s)C_{np}^{(2)}(s)\,,$$

$$T_{np}^{(5)}(s)=L_n^{(3)}(-s)S_{np}(s)\,, \qquad T_{np}^{(6)}(s)=L_n^{(3)}(s)S_{np}(s)\,,$$

$$k_1^{(n)}(s)=0\,,\quad k_2^{(n)}(s)=0\,, \qquad k_3^{(n)}(s)=0$$

кўринишга эга бўлади.

(3.21) системанинг ечимини x, y, z, t, u, v экспоненталарнинг чексиз қаторларнинг (2.26) кўринишида излаймиз ва уни системага қўйиб, (2.27) каби бошланғич ва рекуррент муносабатларни оламиз. Улар $a_{ijnklm}^{(p,q)}(s)$, $b_{ijnklm}^{(p,q)}(s)$ коэффициентларни s параметрнинг рационал функциялари кўринишида аниқлаш имконини беради. Бу эса унинг ҳамда кўчиш ва кучланиш тензори компоненталарининг оригиналларини қолдиқлар назарияси ёрдамида осон топишни таъминлайди.

Кейин (2.26) система ечимини (3.18) га қўйиб, $z^L(s)$ шар маркази кўчиши учун

$$z^L(s) = -\frac{1}{s}\sum_{ijnklm=0}^{\infty}\Big[\gamma_1^{-1}\Big[R_{11}(\gamma_1 s)a_{ijnklm}^{(1,1)}(s) + G_{11}(\gamma_1 s)C_1^{(1)}(s)xt^{-1}\Big] +$$

$$+\gamma_2^{-1}\Big[R_{11}(\gamma_2 s)a_{ijnklm}^{(2,1)}(s) + G_{11}(\gamma_2 s)C_1^{(2)}(s)yu^{-1}\Big] +$$

$$+2\gamma_3^{-1}\Big[R_{10}(\gamma_3 s)a_{ijnklm}^{(3,1)}(s) + G_{10}(\gamma_3 s)S_p(s)zw^{-1}\Big]\Big]x^i y^j z^n t^{-k} u^{-l} w^{-m}$$

ва ечим яна (3.20) га қўйиб формулани шар ҳаракатига атроф муҳитнинг реакция R_z^L кучи

$$R_z^L(s) = \frac{4\pi}{3s}\sum_{ijnklm=0}^{\infty}\left[\sum_{q=1}^{3} Q_{1q1}(s) + Q_{3q1}(s) - 2Q_{2q1}(s)\ \ a_{ijnklm}^{(q,1)}(s) + \right.$$

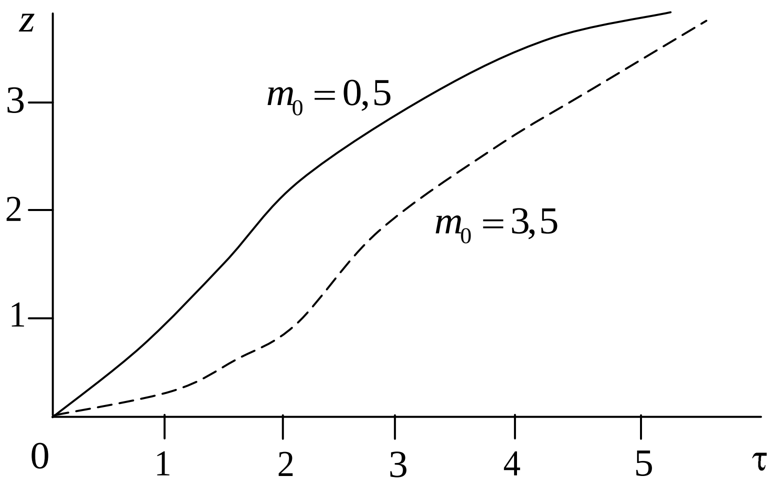
$$+\sum_{q=1}^{2} J_{1q1}(s) + J_{3q1}(s) - 2J_{2q1}(s)\ \ C_1^{(q)}(s)e^{-2h\gamma_q s} +$$

$$\left. +\ J_{131}(s) + J_{331}(s) - 2J_{231}(s)\ \ S_1(s)e^{-2h\gamma_3 s}\right]$$

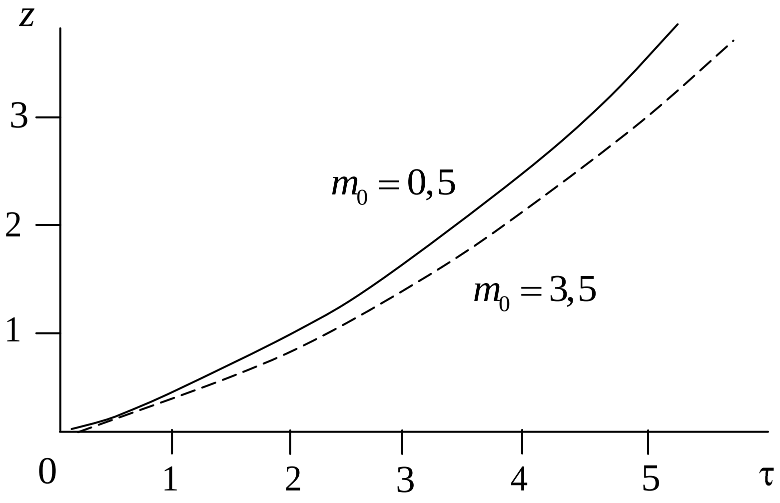
формулани оламиз.

3.3. Сонли натижалар

Графикли 5 ва 6 расмларда ғовак-изотропик муҳитли ярим фазодаги абсолют қаттиқ шарнинг илгариланма ҳаракатида шар марказини кўчиши учун ўтказилган сонли экспериментларнинг натижалари тасвирланган. Бунда муҳит характеристикалари учун $\beta_1 = 0{,}8757$; $\beta_2 = -10{,}3287$; $\beta_3 = 0{,}0088$; $\gamma_1 = 1$; $\gamma_2 = 2{,}1662$; $\gamma_3 = 1{,}963$ қийматлар олинди ва шарнинг илгариланма ҳаракати қонуни $z(\tau) = \tau^2 H(\tau)$ функция орқали берилди. Бу ерда 5 расмда графиклар шарнинг муҳит билан эркин сирпанишига мос ($k = 0$), 6 расмда графиклар эса – шарнинг муҳит билан қаттиқ маҳкамланишига мос келади ($k = \infty$) . $h = 1{,}5$. Текис чегаравий сирт ($z = 0$) – эркин деб, яъни унда кучланиш нолга тенг.



5 - расм



6 расм.

3 боб бўйича хулосалар

Магистрлик диссертациясининг учинчи бобида суюқлик билан тўйинган ғовак изотропик ярим фазода қаттиқ шарнинг берилган куч таъсирида ностационар илгариланма ҳаракати натижасида юзага келган тўлқин жараёнларининг математик ифодаси, унинг ечиш алгоритми ишлаб чиқилди.

Абсолют қаттиқ шар маркази кўчиши ва шар ҳаракатига атроф муҳитнтнг акс таъсир этувчи кучи учун формулалар олинди. Ғовак-изотропик муҳитли ярим фазодаги абсолют қаттиқ шарнинг илгариланма ҳаракатида шар марказининг кўчиши учун ўтказилган сонли экспериментларнинг натижалари асосида чегаравий текисликнинг таъсири аниқланди.

Бу натижаларни сейсмология ва геофизиканинг амалий масалаларини ечишда ҳамда ер ости иншоатларини лойиҳалаштиришда қўллаш мумкин.

ХУЛОСА

Диссертация ишини бажаришда олинган натижалар куйидагилардан иборат:

1. Ушбу илмий тадқиқот ишида ўрганиш учун олинган ғовак-изотропик муҳитли ярим фазода абсолют қаттиқ шарнинг берилган қонун ва берилган куч таъсида ностациоар илгариланма ҳаракати натижасида юзага келадиган тўлқин жараёнларига мос бошланғич-чегаравий масалалар қўйилди.

2. Ғовак-изотропик муҳитнинг сферик сирт ва текислик билан чегараланган икки боғламли соҳаси учун юқоридаги бошланғич чегаравий масалаларнинг назарий ва амалий аҳамиятга эга бўлган аналитик ечими олинди.

3. Келтирилган масала учун аналитик метод ишлаб чиқилган. Натижада масала Лаплас интеграл алмаштиришларининг тасвирлар фазосида чизикли алгебраик тенгламаларнинг чексиз системасига келтирилди. Бу чексиз система ечими экспоненталар бўйича қаторлар кўринишида изланиб, рекуррент муносабатлар олинган. Бу рекуррент формулалар чексиз системани ечишда редукция методидан фойдаланиаслик ва қаторларининг коэффициентларни Лаплас интеграл алмаштиршиларининг параметрининг рационал функциялари кўринишида аниқлаш имконини беради. Бу эса оригиналга ўтишни чегирмалар назарияси ёрдамида амалга ошириш имконин берди.

4. Ишлаб чиқилган аналитик метод асосида сонли натижалар учун алго-ритм тузилди ва сонли экспериментлар ўтказилди. Бу натижалар графиклар кўринишида келтирилган.

5. Олинган натижаларни ер ости иншоатларнинг мустаҳкамлигини ўрганишда ва уларни лойиҳалаштиришда ҳамда сейсмология ва геофизиканинг амалий масалаларини ечишда фойдаланиш мумкин.

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТЛАР РЎЙХАТИ

1. Бейтмен Г., Эрдейн А. Высшие трансцендентные функции, функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1974. – 295 с.

2. Био М.А. Теория деформаций пористого вязкоупругого анизотропного твердого тела. Т-Механика, сб. пер. и обзор иностр. Лит-ры, М., 1957, №5, С. 95-111.

3. Ватсон Г.Н. Теория бесселевых функций. –М.: ИЛ, 1949. Т.1. – 800 с.

4. Вестяк А.В., Тарлаковский Д.В., Шукуров А.М. Нестационарные волны сдвига в упругом полупространстве со сферическим включением // Матер. X Междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплош. сред». Т. 1. - М.: Изд-во МАИ, 2004. – С. 13-14.

5. Горшков А.Г., Тарлаковский Д.В. Нестационарная аэрогидроупругость тел сферической формы. – М.: Наука. Гл. ред. физ.–мат. лит, 1990. – 264 с.

6. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физ.-матгиз, 1962. – 1108 с.

7. Григолюк Э.И., Горшков А.Г. Нестационарная гидроупругость оболочек. – Л.: Судостроение, 1974. – 207 с.

8. Гузь А.И., Кубенко В.Д. Методы расчета оболочек, т. 5. –Теория нестационарной аэрогидроупругости оболочек. – Киев: Наукова думка, 1983. – 400 с.

9. Замишляев Б. В., Яковлев Ю.С. Динамические нагрузки при подводном взрыве. Л.: Судостроение, 1967, - 387 с.

10. Иванов Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. – Минск: Наука и техника, 1968. – 584 с.

11. Кочин Н.С., Кибель И.А., Розе Н.В. Теоретическая гидромеханика. В 2 ч. - М.: Физматгиз, 1963. – Ч. 1. 583 с.; Ч. 2. 727 с.

12. Кубенко В.Д. Нестационарное взаимодействие элементов конструкций со средой. - Киев: Наукова думка. 1979. – 184 с.

13. Кузнецов Д.С. Специальные функции. – М.: Высшая школа, 1985. – 423 с.

14. Наримов Ш.Н. Волновые процессы в насыщенных пористых средах.- Ташкент: изд-во «Мехнат», 1988.- 3.4 с.

15. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1987. – 688 с.

16. Саатов Я.У. Плоские задачи механики упруго-пористых сред. Ташкент, Фан, 1975. - 251 с.

17. Седов Л.И. Механика сплошной среды: В 2-х т. – Изд. 4-ое, испр. и доп. – М.: Наука, 1984.

18. Слепян Л.И. Нестационарные упругие волны.- Л.:Судостроение, 1972. -374 с.

19. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами // Под ред. М.Абрамовица, И.Стиган. – М.: Наука, 1979. – 832 с.

20. Старовойтов Э.И., Тарлаковский Д.В., Шайкулов Ш.К., Шукуров А.М. Нестационарное поступательное движение жесткого шара в полупространстве, занятом насыщенной жидкостью упруго-пористой средой // Матер. XVI Междунар. симп. «Динам. и технолог. пробл. мех. констр. и сплошных сред.». – Т. 2. – Ч.: ГУП «ИПК «Чувашия», 2010, С. 100.

21. Филиппов И.Г., Егорычев О.А. Нестационарные колебания и дифракция волн в акустических и упругих средах. – М.: Машиностроение, 1977. – 203 с.

22. Шукуров А.М. Нестационарные колебания упругого полупространства при вращении жесткого шара // Проблемы механики АН РУз, №4, 2003, С. 49-52.

23. Шукуров А.М., Шовалиев Б.Х., Норова С.К. Алгоритм решения задачи о нестационарном вращении шара в упругом слое // Вестник КаршиГУ, № 3, 2010, С.3-10.

ИЛОВАЛАР

Иловалар қисмида амалиётда жуда кўп фойдаланиладиган ва асосий масаланинг ечиш алгоритмини ишлаб чиқиш учун зарур бўлган ва деформацияланувчи қаттиқ жисмлар механикасининг ностационар масалаларини ечишда кўп ишлатиладиган Лаплас интеграл алмаштиришлари, оргиналга ўтиш усуллари, Қўшиш теоремалари келтирилган.

А. Лаплас интеграл алмаштиришлари ва унинг хоссалари

Деформацияланувчи қаттиқ жисмлар механикасининг динамик масалаларини ечиш учун жуда куп математик усулларни куллаш мумкин. Бу усулларга мисол сифатида интеграл алмаштиришлар усули, ўзгарувчиларни ажратиш усули, ясси тўлқинлар усули, Вольтерр ва Адамарнинг умумлашган усулларидан бирортасини танлаб олиш динамик масалани куйилишининг физик маъноси билан боғлиқ. Кейинги бир неча ўн йилликлар ичида математик физика масалаларни, механика, техниканинг динамик масалаларини ечиш учун интеграл алмаштиришларга асосланган операцион методлар жуда тез-тез ва муваффақиятли қўлланила бошланди [6, 12, 15].

Масалан, Лаплас интеграл алмаштиришлари шундай методлардан бири бўлиб, бу усулни тўртта этапда амалга ошириш мумкин.

1. Номаълум оригинал функциянинг $F(p)$ тасвирга ўтиш.

2. $F(p)$ тасвирга ўтишда унга мос $f(t)$ оригинал устида баъзи операция алмаштиришни бажариш алмаштиришдан сўнг $F(p)$ функцияга нисбатан содда тенглама оддий дифференциал тенглама билан алмаштирилади ва ҳокоза.

3. Тасвирлар фазосида олинган тенглама $F(p)$ га нисбатан ечилади.

4. Олинган $F(p)$ тасвирнинг оригинал $f(t)$ га ўтилади. Бу изланаётган функция бўлади. Масалалар шу усулда ечилади. Асосий математик қийинчилик охирги этапда, яъни топилган $F(p)$ тасвир ифодаларидан оригиналга ўтишдир. Оригинал ўтишни бир неча хил усулда амалга ошириш мумкин.

а) сонли усуллар ёрдамида

в) қолдиқлар назарияси ёрдамида

г) қаторга ёйиш усули ёрдамида.

Айтайлик, $0 \le t < \infty$ ярим ўқида ҳар қандай чекли [a,b] ораликда ўзининг абсолют қийматлари билан интегралланувчи $f(t)$ функция берилган бўлсин. $p = y + iq$ комплекс параметр киритамиз ва $f(t)$ функциянинг Лаплас интеграл алмаштиришини

$$F(p) = \int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt \tag{A.1}$$

тенглик билан аниқлаймиз.

Агар p параметрнинг қиймати учун (A.1) интеграл яқинлашувчи бўлса, $f(t)$ функцияга Лаплас интеграл алмаштиришни қўллаш мумкин. $f(t)$ функцияга оригинал дейилади, агар у куйидаги хоссаларга эга бўлса;

1. $f(t)$ функция $0 \le t < \infty$ ўқида аниқланган ва чекли ораликда абсолют қиймати билан интегралланувчи.

2. $t < 0$ да $f(t)$ функция нолга тенг.

3. p параметрнинг хеч бўлмаганда битта кийматида $f(t)$ функцияга Лаплас алмаштиришларини қўллаш мумкин. $F(p)$ функцияга $f(t)$ функциянинг Лаплас интеграл алмаштиришлари бўйича тасвири дейилади.

Лаплас интеграл алмаштиришларининг асосий хоссалари.

1. Чизиқлилик хоссаси.

$$f(t)=\sum_{i=1}^{n} f_i(t), \qquad f_i(t)\div F_i(p) \text{ ва } f(t)\div F(p)$$

бўлса, у ҳолда

$$F(p)=\sum_{i=1}^{n} F_i(p)$$

бўлади.

2. Эркли ўзгарувчининг масштабини ўзгартириш.

Айтайлик, $f(t)\div F(p)$ бўлсин, ўзгармас $\lambda>0$ бўлганда $f(\lambda t)$ нинг тасвири аниклансин.

$$L\ \ f(\lambda t)\ =\int_0^\infty e^{-pt} f(\lambda t)dt=\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\frac{p}{\lambda}(\lambda t)} f(\lambda t)d\lambda t$$

$\lambda t=z$ десак,

$$L\ \ f(z)\ =\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\frac{p}{\lambda}z} f(z)dz$$

ёки

$$f(z)\div L\ \ f(z)\ =\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-\frac{p}{\lambda}z} f(z)dz$$

Бунда

$$f(t)\div F(p)=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt$$

билан алмаштирсак,

$$f(\lambda t)\div\frac{1}{\lambda}F(\frac{p}{\lambda})$$

натижага эга буламиз.

3. $f'(t)$ хосиланинг тасвири.

Айтайлик, $f(t) \div F(p)$ бўлсин. $f'(t)$ нинг тасвирини топиш керак.

$$L\{f'(t)\} = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty e^{-pt} f'(t)dt$$

интегрални бўлаклаб интегралласак,

$$L\ f'(t) = e^{-pt}\ f(t)\Big|_0^\infty + p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt = -f(0) + p\int_0^\infty e^{-pt} f(t)dt\ ,$$

$$L\{f'(t)\} = pL\{f(t)\} - f(0),\ \text{яъни}\ f(t') \div pF(p) - f(0)$$

Хусусан, агар $f(0)=0$ бўлса, $f'(t) \div pF(p)$. Оригинални дифференциаллаш бу тасвирни p сонга кўпайтириш демакдир.

Шунга ухшаш

$$f^{(n)}(t) \div p^n\left[F(p) - \frac{f(0)}{p} - \frac{f'(0)}{p^2} - .... - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^n}\right]$$

эканлигини аниқлаш қийин эмас, буни исботлаш учун $f^{(n)}(t)$ гача кетма-кетлик $f'(t) \div pF(p)$ қўлланилиши керак.

Хусусан, агар $f(0) = f'(0) = ... = f^{(n-1)}(0)$ бўлса, $f^{(n)}(t) \div p^n F(p)$ бўлади, яъни $f(t)$ функциянинг n - тартибли ҳосиласининг тасвири, функция тасвирини p^n нинг кўпайтмасига тенгдир.

4. Интегралнинг тасвири. $\varphi(t) = \int_0^t f(t)dt$ функцияни қарайлик.

Айтайлик, $f(t) \div F(p)$ булганда $\int_0^t f(t)dt$ нинг тасвирини топиш керак ва уни $\varphi(p)$ деб белгилаб куйидагиларни ёзамиз.

$$\varphi'(t) = f(t)\ \ ,\ \varphi(0)=0\ ,\ \varphi'(t) \div p\varphi(p)\ \text{ёки}\ f(t) \div p\varphi(p)$$

иккинчи томондан $f(t) \div F(p)$ демак, $\varphi(p) = \dfrac{F(p)}{p}$, яъни

$\int_0^t f(t)dt \div \dfrac{F(p)}{p}$ муносабатни кетма-кет қўллаш натижасида

$$\int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \int_0^{t_{n-1}} \ldots\ldots \int_0^{t_2} f(t_1)dt_1 \div \frac{1}{p^n}F(p)$$

Муносабат келиб чикади.

5. $t^n f(t)$ функциянинг тасвири.

Аввал бу функция тасвирга эга бўлиш-бўлмаслигини аниқлайлик.

$$\left|t^n f(t)\right| < M_n e^{(s+\lambda)t},$$

яъни $t^n f(t)$ функция тасвирга эга функциялар синфига карашли экан. Энди шу тасвирни топайлик.

$$L\{t^n f(t)\} = \int_0^\infty e^{-pt} t^n f(t)dt$$

интеграл хам $\operatorname{Re} p > s_0 + \lambda$ соҳада текис якинлашувчидир. λ кичик бўлгани учун (унинг ихтиёрийлигидан) уни $\operatorname{Re} p > s_0$ соҳа десак ҳам бўлади.

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \int_0^\infty e^{-pt} (-t)^n f(t)dt =$$

$$= (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} L\{f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p).$$

Демак,

$$t^n f(t) \div (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} F(p)$$

6. Тасвирни интеграллаш.

Теорема: Агар $\int_0^\infty F(p)dp$ интеграл яқинлашувчи бўлса, у холда $\frac{f(t)}{t}$ функциянинг тасвири бўлади. $\frac{f(t)}{t} \div \int_0^\infty F(p)dp$, яъни тасвирни интеграллаш бу оригинални t га бўлиш демакдир.

7. **Силжиш теоремаси.** $F(p+\lambda) \div e^{-\lambda t} f(t)$, яъни тасвир аргументини λ га силжитиш оригинални $e^{-\lambda t}$ га кўпайтириш демакдир.

Ҳақиқатдан

$$e^{-\lambda t} f(t) \div \int_0^{\infty} e^{-(p+\lambda)t} f(t)dt = F(p+\lambda).$$

8. **Кечикиш теоремаси.** Ихтиёрий мусбат τ учун $f(t-\tau) \div e^{-p\tau} F(p)$ ўринлидир. (Оригинални τ вактга кечикиб ишлатиш тасвирни $e^{-p\tau}$ га кўпай-тиришга тенг).

9. **Кўпайтириш теоремаси:** Агар $F(p) \div f(t)$ ва $G(p) \div g(t)$ бўлса, бу икки тасвирнинг кўпайтмаси тасвир бўлади, шу билан бирга

$$F(p)G(p) \div \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \qquad \text{(A.2)}$$

тасвирдан оргиналга ўтиш қолдиқлар назарияси ёрдамида куйидагича амалга оширилади.

Агар тасвир $F(p) = \dfrac{A(p)}{B(p)}$ кўринишга эга ва p_n –лар $F(p)$ функциянинг кутблари хамда n_k – лар уларга мос кутб карралиси бўлса, у ҳолда $F(t)$ оригинал

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(n_k-1)!} \lim_{p \to p_k} \frac{d^{n_k-1}}{dp^{n_k-1}} \; F(p)(p-p_k)e^{pt}$$

формула ёрдамида топилади.

Агар $F(p) = \dfrac{A(p)}{B(p)}$ функция оддий p_n – кутбларга эга бўлса, у ҳолда $f(t)$ оргинал $f(t) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{A(p_k)}{B'(p_k)} e^{P_k \cdot t}$ тенглик ёрдамида ҳисобланади.

Агар тасвир $F(p) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{c_k}{p^k}$ кўринишга эга бўлса, у ҳолда

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c_k}{(k-1)!} t^{k-1}$$

оригинал кўринишда бўлади.

Тасвирнинг $F(p)=\dfrac{A(p)}{B(p)}$ ифодасини $B(p)F(p)=A(p)$ куринишида ёзиб, *a(t), b(t)* ва $f(t)$ функцияларга мос равишда $A(p)$, $B(p)$ ва $F(p)$ тасвирларнинг оргиналлари бўлса, у ҳолда 9-хоссага кўра $\int_0^{\tau} b(t)f(\tau-t)dt=a(t)$ интеграл тенгламани олиш мумкин ва бу интеграл тенгламани сонли ечиш усуллари билан $f(t)$ оргинални топиш мумкин.

В. Оригиналларни топиш усуллари

$F(p)$ - тасвир рационал-каср функция, яъни $F(p)=\dfrac{u(p)}{v(p)}$ кўринишда. Бу ерда $u(p)$ ва $v(p)$ лар p параметрнинг мос равишда m ва n даражали (m<n) кўпҳадлари. Агар $v(p)$ кўпхадни содда кўпайтирувчиларга ажратиш мумкин бўлса, яъни

$$v(p)=(p-p_1)^{k_1}(p-p_2)^{k_2}...(p-p_r)^{k_r},$$

$$k_1+k_2+...+k_r=n$$

ўринли бўлса, у холда $F(p)$ функцияни

$$\frac{A_{j,s}}{(p-p_j)^{k_j-s+1}}$$

кўринишдаги элементар касрлар йиғиндисига ёйиш мумкин.

Демак,

$$F(p)=\sum_{j=1}^{r}\sum_{s=1}^{k_j}\frac{A_{j,s}}{(p-p_j)^{k_j-s+1}}. \qquad (В.1)$$

Бу йигиндининг барча $A_{j,s}$ коэффициентлари

$$A_{j,s}=\frac{1}{(s-1)!}\lim_{p\to p_j}\left\{\frac{d^{s-1}}{dp^{s-1}}\left[(p-p_j)^{k_j}F(p)\right]\right\}$$

формула ёрдамида аникланади.

Агар $v(p)$ функциянинг барча илдизлари оддий, яъни

$$v(p) = (p - p_1)(p - p_2)...(p - p_r)\,,\; p_j \neq p_k\,,\; j \neq k$$

бўлса, у ҳолда йиғинди соддалашади.

$$F(p) = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{p - p_j}\,, \qquad A_j = \frac{u(p_j)}{v'(p_j)} \tag{B.2}$$

$F(p)$ функция каррали кутбларга эга бўлганда, яъни (B.1) нинг оригинали

$$F(p) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{s=1}^{k_j} A_{j,s} \frac{t^{k_j - s}}{(p - p_j)^{k_j - s + 1}} e^{p_j t}$$

кўринишга эга. $F(p)$ функция оддий қутбга эга бўлганда, яъни (B.2) нинг оригинали

$$f(t) = \sum_{j=1}^{n} \frac{u(p_j)}{v'(p_j)} e^{p_j t}$$

формула билан аниқланади.

Агар $F(p)$ тасвир $\frac{1}{p}$ нинг $|p| > R$ да ($R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \neq \infty$) яқинлашувчи даражали қатори кўринишида

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{p^{n+1}}$$

бўлса, у ҳолда оригинал

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^n}{n!}$$

кўринишда бўлади.

C. Қўшиш теоремалари

1.3 параграфда келтирилан масалаларни ечишда $r_i, \theta_i, \vartheta_i$ ва $r_j, \theta_j, \vartheta_j$ ($i \neq j$) каби ҳар хил сферик координаталар системасида ёзилган (1.41) ва

(1.42) кўриншидаги функциялар орасидаги боғланишни топиш ва уларни келтириш зарурдир.

Бу боғланишларни Бесселнинг $I_{n+1/2}(s)$ ва $K_{n+1/2}(s)$ модифицирланган функциялари учун қўшиш теоремалари ёрдамида [10, 19]:

$$\frac{1}{\sqrt{sr_i}}K_{n+1/2}(sr_i)P_n^{(p)}(\cos\theta_i)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{m=p}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m+1)(m-p)!}{(m+p)!}\times$$

$$\times\sum_{\sigma=|m-n|}^{m+n}b_\sigma^{(npmp)}\frac{1}{s\sqrt{r_jr_{ij}}}K_{\sigma+1/2}(sr_{ij})I_{m+1/2}(sr_j)P_m^{(p)}(\cos\theta_j),\qquad (r_j<r_{ij}),$$

$$\frac{1}{\sqrt{sr_i}}K_{n+1/2}(sr_i)P_n^{(p)}(\cos\theta_i)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{m=p}^{\infty}\frac{(2m+1)(m-p)!}{(m+p)!}\times \tag{C.1}$$

$$\times\sum_{\sigma=|m-n|}^{m+n}b_\sigma^{(npmp)}\frac{1}{s\sqrt{r_jr_{ij}}}I_{\sigma+1/2}(sr_{ij})K_{m+1/2}(sr_j)P_m^{(p)}(\cos\theta_j),\qquad (r_j>r_{ij}),$$

$$\frac{1}{\sqrt{sr_i}}I_{n+1/2}(sr_i)P_n^{(p)}(\cos\theta_i)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sum_{m=p}^{\infty}\frac{(-1)^{m-n}(2m+1)(m-p)!}{(m+p)!}\times$$

$$\times\sum_{\sigma=|m-n|}^{m+n}b_\sigma^{(npmp)}\frac{1}{s\sqrt{r_jr_{ij}}}I_{\sigma+1/2}(sr_{ij})I_{m+1/2}(sr_j)P_m^{(p)}(\cos\theta_j),$$

$$b_\sigma^{(npmp)}=(-1)^p\sigma\sqrt{\frac{(n+p)!(m+p)!}{(n-p)!(m-p)!}}(nm00/\sigma0)(nmp,-p/\sigma0)$$

кўринишда ёзиш мумкин.

$$(nm00/\sigma0)=\begin{cases}(-1)^{\sigma+1/2}\dfrac{\left(\dfrac{l}{2}\right)!}{\left(\dfrac{l}{2}-n\right)!\left(\dfrac{l}{2}-m\right)!\left(\dfrac{l}{2}-\sigma\right)!}\times \\ \times\left[\dfrac{(2\sigma+1)(l+2n)!(l-2m)!(l-2\sigma)!}{(l+1)!}\right]^{\frac{1}{2}}, \quad \text{агар } l - \text{жуфт} \\ 0, \qquad \text{агар } l - \text{ток}, \qquad l=n+m+\sigma\end{cases},$$

$$(nmp,-p/\sigma 0)=\sigma\left[\frac{2\sigma+1}{(n+m+\sigma+1)!}(m+\sigma-n)!(n+\sigma-m)!(n+m-\sigma)!\times\right.$$

$$\left.\times(n^2-p^2)!(m^2-p^2)!\right]^{\frac{1}{2}}\sum_{\substack{\max(m-p-\sigma,0)\le k\le\min(m+n-\\-\sigma,m-p,n-p)}}(-1)^k\Big[k!(n+m-\sigma-k)!(k+\sigma+p-n)!\times$$

$$\times(m-p-k)!(k+p+\sigma-m)!(n-p-k)!\Big]^{-1},$$

бу ерда r_{ij} - икки сферик координаталар системасининг марказлари орасидаги масофа; $b_{\sigma}^{(npmp)}$ - Клебша-Гордон коэффициентлари [10, 19].