O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI
ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI
ILMIY KENGASH

QORAQALPOQ DAVLAT UNIVERSITETI

QAZIMBETOVA MUXABBAD MAXSETBAYEVNA

NOSTATSIONAR TENGLAMALAR UCHUN YUQORI ANIQLIKDAGI AYRIMALI SXEMALAR

01.01.03-Hisoblash matematikasi va diskret matematika

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

TOSHKENT – 2024

UDK 519.6

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of the doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH

QORAQALPOQ DAVLAT UNIVERSITETI

QAZIMBETOVA MUXABBAD MAXSETBAYEVNA

NOSTATSIONAR TENGLAMALAR UCHUN YUQORI ANIQLIKDAGI AYRIMALI SXEMALAR

01.01.03-Hisoblash matematikasi va diskret matematika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2024

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2024.2.PhD/FM500 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Berdaq nomidagi Qoraqalpoq davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (http://ik-fizmat.nuu.uz/) va «Ziyonet» Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Utebaev Dauletbay** fizika-matematika fanlari doktori, dotsent
Rasmiy opponentlar:	**Hayotov Abdullo Rahmonovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Ashiraliev Chariyar fizika-matematika fanlari doktori, professor (Turkiya)
Yetakchi tashkilot:	**Termiz davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi O'zbekiston Milliy universiteti huzuridagi Dsc.03/30.12.2019.FM.01.02 raqamli Ilmiy kengashning 2024 yil "28" noyabr soat 14⁰⁰ dagi majlisida bo'lib o'tadi (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 227-12-24, faks: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan O'zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (134 raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.: (99871) 246-02-24).

Dissertatsiya avtoreferati 2024 yil "14" noyabr kuni tarqatildi.
(2024 yil "24" 09 dagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).

M.M. Aripov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash raisi ,
f.-m.f.d., professor

Z.R. Raxmonov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash
ilmiy kotibi,f.-m.f.d

R.D. Aloyev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash qoshidagi
ilmiy seminar raisi,f.-m.f.d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida olib borilayotgan ko‘plab ilmiy va amaliy tadqiqotlar tutash muhitlar mexanikasining nostatsionar jarayonlarning matematik modellari uchun aniqligi yuqori bo‘lgan sonli usullarni yaratishga bag‘ishlangan. Shu sababli, nostatsionar xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni chekli ayirmalar usuli yordamida yechish, ayniqsa, gaz dinamikasi, ichki to‘lqinlar nazariyasi masalalari, plazma masalalari, yarim o‘tkazgichlar fizikasi masalalari va boshqalar kabi sohalarda dolzarbdir. Bu sohada dastlabki differensial masalaning yechimining silliqligiga tabiiy talablarda ushbu tenglamalar uchun yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalarini qurish muhim vazifalardan biri bo‘lib qolmoqda.

Hozirgi kunda jahonda tadqiqotlarning eng muhim vazifalardan biri matematik fizikaning chiziqli va nochiziqli tenglamalarini, shu jumladan, analitik yechimini topish murakkab bo‘lgan Sobolev tipidagi noklassik tenglamalarni yechish uchun yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalarni qurish keng tadqiq etilmoqda. Shu munosabat bilan noklassik Sobolev tipidagi tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni sonli yechishning yuqori aniqlikdagi usullarini ishlab chiqish zarur. Shuning uchun giperbolik va Sobolev tipidagi tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni yechish uchun yuqori aniqlikdagi turg‘un sonli usullarini va ularning iqtisodiy jihatdan samarali algoritmlarini ishlab chiqish maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tadbiqiga ega bo‘lgan matematik fizika, mexanika va energetika sohalaridagi amaliy masalalarning sonli usullarini ishlab chiqish kabi dolzarb yo‘nalishlarga katta e’tibor qaratilmoqda. Binobarin, tutash muhitlar mexanikasi, plazma fizikasi, yarim o‘tkazgichlar fizikasi, okeanologiya va boshqalar kabi sohalardagi amaliy masalalarni yechish, sonli usullarni tadqiq qilishning nazariy jihotdan asosi hisoblanadi. Ushbu yo‘nalishda aniqligi yuqori turg‘un ayirmali sxemalarni qurish, shuningdek, ularning tejamkor algoritmlarini ishlab chiqishda sezilarli natijalarga erishildi. “Funktsional analiz, algebra, differensial tenglamalar, matematik fizika, matematik modellashtirish, hisoblash va diskret matematika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha jahon standartlari darajasida ilmiy natijalarga erishish O‘zR FA V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institute faoliyatining asosiy vazifalaridan biri hisoblanadi[1]. Qarorni amalga oshirish uchun matematik fizikaning nostatsionar tenglamalari uchun yuqori aniqlikdagi sonli usullarni qurish va tadqiq qilish muhim ahamiyatga ega.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 28-yanvardagi PF-60-son “2022-2026 yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida” gi farmoni, 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta‘lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori, 2019-yil 8-oktabrdagi PF-5847-son “O‘zbekiston

---

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 7 maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-son qarori.

Respublikasi oliy ta‘lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi farmoni, 2019-yil 27-apreldagi PQ-3682-son “Innovatsion g‘oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori va 2021-yil 1-apreldagi PF-6198-son “Ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish bo‘yicha davlat boshqaruvi tizimini takomillashtirish to‘g‘risida”gi farmonlari, hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishiga mos keladi.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Matematik fizika masalalarini yechishning sonli usullarini rivojlantirishga A.N. Tixonov, A.A. Samarskiy, G.I. Marchuk, N.N. Yanenko, S.K. Godunov, R. Richtmayer, O.A. Ladijenskaya, Y.I. Shokin, V.L. Makarov, R.D. Lazarov, A.V. Gulin, N.N. Kalitkin, M.N. Moskalkov, P.N. Vabishchevich, P.P. Matus, M.M. Aripov, R.D. Aloyev va boshqalar, matematik fizikaning nokorrekt yoki teskari masalalarini yechishning sonli usullarini ishlab chiqishga fundamental hissa qo‘shdi. Matematik fizikaning nokorrekt yoki teskari masalalarini yechishning sonli usullari alohida e‘tiborga loyiqdir. Bunday masalalar A.N. Tixonov, M.M. Lavrentyev, A.B. Bakushinskiy, A.V. Goncharskiy, S.I. Kabanixin, J.L. Lions, R. Lattes, V.K. Ivanov, V.G. Romanov va boshqalarning ilmiy ishlarida asarlarida analitik va sonli usullar bilan yechilgan. Sobolevning noklassik tenglamalari kabi yuqori tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarni yechish bo‘yicha ko‘plab tadqiqotlar olib borilgan. S.A. Gabov, A.G. Sveshnikov, M.O. Korpusov, Y.D. Pletner, A.I. Kojanov, G.A. Sviridyuk, S.G. Rossby, M.I. Lighthill, P.I. Chen va boshqalarning ishlarida ko‘rib chiqilgan bo‘lib, bu yerda chiziqli va nochiziqli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni yechishning analitik usullari keltirilgan. Bunday masalalarni yechishning sonli usullari M.M. Moskalkov, N.N. Kalitkin, A.B. Alshin, E.A. Alshina, A.A. Zamishlyaeva, G.I. Marchuk, V.V. SHaydurov, V.I. Agoshkov, M.M. Moskalkov, M.M. Aripov, D. Utebaev va boshqalar tarafidan ham o‘rganilgan. Ularning ishlari, asosan, chekli ayirmalar usuli va chekli elementlar usuliga asoslangan bo‘lib, yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalarning aniqlik baholari olingan. Xuddi shunday tadqiqotlar A.A. Zamyshlyaevaning ishlarida ham o‘rganilgan, bu yerda takomillashtirilgan Galerkin usuli va Rits usuliga asoslangan sonli yechim uchun algoritm ishlab chiqilgan, shuningdek N.N Kalitkin, A.B. Alshin, E.A. Alshina asarlarida yuqori tartibli nostatsionar tenglamalar kvazitengo‘lchovli to‘rlarda ikkinchi tartibli aniqlikdagi chekli ayirmalar usuli bilan yechilgan. Shunga o‘xshash tadqiqotlar V. Vucheva, N. Kolkovska ishlarida ham olib borilgan, bu yerda vaqt va fazo o‘zgaruvchilari bo‘yicha birinchi va ikkinchi tartibli aniqlikdagi ayirmali sxemalar qurilgan va tadqiq qilingan.

Maʻlumki, matematik fizikaning nostatsionar tenglamalarini chekli ayirmalar usuli yoki chekli elementlar usuli bilan faqat fazo oʻzgaruvchilari boʻyicha approksimatsiyalash orqali koʻp oʻlchamli oddiy differensial tenglamalar sistemasi olinadi (toʻgʻrilar usuli). Ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalar M.M. Moskalkov, P.P. Matus, P.N. Vabishchevich, M.M. Aripov, D. Utebaev ishlarida qurilgan va tadqiq qilingan. Toʻrtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun yuqori aniqlikdagi chekli elementlar usulining ayirmali sxemalari M.M. Moskalkov, M.M. Aripov, D. Utebaev, X.L. Atajanov, J.A. Nurullayev ishlarida qurilgan va tadqiq qilingan. K.A. Husayn, F. Ismoil ishlarida umumiy toʻrtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun Runge-Kutta usullariga asoslangan sonli usullar qurilgan va oʻrganilgan, bu yerda fazoviy oʻzgaruvchilar chekli ayirmalar usuli bilan approksimatsiyalangan. O.A. Tayvo, O.M. Ogunlaran ishlarida τ-usuli asosida, J. Talvar, R. Mohanti, K.K. Singx, D.I. Singx ishlarida esa chekli ayirmalar usuli asosida toʻrtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar yechimlari uchun ikkinchi tartibli aniqlik baholari olingan, bundan tashqari, yuqori darajadagi aniqlikni olish usullari koʻrsatilgan.

Xususiy hosilali koʻp oʻlchovli tenglamalar uchun boshlangʻich-chegaraviy masalalarni sonli yechishda additiv ayirmali sxemalarni qurishga alohida eʻtibor qaratilgan. Bu yerda koʻp oʻlchovli murakkab masaladan oddiyroq masalalar zanjiriga oʻtish amalga oshiriladigan qoʻshimcha ayirmali sxemalarini qurish va tadqiq qilishga katta eʻtibor beriladi. Bunday tadqiqotlar A.A. Samarskiy, P.N. Vabishevich va boshqalarning ishlarida olib borilgan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy taʻlim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bogʻliqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Berdaq nomidagi Qoraqalpoq davlat universitetining “Amaliy matematikaning chiziqli va nochiziqli nostatsionar tenglamalarini yechishning sonli usullari” ilmiy-tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi silliq va nosilliq yechimlar sinflarida ikkinchi va toʻrtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalarini qurish, ularni giperbolik tipdagi tenglamalarga qoʻllash, ularning turgʻunlik shartlarini topish hamda yaqinlashish va aniqlik baholarini olishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

silliq yechimlar sinflarida ikkinchi va toʻrtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemalarini sonli yechish uchun chekli ayirmalar usuli asosida yuqori aniqlikga ega oshkor va oshkormas ayirmali sxemalarini ishlab chiqish;

umumlashgan yechimlar sinfida ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasini sonli yechish uchun chekli ayirmalar usuli asosida yuqori aniqlikdagi oshkor va oshkormas ayirmali sxemalarni ishlab chiqish;

umumlashgan yechimga ega koʻp oʻlchovli ikkinchi tartibli giperbolik tenglamalar uchun ayirmali sxemalarini qurish va tadqiq qilish;

xususiy hosilali korrekt va nokorrekt differensial tenglamalarga qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masalalar yechimining silliqligiga minimal talablarda sonli usullarning aprior va aniqlik baholarini olish;

Sobolev tipidagi noklassik tenglamalar uchun ba‘zi boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni sonli modellashtirish uchun yangi qurilgan yuqori aniqlikdagi oshkor va oshkormas ayirmali sxemalarini qo‘llash.

Tadqiqotning obyekti ikkinchi va to‘rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi hamda giperbolik tipidagi xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar.

Tadqiqotning predmeti. ikkinchi va to‘rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun, shuningdek giperbolik tipidagi xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun ba‘zi to‘g‘ri va teskari boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni yuqori aniqlikdagi sonli usullarni ishlab chiqishdan iborat.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiya ishida algebra, funksional analiz, differensial tenglamalar, hisoblash matematikasi, sonli modellashtirish, shuningdek algoritmlashtirish texnologiyasi usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

ikkinchi va to‘rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun silliq yechimlar sinfida yangi oshkor va oshkormas ayirmali sxemalar qurilgan, approksimatsiya xatoligi, turg‘unlik shartlari va aniqlik baholari olingan;

ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun qurilgan yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalar asosida additiv ayirmali sxemalar qurilgan;

ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasini sonli yechich uchun umumlashgan yechimlar sinfida chekli ayirmalar usulining yuqori aniqlikdagi oshkor va oshkormas ayirmali sxemalari ishlab chiqilgan;

umumlashgan yechimlar sinfida ikkinchi tartibli ko‘p o‘lchovli giperbolik tenglama uchun ayirmali sxemalar qurilgan, approksimatsiya xatoligi, turg‘unlik shartlari va aniqlik baholari olingan;

Laplas tenglamasi uchun qo‘yilgan teskari masalaga yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalar qurilgan, yaqinlashish va aniqlik baholari olingan;

tashqi magnit maydondagi sovuq plazmadagi elektron to‘lqinlar tenglamasi va siqiladigan stratifikatsiyalangan aylanuvchi suyuqlik dinamikasi tenglamasi uchun boshlang‘ich chegaraviy masalalarga vaqt bo‘yicha yuqori aniqlikdagi yangi ayirmali sxemalar qurilgan va aniqlik baholari olingan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

chekli ayirmalar usuli asosida silliq va nosilliq yechimlar sinflarida ikkinchi va to‘rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasini sonli yechish uchun yuqori aniqlikdagi yangi oshkor va oshkormas ayirmali sxemalari qurilgan;

ikkinchi tartibli giperbolik tipdagi tenglama, tashqi magnit maydonida sovuq plazmadagi elektron to‘lqinlar tenglamasi va siqiladigan stratifikatsiyalangan aylanuvchi suyuqlik dinamikasi tenglamasi uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar sonli yechilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Dissertatsiya ishida olingan nazariy natijalar tegishli teoremalarni qatʻiy isbotlash, shuningdek, hisoblash eksperimenti asosida nazariy xulosalarni tasdiqlash bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati.

Dissertatsiyada olingan natijalarning ilmiy ahamiyati ikkinchi va toʻrtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini yechish uchun qurilgan yangi oshkor va oshkormas ayirmali sxemalar amaliy masalalarning yechimini asoslash va ayirmali sxemalar nazariyasini rivojlantirish uchun foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati shundan iborat, chekli ayirmalar usuli asosida qurilgan oshkor va oshkormas ayirmali sxemalar, shuningdek, algoritmlar va dasturlar har xil xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlangʻich-chegaraviy masalalarning sonli yechish uchun foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Ikkinchi va toʻrtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalarni qurish boʻyicha olingan natijalar amaliyotga quyidagi yoʻnalishlarda joriy etilgan:

ikkinchi tartibli oddiy differentsial tenglamalar sistemasi uchun umumlashgan yechimlar sinfida qurilgan chekli ayirmalar usulining yuqori aniqlikdagi oshkor va oshkormas sxemalardan OT-F4-30-raqamli «Konvektiv koʻchirishda, oʻzgaruvchan zichlikka, manba yoki yutilishga ega ikki karra nochiziqli kross-sistema yechimlarining hususiyatlarini oʻrganish» mavzusidagi ilmiy-tadqiqot loyihasida diffuziya-konvektsiya masalalarini taqribiy yechish uchun optimal ayirmali sxema qurishda va uning approksimatsiya xatoligi, turgʻunligi va aniqligini baholashda foydalanilgan (Oʻzbekiston Milliy universitetining 2024 yil 28 iyunidagi 04/11-5328 sonli maʼlumotnomasi). Ilmiy natijalarning qoʻllanilishi diffuziya-konvektsiya masalalari uchun yangi optimal algoritmlar qurish va sonli yechish imkonini bergan.

teskari masalalarni taqribiy yechish, sonli modellashtirish va sonli eksperimentlar oʻtkazish usullaridan OT-F2-77-raqamli «Modellashtirish asosida ichki nuqsonlarni hisobga olgan holda yarim oʻtkazgichli asboblarning ishonchliligini bashorat qilishning takomillashtirish usuli» mavzusidagi fundamental loyihada turli defektlarga ega yarimoʻtkazgich strukturalardagi jarayonlarning elektrofizik va optik xususiyatlarini aniqlashda foydalanilgan (Qoraqalpoq davlat universitetining 2024 yil iyunidagi 01-22-04/337-sonli maʼlumotnomasi). Olingan ilmiy natijalarning qoʻllanilishi yarimoʻtkazgichlar fizikasi masalalarida defektlarning paydo boʻlishi sabablarini aniqlash va muayyan turgʻunlikni taʼminlaydigan yarimoʻtkazgich priborlarni yaratishdagi usullarni takomillashtirish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiya ishining natijalari 9 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan, 6 ta xalqaro va 3 ta respublika miqyosidagi ilmiy-amaliy anjumanlarda muhokamadan oʻtgan.

Tadqiqot natijalarining eʻlon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi boʻyicha jami 18 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, Oʻzbekiston Respublikasi Oliy taʻlim, fan va innovatsiya vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 9 ta maqola, shu jumladan 4 tasi xorijiy ilmiy jurnallarda nashr etilgan. Shuningdek, EHM uchun yaratilgan dasturning rasmiy ro‘yxattan o‘tkazilganligi to‘g‘risida 2 ta mualliflik guvohnomasi olingan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish, uchta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati va ilovalardan iborat. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 91 betdan tashkil topgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi asoslangan, tadqiqotning O‘zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalarini rivojlantirishning ustuvor yo‘nalishlariga muvofiqligi ko‘rsatilgan, dissertatsiya mavzusi bo‘yicha xorijiy-ilmiy tadqiqotlar sharhi va muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi va vazifalari shakllantirilgan, tadqiqot obyekti va predmeti tadqiq qilingan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon etilgan. Olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining amaliyotga joriy qilinganligi, chop etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi haqida ma’lumotlar berilgan.

«Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar uchun yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalar» deb nomlangan **birinchi bobning** kirish qismida yordamchi materiallar haqida qisqacha ma’lumotlar berilgan, keyinchalik ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasiga to‘rtinchi tartibli aniqlikdagi ayirmali sxemalar qurilgan. Turg‘unlik shartlari, energetik normalarda aprior baholar olingan va ular asosida silliq yechimlar sinfida qurilgan sxemalarning aniqlik baholari isbotlangan. Parametrli ayirmali sxemalar asosida ikki o‘zgaruvchiga nisbatan to‘rtinchi tartibli aniqlikdagi additiv ayirmali sxemalar taklif etilgan. Hisoblash algoritmi lokal bir o‘lchovli masalalar sifatida berilgan. To‘g‘ri burchakli fazoda giperbolik tipdagi ko‘p o‘lchamli boshlang‘ich-chegaraviy masalani yechishga misol keltirilgan. To‘rtinchi tartibli aniqlikdagi ayirmali sxema yechimining barcha o‘zgaruvchilar bo‘yicha dastlabki masala yechimiga yaqinlashishi haqidagi teorema isbotlangan. Ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun qurilgan ayirmali sxemalarni amalga oshirish algoritmlari ko‘rsatilgan. Test misollarida o‘tkazilgan hisoblash tajribalari qurilgan sonli usullarning samaradorligini isbotlagan.

Birinchi paragrafda ba’zi yordamchi materiallar keltirilgan.

Ikkinchi paragrafda ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun quyidagi Koshi masalasi ko‘rib chiqilgan:

$$D\ddot{u} + Au = f, \quad t_0 < t \le T, \tag{1}$$

$$u(t_0) = u_0, \quad \dot{u}(t_0) = u_1, \tag{2}$$

bu yerda A va D Hdan H ga harakatlanuvchi chiziqli, t ga bog‘liq bo‘lmagan doimiy operatorlar, H – tegishli skalyar ko‘paytma va normaga ega gilbert fazosi,

$A^* = A > 0$, $D^* = D > 0$, $\forall\, t \ge 0$, $u = u(t)$, $f = f(t) \in H$, $\ddot{u} = d^2u/dt^2$, $\dot{u} = du/dt$
.

(1), (2) masalasiga chekli ayirmalar usuli asosida quyidagi ayirmali sxema bilan approksimatsiyalandi:

$$\overline{D}y_{\bar{t}t} + Ay^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \varphi, \quad t_n \in \omega_\tau, \tag{3}$$

$$y(0) = y_0, \quad y_t(0) = D^{-1}\bar{y}_1. \tag{4}$$

Bu yerda

$$\overline{D} = \left(D + (\tau^2/12)A\right), \quad \varphi = f + (\tau^2/12) f_{\bar{t}t}, \; \bar{y}_1 = \left(D - (\tau^2/6)A\right)y_1 + (\tau^2/6)\dot{f}\,.$$

Ayirmali sxemalari nazariyasi natijalari asosida quyidagi natija isbotlandi.

Teorema 1. Faraz qilaylik, (1), (2) masalaning yechimi $u(t) \in C^6[0,T]$, $f(t) \in C^4[0,T]$ va $\sigma_1 \ge \sigma_2$, $(\sigma_1 + \sigma_2) \ge [(2+3\varepsilon)/6] - 2\|D\|/(\tau^2\|A\|)$ shartlari o‘rinli bo‘lsin. U holda, $A^* = A > 0$, $\overline{D}^* = \overline{D} > 0$ operatorlari bilan berilgan (3), (4) sxema yechimi dastlabki masalaning yechimiga $O(\tau^4)$ aniqlik bilan yaqinlashadi, ya‘ni

$$\|y(t) - u(t)\|_{\mathrm{D}} \le M\tau^4, \; M > 0 - const$$

aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda $\mathrm{D} = D + (\tau^2/12)A + (\tau^2/2)(\sigma_1 + \sigma_2)A$.

Keyinchalik, (3), (4) ayirmali sxemalar asosida quyidagi

$$y_{\bar{t}t} + R^{-1}\sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}y = R^{-1}\varphi, \quad t_n \in \omega_\tau \tag{5}$$

additiv ayirmali sxemasi qurildi, bu yerda

$$R = \sum_{\beta=1}^{p}(\overline{D} + \sigma\tau^2 A^{(\beta)}), \; A = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}, \;\; A^{(\alpha)} = \left(A^{(\alpha)}\right)^* > 0, \; \alpha = \overline{1,p}\,.$$

Quyidagi teorema isbotlandi.

Teorema 2. Faraz qilaylik, (1), (2) masalalar yechimi $u(t) \in C^6[0,T]$, $f(t) \in C^4[0,T]$ va $\sigma \ge 1/4$ sharti o‘rinli bo‘lsin. U holda, $R = R^* > 0$, $A^* = A > 0$ operatorlari bilan berilgan (5), (4) sxema yechimi dastlabki masala yechishga $O(\tau^4)$ aniqlik bilan yaqinlashadi, ya’ni

$$\|u(t) - y(t)\|_R \le M\tau^4, \; M > 0 - const$$

aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi.

Uchinchi paragrafda ikkinchi paragrafda olingan natijalar asosida A statsionar operatorning

$$A = \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)}, \;\; A^{(\alpha)} = \left(A^{(\alpha)}\right)^* > 0, \; \alpha = \overline{1,p} \tag{6}$$

additiv tasvirlariga yo‘naltirilgan additiv ayirmali sxemalari qurilgan. Bunday holda, bir t_n vaqt qatlamidan t_{n+1} ikkinchisiga o‘tish (6) additiv yoyish bilan bog‘liq $A^{(\alpha)}$ doimiy additiv operatorlari bilan berilgan masalaning yechimiga bog‘liq bo‘ladi. Shu bilan, berilgan masala soddaroq p masalalarga bo‘linadi. Faraz qilaylik, (3) sxemada $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$ bo‘lsin (simmetrik sxema):

$$\overline{D} y_{\bar{t}t} + A y^{(\sigma)} = \varphi, \quad t_n \in \omega_\tau, \tag{7}$$

bu yerda $y^{(\sigma)} = \sigma \hat{y} + (1 - 2\sigma) y + \sigma \check{y}$. Boshlang‘ish shartlar (4) ko‘rinishga ega. Sxemaning turg‘unlik sharti quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\sigma \geq (2 + 3\varepsilon)/12 - \|D\| / (\tau^2 \|A\|).$$

(7) sxema asosida additiv sxemani quramiz. Shuning uchun, (7) ayirmali sxemani uch qatlamli ayirmali sxemaning kanonik shakliga keltiramiz:

$$(\overline{D} + \sigma\tau^2 A) y_{\bar{t}t} + A y = \varphi, \quad t_n \in \omega_\tau.$$

Bu holda turg‘unlik sharti $\overline{D} + \sigma\tau^2 A \geq \left[(1 + \varepsilon)/4\right] \tau^2 A$ barcha $\sigma \geq 1/4$ uchun o‘rinli bo‘ladi.

(7) ga mos keladigan additiv sxema quyidagicha aniqlanadi:

$$y_{\bar{t}t} + R^{-1} \sum_{\alpha=1}^{p} A^{(\alpha)} y = R^{-1} \varphi, \quad t_n \in \omega_\tau, \tag{8}$$

bu yerda $R = \sum_{\beta=1}^{p} (\overline{D} + \sigma\tau^2 A^{(\beta)})$.

Shunday qilib, quyidagi natija o‘rinli bo‘ladi.

Teorema 3. Faraz qilaylik, (1), (2) masala yechimi $u(t) \in C^6[0,T]$, $f(t) \in C^4[0,T]$ va $\sigma \geq 1/4$ sharti o‘rinli bo‘lsin. U holda, $R = R^* > 0$, $A^* = A > 0$ operatorlari bilan berilgan (8), (4) sxema yechimi dastlabki masala yechimiga $O(\tau^4)$ aniqlik bilan yaqinlashadi, ya’ni quyidagi aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi:

$$\|u(t) - y(t)\|_R \leq M\tau^4, \ M > 0 - const.$$

Ushbu usul asosida quyidagi p o‘lchovli ikkinchi tartibli giperbolik tenglama $\Omega = \{x : x = (x_1, x_2, ..., x_p), \ \ 0 < x_\alpha < l_\alpha, \ \ \alpha = \overline{1, p}\}$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ fazosida quyidagi boshlang‘ich-chegaraviy shartlari bilan tadqiq etilgan:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + Lw = f(x,t), \ x \in \Omega, \ 0 < t \leq T, \tag{9}$$

$$w(x,t) = 0, \ x \in \Gamma = \partial\Omega, \ 0 < t \leq T, \tag{10}$$

$$w(x,0) = w_0(x), \ \frac{\partial w}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \tag{11}$$

bu yerda $Lw = -\sum_{\alpha=1}^{p} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k(x) \frac{\partial w}{\partial x_\alpha} \right)$.

(14)-(16) masalaga mos keladigan, (7) ayirmali sxemasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\Im y_{\bar{t}t} + \sum_{\alpha=1}^{p} \Re^{(\alpha)} y = \tilde{\varphi}, \ t_n \in \omega_\tau, \tag{12}$$

bu yerda $\Im = \sum_{\beta=1}^{p} \left(\tilde{D} + \sigma\tau^2 \overline{A}^{(\beta)} \right), \ \Re = \overline{A}, \ \tilde{\varphi} = f^n + \frac{\tau^2}{12} f_{tt}^n + \frac{h_1^2}{12} f_{x_1 x_1}^n + \frac{h_2^2}{12} f_{x_2 x_2}^n,$

$f_{tt}^n = \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}, \ f_{x_\alpha x_\alpha}^n = \frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}, \ \alpha = 1{,}2. \ \tilde{D} = E + \frac{\tau^2}{12} A + \frac{h_1^2 + h_2^2}{12} A_1 A_2.$

(12) ga boshlang‘ich shartlar quyidagi ko‘rinishda beriladi:

$$y^0 = u_0, \quad \Im y_t(0) = \Im u_1 + \frac{\tau}{2}(\tilde{\varphi}^0 - \Re u_0) + \frac{\tau^2}{6}\left(\frac{\partial f^0}{\partial t^2} - \Re u_1 \right). \tag{13}$$

Quyidagi tasdiq isbotlangan.

Teorema 4. Faraz qilaylik, (9)–(11) masala yechimi $u(x,t) \in C_{t\,x}^{6,6}\{\overline{Q}_T\}$, $f(x,t) \in C_{t\,x}^{4,4}\{\overline{Q}_T\}$ va $\sigma \geq 1/4$ sharti o‘rinli bo‘lsin. U holda, $\Im = \Im^* > 0, \ \Re = \Re^* > 0$ operatorlari bilan berilgan (12), (13) sxema dastlabki masala yechimiga $O(\tau^4 + |h|^4)$ aniqlik bilan yaqinlashadi, ya’ni quyidagi aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi:

$$\|u(x,t) - y(x,t)\|_\Im \leq M(|h|^4 + \tau^4), \ y,u \in H_h, \ M > 0 - const.$$

Keyinchalik, ushbu tenglamalarning barcha xususiyatlariga ega bo‘lgan ikkinchi tartibli giperbolik tipdagi tenglamalarning eng oddiy vakili bo‘lgan ipning (struna) tebranish tenglamasi uchun test misolida sonli natijalari keltirilgan.

“Umumlashgan yechimga ega differensial tenglamalar uchun yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalar” deb nomlangan dissertatsiyasining **ikkinchi bobda** umumlashgan yechimlar sinfidagi ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasiga to‘rtinchi tartibli aniqlikka ega ayirmali sxemalarni qurishga va tadqiq qilishga bag‘ishlangan. Turg‘unlik shartlari, energetik normalarida aprior baholari olingan va ular asosida umumlashgan yechimlar sinfida qurilgan ayirmali sxemalarning aniqlik baholari olingan. Ushbu natijalar asosida umumlashgan yechimlar sinfida ikkinchi tartibli giperbolik tenglama uchun ayirmali sxemalar qurilgan va tadqiq etilgan. O‘tkazilgan hisoblash tajribalari qurilgan sonli usullarning aniqligi bo‘yicha nazariy xulosalarni tasdiqlaydi. Bundan tashqari, Laplas teskari masalasi uchun chekli ayirmalar usuli va chekli elementlar usulining ayirmali sxemalari qurilgan va tadqiq etilgan. Natijalar silliq va nosilliq yechimlarda olingan.

Birinchi paragrafda (1), (2) Koshi masalasi o‘rganilgan. Ushbu masala uchun aniq ayirmali sxemalar operatorlaridan foydalangan holda

$$\overline{D} y_{\bar{t}t} + A y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \varphi, \quad t_n \in \omega_\tau, \tag{14}$$

ayirmali sxemasi qurilgan, bu yerda $y = y^n = y(t_n)$, $\overline{D} = D + \frac{\tau^2}{12} A$, $y_{\bar{t}t} = (y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}) / \tau^2$, $\hat{y} = y(t_{n+1})$, $\check{y} = y(t_{n-1})$, $\varphi = T^t f$, $T^t u = \frac{1}{\tau^2} \int\limits_{t-\tau}^{t+\tau} (\tau - |t-\theta|) u(\theta) d\theta$, $y^n \in H$, $y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2) y + \sigma_2 \check{y}$, $\varphi \in H$, $t_n \in \omega_\tau$.

Boshlang‘ich shartlarini (4) ko‘rinishida tanlaymiz.

Quyidagi asosiy teorema isbotlangan.

Teorema 5. Faraz qilaylik, (1), (2) masalaning yechimi $u(t) \in W_2^4[0,T]$, $f(t) \in C^2[0,T]$ va

$$\sigma_1 \geq \sigma_2, \ (\sigma_1 + \sigma_2) \geq \frac{2+3\varepsilon}{6} - \frac{2\|D\|}{\tau^2 \|A\|} \tag{15}$$

shartlar o‘rinli bo‘lsin. U holda $A^* = A > 0$, $\overline{D}^* = \overline{D} > 0$ operatorlari bilan berilgan (14), (4) sxema yechimi dastlabki masala yechimiga $O(\tau^4)$ aniqlik bilan yaqinlashadi, ya‘ni quyidagi aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi:

$$\|u(t) - y(t)\|_{\mathrm{D}} \leq M\tau^4, \ M > 0 - const, \tag{16}$$

bu yerda $\mathrm{D} = D + \frac{\tau^2}{12} A + \frac{\tau^2}{2} (\sigma_1 + \sigma_2) A$.

(16) bahosi Bramble-Hilbert lemmasi va (14) ayirmali sxemaning approksimatsiya xatoligi $\psi = O(\tau^4)$ ni hisobga olgan holda olindi.

Ikkinchi paragrafda umumlashgan yechimga ega giperbolik tipdagi ikkinchi tartibli tenglama uchun birinchi boshlang‘ich-chegaraviy masalasini ko‘rib chiqilgan:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x,t), \ (x,t) \in Q_T = \{x \in \Omega, \ t \in (0,T]\}, \tag{17}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \ x \in \overline{\Omega}, \tag{18}$$

$$u = \mu(x,t), \ (x,t) \in S_\Gamma = \{x \in \Gamma = \partial\Omega, \ t \in (0,T]\}, \tag{19}$$

bu yerda

$$L = \sum_{\alpha=1}^{n} L_\alpha, \quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x_\alpha) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad 0 < c_1 \leq k_\alpha(x_\alpha) \leq c_2$$

$$\overline{\Omega} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : 0 \leq x_\alpha \leq l_\alpha, \ \alpha = 1,2,...,n\}, \quad \Omega = \overline{\Omega} \cap (0, l_\alpha),$$

$\Gamma - \Omega$ fazo chegarasi, $f(x,t)$, $\mu(x,t)$, $k_\alpha(x_\alpha)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$ funktsiyalari, va Ω fazosi chegarasi $\partial\Omega$ shundayki, (17)-(19) masala yechimi $W_2^m(Q_T)$ sinfga tegishli, bu yerda $m = 1,2$.

(1)-(3) masala uchun (14), (4) ikki parametrli ayirmali sxemalar qurilgan.

Quyidagi teorema isbotlangan.

Teorema 6. Faraz qilaylik, (17)-(19) dastlabki masala yechimi $u(x,t)\in W_2^4\left\{[0,T];W_2^m(\Omega)\cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right\}$, $f(x,t)\in C^2\left\{[0,T];W_2^m(\Omega)\right\}$ bo‘lsin va (15) shart bajarilsin. U holda, (14), (4) ayirmali sxema yechimi dastlabki masala yechimiga $O(\tau^4+|h|^{m-k-1})$ aniqlik bilan yaqinlashadi, ya’ni

$$\tilde{E}_h^{(k)}(t;z)\le M(|h|^{m-k-1}+\tau^4)\|u\|_{m,Q_T},\quad 0\le m-k-1\le 2,\quad k=-1,0,1,$$

aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi, bu yerda $M>0-const$.

Nazariy xulosalarni tasdiqlovchi test natijalari keltirilgan.

Uchinchi paragraf Laplas teskari masalasiga ayirmali sxemalar qurish va tadqiq qilishga bag‘ishlangan. Xususan, Laplasning ikki o‘lchovli

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=f(x,t),\ (x,t)\in Q_T, \tag{20}$$

tenglamasini,

$$u(x,0)=u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0)=0,\ x\in\overline{\Omega}, \tag{21}$$

boshlang‘ish shartlari va

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ t\in(0,T]. \tag{22}$$

chegaraviy shartlari bilan ko‘rib chiqamiz, bu yerda

$$Q_T=\{(x,t),\ x\in\Omega,\ t\in(0,T]\},\ \Omega=\{x:0<x<l\},\ \overline{\Omega}=\Omega\cup\Gamma=\{0,l\}.$$

(20)-(22) masalani ikkinchi tartibli differensial-operatorli tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasi sifatida ko‘rib chiqamiz. $\Omega=(0,l)$ da berilgan funksiya uchun, (u,ϑ) skalyar ko‘paytma va $\|u\|=\sqrt{(u,u)}$ normaga ega $H=L_2(\Omega)$ gilbert fazosin kiritamiz. Ushbu operatorni aniqlaymiz:

$$Au=-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ 0<x<l. \tag{23}$$

Bu yerda $A:H\to H$ operatori uchun $A=A^*\ge mE,\ m>0$ tengsizligi o‘rinli bo‘ladi. U holda (20) tenglamani (21), (22) chegaraviy shartlari bilan $u(t)\in H$ yechimini topish uchun quyidagi differensial-operatorli tenglama sifatida yoziladi:

$$\frac{d^2u}{dt^2}-Au=f(t),\quad 0<t\le T, \tag{24}$$

Boshlang‘ish shartlar esa quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$u(0)=u_0,\qquad \frac{du}{dt}(0)=0. \tag{25}$$

(24), (25) masalaning nokorrektligi kirish ma’lumotlariga (boshlang‘ich shartlar) doimiy bog‘liqlikning yo‘qligi bilan bog‘liq. Bu yerda $A^*=A\ge mE,\ \ m>0$.

(24), (25) masalani diskretlashtirish uchun kvaziobrashsheniya usuli variantidan foydalaniladi, bunda taxminiy yechim quyidagi tenglamadan aniqlanadi:

$$\frac{d^2u_\alpha}{dt^2} - Au_\alpha + \alpha A\frac{d^2u_\alpha}{dt^2} = f(t),\ 0 < t \le T \tag{26}$$

Boshlang‘ich shartlari:

$$u_\alpha(0) = u_0^\delta,\ \left\|u_0^\delta - u_0\right\| \le \delta, \tag{27}$$

$$\frac{du_\alpha}{dt}(0) = 0. \tag{28}$$

Bu yerda α - regulyarizasiya parametri, δ - ba‘zi musbat parametr.

Fazo bo‘yicha approksimatsiyalashdan keyin (26)-(28) masala quyidagi masalaga mos keladi (ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi)

$$D\frac{d^2u_{\alpha,h}}{dt^2} - \overline{A}u_{\alpha,h} = f_h(t), \quad 0 < t \le T, \tag{29}$$

$$u_{\alpha,h}(0) = u_0^\delta,\ \left\|u_0^\delta - u_0\right\| \le \delta, \tag{30}$$

$$\frac{du_{\alpha,h}}{dt}(0) = 0, \tag{31}$$

bu yerda $D = E - \alpha\overline{A},\ \overline{A} = -\Lambda,\ u_{\alpha,h} \in H_h$.

(29)–(31) masalani aniq uchqatlamli ayirmali sxema bilan approksimatsiyalaymiz:

$$\tilde{D}y_{\bar{t}t} + \overline{A}y^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \varphi,\ y_0 = u_0,\ y_1 = \overline{y}_1, \tag{32}$$

bu yerda $\tilde{D} = E - \alpha\overline{A} + \dfrac{\tau^2}{12}\overline{A},\quad \varphi = f + \dfrac{\tau^2}{12}f_{\bar{t}t},\ \overline{y}_1 = \left[E - \left(\alpha + \dfrac{\tau^2}{6}\right)\right]\overline{A}y_1 + \dfrac{\tau^2}{6}\dfrac{df}{dt}$.

(32), (4) ayirmali sxema (29)-(31) masalani $O(\tau^4)$ aniqlik bilan approksimatsiyalaydi, agarda $u(t) \in C^6[0,T],\ \ f(t) \in C^4[0,T]$.

Quyidagi teorema isbotlangan.

Teorema 7. Faraz qilaylik, $A^* = A > 0,\ D^* = D > 0$ operatorlar va

$$\sigma_1 \ge \sigma_2,\ \alpha > \frac{\tau^2}{6} + \frac{\tau^2}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

shartlari bajarilsin. U holda (32) sxemaning yechimi berilgan (29)-(31) masalaning silliq yechimiga $O(h^2 + \tau^4)$ aniqlik bilan yaqinlashadi, ya’ni quyidagi aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi:

$$\left\|y(t) - u(t)\right\|_{\tilde{D}} \le O(h^2 + \tau^4).$$

Keyinchalik, (24), (25) masalani diskretizatsiyalash uchun kvaziobrashsheniya usulining quyidagi variantidan foydalanildi:

$$\frac{d^2u_\sigma}{dt^2} - Au_\sigma + \sigma A\frac{du_\sigma}{dt} = f(t),\ 0 < t \le T, \tag{33}$$

(30), (31) boshlang‘ich shartlari bilan.

Ushbu (33) tenglamani approksimatsiyalash uchun Moskalkov-Utebaevning chekli elementlar usulining to‘rtinchi tartibli approksimatsiyaga ega ayirmali sxemalaridan foydalanildi. Turg‘unlik shartlari, aprior va aniqlik baholari olindi. Ushbu masalaning sonli yechimining test natijalari keltirilgan.

Dissertatsiya ishining **“To‘rtinchi tartibli oddiy differentsial tenglamalar sistemasi uchun yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalar va ularning tadbiqlari”** deb nomlangan **uchinchi bobda** to‘rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasiga to‘rtinchi tartibli aniqlikdagi ayirmali sxemalar qurilgan. Turg‘unlik shartlari, energetik normalarda aprior baholar olingan va ular asosida silliq yechimlar sinfida qurilgan sxemalarning aniqlik baholari isbotlangan. Bundan tashqari, oltinchi tartibli vaqt hosilasiga nisbatan yechilmagan Sobolev tipidagi tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar ko‘rib chiqilgan. Tashqi magnit maydonidagi sovuq plazmadagi elektron to‘lqin tenglamasi va siqiladigan stratifikatsiyalangan aylanuvchi suyuqlik dinamikasi tenglamasi uchun chegaraviy masalalar ko‘rib chiqilgan. Chekli ayirmalar usuli asosida vaqt va fazo bo‘yicha yuqori aniqlikdagi parametrik ayirmali sxemalar qurilgan va tadqiq qilingan. Tashqi magnit maydonidagi sovuq plazmadagi elektron to‘lqinlar tenglamasi va siqiladigan stratifikatsiyalangan aylanuvchi suyuqlik dinamikasi tenglamasi uchun, uchbu masalalarning yechimlarining etarlicha silliqligida yuqori aniqlikdagi sonli usullari qurilgan va tegishli aprior baholari olingan, ular asosida qurilgan algoritmlarning yaqinlashish tezligi va aniqligi haqidagi teoremalar isbotlangan.

Test misollarida o‘tkazilgan hisoblash tajribalari qurilgan sonli algoritmlarning samaradorligini ko‘rsatib bergan.

Birinchi paragrafda to‘rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun quyidagi

$$D\ddot{\ddot{u}} + B\ddot{u} + Au = f, \quad t_0 < t \le \mathrm{T}, \tag{34}$$

$$u(0) = u_{0,0},\ \dot{u}(0) = u_{0,1},\ \ddot{u}(0) = u_{0,2},\ \dddot{u}(0) = u_{0,3} \tag{35}$$

Koshi masalasi ko‘rib chiqildi, bu yerda D, B va A H dan H ga harakatlanuvchi, t ga bog‘liq bo‘lmagan chiziqli doimiy operatorlar, $D^* = D > 0$, $B^* = B \ge 0$, $A^* = A > 0$, $\ddot{\ddot{u}} = d^4u/dt^4$, $\dddot{u} = d^3u/dt^3$, $\ddot{u} = d^2u/dt^2, \dot{u} = du/dt$, $\forall\, t \ge 0,\ u = u(t)$, $f = f(t) \in H$, H- gilbert fazosi, (u, ϑ) ushbu fazoning skalyar ko‘paytmasi va $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$ normasi. Keyingi tadqiqotlar uchun (34), (35) masalaning yechimi kerakli silliqlikka ega deb taxmin qilamiz.

(34), (35) masala uchun quyidagi ikkinchi tartibli aniqlikga ega ayirmali sxema qurilgan:

$$Dy_{\bar{t}\,t\,\bar{t}\,t} + By_{\bar{t}\,t} + Ay = \varphi,\ t_n \in \omega_\tau,\ n = 2,3,\ldots, \tag{36}$$

$$y^0 = u_{0,0},\ y^1 = \bar{u}_{0,1},\ y^2 = \bar{u}_{0,2},\ y^3 = \bar{u}_{0,3}, \tag{37}$$

bu yerda $y_{\bar{t}t\bar{t}t} = (y^{n+2} - 4y^{n+1} + 6y^n - 4y^{n-1} + y^{n-2}) / \tau^4$, $y_{\bar{t}t} = (y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1}) / \tau^2$, $y^n = y(t_n)$, $y^{n\pm1} = y(t_n \pm \tau)$, $y^{n\pm2} = y(t_n \pm 2\tau)$.

Boshlang‘ich shartlar quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\bar{u}_{0,1} = u_{0,1} + 0.5\tau[E - (\tau^2/12)D^{-1}B]u_{0,2},\ \bar{u}_{0,2} = u_{0,2} + \tau u_{0,3},$$
$$\bar{u}_{0,3} = u_{0,3} + (3\tau/2)D^{-1}[f(0) - Bu_{0,2} - Au_{0,0}].$$

Ayirmali sxemalarning turg‘unligi nazariyasi natijalari asosida boshlang‘ich shartlar va o‘ng tomon bo‘yicha aprior baholar olingan. Ushbu baholar yordamida sxemaning aniqligi haqidagi teorema isbotlangan.

(36), (37) ayirmali sxema asosida to‘rtinchi tartibli approksimatsiyaga ega quyidagi ayirmali sxema qurilgan:

$$\bar{D}y_{\bar{t}t\bar{t}t} + \bar{B}y_{\bar{t}t} + Ay = \bar{\varphi},\quad t_n \in \omega_\tau,\quad n = 2,3,\ldots, \tag{38}$$

bu yerda $\bar{D} = D + (\tau^2/12)B$, $\bar{B} = B + (\tau^2/6)A$, $\bar{\varphi} = \varphi + (\tau^2/6)\ddot{f}$.

(38) ayirmali sxema uchun boshlang‘ich shartlarni quyidagicha tanlaymiz:

$$y^0 = u_{0,0},\ y^1 = \bar{u}_{0,1},\ y^2 = \bar{u}_{0,2},\ y^3 = \bar{u}_{0,3}, \tag{39}$$

bu yerda

$$\bar{u}_{0,1} = u_{0,1} + 0.5\tau[E - (\tau^2/12)D^{-1}B]u_{0,2} + (\tau^2/6)u_{0,3} +$$
$$+(\tau^3/24)D^{-1}[f(0) - Au_{0,0}],$$
$$\bar{u}_{0,2} = u_{0,2} + \tau u_{0,3} + (\tau^2/2)D^{-1}[f(0) - Bu_{0,2} - Au_{0,0}] +$$
$$+(\tau^3/4)D^{-1}[\dot{f}(0) - B\dot{u}_{0,2} - A\dot{u}_{0,0}],$$
$$\bar{u}_{0,3} = u_{0,3} + (3\tau/2)D^{-1}[f(0) - Bu_{0,2} - Au_{0,0}] +$$
$$+(5\tau^2/4)D^{-1}[\dot{f}(0) - B\dot{u}_{0,2} - A\dot{u}_{0,0}] + (3\tau^2/4)D^{-1}[\ddot{f}(0) - B\ddot{u}_{0,2} - A\ddot{u}_{0,0}].$$

Boshlang‘ich shartlarning approksimatsiya xatoligi (38) sxemaning approksimatsiya xatoligi bilan mos keladi, ya’ni $O(\tau^4)$.

(38) dan elementar turlantirishlardan so‘ng biz quyidagi tenglamani olamiz:

$$\tilde{Q}y_{\bar{t}t\bar{t}t} + \tilde{R}y_{\overset{\circ}{t}\overset{\circ}{t}} + Ay = \bar{\varphi}, \tag{40}$$

bu yerda $\tilde{Q} = \bar{D} - (\tau^2/4)\bar{B} - (\tau^4/4)\sigma A$, $\tilde{R} = \bar{B} + \tau^2\sigma A$.

Quyidagi teorema isbotlangan.

Teorema 8. Faraz qilaylik, $D^* = D > 0$, $B^* = B \ge 0$, $A^* = A > 0$ va $D > (\tau^4/4)A$ sharti o‘rinli bo‘lsin. U holda, (40), (39) ayirmali sxemaning yechimi (34), (35) dastlabki masalaning silliq yechimiga yaqinlashadi va

$$\|y(t_n) - u(t_n)\| \le O(\tau^4),\ t_n \in \bar{\omega}_\tau$$

aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi.

Ikkinchi paragraf tashqi magnit maydonidagi sovuq plazmadagi elektron to‘lqinlar tenglamasi uchun quyidagi boshlang‘ich chegaraviy masala ko‘rib chiqilgan:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{P_e}^2 + \omega_{B_e}^2\right)\Delta_2 u + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{P_e}^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{B_e}^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{41}$$

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,t)\right|_{t=0}=u_{0,k},\quad k=\overline{0,3},\quad x\in\Omega, \tag{42}$$

$$u(x,t)\big|_{\Gamma=\partial\Omega}=\mu(t),\quad t\in[0,T], \tag{43}$$

bu yerda $\Delta_2=\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2$, $\omega_{p_e}^2$ -elektronlar uchun Lengmyura chastotasi, $\omega_{B_e}^2$ - elektronlarning larmor chastotasi, $u=u(x,t)$ - elektr maydonining umumlashgan potentsiali, $\Omega=\{x=(x_1,x_2,x_3):0<x_\alpha<l_\alpha,\ \alpha=1,2,3\}$, $Q_T=\Omega\cup(0,T]$.

Keyingi tadqiqotlar uchun (41) tenglamani quyidagi shakldа qayta yozamiz:

$$L_0\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}+L_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+L_2 u=f(x,t),\quad \frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,0)=u_{0,k},\ k=\overline{0,3},\ u(x,t)\big|_{\Gamma}=\theta(t), \tag{44}$$

bu yerda $L_0=\Delta_2+\partial^2/\partial x_3^2$, $L_1=\omega_0^2 L_0$, $L_2=\omega_1^2\partial^2/\partial x_3^2$, $\omega_0^2=\omega_{p_e}^2+\omega_{B_e}^2$, $\omega_1^2=\omega_{p_e}^2\omega_{B_e}^2$.

L_0, L_1 va L_2 operatorlarini fazo bo‘yicha teng o‘lchovli to‘rlarda approksimatsiyalab quyidagi to‘rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini olamiz:

$$D\frac{d^4u_h}{dt^4}+B\frac{d^2u_h}{dt^2}+Au_h(t)=f_h,\quad \frac{d^k u_h}{dt^k}(0)=u_{0,k,h},\ k=\overline{0,3}, \tag{45}$$

bu yerda D, B va A H dan H ga harakatlanuvchi, t ga bog‘liq bo‘lmagan chiziqli doimiy operatorlar, $D^*=D>0$, $B^*=B\geq 0$, $A^*=A>0$, $\forall\, t\geq 0$, $u_h=u_h(t)$, $f_h=f_h(t)\in H_h$, u_h - fiksirlangan tugundagi funksiya qiymati, $x=(i_1h_1,i_2h_2,i_3h_3)$

$$D=\Lambda,\ B=\omega_0^2\Lambda,\ A=\omega_1^2\Lambda_3,\ \Lambda=\sum_{\alpha=1}^{3}\Lambda_\alpha,\ \Lambda_m u_h=-u_{h,x_m\bar{x}_m},\ m=1,2,3.$$

D, B va A operatorlari L_0, L_1 va L_2 operatorlarini mos ravishda ikkinchi tartib bilan approksimatsiyalaydi, ya‘ni $O(|h|^2)$, $|h|=\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}$.

Keyin, $[0,T]$ oralig‘ida bir xil $\overline{\omega}_\tau=\{t_n=n\tau,\ n=0,1,...;\ \tau>0\}$ to‘rni kiritamiz. Faraz qilaylik, y u_h ning approksimatsiyasi bo‘lsin. Birinchi paragrafda (45) masala uchun to‘rtinchi tartibli approksimatsiyaga ega quyidagi ayirmali sxema qurilgan edi ((38), (39) sxema):

$$\bar{D}y_{\bar{t}t\bar{t}t}+\bar{B}y_{\bar{t}t}+Ay=\bar{\varphi},\ t_n\in\omega_\tau, \tag{46}$$

$$y^0=u_{0,0},\ y^1=\bar{u}_{0,1},\ y^2=\bar{u}_{0,2},\ y^3=\bar{u}_{0,3}. \tag{47}$$

bu yerda $\bar{D}=D+(\tau^2/12)B$, $\bar{B}=B+(\tau^2/6)A$, $\bar{\varphi}=\varphi+(\tau^2/6)\ddot{f}$.

Quyidagi teorema isbotlangan.

Teorema 8. Faraz qilaylik, $D^* = D > 0$, $B^* = B \geq 0$, $A^* = A > 0$ bo‘lsin va $\bar{D} \geq (\tau^4 / 4)A$ turg‘unlik sharti bajarilsin. U holda, (46), (47) ayirmali sxema yechimi dastlabki berilgan (41)-(43) yoki (44), (42), (43) masalaning silliq yechimiga yaqinlashadi va uchbu yechim uchun

$$\left\| y(x_i, t_n) - u(x_i, t_n) \right\|_{\bar{A}} \leq O(|h|^2 + \tau^4), \; y, u \in H_h, \; x_i \in \bar{\omega}_h, \; t_n \in \bar{\omega}_\tau . \qquad (48)$$

aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi.

(46), (47) ayirmali sxemalar asosida quyidagi ikki parametrli ayirmali sxemalar oilasi qurilgan:

$$\bar{D} y_{\bar{t} t \bar{t} t} + \bar{B} y_{\bar{t} t} + A y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \varphi, \; t_n \in \omega_\tau , \qquad (49)$$

bu yerda σ_1, σ_2 ayrim doimiylar, sxema parametrlari, ularning mavjudligi har xil ayirmali sxemalarni tanlashga imkon beradi, ammo ular sxemaning turg‘unligi va yaqinlashishiga ta‘sir qilmaydi. Dastlabki shartlar o‘zgarmaydi.

Quyidagi natija olingan.

Teorema 9. Faraz qilaylik, $D^* = D > 0$, $B^* = B \geq 0$, $A^* = A > 0$ bo‘lsin va $D > (\tau^4 / 4)A$ sharti bajarilsin. U holda, (49), (47) ayirmali sxema yechimi dastlabki berilgan (41)-(43) masalaning silliq yechimiga yaqinlashadi va ushbu yechim uchun (48) aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi.

Agar berilgan differensial masalaning yechimi fazoviy o‘zgaruvchilari bo‘yicha yetarli darajadagi silliqlikka ega bo‘lsa, u holda yuqori tartibli aniqlikdagi ayirmali operatorlarni qurish mumkin. Yuqori tartibli aniqlikga ega bo‘lgan ayirmali operatorlarini olish turli yo‘llar bilan amalga oshirilishi mumkin. Masalan, (49), (47) ayirmali sxemasin, (40) ko‘rinishida yozamiz va $\tilde{Q}$, $\tilde{R}$, A operatorlarini ($\varphi \equiv 0$ bo‘lganda)

$$\tilde{Q} = \bar{D} - \frac{\tau^2}{4}\left(\bar{B} - \sigma \sum_{m=1}^{3} \frac{h_m^2}{12 k_m} A_m \right), \quad \tilde{R} = \bar{B} + \tau^2 \sigma \sum_{m=1}^{3} \frac{h_m^2}{12 k_m} A_m ,$$

$$A = \sum_{m=1}^{3} A_m - \sum_{\substack{m,n=1 \\ m \neq n}}^{3} \frac{h_m^2}{12 k_m} A_m A_n$$

ko‘rinishida tanlaymiz, bu yerda $A_m y = -\Lambda_m y$. Shuning uchun, $\tilde{Q}$, $\tilde{R}$ va A ayirmali operatorlari L_0, L_1 va L_2 differensial operatorlariga mos ravishda to‘rtinchi tartibli approksimatsiya xatoligida yaqinlashadi, ya‘ni, $O(|h|^4)$, $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}$.

Uchinchi paragrafda xuddi shunday natijalar birinchi turdagi boshlang‘ich-chegaraviy shartlarga ega bo‘lgan quyidagi siqiladigan stratifikatsiyalangan aylanuvchi suyuqlik dinamikasi tenglamasi uchun olingan:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^4 u}{\partial t^4} = \frac{\partial^2}{\partial t^2} K_0 u + K_1 u + f(x,t) , \quad (x,t) \in Q_T , \qquad (50)$$

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,t)\right|_{t=0}=u_{0,k},\quad k=\overline{0,3},\quad x\in\Omega, \tag{51}$$

$$u(x,t)\big|_{\Gamma}=\mu(t),\quad t\in[0,T], \tag{52}$$

bu yerda

$$K_0=\Delta_3-(\beta^2+\alpha^2/c^2),\quad K_1=\omega_0^2\Delta_2+\alpha^2\partial^2/\partial x_3^2-\alpha^2\beta^2,$$

$$\Delta_3=\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2+\partial^2/\partial x_3^2,\quad \Delta_2=\Delta_3-\partial^2/\partial x_3^2,$$

ω_0^2 - Vyaysyal-Brent chastotasining kvadrati, $u=u(x,t)$ - harakat tezligi, $c\neq 0$ - ovoz tezligi, α,β - ba‘zi doimiylar, $Q_T=\Omega\times(0,T]$, $\Omega=\{0<x_\alpha<l_\alpha,\ \alpha=1,2,3\}$.

K_0 va K_1 operatorlarining fazo bo‘yicha teng o‘lchovli to‘rlarda ayirmali sxema bilan approksimatsiyalasak, (45) to‘rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun Koshi masalasini olamiz, bu yerda

$$D=E,\quad B=c^2\Lambda-(c^2\beta^2+\alpha^2)E,\quad A=c^2\alpha^2(\Lambda-\beta^2E),\ \Lambda=\sum_{\alpha=1}^{3}\Lambda_\alpha .$$

B va A operatorlari K_0 va K_1 operatorlarini mos ravishda ikkinchi tartib bilan approksimatsiyalaydi, ya‘ni $O(|h|^2)$, $|h|=\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}$.

Bu yerda ham (66), (47) ga o‘xshash ayirmali sxema qurilgan va ushbu sxema asosida quyidagi parametrli ayirmali sxema qurilgan:

$$\bar{D}y_{\bar{t}t\bar{t}t}+\bar{B}y_{\bar{t}t}^{(\sigma_1,\sigma_2)}+Ay^{(\sigma_3,\sigma_4)}=\varphi,\ t_n\in\omega_\tau . \tag{53}$$

bu yerda $y^{(\sigma_1,\sigma_2)}=\sigma_1\hat{y}+(1-\sigma_1-\sigma_2)y+\sigma_2\check{y}$, $y^{(\sigma_3,\sigma_4)}=\sigma_3\hat{y}+(1-\sigma_3-\sigma_4)y+\sigma_4\check{y}$, $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$ ba‘zi bir doimiylar, sxema parametrlari, ularning mavjudligi turli xil oshkor va oshkormas sxemalarni tanlash va ularning fazoviy aniqligini oshirish imkonini beradi.

$\sigma_1=\sigma_2=\sigma$, $\sigma_3=\sigma_4=\theta$ parametrlarni tanlash, quyidagi teoremani isbotlashga imkon bergan.

Teorema 10. Faraz qilaylik, $D^*=D>0$, $B^*=B\geq 0$, $A^*=A>0$ va $\theta\leq 1/2$, $\sigma\leq 1/4$, $\bar{D}\geq(\tau^4/8)A$ shartlari o‘rinli bo‘lsin. U holda, (53), (47) ayirmali sxemaning yechimi dastlabki berilgan (50)-(52) masalaning silliq yechimiga yaqinlashadi va uning yechimi uchun quyidagi

$$\|y(x_i,t_n)-u(x_i,t_n)\|_{\bar{A}}\leq O(h^2+\tau^4),\ \ y,u\in H_h,\ x_i\in\bar{\omega}_h,\ t_n\in\bar{\omega}_\tau$$

aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi.

XULOSA

Ushbu dissertatsiyada silliq va nosilliq yechimlar sinflarida ikkinchi va to‘rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalarni qurish, tadqiq qilish va ularni ikkinchi tartibli giperbolik tipdagi xususiy hosilali klassik tenglamalar va oltinchi tartibli Sobolev tipidagi noklassik tenglamalarni yechish va tadqiq qilishga bag‘ishlangan.

«Nostatsionar tenglamalarni yuqori aniqlikdagi chekli ayirmalar usullari bilan yechish» mavzusidagi dissertatsiya bo‘yicha olib borilgan tadqiqot natiyjalarning asosiy xulosalari quyidagilardan iborat:

- ikkinchi va to‘rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasiga silliq yechimlar sinfida yangi oshkor va oshkormas ayirmali sxemalar qurilgan, approksimatsiya xatoligi, turg‘unlik shartlari va aniqlik baholari olingan;
- ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasiga qurilgan yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalari asosida additiv ayirmali sxemalar qurilgan va tadqiq qilingan;
- ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamani sonli yechich uchun umumlashgan yechimlar sinfida chekli ayirmalar usulining yuqori aniqlikdagi oshkor va oshkormas ayirmali sxemalari ishlab chiqilgan va tadqiq qilingan;
- umumlashgan yechimlar sinfida ikkinchi tartibli ko‘p o‘lchovli giperbolik tenglama uchun ayirmali sxemalari qurilgan va tadqiq qilingan;
- Laplas tenglamasi uchun teskari masalaga yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalari qurilgan, yaqinlashish va aniqlik teoremalari isbotlangan;
- to‘rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemalari uchun qurilgan ayirma sxemalari asosida tashqi magnit maydondagi sovuq plazmadagi elektron to‘lqinlar tenglamasi va siqiladigan stratifikatsiyalangan aylanuvchi suyuqlik dinamikasi tenglamasi uchun boshlang‘ich chegaraviy masalalar tadqiq etilgan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

КАРАКАЛПАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАЗЫМБЕТОВА МУХАББАД МАХСЕТБАЕВНА

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.03-Вычислительная математика и дискретная математика

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

ТАШКЕНТ – 2024

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за № B2024.2.PhD/FM500.

Диссертация выполнена в Каракалпакском государственном университете имени Бердаха.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» по адресу (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Утебаев Даулетбай** доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Хаётов Абдулло Рахмонович** доктор физико-математических наук, профессор
	Аширалиев Чаряр доктор физико-математических наук, профессор (Турция)
Ведущая организация:	**Термизский государственный университет**

Защита диссертации состоится «28» 11 2024 года в 14^00 часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за № 134). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «14» 11 2024 года.
(протокол рассылки № 2 от «24» 09 2024 года).

М.М.Арипов
Председатель Научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

З.Р.Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н.

Р.Д. Алоев
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI * MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные и практические исследования, проводимые во всем мире, посвящены созданию численных методов повышенной точности для математических моделей нестационарных процессов механики сплошных сред. Поэтому решение начально-краевых задач для нестационарных уравнений в частных производных с использованием метода конечных разностей особенно актуально в таких областях, как газовая динамика, задачи теории внутренних волн, задачи плазмы, задачи физики полупроводников и др. Одной из важнейших задач является построение и исследование разностных схем повышенной точности для нестационарных уравнений при естественных требованиях гладкости решения исходной дифференциальной задачи.

В последнее время в мире большое внимание уделяется построению и исследованию разностных схем повышенной точности для решения линейных и нелинейных уравнений математической физики, в том числе неклассическим уравнениям Соболевского типа, для которых не всегда удается найти аналитическое решение. В связи с этим разработка высокоточных устойчивых численных методов и их экономичных алгоритмов решения начально-краевых задач для уравнений гиперболического, а также уравнений Соболевского типа является одним из целевых научных исследований.

В нашей стране большое внимание уделяется современным направлениям, таким как разработка численных методов решения прикладных задач в области математической физики, механики и энергетики, имеющим научное и практическое применение фундаментальных наук. Следовательно, решение практических задач в таких областях, как механика сплошной среды, физика плазмы, физика полупроводников, океанология и др. являются основой теоретических исследовании численных методов. В данном направлении получены существенные результаты по построению устойчивых разностных схем повышенной точности, а также разработке их экономичных алгоритмов.

Достижение научных результатов на уровне мировых стандартов по приоритетным направлениям «функциональный анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, математическая физика, математическое моделирование, вычислительная и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика» является одной из основных задач фундаментальных исследований в деятельности Института математики имени В.И. Романовского АН РУз[1]. Для выполнения постановления важно разработать и исследовать численные методы повышенной точности для нестационарных уравнений математической физики.

[1] Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП–4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 07 мая 2020 года.

Данная диссертационная работа в определенной степени служит выполнению задач, предусмотренных в Указах и Постановлениях Президента Республики Узбекистан №УП-60 от 28 января 2022 года «О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы», № ПП-4708 от 7 мая 2020 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», № УП-5847 от 8 октября 2019 года «Об утверждении Концепции развития системы высшего образования Республики Узбекистан до 2030 года», № ПП-3682 от 27 апреля 2019 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов» и № УП-6198 от 1 апреля 2021 года «О совершенствовании системы государственного управления в сфере развития научной и инновационной деятельности», а также в других нормативно-правовых актах, принятых в данной сфере.

Соответствие исследований приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Фундаментальный вклад в развитие численных методов решения задач математической физики внесли исследования А.Н. Тихонова, А.А. Самарского, Г.И. Марчука, Н.Н. Яненко, С.К. Годунова, Р. Рихтмайера, О.А. Ладыженской, Ю.И. Шокина, В.Л. Макарова, Р.Д. Лазарова, А.В. Гулина, Н.Н. Калиткина, М.Н. Москалькова, П.Н. Вабищевича, П.П. Матуса, М.М. Арипова, Р.Д. Алоева и многие др. Особого внимания заслуживают численные методы решения некорректных или обратных задач математической физики. Такие задачи аналитически и численно решались в работах А.Н. Тихонова, М.М. Лаврентьева, А.Б. Бакушинского, А.В. Гончарского, С.И. Кабанихина, Ж.Л. Лионса, Р. Латтеса, В.К. Иванова, В.Г. Романова и др. Многочисленные работы по изучению дифференциальных уравнений в частных производных высокого порядка, такие, как неклассические уравнения Соболева посвящены научные работы С.А. Габова, А.Г. Свешникова, М.О. Корпусова, Ю.Д. Плетнера, А.И. Кожанова, Г.А. Свиридюка, S.G. Rossby, M.I. Lighthill, P.I. Chen и другие, где рассмотрены аналитические методы решения начально-краевых задач для линейных и нелинейных уравнений в частных производных. Численными методами для решения таких задач занимались М.М. Москальков, Н.Н. Калиткин, А.Б. Альшин, Е.А. Альшина, А.А. Замышляева, М.М. Арипов, Д. Утебаев и другие. Численные методы повышенной точности для нестационарных уравнений математической физики с гладкими и негладкими решениями построены и исследованы в работах Г.И. Марчука, В.В. Шайдурова, В.И. Агошкова, М.М. Москалькова, М.М. Арипова, Д. Утебаева. В их работах, в основном, получены оценки точности разностных схем повышенной аппроксимации на основе метода конечных разностей и метода конечных элементов. Кроме того, такие исследования проводились в работах А.А. Замышляева, где разработана алгоритм для численного решения, основанной на модифицированном методе Галеркина и методе Ритца, а также в работах Н.Н Калиткина, А.Б. Альшина, Е.А. Альшиной, где нестационарные уравнения высокого порядка решаются методом конечных разностей второго порядка точности на квазиравномерных сетках. Аналогичные исследования проводились в работах V. Vucheva, N. Kolkovska, где построены и исследованы разностные схемы первого и второго порядков точности по времени и по пространственным переменным.

Как известно, при пространственной аппроксимации нестационарных уравнений математической физики методам конечных разностей или методом конечных элементов получается системы обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности (метод прямых). Разностных схем повышенной точности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка построены и исследованы в работах М.М. Москалькова, П.П. Матуса, П.Н. Вабищевича, М.М. Арипова, Д. Утебаева. Разностных схем метода конечных элементов повышенной точности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка построены и исследованы в работах М.М. Москалькова, М.М. Арипова, Д. Утебаева, Х.Л. Атаджанова, Ж.А. Нуруллаева. В работах K.A. Hussain, F. Ismail на основе методов Рунге-Кутты построены и исследованы численные методы для общего уравнения в частных производных четвертого порядка, где пространственные переменные аппроксимируется методом конечных разностей. А в работах O.A. Taiwo, O.M. Ogunlaran, на основе тау-метода, а в работах J. Talwar, R. Mohanty, K.K. Singh, D. I. Singh, на основе метода конечных разностей исследованы решения обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка. Получены оценки точности второго порядка, кроме того, указаны способы получения более высокого порядка точности.

Для приближенного решения начально-краевых задач для многомерных уравнений с частными производными большое внимание уделяется построению и исследованию аддитивных разностных схем, где осуществляются переход от многомерной сложной задачи к цепочке более простых задач. Такие исследования проводились в работах А.А. Самарского, П.Н. Вабищевича и др.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполнена диссертация.

Диссертационое исследование выполнено в рамках плана научно-исследовательской работы Каракалпакского государственного университета им. Бердаха по теме «Численные методы решения линейных и нелинейных нестационарных задач прикладной математики».

Целью исследования является построение и исследование разностных схем повышенной точности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков в классах гладких и негладких решении, применение этих разностных схем к решению уравнений гиперболического типа, а также получения их условие устойчивости, оценки сходимости и точности.

Задачи исследования:

разработка явных и неявных разностных схем методом конечных разностей повышенной точности для численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков в классах гладких решении;

разработка явных и неявных разностных схем методом конечных разностей повышенной точности для численного решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с обобщенными решениями;

построение и исследование разностных схем для многомерных гиперболических уравнений второго порядка с обобщенными решениями;

получение априорных оценок сходимости и оценок точности при минимальных требованиях к гладкости решения корректных и некорректных начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных;

применение построенных новых явных и неявных разностных схем повышенной точности для численного моделирования некоторых начально-краевых задач для неклассических уравнений Соболевского типа.

Объект исследования. Объектом исследования является системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков, а также начально-краевые задачи для уравнений гиперболического типа.

Предмет исследования. Предметом исследования является разработка численных методов высокого порядка точности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков, а также для некоторых прямых и обратных начально-краевых задач для уравнений гиперболического типа.

Методы исследований. В диссертации использованы методы алгебры, функционального анализа, теория дифференциальных уравнений, вычислительной математики, численного моделирования, а также технология алгоритмизации.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

построены новые явные и неявные разностные схемы для обыкновенных дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков в классах гладких решении, получены погрешности аппроксимации, условия устойчивости и оценки точности;

на основе разностных схем повышенной точности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка построены и исследованы аддитивные разностные схемы;

разработаны и исследованы явные и неявные разностные схемы метода конечных разностей повышенной точности для численного решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с обобщенным решением;

построены разностные схемы для многомерного гиперболического уравнения второго порядка в классе обобщенных решений, получены погрешности аппроксимации, условий устойчивости и оценки точности;

построены разностные схемы повышенной точности для обратной задачи Лапласа, получены оценки сходимости и точности;

построены новые разностные схемы повышенного порядка точности по времени для начально-краевых задач для уравнений электронных волн в холодной плазме во внешнем магнитном поле и динамики сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости и получены оценки точности.

Практические результаты исследования следующие:

на основе метода конечных разностей построены новые явные и неявные разностные схемы повышенной аппроксимации для численного решения нестацонарных уравнений второго и четвертого порядков в классе гладких и негладких решений;

построены алгоритмы высокого порядка точности для начально-краевых задач для гиперболических уравнений второго порядка, уравнений электронных волн в холодной плазме во внешнем магнитном поле и уравнения динамики сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости.

Достоверность результатов исследования. Теоретические результаты, полученные в диссертационной работе, основаны на строгом доказательстве соответствующих теорем, а также подтверждении теоретических выводов на основе вычислительных экспериментов.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость полученных в диссертации результатов объясняется тем, что новые явные и неявные разностные схемы, построенные для решения задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков, могут быть использованы для численного решения абстрактной задачи Коши, а также практические задачи и развивать теорию разностных схем.

Практическая значимость результатов исследования объясняется тем, что новые явные и неявные разностные схемы, а также алгоритмы и программы, построенные на основе метода конечных разностей, могут быть использованы для численного решения начально-краевых задач для различных уравнений в частных производных.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по построению разностных схем повышенной точности для нестационарных уравнений второго и четвертого порядков реализованы в следующих научных проектах:

Явные и неявные разностные схемы повышенной точности метода конечных разностей, построенные в классе обобщенных решений системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка был использован в научно-исследовательском проекте ОТ-Ф4-30 «Изучение особенностей решений двойной нелинейный кросс-систем имеющий конвективный перенос с переменной плотностью, источником и стоком» (2017-2020 гг.) для создания оптимального дифференциального метода приближенного решения диффузионно-конвективных задач и использовался для оценки погрешности, устойчивости и точности ее аппроксимации (справка № 04/11-5328 от 28 июня 2024 года Национального университета

Узбекистана). Использование этих научных результатов позволило построить новые оптимальные алгоритмы решения диффузионно-конвекционных задач.

Методы построения приближенных решений для обратных задач и их численное моделирование, а также проведенные вычислительные эксперименты были использованы в фундаментальном проекте ОТ-Ф2-77 «Совершенствование методов прогнозирования надежности полупроводниковых приборов на основе моделирования с учетом внутренних дефектов структуры» для получения новых информаций о процессах в полупроводниковых структурах с различными дефектами и определении их электрофизических и оптических свойств (Справка № 01-22-04/337 от 27.06.2024 года Каракалпакского государственного университета). Применение полученных научных результатов позволило определить причины существования дефектов в задачах физики полупроводников, обновить методы создания полупроводниковых приборов, обеспечивающих определенную устойчивость, и развить теорию полупроводников;

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационной работы докладывалась на 9 научно-практических конференциях, в том числе на 6 международных и 3 республиканских.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 18 научных работ, из них 9 в научных изданиях, входящих в перечень Высшей аттестационной комиссии Республики Узбекистан для публикации результатов докторских диссертаций, в том числе 4 опубликованы в зарубежных научных журналах. Кроме того, получены 2 авторских свидетельства на программы для ЭВМ.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Объем диссертации составляет 91 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики Узбекистан, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и указана степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В начале **первой главы «Разностные схемы повышенной точности для уравнений второго порядка»** даны некоторые вспомогательные материалы, далее построены разностные схемы с весами четвертого порядка точности для абстрактной задачи Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Получены условия устойчивости, априорные оценки в энергетических нормах и на их основе доказаны оценки точности построенных схем в классе гладких решений. На основе разностных схем с весами предложены аддитивные разностные схемы четвертого порядка точности по обоим переменным. Приведен вычислительный алгоритм как локально-одномерных задач. Приведен пример решения многомерной начально-краевой задачи гиперболического типа в прямоугольной области. Доказана теорема о сходимости решения разностной схемы к решению исходной задачи с четвертым порядком точности по всем переменным. Указаны алгоритмы реализации разностных схем построенных для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Проведенные вычислительные эксперименты на тестовых примерах иллюстрирует эффективность построенных численных методов.

В **первом параграфе** приведены некоторые вспомогательные материалы.

Во **втором параграфе** рассматривается абстрактная задача Коши для нестационарного уравнения второго порядка:

$$D\ddot{u} + Au = f, \quad t_0 < t \le T, \tag{1}$$

$$u(t_0) = u_0, \quad \dot{u}(t_0) = u_1, \tag{2}$$

где A и D линейные постоянные, не зависящие от t операторы из $H \to H -$ гильбертово пространства с соответствующим скалярным произведением и нормой. Здесь $A^* = A > 0,\ D^* = D > 0$; $\forall\, t \ge 0,\ u = u(t),\ f = f(t) \in H$; $\ddot{u} = d^2u/dt^2, \ \dot{u} = du/dt$.

Для задачи (1), (2) построена разностная схема

$$\bar{D}y_{\bar{t}t} + Ay^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \varphi, \ \ t_n \in \omega_\tau, \tag{3}$$

$$y(0) = y_0, \ \ y_t(0) = D^{-1}\bar{y}_1. \tag{4}$$

Здесь $\bar{D} = \left(D + (\tau^2/12)A\right)$, $y^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y + \sigma_2 \check{y}$, $\sigma_1,\ \sigma_2 - const$, $\varphi = f + (\tau^2/12) f_{\bar{t}t}$, $\bar{y}_1 = \left(D - (\tau^2/6)A\right)y_1 + (\tau^2/6)\dot{f}$, .

На основе результатов теории разностных схем даказана следующий результат.

Теорема 1. Пусть решение задачи (1), (2) $u(t) \in C^6[0,T],\ f(t) \in C^4[0,T]$ и выполнены условия $\sigma_1 \ge \sigma_2$, $(\sigma_1 + \sigma_2) \ge [(2+3\varepsilon)/6] - 2\|D\|/(\tau^2\|A\|)$. Тогда решение разностной схемы (3), (4) с операторами $A^* = A > 0,\ \bar{D}^* = \bar{D} > 0$ сходится к гладкому решению исходной задачи с точностью $O(\tau^4)$, т.е. имеет место оценка точности

$$\|y(t) - u(t)\|_{\mathrm{D}} \le M\tau^4, \ M > 0 - const,$$

где $\mathrm{D} = D + (\tau^2/12)A + (\tau^2/2)(\sigma_1 + \sigma_2)A$.

Далее на основе разностной схемы (3), (4) построена аддитивная разностная схема

$$y_{\bar{t}t}+R^{-1}\sum_{\alpha=1}^{p}A^{(\alpha)}y=R^{-1}\varphi,\quad t_n\in\omega_\tau, \tag{5}$$

где $R=\sum_{\beta=1}^{p}(\overline{D}+\sigma\tau^2A^{(\beta)})$, $A=\sum_{\alpha=1}^{p}A^{(\alpha)},\ A^{(\alpha)}=\left(A^{(\alpha)}\right)^*>0,\ \alpha=\overline{1,p}$.

Доказана следующая теорема.

Теорема 2. Пусть решение задачи (1), (2) $u(t)\in C^6[0,T],\ f(t)\in C^4[0,T]$ и выполнено условие $\sigma\geq 1/4$. Тогда решение схемы (5), (4) с операторами $R=R^*>0,\ A^*=A>0$ сходится к решению исходной задачи с точностью $O(\tau^4)$, т.е. имеет место оценка точности

$$\|u(t)-y(t)\|_R\leq M\tau^4,\ M>0-const.$$

В третьем параграфе на основе результатов предыдущего параграфа построены аддитивные разностные схемы ориентированые на аддитивные представления стационарного оператора A в виде

$$A=\sum_{\alpha=1}^{p}A^{(\alpha)},\ A^{(\alpha)}=\left(A^{(\alpha)}\right)^*>0,\ \alpha=\overline{1,p}. \tag{6}$$

При этом переход с одного временного слоя t_n на другой t_{n+1} связан с решением задач для отдельных постоянных операторов $A^{(\alpha)}$ в аддитивном разложении (6). Тем самым, исходная задача распадается на p более простых подзадач. Пусть в схеме (3) $\sigma_1=\sigma_2=\sigma$ (симметричная схема):

$$\overline{D}y_{\bar{t}t}+Ay^{(\sigma)}=\varphi,\quad t_n\in\omega_\tau, \tag{7}$$

где $y^{(\sigma)}=\sigma\hat{y}+(1-2\sigma)y+\sigma\check{y}$. Начальные условия имеют вид (4). Условие устойчивости схемы (6) принимает вид

$$\sigma\geq(2+3\varepsilon)/12-\|D\|/(\tau^2\|A\|).$$

На основе схемы (7) построим аддитивную схему. Для этого приведем разностную схему (7) к канонической форме трехслойных разностных схем:

$$(\overline{D}+\sigma\tau^2A)y_{\bar{t}t}+Ay=\varphi,\quad t_n\in\omega_\tau.$$

При этом условие устойчивости $\overline{D}+\sigma\tau^2A\geq[(1+\varepsilon)/4]\tau^2A$ будет выполнено при всех $\sigma\geq 1/4$.

Соответствующая к (7) аддитивная схема определяется в виде

$$y_{\bar{t}t}+R^{-1}\sum_{\alpha=1}^{p}A^{(\alpha)}y=R^{-1}\varphi,\quad t_n\in\omega_\tau, \tag{8}$$

где $R=\sum_{\beta=1}^{p}(\overline{D}+\sigma\tau^2A^{(\beta)})$.

Таким образом, имеет место следующий результат.

Теорема 3. Пусть решение задачи (1), (2) $u(t)\in C^6[0,T]$, $f(t)\in C^4[0,T]$ и выполнено условие $\sigma \geq 1/4$. Тогда решение схемы (8), (4) с операторами $R=R^*>0,\ A^*=A>0$ сходится к гладкому решению исходной задачи с точностью $O(\tau^4)$, т.е. имеет место оценка точности

$$\|u(t)-y(t)\|_R \leq M\tau^4,\ M>0-const.$$

На основе данной методики исследована p мерные гиперболическое уравнение второго порядка в прямоугольной области $\Omega=\{x: x=(x_1,x_2,...,x_p),\ 0<x_\alpha<l_\alpha,\ \alpha=\overline{1,p}\}$, $\overline{\Omega}=\Omega\cup\Gamma$:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+Lw=f(x,t),\ x\in\Omega,\ 0<t\leq T \tag{9}$$

с краевыми и начальными условиями:

$$w(x,t)=0,\ x\in\Gamma=\partial\Omega,\ \ 0<t\leq T\ , \tag{10}$$

$$w(x,0)=w_0(x),\ \ \frac{\partial w}{\partial t}(x,0)=u_1(x),\ \ \ x\in\Omega. \tag{11}$$

Здесь $Lw=-\sum_{\alpha=1}^{p}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k(x)\frac{\partial w}{\partial x_\alpha}\right)$.

При этом, разностная схема соответствующей к схеме (7) имеет вид

$$\Im y_{\bar{t}t}+\sum_{\alpha=1}^{p}\Re^{(\alpha)}y=\tilde{\varphi},\ \ t_n\in\omega_\tau, \tag{12}$$

где $\Im=\sum_{\beta=1}^{p}\left(\tilde{D}+\sigma\tau^2\overline{A}^{(\beta)}\right)$, $\Re=\overline{A}$, $\tilde{\varphi}=f^n+\frac{\tau^2}{12}f_{tt}^n+\frac{h_1^2}{12}f_{x_1x_1}^n+\frac{h_2^2}{12}f_{x_2x_2}^n$,

$f_{tt}^n=\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$, $f_{x_\alpha x_\alpha}^n=\frac{\partial^2 f}{\partial x_\alpha^2}$, $\alpha=1,2$. Здесь $\tilde{D}=E+\frac{\tau^2}{12}A+\frac{h_1^2+h_2^2}{12}A_1A_2$.

Начальные условия для (12) имееют вид

$$y^0=u_0,\ \ \ \Im y_t(0)=\Im u_1+\frac{\tau}{2}(\tilde{\varphi}^0-\Re u_0)+\frac{\tau^2}{6}\left(\frac{\partial f^0}{\partial t^2}-\Re u_1\right). \tag{13}$$

Доказано следующее утверждение.

Теорема 4. Пусть решение задачи (9)–(11) $u(x,t)\in C_{t\,x}^{6,6}\{\overline{Q}_T\}$, $f(x,t)\in C_{t\,x}^{4,4}\{\overline{Q}_T\}$ и выполнено условие $\sigma\geq 1/4$. Тогда схема (12) с начальными условиями (13) и с операторами $\Im=\Im^*>0,\ \Re=\Re^*>0$ сходится к гладкому решению исходной задачи с точностью $O(\tau^4+|h|^4)$, т.е. имеет место оценка точности

$$\|u(x,t)-y(x,t)\|_\Im\leq M(|h|^4+\tau^4),\ M>0-const.$$

Далее приведены численные результаты на тестовом примере для уравнения колебания струны, являющиеся простейшим представителем уравнений гиперболического типа второго порядка, которому присущи все характерные особенности этих уравнений.

Во второй главе диссертации «**Разностные схемы повышенной точности для дифференциальных уравнений с обобщенными решениями**» построены и исследованы разностные схемы с весами четвертого порядка точности для абстрактной задачи Коши для уравнения второго порядка в классе обобщенных решений. Получены условия устойчивости, априорные оценки в энергетических нормах и на их основе доказаны оценки точности построенных схем в классе обобщенных решений. На основе этих результатов построены и исследованы разностные схемы для гиперболических уравнений второго порядка с обобщенными решениями. Проведенные вычислительные эксперименты подтверждают теоретические выводы по точности построенных численных методов. Далее, построены и исследованы разностные схемы метода конечных разностей и метода конечных элементов для обратной задачи Лапласа. Получены результаты с гладкими и негладкими решениями.

В **первом параграфе** рассматривается задача Коши (1), (2). Для данной задачи с применением операторов точных разностных схем построена разностная схема

$$\overline{D}y_{\bar{t}t}+Ay^{(\sigma_1,\sigma_2)}=\varphi,\quad t_n\in\omega_\tau, \tag{14}$$

где $y=y^n=y(t_n)$, $\overline{D}=D+\dfrac{\tau^2}{12}A$, $y_{\bar{t}t}=(y^{n+1}-2y^n+y^{n-1})/\tau^2$, $\hat{y}=y(t_{n+1})$, $\check{y}=y(t_{n-1})$, $\varphi=T^t f$, $T^t u=\dfrac{1}{\tau^2}\displaystyle\int_{t-\tau}^{t+\tau}\left(\tau-|t-\theta|\right)u(\theta)d\theta$, $y^n\in H$, $\varphi\in H$, $t_n\in\omega_\tau$,

$y^{(\sigma_1,\sigma_2)}=\sigma_1\hat{y}+(1-\sigma_1-\sigma_2)y+\sigma_2\check{y}$.

Начальные условия выберем в виде (4).

Доказана следующая основная теорема.

Теорема 5. Пусть решение задачи (1), (2) $u(t)\in W_2^4[0,T]$, $f(t)\in C^2[0,T]$ и выполнены условия

$$\sigma_1\ge\sigma_2,\ (\sigma_1+\sigma_2)\ge\frac{2+3\varepsilon}{6}-\frac{2\|D\|}{\tau^2\|A\|}. \tag{15}$$

Тогда решение схемы (14), (4) с операторами $A^*=A>0$, $\overline{D}^*=\overline{D}>0$ сходится к решению исходной задачи с точностью $O(\tau^4)$, т.е. имеет место оценка точности

$$\|u(t)-y(t)\|_{\mathrm{D}}\le M\tau^4,\ M>0-const, \tag{16}$$

где $\mathrm{D}=D+\dfrac{\tau^2}{12}A+\dfrac{\tau^2}{2}(\sigma_1+\sigma_2)A$.

Оценка (16) получается с учетом леммы Брэмбла-Гильберта. Погрешности аппроксимации разностной схемы (14) $\psi=O(\tau^4)$.

Во **втором параграфе** рассмотрена первая начально-краевая задача для гиперболического уравнения второго порядка с обобщенным решением:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + f(x,t),\ (x,t) \in Q_T = \{x \in \Omega,\ t \in (0,T]\}, \tag{17}$$

$$u(x,0) = u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x),\ x \in \bar{\Omega}, \tag{18}$$

$$u = \mu(x,t),\ (x,t) \in S_\Gamma = \{x \in \Gamma = \partial\Omega,\ t \in (0,T]\}, \tag{19}$$

где

$$L = \sum_{\alpha=1}^{n} L_\alpha,\quad L_\alpha u = \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(k_\alpha(x_\alpha)\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right),\quad 0 < c_1 \le k_\alpha(x_\alpha) \le c_2$$

$$\bar{\Omega} = \{x = (x_1, x_2, ..., x_n) : 0 \le x_\alpha \le l_\alpha,\ \alpha = 1,2,...,n\},\quad \Omega = \bar{\Omega} \cap (0, l_\alpha),$$

Γ - граница области Ω, функции $f(x,t)$, $\mu(x,t)$, $k_\alpha(x_\alpha)$, $u_0(x)$, $u_1(x)$, а также граница $\partial\Omega$ области Ω такова, что решение задачи (17)-(19) принадлежит классу $W_2^m(Q_T)$, где $m = 1,2$.

Начально-краевая задача (17)-(19) сначала аппроксимируется методом конечных разностей и полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений аппроксимируется двухпараметрической разностной схемой (14), (4).

Доказана следующая теорема.

Теорема 6. Пусть решение исходной задачи (17)-(19) $u(x,t) \in W_2^4\left\{[0,T];\, W_2^m(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)\right\}$, а правая часть $f(x,t) \in C^2\{[0,T];\, W_2^m(\Omega)\}$ и выполнено условие (15). Тогда решение разностной схемы (14), (4) сходится к решению исходной задачи с точностью $O(\tau^4 + |h|^{m-k-1})$, т.е. имеет место оценка точности

$$\tilde{E}_h^{(k)}(t;z) \le M(|h|^{m-k-1} + \tau^4)\|u\|_{m,Q_T},\quad 0 \le m-k-1 \le 2,\quad k = -1,0,1,$$

где $M > 0 - const$.

Приведены тестовые расчеты подтверждающие теоретические выводы.

Третий параграф посвящена построению и исследованию разностных схем для одной обратной задачи. В частности, рассмотрим двумерное уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x,t),\ (x,t) \in Q_T, \tag{20}$$

с начальными

$$u(x,0) = u_0(x),\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0,\ x \in \bar{\Omega}, \tag{21}$$

и краевыми условиями

$$u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0,\ t \in (0,T]. \tag{22}$$

Здесь $Q_T = \{(x,t),\ x \in \Omega,\ t \in (0,T]\}$, $\Omega = \{x : 0 < x < l\}$, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma = \{0, l\}$.

Задачу (20)-(22) будем рассматривать как задача Коши для дифференциально-операторного уравнения второго порядка. Для функции, заданных в $\Omega = (0,l)$, определим гильбертово пространство $H = L_2(\Omega)$ со скалярным произведением (u,ϑ) и нормой $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$. Определим следующий оператор

$$Au = -\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\ \ 0 < x < l. \tag{23}$$

Здесь оператор $A : H \to H$ и имеет место $A = A^* \ge mE,\ m > 0$. Тогда уравнения (20) с краевыми условиями (21), (22) записывается как дифференциально – операторное уравнения для нахождения $u(t) \in H$:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} - Au = f(t), \quad 0 < t \le T, \tag{24}$$

с условиями

$$u(0) = u_0, \qquad \frac{du}{dt}(0) = 0. \tag{25}$$

Некорректность задачи (24), (25) обусловлена отсутствием непрерывной зависимости от входных данных (начальных условий). Отметим, что $A^* = A \ge mE,\ m > 0$.

Для дискретизации задачи (24), (25) использована вариант метода квазиобращения, в котором приближенное решение определяется из уравнения

$$\frac{d^2 u_\alpha}{dt^2} - Au_\alpha + \alpha A \frac{d^2 u_\alpha}{dt^2} = f(t),\ 0 < t \le T \tag{26}$$

с начальными условиями

$$u_\alpha(0) = u_0^\delta,\ \ \|u_0^\delta - u_0\| \le \delta, \tag{27}$$

$$\frac{du_\alpha}{dt}(0) = 0. \tag{28}$$

Здесь α- параметр регуляризации, δ- некоторый положительный параметр.

После аппроксимации по пространству задаче (26)-(28) ставится в соответствие следующая задача (система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка)

$$D\frac{d^2 u_{\alpha,h}}{dt^2} - \overline{A} u_{\alpha,h} = f_h(t), \quad 0 < t \le T, \tag{29}$$

$$u_{\alpha,h}(0) = u_0^\delta,\ \|u_0^\delta - u_0\| \le \delta, \tag{30}$$

$$\frac{du_{\alpha,h}}{dt}(0) = 0, \tag{31}$$

где $D = E - \alpha\bar{A},\ \bar{A} = -\Lambda,\ u_{\alpha,h} \in H_h$.

Задачу (29)–(31) аппроксимируем явной трёхслойной разностной схемой

$$\tilde{D}y_{\bar{t}t} + \bar{A}y^{(\sigma_1,\sigma_2)} = \varphi,\ y_0 = u_0,\ y_1 = \bar{y}_1, \tag{32}$$

где $\tilde{D} = E - \alpha\bar{A} + \frac{\tau^2}{12}\bar{A},\ \ \varphi = f + \frac{\tau^2}{12}f_{\bar{t}t},\ \bar{y}_1 = \left[E - \left(\alpha + \frac{\tau^2}{6}\right)\right]\bar{A}y_1 + \frac{\tau^2}{6}\frac{df}{dt}$.

Разностная схема (32) аппроксимирует задачу (29)-(31) с порядком $O(\tau^4)$, если $u(t) \in C^6[0,T],\ \ f(t) \in C^4[0,T]$.

Доказана следующая теорема.

Теорема 7. Пусть операторы $A^* = A > 0,\ D^* = D > 0$ и выполнены условия $\sigma_1 \ge \sigma_2,\ \ \alpha > \frac{\tau^2}{6} + \frac{\tau^2}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$. Тогда решение схемы (32) сходится к гладкому решению исходной задачи (29)-(31) со скоростью $O(h^2 + \tau^4)$, т.е. имеет место оценка точности

$$\|y(t) - u(t)\|_{\tilde{D}} \le O(h^2 + \tau^4),\ y, u \in H_h.$$

Далее для дискретизации задачи (24), (25) использована следующий вариант метода квазиобращения

$$\frac{d^2u_\sigma}{dt^2} - Au_\sigma + \sigma A\frac{du_\sigma}{dt} = f(t),\ 0 < t \le T\ . \tag{33}$$

с начальными условиями (30), (31).

Для построения и исследования разностных схем для этой задачи использована разностные схемы метода конечных элементов Москалькова-Утебаева. Получены условия устойчивости, априорные оценки и оценки точности.

В **третьей главе** диссертации **«Разностные схемы повышенной точности для системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка и их приложения»** рассматриваются абстрактная задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка, а также рассматриваются начально-краевые задачи для уравнения Соболевского типа шестого порядка, неразрешенных относительно производной по времени. В частности, рассмотрены краевые задачи для уравнений электронных волн в холодной плазме во внешнем магнитном поле и уравнения динамики, сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости. На основе метода конечных разностей построены и исследованы параметрические разностные схемы высокого порядка точности по времени и по пространству. Получены, соответствующие априорные оценки и на их основе доказаны теоремы о скорости сходимости и точности построенных алгоритмов при достаточной гладкости решений исходной дифференциальной задачи для уравнения электронных волн в холодной плазме во внешнем магнитном поле и уравнения динамики, сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости.

Проведенные вычислительные эксперименты на тестовых примерах иллюстрирует эффективность построенных численных алгоритмов.

В первом параграфе рассмотрена следующая задача:

$$D\ddot{\ddot{u}} + B\ddot{u} + Au = f, \quad t_0 < t \le \mathrm{T}, \tag{34}$$

$$u(0) = u_{0,0},\ \dot{u}(0) = u_{0,1},\ \ddot{u}(0) = u_{0,2},\ \dddot{u}(0) = u_{0,3}, \tag{35}$$

где D, B и A линейные постоянные (не зависящие от t) операторы из $H \to H$, $D^* = D > 0$, $B^* = B \ge 0$, $A^* = A > 0$; $\ddot{\ddot{u}} = d^4u/dt^4$, $\dddot{u} = d^3u/dt^3$, $\ddot{u} = d^2u/dt^2, \dot{u} = du/dt$, $\forall\, t \ge 0,\ u = u(t)$, $f = f(t) \in H$. Здесь H-гильбертово пространство со скалярным произведением (u, ϑ) и нормой $\|u\| = \sqrt{(u,u)}$. Для дальнейших исследований, предположим, что решение задачи (34), (35) имеет необходимую гладкость.

Для задачи (34), (35) построена разностная схема второго порядка аппроксимации

$$Dy_{\bar{t}t\bar{t}t} + By_{\bar{t}t} + Ay = \varphi,\ t_n \in \omega_\tau,\ n = 2,3,..., \tag{36}$$

$$y^0 = u_{0,0},\ y^1 = \bar{u}_{0,1},\ y^2 = \bar{u}_{0,2},\ y^3 = \bar{u}_{0,3}, \tag{37}$$

где $y_{\bar{t}t\bar{t}t} = (y^{n+2} - 4y^{n+1} + 6y^n - 4y^{n-1} + y^{n-2})/\tau^4$, $y_{\bar{t}t} = (y^{n+1} - 2y^n + y^{n-1})/\tau^2$, $y^n = y(t_n)$, $y^{n\pm1} = y(t_n \pm \tau)$, $y^{n\pm2} = y(t_n \pm 2\tau)$.

Начальные условия имеет вид:

$$\bar{u}_{0,1} = u_{0,1} + 0.5\tau[E - (\tau^2/12)D^{-1}B]u_{0,2},\ \bar{u}_{0,2} = u_{0,2} + \tau u_{0,3},$$
$$\bar{u}_{0,3} = u_{0,3} + (3\tau/2)D^{-1}[f(0) - Bu_{0,2} - Au_{0,0}].$$

На основе результатов теории устойчивости разностных схем получены априорные оценки по начальным данным и по правой части. С помощью этих оценок доказана теорема о точности схемы.

Далее, на основе разностной схемы (36), (37) построена следующая разностная схема четвертого порядка аппроксимации

$$\bar{D}y_{\bar{t}t\bar{t}t} + \bar{B}y_{\bar{t}t} + Ay = \bar{\varphi}, \quad t_n \in \omega_\tau, \quad n = 2,3,..., \tag{38}$$

где $\bar{D} = D + (\tau^2/12)B$, $\bar{B} = B + (\tau^2/6)A$, $\bar{\varphi} = \varphi + (\tau^2/6)\ddot{f}$.

Начальные условия для (38) выберем в виде

$$y^0 = u_{0,0},\ y^1 = \bar{u}_{0,1},\ y^2 = \bar{u}_{0,2},\ y^3 = \bar{u}_{0,3}, \tag{39}$$

где

$$\bar{u}_{0,1} = u_{0,1} + 0.5\tau[E - (\tau^2/12)D^{-1}B]u_{0,2} + (\tau^2/6)u_{0,3} + (\tau^3/24)D^{-1}[f(0) - Au_{0,0}]$$
$$,\ \bar{u}_{0,2} = u_{0,2} + \tau u_{0,3} + (\tau^2/2)D^{-1}[f(0) - Bu_{0,2} - Au_{0,0}] +$$
$$+(\tau^3/4)D^{-1}[\dot{f}(0) - B\dot{u}_{0,2} - A\dot{u}_{0,0}],$$
$$\bar{u}_{0,3} = u_{0,3} + (3\tau/2)D^{-1}[f(0) - Bu_{0,2} - Au_{0,0}] + (5\tau^2/4)D^{-1}[\dot{f}(0) - B\dot{u}_{0,2} - A\dot{u}_{0,0}] +$$
$$+(3\tau^2/4)D^{-1}[\ddot{f}(0) - B\ddot{u}_{0,2} - A\ddot{u}_{0,0}].$$

Погрешность аппроксимации начальных условии совпадают с погрешностью аппроксимации схемы (38), т.е. $O(\tau^4)$.

Из (38) после элементарных преобразований получим

$$\tilde{Q}y_{\bar{t}\bar{t}t} + \tilde{R}y_{\overset{\circ\circ}{tt}} + Ay = \bar{\varphi}\,, \tag{40}$$

где $\tilde{Q} = \bar{D} - (\tau^2/4)\bar{B} - (\tau^4/4)\sigma A$, $\tilde{R} = \bar{B} + \tau^2\sigma A$.

Доказана следующая теорема о точности схемы.

Теорема 8. Пусть $D^* = D > 0$, $B^* = B \geq 0$, $A^* = A > 0$ и выполнено условие $D > (\tau^4/4)A$. Тогда, решение разностной схемы (40), (39), сходится к гладкому гладкому решению исходной задачи (34), (35) и имеет место оценка точности $\|y(t_n) - u(t_n)\| \leq O(\tau^4)$, $t_n \in \bar{\omega}_\tau$.

В втором параграфе рассмотрена начально-краевая задача для уравнения электронных волн в холодной плазме во внешнем магнитном поле:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{P_e}^2 + \omega_{B_e}^2\right)\Delta_2 u + \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{P_e}^2\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \omega_{B_e}^2\right)\frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = f(x,t),\ (x,t) \in Q_T\,, \tag{41}$$

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,t)\right|_{t=0} = u_{0,k}\,,\quad k = \overline{0,3}\,,\quad x \in \Omega\,, \tag{42}$$

$$u(x,t)\big|_{\Gamma=\partial\Omega} = \mu(t)\,,\quad t \in [0,T]\,, \tag{43}$$

где $\Delta_2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$, $\omega_{p_e}^2$ -частота Ленгмюра для электронов, $\omega_{B_e}^2$ - ларморова частота электронов, $u = u(x,t)$-обобщенный потенциал электрического поля,

$$Q_T = \Omega \cup (0,T]\,,\quad \Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) : 0 < x_\alpha < l_\alpha,\ \alpha = 1,2,3\}\,.$$

Для дальнейшего исследования уравнение (41) перепишем в следующем виде

$$L_0\frac{\partial^4 u}{\partial t^4} + L_1\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + L_2 u = f(x,t)\,,\ \ \frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,0) = u_{0,k},\ k = \overline{0,3},\ u(x,t)\big|_{\Gamma} = \theta(t)\,, \tag{44}$$

где $L_0 = \Delta_2 + \partial^2/\partial x_3^2$, $L_1 = \omega_0^2 L_0$, $L_2 = \omega_1^2\partial^2/\partial x_3^2$, $\omega_0^2 = \omega_{p_e}^2 + \omega_{B_e}^2$, $\omega_1^2 = \omega_{p_e}^2\omega_{B_e}^2$.

Аппроксимируя на равномерных сетках по пространству операторов L_0, L_1 и L_2 разностными соотношениями, получим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка:

$$D\frac{d^4 u_h}{dt^4} + B\frac{d^2 u_h}{dt^2} + Au_h(t) = f_h,\ \ \frac{d^k u_h}{dt^k}(0) = u_{0,k,h},\ k = \overline{0,3}, \tag{45}$$

где D, B и A линейные постоянные операторы из $H_h \to H_h$, $D^* = D > 0$, $B^* = B \geq 0$, $A^* = A > 0$, $\forall\, t \geq 0$, $u_h = u_h(t) \in H_h$, $f_h = f_h(t) \in H_h$. Здесь операторы

$$D=\Lambda,\ \ B=\omega_0^2\Lambda\,,\ \ A=\omega_1^2\Lambda_3,\ \ \Lambda=\sum_{\alpha=1}^{3}\Lambda_\alpha\,,\ \ \Lambda_m u_h=-u_{h,x_m\bar{x}_m}\,,\ \ m=1,2,3\,,$$

u_h - значение функции в фиксированном узле $x=(i_1h_1, i_2h_2, i_3h_3)$.

Операторы D, B и A аппроксимируют операторы L_0, L_1 и L_2 со вторым порядком соответственно, т.е. $O(|h|^2)$, $|h|=\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}$.

Далее, на отрезке $[0,T]$ введем равномерную сетку $\bar{\omega}_\tau=\{t_n=n\tau,\ n=0,1,...;\ \tau>0\}$. Пусть y аппроксимирует u_h. В первом параграфе для задачи (45) построена разностная схема четвертого порядка аппроксимации (схема (38), (39))

$$\bar{D}y_{\bar{t}t\bar{t}t}+\bar{B}y_{\bar{t}t}+Ay=\bar{\varphi},\ \ t_n\in\omega_\tau, \tag{46}$$

$$y^0=u_{0,0},\ y^1=\bar{u}_{0,1},\ y^2=\bar{u}_{0,2},\ y^3=\bar{u}_{0,3}\,. \tag{47}$$

где $\bar{D}=D+(\tau^2/12)B,\ \bar{B}=B+(\tau^2/6)A,\ \ \bar{\varphi}=\varphi+(\tau^2/6)\ddot{f}$.

Доказана следующая теорема.

Теорема 8. Пусть $D^*=D>0$, $B^*=B\geq 0$, $A^*=A>0$ и выполнено условие устойчивости $\bar{D}\geq(\tau^4/4)A$. Тогда, решение разностной схемы (46), (47) сходится к гладкому решению исходной задачи (41)-(43) или (44), (42), (43) и для ее решения имеет место оценка точности

$$\|y(x_i,t_n)-u(x_i,t_n)\|_{\bar{A}}\leq O(|h|^2+\tau^4),\ y,u\in H_h,\ x_i\in\bar{\omega}_h,\ t_n\in\bar{\omega}_\tau\,. \tag{48}$$

На основе разностной схемы (46), (47) построена семейства разностных схем с весами

$$\bar{D}y_{\bar{t}t\bar{t}t}+\bar{B}y_{\bar{t}t}+Ay^{(\sigma_1,\sigma_2)}=\varphi,\ \ t_n\in\omega_\tau\,, \tag{49}$$

где σ_1, σ_2 некоторые постоянные, весы схемы, наличие которых позволяет выбрать различные разностные схемы, но они не влияют на устойчивость и сходимость схемы. Начальные условия не изменяются.

На основе результатов § 3.1 получен следующий результат.

Теорема 9. Пусть $D^*=D>0$, $B^*=B\geq 0$, $A^*=A>0$ и выполнено условие $D>(\tau^4/4)A$. Тогда, решение разностной схемы (49), (47) сходится к гладкому решению исходной задачи (41)-(43) и имеет место оценка точности (48).

Если решение исходной дифференциальной задачи имеет необходимую гладкость по пространственным переменным, то можно построить разностные операторы повышенного порядка аппроксимации. Получение разностных операторов с более высоким порядком аппроксимации может достигаться различными путями. Например, разностную схему (49), (47), запишем как в (40), а операторы $\tilde{Q}$, $\tilde{R}$ и A выберем в виде (при $\varphi\equiv 0$)

$$\tilde{Q}=\bar{D}-\frac{\tau^2}{4}\left(\bar{B}-\sigma\sum_{m=1}^{3}\frac{h_m^2}{12k_m}A_m\right),\quad \tilde{R}=\bar{B}+\tau^2\sigma\sum_{m=1}^{3}\frac{h_m^2}{12k_m}A_m\,,$$

$$A=\sum_{m=1}^{3}A_m-\sum_{\substack{m,n=1\\ m\neq n}}^{3}\frac{h_m^2}{12k_m}A_mA_n,$$

где $A_m y=-\Lambda_m y$. Следовательно, разностные операторы $\tilde{Q}$, $\tilde{R}$ и A приближают дифференциальные операторы L_0, L_1 и L_2 с четвертым порядком погрешности аппроксимации, т.е. $O(|h|^4)$, $|h|=\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}$.

В третьем параграфе аналогичные результаты получены для уравнения динамики сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости с начальными и краевыми условиями первого рода:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^4 u}{\partial t^4}=\frac{\partial^2}{\partial t^2}K_0u+K_1u+f(x,t),\quad (x,t)\in Q_T, \tag{50}$$

$$\left.\frac{\partial^k}{\partial t^k}u(x,t)\right|_{t=0}=u_{0,k},\quad k=\overline{0,3},\quad x\in\Omega, \tag{51}$$

$$u(x,t)|_{\Gamma}=\mu(t),\quad t\in[0,T], \tag{52}$$

где

$$K_0=\Delta_3-(\beta^2+\alpha^2/c^2),\quad K_1=\omega_0^2\Delta_2+\alpha^2\partial^2/\partial x_3^2-\alpha^2\beta^2,$$
$$\Delta_3=\partial^2/\partial x_1^2+\partial^2/\partial x_2^2+\partial^2/\partial x_3^2,\quad \Delta_2=\Delta_3-\partial^2/\partial x_3^2,$$

ω_0^2 - квадрат частоты Вяйсяля-Брента, $u=(x,t)$ - скорость движения, c - скорость звука, α,β- некоторые постоянные, $Q_T=\Omega\times(0,T]$, $\Omega=\{0<x_\alpha<l_\alpha,\ \alpha=1,2,3\}$.

Аппроксимируя на равномерных сетках по пространству операторов K_0 и K_1 разностными соотношениями, получим задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка (45), где

$$D=E,\quad B=c^2\Lambda-(c^2\beta^2+\alpha^2)E,\quad A=c^2\alpha^2(\Lambda-\beta^2E),\ \Lambda=\sum_{\alpha=1}^{3}\Lambda_\alpha.$$

Операторы B и A аппроксимируют операторы K_0 и K_1 со вторым порядком соответственно, т.е. $O(|h|^2)$, $|h|=\sqrt{h_1^2+h_2^2+h_3^2}$.

Здесь тоже построена разностная схема, аналогичной (49), (47) и на основе этой схемы построена параметрическая разностная схема вида

$$\bar{D}y_{\bar{t}t\bar{t}t}+\bar{B}y_{\bar{t}t}^{(\sigma_1,\sigma_2)}+Ay^{(\sigma_3,\sigma_4)}=\varphi,\ t_n\in\omega_\tau. \tag{53}$$

Здесь

$$y^{(\sigma_1,\sigma_2)}=\sigma_1\hat{y}+(1-\sigma_1-\sigma_2)y+\sigma_2\check{y},\ y^{(\sigma_3,\sigma_4)}=\sigma_3\hat{y}+(1-\sigma_3-\sigma_4)y+\sigma_4\check{y},$$

где $\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4$ некоторые постоянные, весы схемы, наличие которых позволяет выбрать различные явные и неявные схемы и регулировать их точность по пространству.

Выборь параметров $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, $\sigma_3 = \sigma_4 = \theta$, дали возможность доказать следующую теорему.

Теорема 15. Пусть $D^* = D > 0$, $B^* = B \geq 0$, $A^* = A > 0$ и выполнено условия $\theta \leq 1/2$, $\sigma \leq 1/4$, $\bar{D} \geq (\tau^4/8)A$. Тогда решение разностной схемы (53), (47) сходится к гладкому решению исходной задачи (50)-(52) и имеет место оценка точности

$$\|y(x_i,t_n) - u(x_i,t_n)\|_{\bar{A}} \leq O(h^2 + \tau^4), \;\; y,u \in H_h, \; x_i \in \bar{\omega}_h, \; t_n \in \bar{\omega}_\tau .$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертационная работа посвящена построению и исследованию разностных схем повышенной точности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков в классах гладких и негладких решений и их применению для решения классических уравнений в частных производных гиперболического типа второго порядка и неклассических уравнений Соболевского типа шестого порядка.

Основные результаты исследования по диссертации «Решения нестационарных уравнений конечно-разностными методами повышенной точности» следующее:

- построены новые явных и неявных разностных схем для обыкновенных дифференциальных уравнений второго и четвертого порядков в классах гладких решении, получены погрешности аппроксимации, условия устойчивости и оценки точности;

- на основе разностных схем повышенной точности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка построены и исследованы аддитивные разностные схемы;

- разработаны и исследованы явных и неявных разностных схем методом конечных разностей повышенной точности для численного решения обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с обобщенным решением;

- построены и исследованы разностных схем для многомерного гиперболического уравнения второго порядка в классе обобщенных решений;

- построены разностные схемы повышенной точности для обратной задачи Лапласа, доказаны теоремы о сходимости и точности;

- на основе разностных схем построенных для систем обыкновенных дифференциальных уравнений четвертого порядка исследованы начально-краевые задачи для уравнения электронных волн в холодной плазме во внешнем магнитном поле и уравнения динамики сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

KARAKALPAK STATE UNIVERSITY

KAZIMBETOVA MUXABBAD MAXSETBAEVNA

HIGHER ACCURACY DIFFERENCE SCHEMES FOR NON-STATIONARY EQUATIONS

01.01.03 – Computational and discrete mathematics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT – 2024

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number B2024.2.PhD/FM500.

The dissertation was completed at Karakalpak State University named after Berdakh.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website http://ik-fizmat.nuu.uz/ and the "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific leader:	**Utebaev Dauletbay** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, docent
Official opponents:	**Hayotov Abdullo Rakhmonovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Ashyralyyev Charyyar Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor (Turkey)
The leading organization:	**Termiz State University**

Defense will take place "28" 11 2024 at 14[00] at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 at National University of Uzbekistan (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 227-12-24, fax: (99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №134) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 227-12-24).

Abstract of dissertation sent out on "14" 11 2024 year
(Mailing report № 2 on "24" 09 2024 year).

M.M. Aripov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

Z.R. Rakhmonov
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S.

R.D. Aloyev
Chairman of Scientific seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor.

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

The purpose of the study is to construct and study difference schemes of increased accuracy for a system of ordinary differential equations of the second and fourth orders in the classes of smooth and nonsmooth solutions, the application of these difference schemes to the solution of partial differential equations of hyperbolic type and pseudoparabolic equations, as well as obtaining their stability conditions, estimates convergence and accuracy.

The object of study The object of study is systems of ordinary differential equations of the second and fourth orders, as well as initial-boundary value problems for partial differential equations of hyperbolic type and a pseudoparabolic equation.

The scientific novelty of the research work is as follows:

new explicit and implicit difference schemes for ordinary differential equations of the second and fourth orders in classes of smooth solutions were constructed, approximation errors, stability conditions and accuracy estimates were obtained;

on the basis of difference schemes of increased accuracy for systems of second-order ordinary differential equations, additive difference schemes were constructed and studied;

developed and studied explicit and implicit difference schemes using the finite difference method of increased accuracy for the numerical solution of a second-order ordinary differential equation with a generalized solution;

constructed and studied difference schemes for a multidimensional second-order hyperbolic equation in the class of generalized solutions;

difference schemes of increased accuracy were constructed for the inverse Laplace problem, theorems on convergence and accuracy were proved;

based on difference schemes constructed for systems of ordinary differential equations of the fourth order, initial-boundary value problems for the equation of electron waves in a cold plasma in an external magnetic field and the equations of the dynamics of a compressible stratified rotating fluid are investigated.

Implementation of the research results. The results obtained on the construction of difference schemes of increased accuracy for non-stationary equations of the second and fourth orders were implemented in the following scientific projects:

Explicit and implicit difference schemes of increased accuracy of the finite difference method, constructed in the class of generalized solutions of a system of ordinary differential equations of the second order were used in the research project OT-F4-30 "Study of the features of solutions of a double nonlinear cross-system having convective transport with variable density, source and sink" (2017-2020) to create an optimal differential method for approximate solution of diffusion-convective problems and was used to estimate the error, stability and accuracy of its approximation (certificate No. 04/11-5328 dated 27 June 2024, National University of Uzbekistan). The use of these scientific results made it possible to construct new optimal algorithms for solving diffusion-convection problems.

The methods for constructing approximate solutions for inverse problems and their numerical modeling, as well as the conducted computational experiments, were used in the fundamental project OT-F2-77 "Improving the methods for predicting the reliability of semiconductor devices based on modeling taking into account internal structural defects" to obtain new information about the processes in semiconductor structures with various defects and determining their electrophysical and optical properties (Certificate of Karakalpak State University dated June 27, 2024, No. 01-22-04/337). The application of the obtained scientific results made it possible to determine the causes of the existence of defects in the problems of semiconductor physics, update the methods for creating semiconductor devices that provide a certain stability, and develop the theory of semiconductors;

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, a list of references and applications. The volume of the dissertation is 91 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo'lim (I часть; part I)

1. Utebaev D, Kazimbetova M.M., Yarlashev R.Sh. On Accuracy of Difference Schemes for One Incorrect Problem With Generalized Solutions // Science and Education in Karakalpakstan, 2020, №3-4, pp. 57-63. (01.00.00; № 11).
2. Утебаев Б.Д., Казымбетова М.М. Трехслойные схемы повышенной точности для решения нестационарных уравнений второго порядка // Проблемы вычислительной и прикладной математики, №5 (43) 2022, pp. 154-166. (01.00.00; № 9).
3. Utebaev D., Kazimbetova M.M., Agjanov T.S. On the Accuracy of Difference Schemes for One Evolutionary Inverse Problem // Science and Education in Karakalpakstan, 2022, № 4-1, pp. 9-16. (01.00.00; № 11).
4. Aripov M.M., Utebaev D., Kazimbetova M.M., Yarlashev R.Sh. On Convergence of Difference Schemes of High Accuracy for One Pseudo-Parabolic Sobolev Type Equation // Bulletin of the Karaganda University, No. 1 (109), 2023 y., pp. 24-37. (№ 1, **Web of Science**, IF=0.6).
5. Utebaev D., Utepbergenova G.Kh., Kazimbetova M.M. Difference Schemes of the Finite Element Method of Higher Accuracy for Solving Nonstationary Equations // Itogi Nauki i Tekhniki. Ser. Sovrem. Mat. Pril. Temat. Obz., Russia, 2023, Volume 221, pp. 115-127. (№ 3, **Scopus,** IF=0.314).
6. Арипов М.М., Утебаев Д., Утебаев Б.Д., Казымбетова М.М. Разностные схемы повышенной точности для операторного дифференциального уравнения четвертого порядка // ДАН РУз., Сер. математика, технические науки, естествознание, 2023 г., № 5, с. 3-9. (01.00.00; № 7).
7. Utebaev D., Kazimbetova M.M. On Convergence of Difference Schemes for the Hyperbolic Equation With Generalized Solutions // Science and Education in Karakalpakstan, 2024, №1/2, pp. 30-38. (01.00.00; № 11).

II bo'lim (часть II; part II)

8. Kazimbetova M.M. High-Accuracy Difference Schemes for the Equation of Electron Waves in Cold Plasma in an External Magnetic Field // Endless Light in Science, 2024, № 1, pp. 233-239. (01.00.00; № 40, ResearchGate).
9. Utebaev D., Kazimbetova M.M. High-Accuracy Difference Schemes for the Equation of Dynamics of Compressive Stratified Rotating Fluid // Eurasian Journal of Mathematical Theory and Computer Sciences, 2024, Vol. 4, Issue 2, pp. 16-24. (01.00.00; № 23, Scentifik Journal Impact Factor, UIF=8.3).
10. Утебаев Д., Казымбетова М.М. Численное решение одной некорректной задачи // Сборник тезисов республиканской научной онлайн-

конференции «Современные проблемы математики», Нукус, 20 май, 2020, стр. 232-234.
11. Арипов М.М., Утебаев Д., Казымбетова М.М., Ярлашов Р.Ш. Исследования некоторых разностных схем для одного псевдопараболического уравнения // Труды Республиканской конференции «Роль информационно-коммуникационных технологий в развитии естественных наук», Нукус, ККГУ, 9-10 ноябрь 2021, с. 106-110.
12. Utebaev D., Utepbergenova G.Kh., Kazimbetova M.M. Difference Schemes of the Finite Element Method of Higher Accuracy for Solving Nonstationary Equations // VI International Conference “Nonlocal Boundary Value Problems and Related Problems of Mathematical Biology, Informatics and Physics” PROCEEDINGS, December 5-9, 2021, Nalchik, Russia, p. 257.
13. Арипов М.М., Утебаев Б.Д., Казымбетова М.М. Схемы повышенной точности для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с обобщенными решениями // Computational models and technologies: Abstracts of the Uzbekistan-Malaysia international conference, September 16-17, 2022, Tashkent, Uzbekistan, p. 50-51.
14. Казымбетова М.М. Разностные схемы повышенного порядка аппроксимации для одной эволюционной обратной задачи // Тезисы Международной конференции студентов и молодых ученых «Фараби әлемі», Казахский национальный университет имени Аль-Фараби, 6-8 апреля 2023, Алма-ата, Казахстан, с. 130.
15. Utebaev B.D., Utebaev D., Kazimbetova M.M. Difference Schemes of High Accuracy for Solving Non-Stationary Fourth-Order Equations // Abstracts of VIII International Scientific Conference «Actual Problems of Applied Mathematics and Information Technologies-Al-Khwarizmi 2023», Samarcand, Uzbekistan, September 25-26, 2023, pp.149.
16. Казымбетова М.М. Разностные схемы повышенной точности для уравнения электронных волн в холодной плазме во внешнем магнитном поле // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения», Ташкент, 2023, УзМУ, часть 2, с. 163-164.
17. Утебаев Д., Казымбетова М.М. Разностные схемы повышенной точности для уравнения динамики сжимаемой стратифицированной вращающейся жидкости // Материалы международной научной конференции «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения», Ташкент, 2023, УзМУ, часть 1, с. 139-140.
18. Утебаев Д., Казымбетова М.М. Разностная схема повышенной точности для гиперболического уравнения второго порядка с обобщенным решением // Тезисы Республиканской конференции «Современные проблемы и перспективы прикладной математики», Карши, 24-25 май, 2024, КГУ, с. 289-291.

19. Qazimbetova M.M., D. Utebaev, J.A. Nurullaev, R.Sh. Yarlashev «Giperbolik tiptagi tenglama (torning tebranish tenglamasi) uchun qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masalani sonli yechish dasturi». GUVOHNOMA № DGU 40477, 21.06.2024.
20. Qazimbetova M.M., D. Utebaev, J.A. Nurullaev, R.Sh. Yarlashev «Ikkinchi tartibli differentsial-operatorli tenglamalar sistemasi uchun Koshi teskari masalasini yechish dasturi (test misolida) ». GUVOHNOMA № DGU 42147, 28.08.2024.

Avtoreferat « Qoraqalpog'istonda fan va ta'lim » jurnali tahririyatida tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillarida matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

1715

Bosishga ruxsat etildi: 07.11.2024 yil
Bichimi 60x84 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman»
garniturada raqamli bosma usulda chop etildi.
Shartli bosma tabog‘i 3,25. Adadi 100. Buyurtma № 117

“Fan va ta’lim poligraf” MChJ bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent shahri, Do‘rmon yo‘li ko‘chasi, 24-uy.