O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

TURSUNOVA BARNO ABDIYEVNA

SPEKTRAL-TO‘R METODINING IKKINCHI TUR CHEBISHEV KO‘PHADLARI BILAN YAQINLASHISHI VA YAQINLASHISH TEZLIGINI BAHOLASH

01.01.03-Hisoblash matematikasi va diskret matematika (fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI(PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TOSHKENT-2024

UDK:519.624.3

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of the doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH

TERMIZ DAVLAT UNIVERSITETI

TURSUNOVA BARNO ABDIYEVNA

SPEKTRAL-TO‘R METODINING IKKINCHI TUR CHEBISHEV KO‘PHADLARI BILAN YAQINLASHISHI VA YAQINLASHISH TEZLIGINI BAHOLASH

01.01.03-Hisoblash matematikasi va diskret matematika
(fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI(PhD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TOSHKENT-2024

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respunlikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2020.3.PhD/FM519 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Termiz davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengashning veb-sahifasida (https://ik-fizmat.nuu.uz) va «Ziyonet» Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Normurodov Chori Begaliyevich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Hayotov Abdullo Raxmonovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Urunbayev Erkin fizika-matematika fanlari doktori, professor
Yetakchi tashkilot:	**Berdaq nomidagi Qoraqalpoq davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi O'zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 raqamli Ilmiy kengashning 2024 yil "28" 11 soat 15³⁰dagi majlisida bo'lib o'tadi.(Manzil: 100174, Toshkent sh.,Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.:(+99871) 227-12-24, faks:(+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail:nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan O'zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin(135 raqami bilan ro'yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.:(+99871) 227-12-24, faks:(+99871) 246-53-21, 246-02-24

Dissertatsiya avtoreferati 2024 yil 14 11 kuni tarqatildi.
(2024 yil "24" 09 dagi 2 raqamli reestr bayonnomasi)

M.M.Aripov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., professor

Z.R.Raxmanov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d. dots.

R.D.Aloyev
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash huzuridagi ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida olib borilayotgan ilmiy-amaliy tadqiqotlar, fan va texnika sohasidagi turli masalalarni yechish, aksariyat hollarda ushbu masalalarning matematik modellarini va taqribiy yechimlarini qurish hamda ularga mos sonli metodlarni qo‘llash masalalariga keltiriladi. Ushbu toifadagi masalalarning ob’yekti sifatida, ko‘p hollarda yuqori tartibli umumiy ko‘rinishdagi oddiy differensial tenglamalar va bunday tenglamalar uchun xos qiymat muammosi qaraladi. Shu sababli, umumiy ko‘rinishdagi oddiy differensial tenglama bilan tavsiflanuvchi jarayonlar adekvatligini ta’minlovchi, yuqori aniqlik va samaradorlikka ega bo‘lgan sonli yechish metodlari, algoritmlari va dasturlar majmuini yaratish amaliy matematika sohasidagi muhim vazifalardan biri bo‘lib qolmoqda.

Hozirgi kunda jahonda differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar va ularga mos xos qiymat muammosi bilan tavsiflanuvchi jarayonlarda optimal hisoblash metodlarini yaratishning statsionar masalasi hamda bunday jarayonlarning matematik modellari keng tadqiq etilmoqda. Differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar va ularga mos xos qiymat muammosi modellari gidrodinamika, gidroinshoatlar, kimyoviy texnologiya hamda turli texnik va texnologik sohalardagi loyihalash ishlarida, gidrodinamik tizimlarni optimal boshqarishda keng qo‘llaniladi. Shu sababli gidrodinamik tizimlarga oid masalalarning sonli modelini qurish va spektral-to‘r metodi bilan sonli yechish hamda xarakterli parametrning optimal qiymatlarini aniqlash va keng doiradagi foydalanuvchilarga mo‘ljallangan qulay interfeysga ega dasturlar majmuasini yaratish maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tadbiqiga ega bo‘lgan matematik fizika, mexanika, iqtisodiyot va energetika sohalaridagi masalalarning sonli-analitik yechish usullarini ishlab chiqish kabi dolzarb yo‘nalishlarga katta e’tibor qaratilmoqda. Xususan, spektral-to‘r metodini umumiy ko‘rinishdagi birjinsli chegaraviy shartlarga ega bo‘lgan chiziqli oddiy differensial tenglama va ushbu tenglamaga mos xos qiymat muammosiga tadbiq etish bo‘yicha salmoqli natijalarga erishildi. “Funksional analiz, algebra, differensial tenglamalar, matematik fizika, matematik modellashtirish, hisoblash matematikasi va diskret matematika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” kabi ustuvor yo‘nalishlar bo‘yicha jahon standartlari darajasida ilmiy izlanishlar olib borish ko‘plab respublika ilmiy-tadqiqot institutlari, universitetlari fundamental tadqiqotlarining asosiy vazifalaridan biri hisoblanadi[1]. Qaror ijrosini ta’minlashda, umumiy ko’rinishdagi oddiy differensial tenglama va bunday tenglamalar uchun xos qiymat muammosini analitik va sonli yechish usullarini takomillashtirish muhim ahamiyatga ega.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 28-yanvardagi PF-60-son “2022-2026 yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida” gi farmoni, 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi

[1] O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-son qarori.

ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori, 2019-yil 8-oktabrdagi PF-5847-son “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi farmoni, 2019-yil 27-apreldagi PQ-3682-son “Innovatsion g‘oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori va 2021-yil 1-apreldagi PF-6198-son “Ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish bo‘yicha davlat boshqaruvi tizimini takomillashtirish to‘g‘risida”gi farmonlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlarga mosligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. ”Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Spektral metod S. Orszag tomonidan tavsiya etilgan. 1969 yildan boshlab S. Orszag tomonidan chop etilgan maqolalarda davriy geometrik masalalar uchun Furye metodlari, chekli va cheksiz geometrik masalalar uchun polinomial spektral metodlar, kuchli chiziqli bo‘lmagan masalalar uchun psevdospektral metodlar, statsionar holat masalalarini yechishning spektral iterativ metodlari va boshqa masalalarni yechishda mo‘ljallangan spektral metodlar ishlab chiqilgan. Oddiy differensial tenglamalarni sonli yechishda spektral metodning tadbiqi va uning yanada umumlashgan tenglamalarda qo‘llanilishi L. V. Kantorovich, E. B. Karpilovskiy, O. Kisha, I. Petersen, I. T. Dolapci, M. A. Ramadan, K. R. Raslan, T. S. El Danaf, M. A. Abd El Salam, C. Lanczos, E. L. Ortiz, M. R. Crisci, I. H .Siyyam, K. Parand, M. Razzahgi, B. G. Galerkin, I. Bubnov, M. Keldish, K. Fletcher, M.A.Krasnoselskiy, G. M. Vaynikko, P. P. Zabreyko, Y. B. Rutitskiy, V. Y. Stetsenko , S. R. Smith, S. Adjerid, A. Temimi kabi olimlarning ilmiy ishlarida tadqiq etilgan. Spektral metodlarda asosan bazis funksiyalari sifatida birinchi tur Chebishev ko‘phadlari qo‘llanilgan. Keyingi yillarda sonli analizda nazariy va amaliy nuqtai nazardan birinchi tur Chebishev ko‘phadlari qatorida yaqinlashishlar nazariyasida minimallik xususiyatiga va funksional fazoda diskret va uzluksiz ortogonallikka ega bo‘lgan ikkinchi tur Chebishev ko‘phadlari ham keng miqyosda qo‘llanilmoqda. Ikkinchi tur Chebishev ko‘phadlarining tadbiqiga oid ilmiy tadqiqotlar M. Mahalakshmi, G. Hariharan, K. Kannan, A. Midde, L. Chen, Z. Mao, H. Li, M. Abdelhakem, Aya Ahmed, M. El-kady, K. R. Raslan, K. K. Ali, E. M. H. Mohamed, M. Lotayif, M. A. Abd El salam kabi ko‘plab xorijiy olimlarning ishlarida keltirilgan.

Umumiy ko‘rinishdagi oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni, bunday tenglamalar uchun xos qiymat muammosi hamda yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr bo‘lgan differensial tenglamalarni sonli yechish va matematik modellashtirishda M. A. Lavrent’ev, B. V. Shabat, L. D. Landau, E. M. Libshits, A. N. Tixonov, N. N. Yanenko, N. S. Baxvalov, S. K. Godunov, O. A. Ladijenskiy, N. A. Jeltuxin, A. L. Krilov, B. L. Rojdestvenskiy, V. YA. Levchenko, A. S. Solovyov, M. A. Goldshtik,

V. A. Sapojnikov, B. P. Kolobov, A. G. Sleptsov, S. A. Orszag, H. Salwen, C. E. Grosch, D. Gottlieb, E. Turkel, A. T. Patera, T. J. Bridjes, H. G. Ku, A. Zebib kabi xorijiy olimlarning hissasi katta bo‘lgan.

Respublikamizda nochiziqli differensial masalalarni yechishga bag‘ishlangan tadqiqotlar F. B. Abutaliyev, M. M. Aripov, B . Xo‘jayorov, R. D. Aloyev, X. M.Shadimetov, Ch. B. Normurodov, A.R.Hayotov, A .S . Matyakubov, Z .R . Raxmonov, Sh. A. Sadullayeva va boshqalar tomonidan olib borilgan. Jumladan, spektral, spektral-to‘r metodlari F. B. Abutaliyev va Ch. B. Normurodov ishlarida tadqiq etilgan. Ularning ishlarida umumiy ko‘rinishdagi oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar yechimlarining birinchi turdagi Chebishev ko‘phadlariga asoslangan spektral-to‘r metodi bilan yaqinlashishi va yaqinlashish tezligi baholari keltirilgan. Bir fazali va ikki fazali gidrodinamik tizimlar matematik modellarini tadqiq etishga mo‘ljallangan spektral-to‘r metodi ishlab chiqilgan. Spektral-to‘r metodining gidrodinamik turg‘unlik muammolarini matematik modellashrishda samarali metod ekanligi, boshqa metodlardan farqli ravishda gidrodinamik turg‘unlik muammosini tavsiflovchi xos qiymat muammosining barcha xos qiymatlarini topishga imkon berishi asoslangan. Jumladan, gidrodinamik tizimlardagi eng muhim muammolardan biri bo‘lgan gidrodinamik turg‘unlik muammosini tavsiflovchi Orr-Sommerfeld tenglamasining xos qiymatlari spektral-to‘r metodi bilan aniqlangan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog`liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Termiz davlat universitetining ilmiy-tadqiqot ishlar rejasiga muvofiq “Matematik modellashtirish, hisoblash metodlari va dasturlash texnologiyalari” dasturi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi umumiy ko‘rinishdagi oddiy differensial tenglama hamda ushbu tenglama uchun xos qiymat muammosini yechishda spektral-to‘r metodining ikkinchi tur Chebishev ko‘phadlari bilan yaqinlashishini isbotlash va yaqinlashish tezligi baholarini olishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari quyidagilardan iborat:

ikkinchi tur Chebishev ko‘phadlari xossalarini tahlil etish;

umumiy ko‘rinishdagi oddiy differensial tenglama uchun chegaraviy masalani spektral-to‘r metodi bilan approksimatsiyalash va metodning yaqinlashishini isbotlash;

to‘rning maksimal qadami, approksimatsiyalashda qo‘llaniladigan minimal Chebishev ko‘phadlari soni va differensial tenglamadagi yuqori tartibli hosila ko‘rsatkichi orqali taqribiy yechimning aniq yechimga yaqinlashish tezligi bahosini olish;

umumiy ko‘rinishdagi oddiy differensial tenglama uchun xos qiymat muammosini spektral-to‘r metodi bilan approksimatsiyalash, metodning yaqinlashishini asoslash;

to‘rning maksimal qadami, approksimatsiyalashda qo‘llaniladigan minimal Chebishev ko‘phadlari soni va differensial tenglamadagi yuqori tartibli hosila ko‘rsatkichi orqali taqribiy xos qiymatlarning aniq xos qiymatlarga yaqinlashish bahosini olish;

yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr bo‘lgan differensial tenglama uchun chegaraviy masalani sonli yechish algoritmini ishlab chiqish, dasturiy ta’minotini yaratish va sonli hisoblashlar o‘tkazish.

Tadqiqotning ob’yekti umumiy ko‘rinishdagi oddiy differensial tenglama uchun chegaraviy masala hamda ushbu tenglamaga mos xos qiymat muammosi.

Tadqiqotning predmeti umumiy ko‘rinishdagi oddiy differensial tenglama uchun chegaraviy masalani hamda ushbu tenglama uchun xos qiymat muammosini spektral-to‘r metodi bilan ikkinchi tur Chebishev ko‘phadlari qatori orqali approksimatsiyalash, metodning yaqinlashishini isbotlash, yaqinlashish tezligi baholarini olish, yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr bo‘lgan differensial tenglama uchun qo‘yilgan chegaraviy masalani spektral-to‘r metodi bilan yechish algoritmini ishlab chiqish va dasturiy ta’minotini yaratishdan iborat.

Tadqiqotning metodlari. Tadqiqot ishida hisoblash matematikasi, matematik va sonli modellashtirish, funksional analiz, differensial tenglamalarni sonli yechish, approksimatsiyalash nazariyasi, Grin funksiyalari nazariyasi, hisoblash eksperimenti o‘tkazish metodlaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

ikkinchi tur Chebishev ko‘phadlari qatorining turli tartibli hosilalarini hisoblash uchun rekurrent formulalar qurilgan;

umumiy ko‘rinishdagi oddiy differensial tenglama uchun chegaraviy masala spektral-to‘r metodi bilan approksimatsiyalangan va yaqinlashish teoremalari isbotlangan;

to‘rning maksimal qadami, approksimatsiyalashda qo‘llaniladigan minimal Chebishev ko‘phadlari soni va differensial tenglamadagi yuqori tartibli hosila ko‘rsatkichi orqali taqribiy yechimning aniq yechimga yaqinlashish tezligi bahosi olingan;

umumiy ko‘rinishdagi oddiy differensial tenglama uchun xos qiymat muammosi spektral-to‘r metodi bilan approksimatsiyalangan va yaqinlashish teoremasi isbotlangan;

to‘rning maksimal qadami, approksimatsiyalashda qo‘llaniladigan minimal Chebishev ko‘phadlari soni va differensial tenglamadagi yuqori tartibli hosila ko‘rsatkichi orqali taqribiy xos qiymatlarning aniq xos qiymatlarga yaqinlashish bahosi olingan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

ikkinchi tur Chebishev ko‘phadlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat qatorning turli tartibli hosilalarini hisoblash uchun rekurrent formulalar qurilgan;

yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr bo‘lgan differensial tenglama uchun chegaraviy masalani spektral metodi bilan approksimatsiyalangan, yechish algoritmi ishlab chiqilgan va dasturiy ta’minoti yaratilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi amaliy matematika, to‘rlar nazariyasi, Grin funksiyalari nazariyasi, hisoblash eksperimenti o‘tkazish metodlaridan foydalanilganligi, yuqori tartibli differensial tenglama hamda ushbu tenglamaga mos xos qiymat muammosi uchun qo‘yilgan chegaraviy masalani yechishning spektral-to‘r metodining yuqori aniqligi va tejamkorligini baholash bilan asoslangan, shuningdek, yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr bo‘lgan tenglamaning aniq yechimi va spektral metod orqali olingan taqribiy yechimini taqqoslash natijalarining muvofiqligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati umumiy ko‘rinishdagi oddiy differensial tenglama uchun chegaraviy masalani hamda ushbu tenglama uchun xos qiymat muammosini yechish uchun yuqori aniqlik va samarali sonli metodlarni qurishda taklif qilingan spektral-to‘r metodining ikkinchi tur Chebishev ko‘phadlari bilan yaqinlashishi va yaqinlashish tezligi baholarini olishni ta’minlaydigan teoremalarning isbotlanganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati qurilgan spektral-to‘r metodi, yaratilgan algoritm va dasturlar majmui umumiy ko‘rinishdagi oddiy differensial tenglama va bunday tenglamalar uchun xos qiymat muammosini yechish jarayonida yuqori aniqlik va samarali hisoblash tajribalarini o’tkazishga imkon berishi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Umumiy ko‘rinishdagi oddiy differensial tenglama uchun chegaraviy masalani hamda ushbu tenglama uchun xos qiymat muammosini ikkinchi tur Chebishev ko‘phadlari bilan sonli yechishning spektral-to‘r metodi, algoritmlari va dasturiy ta’minoti asosida:

umumiy ko‘rinishdagi oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni va bunday tenglamalar uchun xos qiymat muammosini yechishda qo‘llanilgan usullardan OT-F4-64 raqamli “Birjinslimas g‘ovak muhitlarda suyuqlik sizishi va moddalar ko‘chishi gidrodinamik modellarni tuzish va sonli tadqiq etish” mavzusidagi fundamental loyihaning “Yoriq-g‘ovak muhitlarda moddaning sizishi va anomal ko‘chishi gidrodinamik modellarini tuzish va sonli tahlil qilish” nomli 2-bosqichida ikki zonali silindrik birjinslimas yoriq-g‘ovak muhitlarda anomal modda ko‘chishi va suyuqliklar sizishi masalalarini sonli tadqiq etishda foydalanilgan (Samarqand davlat universitetining 2024-yil 9-iyuldagi 10-3344-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo‘llanilishi ikki zonali silindrik birjinslimas yoriq-g‘ovak muhitlarda anomal modda ko‘chishi va suyuqliklar sizishi masalalarini sonli tadqiq etishda g‘ovak muhitdagi konvektiv-diffuzion ko‘chish tenglamasini samarali sonli yechish imkonini bergan;

yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr bo‘lgan differensial tenglama uchun chegaraviy masalani sonli yechish uchun ishlab chiqilgan dasturiy ta’minotidan FZ-202009211 raqamli “Aralash turdagi tenglamalar uchun xarakteristika va buzilish chizig‘ida Frankl va Bitsadze-Samarskiy shartlari berilgan masalalar korrektligini noklassik singulyar integral tenglamalarga olib kelib o‘rganish” mavzusidagi fundamental loyihada noklassik singulyar integral tenglamalarni sonli tadqiq etishda foydalanilgan (Termiz davlat universitetining 2024-yil 18-iyuldagi 04/12-2417-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo‘llanilishi singulyar koeffitsiyentli Gellerstedt tenglamasi uchun Trikomi va ichki xarakteristikalarda siljishli shartlili kombinatsiyalashgan masalalarni yechishda hosil bo‘ladigan integral tenglamalarni sonli yechish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur dissertatsiya natijalari 9 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan, 7 ta halqaro va 2 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarda muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo`yicha jami 15 ta ilmiy ish, jumladan O`zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 6 ta maqola, jumladan, 2 tasi xorijiy (Scopus bazasida indeksatsiyalangan), 4 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan. Shuningdek, 2 ta EHM dasturiy mahsulotlarni qayd etish guvohnomasi olingan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya tarkibi kirish, uchta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati va ilovalardan tashkil topgan. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 84 betni tashkil etadi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning O‘zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, dissertatsiya mavzusiga oid ilmiy tadqiqotlar tahlili, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, ob’yekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati keltirilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning **“Ikkinchi tur Chebishev ko‘phadlari”** deb nomlangan birinchi bobida dissertatsiyaning asosiy natijalarini bayon qilishda zarur bo‘lgan ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning 1.1-paragrafida ikkinchi tur Chebishev ko‘phadlarining trigonometrik va algebraik shakldagi ifodalari hamda ushbu ko‘phadlarning muhim xossalari bayon qilingan. Oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni spektral metodlar bilan yechishda ikkinchi tur Chebishev ko‘phadlaridan ortogonal bazis funksiyalar sifatida foydalanilganda taqribiy yechim quyidagi ko‘rinishda izlanadi:

$$u_t(x) = \sum_{n=o}^{N} a_n U_n(x), \tag{1}$$

bu yerda $a_n \ (n = 0,1,2,...,N)$-noma’lum koeffitsiyentlar, $U_n(x)$-ikkinchi tur Chebishev ko‘phadlari. Taqribiy yechim $u_t(x)$ning hosilalarini hisoblash uchun quyidagi formulalar chiqarildi:

$$\frac{du_t}{dx} = \sum_{n=0}^{N} 2(n+1)\left(\sum_{\substack{p=n+1 \\ p+n\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)}}^{N} a_p \right) U_n(x)$$

$$\frac{d^2u_t}{dx^2} = \sum_{n=0}^{N} (n+1)\left(\sum_{\substack{p=n+2 \\ p\equiv n(\mathrm{mod}\,2)}}^{N} (p-n)(\mathrm{p}+\mathrm{n}+2) a_p \right) U_n(x)$$

$$\frac{d^3u_t}{dx^3}=\sum_{n=0}^{N}4(n+1)\left(\sum_{\substack{p=n+3\\ p+n\equiv1(\mathrm{mod}\,2)}}^{N}\left(\left(\frac{p-n-1}{2}\right)^4+2\left(\frac{p-n-1}{2}\right)^3(n+1)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(\frac{p-n-1}{2}\right)^2\left(n^2+5n+5\right)+\left(\frac{p-n-1}{2}\right)\left(n^2+3n+2\right)\right)\right)U_n(x)$$

$$\frac{d^4u_t}{dx^4}=\sum_{n=0}^{N}2\,(n+1)\left(\sum_{\substack{p=n+4\\ p\equiv n(\mathrm{mod}\,2)}}^{N}\left((p-n-2)(p-n)\left(\frac{n^3}{3}\left(\frac{p-n+2}{2}\right)+\right.\right.\right.\tag{2}$$

$$+n^2\left(\frac{p-n+2}{2}\right)^2+n\left(\left(\frac{p-n+2}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{p-n+2}{2}\right)\right)+$$

$$\left.\left.\left.+\left(\frac{p-n+2}{2}\right)^2\frac{(p-n)(p-n+4)}{12}\right)\right)\right)U_n(x)$$

1.2-paragrafda ikkinchi tur Chebishev ko‘phadlarining turli sonli metodlar yaratishdagi, amaliy masalalarni hamda differensial tenglamalarni yechishdagi tadbiqiga oid ilmiy tadqiqot ishlar tahlili keltirilgan.

Dissertatsiyaning ikkinchi bobi **“Oddiy differensial tenglama uchun chegaraviy masalani spektral-to‘r metodi bilan sonli yechish”** deb nomlanib, unda umumiy ko‘rinishdagi oddiy differensial tenglama uchun birjinsli chegaraviy masalani spektral-to‘r metodi bilan ikkinchi tur Chebishev ko‘phadlaridan bazis funksiyalari sifatida foydalanib yechish bayon qilingan. Metodning yaqinlashishi va yaqinlashish tezligi bahosi haqidagi teoremalar isbotlangan.

Ushbu bobning 2.1-paragrafida m-tartibli chiziqli oddiy differensial tenglama

$$L_0u=\frac{d^mu}{dy^m}+\sum_{i=0}^{m-1}q_i(y)\frac{d^iu}{dy^i}=f(y),\ -1<y<+1\tag{3}$$

birjinsli chegaraviy shartlar

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left(\alpha_{ik}\frac{d^ku(-1)}{dy^k}+\beta_{ik}\frac{d^ku(+1)}{dy^k}\right)=0,\ i=1,2,...,m\tag{4}$$

bilan qaralgan. Differensial masala (3)-(4) $f(y)=0$ da faqat trivial yechimga ega deb faraz qilamiz. Bu qaralayotgan masala uchun Grin funksiyasi mavjudligini ta’minlaydi. Differensial tenglama (3)dagi $\frac{d^m}{dy^m}$ operator uchun Grin funksiyasi mavjud. Uni $G(y,\xi)$ orqali belgilaymiz. Quyidagi uzluksiz funksiyani kiritamiz:

$$x(y)=\frac{d^m}{dy^m}u(y),\tag{5}$$

bu erda $u(y)$ masala (3)-(4)ning yechimi. U holda

$$u(y)=\int_{-1}^{+1}G(y,\xi)\,x(\xi)\,d\xi\tag{6}$$

Endi (6)ni (3)ga qo‘yib va (5)ni e’tiborga olsak quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$x(y)+\int_{-1}^{+1}\left(\sum_{i=0}^{m-1}q_i(y)G^{(i)}(y,\xi)\right)x(\xi)d\xi=\int_{-1}^{+1}G(y,\xi)f(\xi)d\xi .$$

Oxirgi tenglamada $T(y,\xi)=\sum_{i=0}^{m-1}q_i(y)G^{(i)}(y,\xi)$ deb belgilash kiritsak, u holda uni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$x(y)+\int_{-1}^{+1}T(y,\xi)x(\xi)d\xi=\int_{-1}^{+1}G(y,\xi)f(\xi)d\xi \qquad (7)$$

Grin funksiyasi xossalaridan kelib chiqadiki, $T(y,\xi)$ funksiya o‘z argumentlari bo‘yicha $[-1,1]\times[-1,1]$ sohada uzluksiz funksiya bo‘lib, u $y=\xi$ ”diagonal”da chekli uzilishlarga ega. Agar ushbu $Tx=\int_{-1}^{+1}T(y,\xi)x(\xi)d\xi$ operatorni hamda $F(y)=\int_{-1}^{+1}G(y,\xi)f(\xi)d\xi$ funksiyani kiritsak, u holda (7)ni quyidagi ikkinchi tur uzluksiz operatorli tenglama ko‘rinishida yozish mumkin:

$$(I+T)x=F,\ I\text{-birlik operator} \qquad (8)$$

2.2-paragrafda differensial masala (3)-(4) spektral-to‘r metodi bilan approksimatsiyalanib, diskret masalaga keltiriladi.

Spektral-to‘r metodida qaralayotgan integrallash kesmasi $[-1,+1]$da to‘r kiritiladi: $-1=y_0<y_1<\ldots<y_N=1,$ bu erda N–berilgan butun musbat son. To‘r teng oraliqli yoki tengmas oraliqli bo‘lishi mumkin. Masala (3)-(4) ning taqribiy yechimi to‘rning har bir elementi $[y_{j-1},y_j]\,(j=1,2,\ldots,N)$da turli sondagi ikkinchi tur Chebishev ko‘phadlari $U_n$ning chiziqli kombinatsiyasi ko‘rinishida izlanadi:

$$u_j^{(p_j)}(y)=\sum_{n=0}^{p_j}a_n^{(p_j)}U_n(\tilde{y}),\ y\in[y_{j-1},y_j],\ y=\frac{m_j}{2}+\frac{l_j}{2}\tilde{y}, \qquad (9)$$

bu yerda $m_j=y_j+y_{j-1}$, $l_j=y_j-y_{j-1}$, $-1\le\tilde{y}\le 1$ bo‘lib, $l_j-$to‘rning j-elementining uzunligi. To‘rning maksimal qadami $\hbar=\max\limits_{1<j<N}l_j=\max\limits_{1<j<N}\left(y_j-y_{j-1}\right)$, p_j-differensial masala (3)-(4)ning yechimini to‘rning j-elementi $[y_{j-1},y_j]$da approksimatsiyalashda foydalaniladigan Chebishev ko‘phadlari soni, bu yerda har bir fiksirlangan j uchun $p_j\to\infty$ hamda $p_j>m$, to‘rning elementlarida yechimni approksimatsiyalashda qo‘llaniladigan minimal ko‘phadlar sonini $p_-=\min\limits_{1<j<N}p_j$, umumiy sonini esa $\bar{m}=\sum_{j=1}^{N}(p_j+1)$ bilan belgilaymiz. Spektral-to‘r metodida to‘rning ichki tugunlari $y_j\ (j=1,2,\ldots N-1)$da taqribiy yechim (9) va uning

$(m-1)$-tartibgacha bo‘lgan hosilalarining uzluksizligi hamda to‘rning $y_0=-1$ va $y_N=+1$ chegaraviy nuqtalarida mos chegaraviy shartlarning qanoatlantirilishi talab qilinadi:

$$\begin{cases} \dfrac{d^s u_j^{(p_j)}(y_j)}{dy^s} = \dfrac{d^s u_{j+1}^{(p_{j+1})}(y_j)}{dy^s}, \ s=0,1,\ldots,m-1, \ j=1,2,\ldots,N-1, \\ \sum\limits_{k=0}^{m-1}\left[\alpha_{ik}\dfrac{d^k u_1^{(p_1)}(-1)}{dy^k}+\beta_{ik}\dfrac{d^k u_N^{(p_N)}(+1)}{dy^k}\right]=0, \ i=1,2,\ldots,m. \end{cases} \tag{10}$$

Taqribiy yechim koeffitsiyentlari $a_n^{(p_j)}$ larni $\left(L_0 u_j^{(p_j)}(y)-f_j\right)$ xatolikning $\left[y_{j-1},y_j\right]$ kesmada $\rho(\tilde{y})$ vazn bilan p_j-m- darajagacha bo‘lgan Chebishev ko‘phadlariga ortogonal bo‘lish shartidan aniqlaymiz, ya’ni

$$\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j}\left(L_0 u_j^{(p_j)}(y)-f_j(y)\right)U_k(\tilde{y})\rho(\tilde{y})\,dy=0, \quad \begin{matrix} j=1,2,\ldots N, \\ k=0,1,\ldots,p_j-m, \end{matrix} \tag{11}$$

bu yerda $\rho(\tilde{y})=\sqrt{1-\tilde{y}^2}$, $-1\le\tilde{y}\le1$, $f_j(y)=f(y)\big|_{y\in\left[y_{j-1},y_j\right]}$.

Endi $x_j^{(p_j)}(y)=\dfrac{d^m}{dy^m}u_j^{(p_j)}(y),\ y\in\left[y_{j-1},y_j\right]$, (12)

belgilash kiritsak, u holda $x_j^{(p_j)}(y)=\sum\limits_{n=0}^{p_j}a_n^{(p_j)}\left(\dfrac{2}{l_j}\right)^m U_n^{(m)}(\tilde{y})$. (13)

So‘ngra $X^{(p)}=\left(x_1^{(p_1)}(y),x_2^{(p_2)}(y),\ldots,x_N^{(p_N)}(y)\right)$ vektorni hamda chekli o‘lchovli $X^{(p)}$ vektorlar fazosi $L_{2,\rho}^{(p)}$ da quyidagicha skalyar ko‘paytmani kiritamiz:

$\left(X^{(p)},Z^{(p)}\right)_{L_{2,\rho}^{(p)}}=\sum\limits_{j=1}^{N}\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j}x_j^{(p_j)}(y)\,z_j^{(p_j)}(y)\rho(\tilde{y})dy,\ \tilde{y}\in[-1,+1]$. Xuddi shuningdek, vektor funksiyalar $X=\left(x_1(y),x_2(y),\ldots,x_N(y)\right)$, $x_i(y)\in L_{2,\rho}\left(y_{i-1},y_i\right)$ ning Gilbert fazosi $L_{2,\rho}^N$ ni kiritamiz, ya’ni

$$L_{2,\rho}^N\in L_{2,\rho}\left(y_0,y_1\right)\times L_{2,\rho}\left(y_1,y_2\right)\times\ldots\times L_{2,\rho}\left(y_{N-1},y_N\right)$$

hamda skalyar ko‘paytma ham $L_{2,\rho}^{(p)}$ fazodagi kabi aniqlanadi.

Masala (11)da Grin funksiyalarini qo‘llab, quyidagi ikkinchi tur diskret operatorli tenglamaga keltiriladi:

$$X^{(p)}+P_pTX^{(p)}=P_pF,\ X^{(p)}\in L_{2,\rho}^{(p)}, \tag{14}$$

bu yerda

$$TX^{(p)}=\left(\sum_{i=1}^{N}T^i x_i^{(p_i)}(y)\bigg|_{y\in[y_0,y_1]},\sum_{i=1}^{N}T^i x_i^{(p_i)}(y)\bigg|_{y\in[y_1,y_2]},\ldots\right),$$

$$F=\left(F_1(y)_{y\in[y_0,y_1]},F_2(y)\big|_{y\in[y_1,y_2]}\Big|,...,F_N(y)\big|_{y\in[y_{N-1},y_N]}\right).$$

$P_p:L^N_{2,\rho}\to L^{(p)}_{2,\rho}$ proyektorni quyidagi qoida asosida kiritamiz:

agar $X=(x_1(y),x_2(y),...,x_N(y))$ va $x_i(y)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}c_k^{(i)}U_k(\tilde{y})$ bo‘lsa, u holda

$$P_pX=\left(\sum_{k=0}^{p_1-m}c_k^{(1)}U_k(\tilde{y}),...,\sum_{k=0}^{p_N-m}c_k^{(N)}U_k(\tilde{y})\right).$$

X vektor bo‘yicha har doim $y\in[y_{i-1},y_i]$da $x(y)=x_i(y)$qoida bo‘yicha $x(y)$ funksiyani tuzish mumkin, u holda $L^N_{2,\rho}$ fazo $L^N_{2,\rho}(-1,+1)$fazoga undagi skalyar ko‘paytma bo‘yicha izomorf bo‘ladi. Agar tenglama (8)ning yechimi $x(y)$ funksiyalariga nisbatan yuqoridagi izomorfizm yordamida $X(y)$vektorni aniqlasak, ya’ni,

$$X(y)=\left(x(y)\big|_{y\in[y_0,y_1]},x(y)\big|_{y\in[y_1,y_2]},...,x(y)\big|_{y\in[y_{N-1},y_N]}\right)=(x_1,x_2,...,x_N),$$

tenglama (8)da aniqlangan T operator va F funksiya esa

$$TX=\left(\sum_{i=1}^{N}T^ix_i\Big|_{y\in[y_0,y_1]},...\right)=\left(\int_{-1}^{1}T(y,\xi)x(\xi)d\xi\Big|_{y\in[y_0,y_1]},...\right)=(Tx,Tx,...,Tx),$$

$$F=\left(F_1(y)\big|_{y\in[y_0,y_1]},...\right)=\left(\int_{-1}^{1}G(y,\xi)\,f(\xi)d\xi\Big|_{y\in[y_0,y_1]},...\right)=(Fy,Fy,...,Fy)$$

formulalarga asosan aniqlangan bo‘lsa, u holda (8) tenglamani quyidagi ekvivalent shaklda yozish mumkin:

$$X+TX=F,\ F\in L^N_{2,\rho} \tag{15}$$

Ushbu tenglama taqribiy yechim uchun yozilgan tenglama (14) bilan taqqoslash hamda ma‘lum natijalardan foydalanish uchun qulay.

2.3-paragrafda birjinsli chegaraviy shartlar bilan qaralgan umumiy ko‘rinishdagi differensial tenglama uchun spektral-to‘r metodining yaqinlashishi, yaqinlashish tezligi baholari haqidagi teoremalar isbotlanadi.

1-izoh. Agar biror bir normada $(p)\to\infty$ da $X^{(p)}\to X$ bo‘lsa (masalan, $L^N_{2,\rho}$ dagi skalyar ko‘paytma bilan aniqlangan), u holda $X^{(p)}$ va X vektorlarning komponentlari orqali $x^{(p)}(y)$ va $x(y)$ $(y\in[-1,+1])$ funksiyalarni quramiz, biz ko‘rsatilgandek $L^N_{2,\rho}$da $x^{(p)}$ning $x$ga yaqinlashishiga ega bo‘lamiz. Bu $x(y)$ funksiyani operatorli tenglama (8)ning yechimi deb hisoblash uchun asos bo‘ladi.

Spektral-to‘r metodining yaqinlashishini isbotlashda differensial masala (3)-(4)ni yechishga tadbiq etilgan spektral-to‘r metodi ikkinchi tur operatorli tenglama (15)ga ekvivalent ekanligini ko‘rsatamiz. Ushbu tenglamaga proyeksion metodlar yaqinlashishining umumiy teoremalarini qo‘llash mumkin.

1-teorema. Tenglama (3)ning koeffitsiyentlari va o‘ng tomonidagi funksiya uzluksiz bo‘lsin. Tenglama (15)ning yechimi X_0 bo‘lsin (X_0ning mavjudligi masala (3)-(4) ning bir qiymatli yechimga ega ekanligidan kelib chiqadi).U holda (p)ning yetarlicha katta qiymatlarida (ya'ni, barcha j lar uchun p_j ning katta qiymatlarida) tenglama (14) yagona $X^{(p)}$ yechimga ega va ushbu baho o'rinli:

$$\left\|X^{(p)} - X_0\right\|_{L_{2,\rho}^N} \le c_0 \left\|X_0 - X_p^0\right\|_{L_{2,\rho}^N} \tag{16}$$

bunda X_p^0 uzunligi "p"ga teng bo'lgan $X_0 = (x_1^0,...,x_N^0)$ funksiyaning Chebishev ko'phadlari bo'yicha Furye kesmasi, ya'ni

$$X_p^0 = (x_{p_1}^{(0)},...,x_{p_N}^{(0)}),\ x_{p_i}^{(0)} = \sum_{j=0}^{p_j-m} \tilde{c}_j^i U_j(\tilde{y}),\ \tilde{c}_j^i = \int_{y_{j-1}}^{y_j} x_i^0(y) U_j(\tilde{y}) \rho(\tilde{y}) dy,$$

$$\left(\left\|X_0\right\|_{L_{2,\rho}^N}^2 = \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{\infty} (\tilde{c}_i^{(j)})^2\right)\right),\ \left\|X^{(p)} - X_p^0\right\|_{L_{2,\rho}^N}^2 = \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=p_j-m+1}^{\infty}\left(\tilde{c}_i^{(j)}\right)^2\right);$$

c_0-o'zgarmas bo'lib, u $\left(I+T\right)^{-1}$ teskari operatorning normasiga bog'liq bo'ladi, $I-$birlik operator.

2-teorema. 1-teoremadagi mulohazalar o'rinli bo'lsin. Funksiya $u^{(p)}\left(y\right) = \int_{-1}^{+1} G\left(y,\xi\right) x^{(p)}\left(\xi\right) d\xi$, $(p) \to \infty$ da masala (3)-(4)ning aniq yechimi $u_0\left(y\right)$ga W_2^m fazo normasi $\left(\left\|\varphi\right\|_{W_2^m}^2 = \sum_{k=0}^{m}\left\|\frac{d^k\varphi}{dy^k}\right\|^2\right)$ bo'yicha yaqinlashadi va quyidagi baho o'rinli bo'ladi:

$$\left\|u^{(p)} - u_0\right\|_{W_2^m(-1,+1)} \le \tilde{c}_0 \left\|X^{(p)} - X_0\right\|_{L_{2,\rho}^N}, \tag{17}$$

bunda $\tilde{c}_0 = c_0\tilde{c}$, $\tilde{c} = \sup\limits_{\varphi\in L_{2,\rho}} \dfrac{\left\|\int_{-1}^{1} G(y,\xi)\varphi(\xi)d\xi\right\|_{W_2^m}}{\left\|\varphi\right\|_{L_{2,\rho}}}$.

3-teorema. Tenglama (3)ning koeffitsiyentlari va o'ng tomonidagi funksiya $C^{s+\alpha}\left[-1,+1\right]$ fazoga tegishli bo'lsin, u holda 1-teoremadagi tasdiq o'rinli bo'lib, baho (16) quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\left\|X^{(p)} - X_0\right\|_{L_{2,\rho}^N}^2 \le \tilde{c}_1 \left(\frac{\text{h}}{p_- - m}\right)^{2(s+\alpha)}, \tag{18}$$

bu yerda $(p) = \left(p_1, p_2,..., p_N\right)$, $p_- = \min\limits_{1\le j\le N} p_j$, $\hbar = \max\limits_{1\le j\le N}\left(y_j - y_{j-1}\right)$,

$$\tilde{c}_1 = c_0 c_1,\ c_1 = \frac{\pi}{2}\left(c_s^{'} M\right)^2,\ c_s^{'} = 12\frac{6^s s^s}{s!}\left(\frac{s+1}{2}\right)^{\alpha},$$

$s\,(s=\overline{1,m})$ - hosila tartibi, o‘zgarmaslar M,α Lipshits shartidan aniqlanadi: $\left|f^{(s)}(y_j)-f^{(s)}(y_{j-1})\right|\le M\left|y_j-y_{j-1}\right|^{\alpha}$.

4-Teorema. Agar tenglama (3)ning koeffitsiyentlari va o‘ng tomonidagi funksiya $C^{s+\alpha}[-1,+1]$ fazoga tegishli bo‘lsa, u holda $(p)\to\infty$ da $u^{(p)}(y)=\int_{-1}^{+1}G(y,\xi)x^{(p)}(\xi)d\xi$ funksiya masala (3)-(4) ning yechimi $u_0(y)$ funksiyaga W_2^m fazo normasi bo‘yicha yaqinlashadi va quyidagi baho o‘rinli bo‘ladi:

$$\left\|u^{(p)}-u_0\right\|^2_{W_2^m(-1,1)}\le c_2\left(\frac{\hbar}{p_{-}-m}\right)^{2(s+\alpha)}, \tag{19}$$

bunda $c_2=\tilde{c}_0^2\tilde{c}_1$.

Dissertatsiyaning 3-bobi **“Spektral-to‘r metodini xos qiymat muammosini yechishga qo‘llash”** deb nomlanadi, unda umumiy ko’rinishdagi xos qiymat muammosini yechishga spektral-to‘r metodini qo‘llash qaralgan bo‘lib, dastlab uzluksiz xos qiymat muammosi va spektral-to‘r metodi bilan olingan diskret xos qiymat muammosi ikkinchi tur operatorli tenglamaga keltiriladi. So‘ngra uzluksiz operatorli tenglama xos qiymatlariga spektral-to‘r metodi bilan olingan diskret operatorli tenglama xos qiymatlarining yaqinlashishi isbotlangan va yaqinlashish tezligi baholangan.

3.1-paragrafida umumiy ko‘rinishdagi $m-$tartibli oddiy differensial tenglamani

$$L^{\lambda}u=u^{(m)}(y)+\sum_{i=0}^{m-1}q_i(y)u^{(i)}(y)-\lambda\sum_{i=0}^{l}\overline{q}_i(y)u^{(i)}(y)=0,\ l<m,\ y\in(-1,+1) \tag{20}$$

chiziqli birjinsli chegaraviy shartlar

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left(\alpha_{ik}u^{(k)}(-1)+\beta_{ik}u^{(k)}(+1)\right)=0,\ i=1,2,...,m \tag{21}$$

bilan qaralgan.

Differensial masala (20)-(21)ning taqribiy yechimini (9) ko’rinishida izlaymiz, hamda shartlar (10)ning qanoatlantirilishi talab qilinadi. Xatolik $L^{\lambda_p}u_j^{(p_j)}(y)$ning $\left(p_j-m\right)$-darajagacha bo‘lgan Chebishev ko’phadlari bilan ortogonallik sharti quyidagicha yoziladi:

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j}L^{\lambda_p}u_j^{(p_j)}(y)U_k(\tilde{y})\rho(\tilde{y})dy=0\ ,\quad \begin{matrix} j=1,2,...,N, \\ k=0,1,...,p_j-m, \end{matrix} \tag{22}$$

bu yerda $\rho(\tilde{y})=\sqrt{1-\tilde{y}^2}$ vazn funksiya, $y=\dfrac{m_j}{2}+\dfrac{l_j}{2}\tilde{y}$, $y\in\left[y_{j-1},y_j\right]$,

$$\tilde{y}\in[-1,+1]\ ,\ m_j=y_j+y_{j-1},\ l_j=y_j-y_{j-1}.$$

Gidrodinamik turg'unlik muammolarida $a_n^{(p_j)}$ koeffitsiyentlarni topish muhim ahamiyat kasb etmaydi, ammo birjinsli sistema notrivial yechimga ega bo'ladigan va taqribiy yechimning xos qiymati bo'lgan λ^p parametrlarni aniqlash o'ta muhim, ularni spektral-to'r metodi bilan olingan diskret masalaning xos qiymatlari deb ataymiz, ular uchun birjinsli tenglamaning notrivial yechimi mavjud bo'ladi.

Agar 2.1-paragrafda aniqlangan $Tx=\int_{-1}^{1}T\left(y,\xi\right)x(\xi)d\xi$ operator kabi $\bar{T}x=\int_{-1}^{1}\bar{T}\left(y,\xi\right)x(\xi)d\xi$ operatorni kiritsak, u holda (22)ni operatorli tenglama ko'rinishda yozish mumkin:

$$(I+T)x=\lambda\bar{T}x\,. \tag{23}$$

3.2-paragrafda dissertatsiyaning ikkinchi bob 2.2-paragrafida keltirlgan mulohazalar va belgilashlarga asosan spektral-to'r metodi bilan differensial masala (20)-(21)ni diskret ikkinchi tur operatorli tenglamaga keltirilgan:

$$X^{(p)}+P_pTX^{(p)}=\lambda^{(p)}P_p\bar{T}X^{(p)}\,. \tag{24}$$

Tenglama (23)ni ham ekvivalent shaklda quyidagicha yozamiz:

$$X+TX=\lambda\bar{T}X \tag{25}$$

3.3-paragrafda spektral-to'r metodi bilan olingan diskret xos qiymatlar $\lambda^{(p)}$ning uzluksiz operatorli tenglama xos qiymatlari λ ga yaqinlashishiga oid tadqiqot natijalari keltirilgan.Tenglama (25)da $F_1=\left(I+T\right)^{-1}$ belgilash kiritaylik. $L_{2,\rho}^N$ fazodan $L_{2,\rho}^N$ fazoga uzluksiz F_1 teskari operatorning mavjud ekanligi uzluksiz operatorli tenglama (25)ning shart (21)ni qanoatlantiruvchi tenglama (20)ga ekvivalentligi hamda $x(y)=\dfrac{d^m u(y)}{dy^m}$ munosabatdan kelib chiqadi. U holda (25)ni unga ekvivlent quyidagi tenglama ko'rinishda yozamiz:

$$\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{F}_1\bar{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{X}=\lambda\boldsymbol{F}\boldsymbol{X}\,, \tag{26}$$

bu yerda $F=F_1\bar{T}$. $\bar{T}$ operator $L_{2,\rho}^N$ fazodan $L_{2,\rho}^N$ fazoga akslantiruvchi to'liq uzluksiz operatordan iborat. Shu sababli, F operator, to'liq uzluksiz operator $\bar{T}$ va chegaralangan operator F_1ning ko'paytmasi sifatida to'liq uzluksiz operator bo'ladi. Baho[2]ga asosan

$$\left\|(I+P_pT)^{-1}\right\|\le c \tag{27}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi va (p)ning yetarlicha katta qiymatlarida tenglama (24) ham unga ekvivalent bo'lgan operatorli tenglamaga keltiriladi:

$$X^{(p)}=\lambda^{(p)}\left(I+P_pT\right)^{-1}P_p\bar{T}X^{(p)}=\lambda^{(p)}F_pX^{(p)} \tag{28}$$

bu yerda $F_p=\left(I+P_pT\right)^{-1}P_p\bar{T}$.

[2] Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений– М.:Наука, 1969, 456 с.(188 bet 15.19-baho)

Xuddi shuningdek, $\overline{T}$ operatorning to‘liq uzluksizligi, hamda P_p operatorning chegaralanganligidan $P_p\overline{T}$ operatorning ham to‘liq uzluksiz operator ekanligi kelib chiqadi. Endi $(I+P_pT)^{-1}$ operatorning uzluksizligidan (baho (27)ga asosan) (p)ning yetarlicha katta qiymatlarida $F_p : L_{2,\rho}^{(p)} \to L_{2,\rho}^{(p)}$ operatorning ham to‘liq uzluksiz operator ekanligi ko‘rinadi. Masala (26)ning $(p)\to\infty$ da spektral-to‘r metod bilan topilgan taqribiy xos qiymatlari λ^p ning masala (28)ning aniq xos qiymatlari λ ga yaqinlashishini tavsiflash uchun monografiyadagi[3] yaqinlashish haqidagi mulohazalardan foydalanildi.

5-teorema. Quyidagi shartlar bajarilgan bo‘lsin:

$$\begin{aligned} \|U_p\| &= \|F - P_pF\| \to 0,\ p\to\infty\ da \\ \|S_p\| &= \|F_p - P_pF\| \to 0,\ p\to\infty\ da \end{aligned}, \qquad (29)$$

va S_p operator $L_{2,\rho}^{(p)}$ fazoda, U_p operator esa $L_{2,\rho}^{N}$ fazoda qaraladi.

U holda tenglama (26)ning har bir xos qiymati λ_0 uchun tenglama (28)ning shunday taqribiy xos qiymatlari ketma-ketligi $\lambda^{(p)}$ topiladiki, $(p)\to\infty$ da $\lambda^{(p)}\to\lambda_0$. Aksincha, tenglama (28)ning xos qiymatlari ketma-ketligi $\lambda^{(p)}$ ning har bir limitik qiymati tenglama (26)ning xos qiymati bo‘ladi.

6-teorema. Tenglama (20)ning koeffitsiyentlari $C^{s+\alpha}, 0\le\alpha\le 1$ fazoga tegishli, $(p)\to\infty$ da $\lambda^{(p)}$ taqribiy xos qiymat λ_0 xos qiymatga yaqinlashsin, hamda λ_0 xos qiymat r karrali bo‘lsin. U holda quyidagi baho o‘rinli bo‘ladi:

$$\left|\lambda^{(p)}-\lambda_0\right| \le c_0\left(\sqrt{c_1}\left(\frac{\hbar}{p_- - m}\right)^{s+\alpha}\right)^{\frac{1}{r}} \qquad (30)$$

bu yerda $c_0 - \left(I+T\right)^{-1}$ teskari operatorning normasiga bog‘liq bo‘lgan o‘zgarmas, I -birlik operator. O‘zgarmas son c_0, c_1 lar 2-bobdagi teoremalarda aniqlangan.

3.4-paragrafda jadval va grafik ko‘rinishda yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr bo‘lgan differensial tenglama uchun chegaraviy masalani spektral metod bilan hisoblash eksperimenti natijalari keltirilgan. 1-jadvalda ikkinchi tur Chebishev ko‘phadlarining soni 50ga, kichik parametrning qiymati $\varepsilon = 10^{-2}$ ga, 2- va 3-jadvallarda mos ravishda Chebishev ko‘phadlari soni 50 va 100ga teng, kichik parametrning qiymati esa $\varepsilon = 10^{-3}$ bo‘lgan holdagi sonli natijalar keltirilgan. Differensial masalaning aniq yechimi quyidagicha:

$$u(y) = \frac{\varepsilon - 0.5}{1-e^{-1/\varepsilon}}\left(1 - e^{-(y+1)/2\varepsilon}\right) - \varepsilon\frac{y+1}{2} + \frac{(y+1)^2}{8}.$$

---

[3] Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости. – Т.: «Фан ва технология», 2011,188 с.(14-16 bet)

1-jadval.

Aniq va spektral yechimlarni taqqoslash

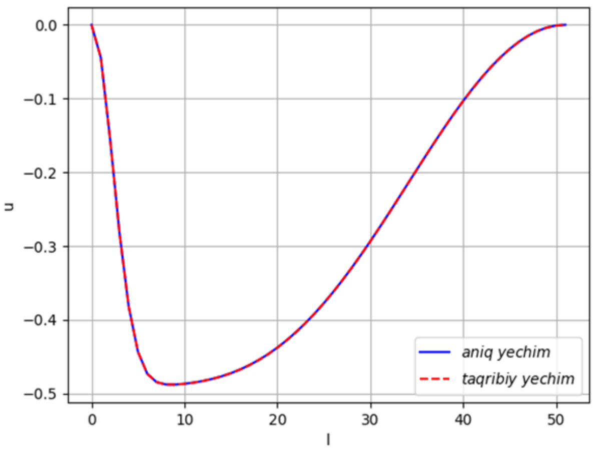
l	y_l -tugunlar	$u(y)$ -aniq yechim	$u_t(y)$ -taqribiy yechim	$\lvert u(y)-u_t(y)\rvert$ - xatolik
1	-0.998	-0.0443421265	-0.0443421266	0.0000000001
5	-0.953	-0.44336291586753	-0.44336291586749	0.00000000000004
25	-0.0308	-0.377426247392	-0.37742624739	0.000000000002
45	0.932	-0.032856246469	-0.032856246468	0.000000000001

2-jadval.

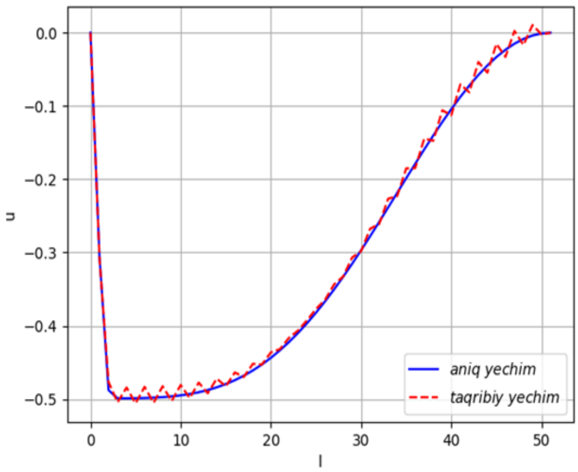
Aniq va spektral yechimlarni taqqoslash

l	y_l - tugunlar	$u(y)$ -aniq yechim	$u_t(y)$ -taqribiy yechim	$\lvert u(y)-u_t(y)\rvert$ - xatolik
5	-0.953	-0.49875	-0.50574	0.00699
25	-0.0308	-0.38206	-0.37699	0.00507
35	0.552	-0.19855	-0.18514	0.01341
45	0.932	-0.03316	-0.01515	0.01801

1-jadval va 2-jadvalda keltirilgan natijalar grafik ko‘rinishda 1-rasm va 2-rasmlarda ifodalangan.



1-rasm. Aniq va spektral yechimlar dinamikasi($\varepsilon = 0{,}01$)



2-rasm. Aniq va spektral yechimlar dinamikasi($\varepsilon = 0{,}001$)

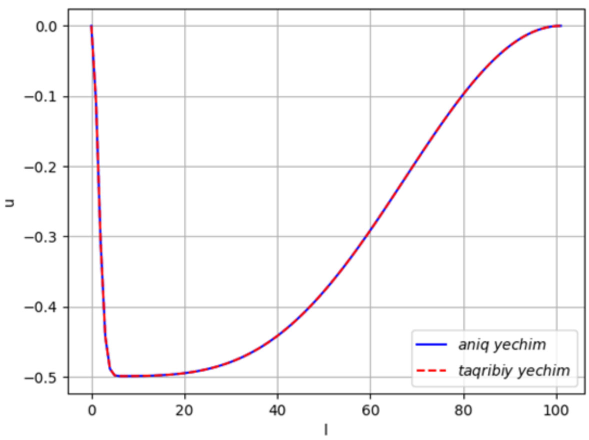
Kichik parametrning qiymati $\varepsilon = 10^{-3}$ bo‘lganda yetarli aniqlikni ta’minlash uchun ko‘phadlar sonini oshirish lozim, masalan $N = 100$ bo‘lganda yechimlarni taqqoslash quyidagi jadvalda berilgan:

3-jadval.

Aniq va spektral yechimlarni taqqoslash

l	y_l - tugunlar	$u(y)$ -aniq yechim	$u_t(y)$ -taqribiy yechim	$\lvert u(y)-u_t(y)\rvert$ - xatolik
10	-0.9520	-0.498736	-0.498734	0.000002
50	-0.016	-0.3783499	-0.3783504	0.0000005
100	0.999	-0.0002416	-0.0002413	0.0000003

Ushbu jadvaldagi natijalar grafik ko‘rinishda 3-rasmda ifodalangan.



3-rasm.Aniq va taqribiy yechimlar dinamikasi($\varepsilon = 0,001$)

XULOSA

Dissertatsiya ishining asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1. Ikkinchi tur Chebishev ko‘phadlari qatorining turli tartibli hosilalarini hisoblash uchun rekurrent formulalar chiqarilgan.

2. Umumiy ko‘rinishdagi oddiy differensial tenglamaga qo‘yilgan chegaraviy masalani sonli yechish uchun ikkinchi tur Chebishev ko‘phadlariga asoslangan spektral-to`r metodi qurilgan.

3. Spektral-to‘r metodining ikkinchi tur Chebishev ko‘phadlari bilan yaqinlashishi teoremalari isbotlangan va yaqinlashish tezligi baholari olingan.

4. Umumiy ko‘rinishdagi oddiy differensial tenglamalar taqribiy xos qiymatlarining aniq xos qiymatlarga yaqinlashishi isbotlangan va yaqinlashish tezligi bahosi olingan.

5. Yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr bo‘lgan oddiy differensial tenglama uchun cheragaviy masalani ikkinchi tur Chebishev ko‘phadlariga asoslangan spektral metod bilan sonli yechish algoritmi ishlab chiqilgan, kompyuter dasturi yaratilgan va sonli hisoblashlar o‘tkazilgan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

ТЕРМЕЗСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТУРСУНОВА БАРНО АБДИЕВНА

СХОДИМОСТЬ СПЕКТРАЛЬНО-СЕТОЧНОГО МЕТОДА С ПОЛИНОМАМИ ЧЕБЫШЕВА ВТОРОГО РОДА И ОЦЕНКА СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ

01.01.03-Вычислительная математика и дискретная математика

**АВТОРЕФЕРАТ
ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

ТАШКЕНТ-2024

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инновации Республики Узбекистан за B2020.3.PhD/FM519.

Диссертация выполнена в Термезском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный руководитель:	**Нормуродов Чори Бегалиевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Хаётов Абдулло Рахмонович** доктор физико-математических наук, профессор
	Урунбаев Эркин доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Каракалпакский государственный университет имени Бердаха**

Защита диссертации состоится «28» 11 2024 года в 15^{30} часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №135). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «14» 11 2024 года.
(протокол рассылки № 2 от «24» 09 2024 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI * MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI *

М.М. Арипов
Председатель Научного совета
по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор

З.Р. Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по
присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.доц.

Р.Д. Алоев
Председателя научного семинара при
Научном совете по присуждению ученых
степени, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (Phd))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-прикладные исследования, решение различных задач науки и техники ведущиеся в мире, в большинстве случаев сводится к построению математических моделей и приближенных решений для этих задач, а также к применению численных методов соответствующих для них. В качестве объекта задач подобного рода, во многих случаях рассматриваются обыкновенные дифференциальные уравнения общего вида и задача на собственные значения для таких уравнений. По этой причине, разработка высокоточных эффективных численных методов решения, алгоритмов и программных комплексов обеспечивающие адекватность процессов описываемых обыкновенным дифференциальным уравнениям общего вида является одной важной задачей в области прикладной математики.

В настоящее время в мире широко исследуется стационарная задача создания оптимальных вычислительных методов для процессов описываемых краевыми задачами для дифференциальных уравнений и проблему на собственные значения соответствующие к этим задачам, а также математические модели таких процессов. Модели краевых задач для дифференциальных уравнений и проблемы на собственные значения соответствующие этим задачам широко применяется в гидродинамике, гидросооружении, химической технологии, а также при проектирование различных технических и технологических областях, при оптимальном управлении гидродинамических систем. Поэтому построение численных моделей относящихся к задачам гидродинамических систем и численное решение их спектрально-сеточным методом (ССМ), а также определение оптимальные значения характерных параметров и разработки программных комплексов имеющих удовный интерфейс для широкого круга пользователей считается одним из целевых научных исследований.

В нашей стране большое внимание уделяется таким актуальным направлениям, как разработка численных и аналитических методов решения задач в области математической физики, механики, экономики и энергетики, которые являются научным и практическим применением фундаментальных наук. В частности, достигнуты весомые результаты по применению спектрально-сеточного метода для решения линейного обыкновенного дифференциального уравнения общего вида с однородными краевыми условиями и к проблему на собственные значения соответствующего этому уравнению.

Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Функциональный анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, математическая физика, математическое моделирование, вычислительная математика и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика» является одной из основных задач фундаментальных исследований в деятельности многих исследовательских институтов и вузов республики[2]. На основе этого закона усоверщенствование аналитических и численних методов решения обыкновенного дифференциального уравнения общего вида и проблема на собственные значения для таких уравнений имеет важное значение.

Данная диссертационная работа в определенной степени служит выполнению задач, предусмотренных в Указах и Постановлениях Президента Республики Узбекистан №УП-60 от 28 января 2022 года «О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы», № ПП-4708 от 7 мая 2020 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», № УП-5847 от 8 октября 2019 года «Об утверждении Концепции развития системы высшего образования Республики Узбекистан до 2030 года», № ПП-3682 от 27 апреля 2019 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов» и № УП-6198 от 1 апреля 2021 года «О совершенствовании системы государственного управления в сфере развития научной и инновационной деятельности», а также в других нормативно-правовых актах, принятых в данной сфере.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий республики Узбекистан IV «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Спектральный метод рекомендовал С. Орзаг. В статьях, опубликованных С. Орзагом начиная с 1969 г., разработаны методы Фурье для периодических геометрических задач, полиномиальные спектральные методы для конечных и бесконечных геометрических задач, псевдоспектральные методы для слабо нелинейных задач, спектральные итерационные методы решения задач стационарных состоянии других задач и спектральные методы решения.Применение спектрального метода при численном решении обыкновенных дифференциальных уравнений и в более обобщенных уравнениях исследованы в научных трудах таких учёных, как Л. В. Канторович, Е. Б. Карпиловский, O. Kisha, I. Petersen, I. T. Dolapci, M. A. Ramadan, K. R. Raslan, T. S. El Danaf, M. A. Abd El Salam, C. Lanczos, E. L. Ortiz, M. R. Crisci, I. H .Siyyam, K. Parand, M. Razzahgi, Б. Г. Галеркин, И. Бубнов, М. Келдиш, K. Fletcher, М. А. Красносельский, Г. М. Вайникко, П. П. Забрейко, Ю. Б. Рутицкий, В. Ю. Стеценко, R. Smith, S. Adjerid, A. Temimi. В спектральных методах в качестве базисных функций в основном используются полиномы Чебышева первого рода. В последние

[1] Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП–4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 07 мая 2020 года.

годы в численном анализе широко используются полиномы Чебышева второго рода, которые, как и полиномы Чебышева первого рода, обладают свойством минимакса в теории приближений, дискретной и непрерывной ортогональности в функциональном пространстве. В научных исследованиях по применению полиномов Чебышева второго рода цитируются в трудах многих зарубежных учёных как M. Mahalakshmi, G. Hariharan, K. Kannan, A. Midde, L. Chen, Z. Mao, H. Li, M. Abdelhakem, Aya Ahmed, M. El-kady, K. R. Raslan, K. K. Ali, E. M. H. Mohamed, M. Lotayif, M. A. Abd El salam и др.

Численное решение и математическое моделирование краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида, задачи на собственные значения для таких уравнений и дифференциальных уравнений с малым параметром при старшей производной внесли большой вклад зарубежные ученые, такие как М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат, Л. Д. Ландау, Е. М. Либшиц, А. Н. Тихонов, Н. Н. Яненко, Н. С. Бахвалов, С. К. Годунов, О. А. Ладиженский, Н. А. Желтухин, А. Л. Крылов, Б. Л. Рождественский, В. Я. Левченко, А.С. Соловьев, М.А. Гольдштик, В.А. Сапожников, Б.П. Колобов, А.Г. Слепцов, S. A. Orszag, H. Salwen, C. E. Grosch, D. Gottlieb, E. Turkel, A. T. Patera, T. J. Bridjes, H. G. Ku, A. Zebib.

В нашей республике по решению нелинейных дифференциальных задач проводили исследования Ф. Б. Абуталиев, М. М. Арипов, Б. Хужаёров, Р.Д. Алоев, Х. Шадиметов, Ч. Б. Нормуродов, А.Р.Хаётов, А.С. Матякубов, З.Р. Рахманов, Ш. А. Садуллаева и другие. В частности, спектральные, спектрально-сеточные методы исследованы в работах Ф.Б. Абуталиева и Ч. Б. Нормуродова. В их работах представлена аппроксимация решений краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений общего вида спектрально-сеточным методом на основе полиномов Чебышева первого рода, сходимость метода и оценки скорости сходимости. Разработан спектрально-сеточный метод (ССМ), предназначенный для исследования математических моделей однофазных и двухфазных гидродинамических систем. Обоснован, что ССМ является эффективным методом для математического моделирования задач гидродинамической устойчивости, так как ССМ позволяет в отличие от других методов найти все собственные значения задачи на собственные значения, описывающую задачу гидродинамической устойчивости. В частности, спектрально-сеточным методом были определены собственные значения уравнения Орра-Зоммерфельда, описывающего задачу гидродинамической устойчивости, которая является одной из важнейших задач в гидродинамических системах.

Связь темы диссертации с планами научно-исследовательских работ высшего учебного заведения, в котором выполнена диссертация.

Диссертационное исследование выполнено в соответствии с планом научно-исследовательских работ Термезского государственного университета в рамках программы «Математическое моделирование, численные методы и технология программирования».

Целью исследования является доказательство сходимости и получение оценки скорости спектрально-сеточного метода с полиномами Чебышева второго рода при решении краевых задач и задачи на собственные значения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения общего вида при однородных краевых условиях.

Задачи исследования:

анализ свойств полиномов Чебышева второго рода;

аппроксимация краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения общего вида спектрально-сеточным методом, доказательство сходимости метода;

получение оценки скорости сходимости приближенного решения к точному, относительно максимального шага сетки, минимального число аппроксимирующих полиномов Чебышева и показателя старшей производной дифференциального уравнения;

аппроксимация задачи на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения общего вида при однородных краевых условиях спектрально-сеточным методом, обоснование сходимости метода;

получение оценки скорости сходимости приближенных собственных значений к точным, относительно максимального шага сетки, минимального число аппроксимирующих полиномов Чебышева и показателя старшей производной дифференциального уравнения;

разработка алгоритма численного решения краевой задачи для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной , создание программного обеспечения и проведение численных расчетов.

О**бъектом исследования является** краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения общего вида и проблемы на собственные значения для подобного уравнения.

Предмет исследования Аппроксимация краевой задачи и задачи на собственные значения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения общего вида при линейных однородных краевых условиях спектрально-сеточным методом с полиномами Чебышева второго рода, доказательство сходимости метода, получение оценки скорости сходимости, разработка алгоритма решения краевой задачи для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной и создание программного обеспечения.

Методы исследования. В исследовательской работе использовались методы вычислительной математике, математического и численного моделирование, функционального анализа, численного решения дифференциальных уравнений, теория аппроксимации, теория функций Грина, а также методы проведения вычислительного эксперимента.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

построены рекуррентные формулы для вычисления производных различного порядка рядов по полиномами Чебышева второго рода;

спектрально-сеточным методом аппроксимирована краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения общего вида и доказаны теоремы сходимости;

получены оценки скорости сходимости приближенного решения к точному, относительно максимального шага сетки, минимального число аппроксимирующих полиномов Чебышева и показателя старшей производной дифференциального уравнения;

спектрально-сеточным методом аппроксимирована краевая задача на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения общего вида и доказана теорема сходимости;

получена оценка скорости сходимости приближенных собственных значений к точным, относительно максимального шага сетки, минимального число аппроксимирующих полиномов Чебышева и показателя старшей производной дифференциального уравнения.

Практические результаты исследования состоит в следующем:

построены рекуррентные формулы для вычисления производных разных порядков ряда, состоящего из линейной комбинации полиномов Чебышева второго рода;

разработан алгоритм решения краевой задачи спектральным методом для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной и создано программное обеспечение.

Достоверность результатов исследования. Обоснован с использованием методов прикладной математики, теории сеток, теории функций Грина, методов проведения вычислительного эксперимента, высокая точность и экономичность спектрально-сеточного метода решения поставленной краевой задачи для дифференциального уравнения высокого порядка и проблемой собственных значений для подобного уравнения, а также объясняется согласованностью результатов, полученных при сравнении приближенного решения с точным решением этих уравнений.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования объясняется тем, что доказанные теоремы сходимости и оценки скорости сходимости предложенного спектрально-сеточного метода с полиномами Чебышева второго рода могут быть использованы при построении высокоточных и эффективных численных методов для решения краевой задачи обыкновенного дифференциального уравнения общего вида и проблемы на собственные значения для таких уравнений.

Практическая значимость результатов исследования заключается в том, что построенный спектрально-сеточный метод, созданный алгоритм и комплекс программ позволяют проводит высокоточные и эффективные вычислительные эксперименты по решению краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения общего вида и проблемы на собственные значения для таких уравнений.

Внедрение результатов исследования.

На основе спектрального-сеточного метода, алгоритмов и программного обеспечения для численного решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения общего вида и задачи собственных значений для этого уравнения с применением полиномов Чебышева второго рода:

позволила разработать алгоритм для решения краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и задач на собственные значения для таких уравнений, в проекте ОТ-Ф4-64 по теме «Построение и численное исследование гидродинамических моделей утечки жидкости и миграции веществ в неоднородных пористых средах» в 2-м этапе фундаментального проекта «Построение и численный анализ гидродинамических моделей истечения веществ и аномальной миграции в трещинно-поровых средах» по численному исследованию задач аномальной миграции веществ и истечения жидкости в двухзонных цилиндрических неоднородных трещинно-поровых средах (Справка Самаркандского государственного университета от 9-июля 2024 года №10-3344). Применение научных результатов по численному исследованию аномальной миграции веществ и утечек жидкости в двухзонных цилиндрических неоднородных трещинно-пористых средах позволила в втором этапе проекта ОТ-Ф4-64 эффективно решать численные задачи уравнение конвективно-диффузионной миграции в окружающей среде;

Программное обеспечение разработанное для численного решения краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной было использовано численном исследование неклассических сингулярных интегральных уравнений в фундаментальном проекте ФЗ-202009211 по теме «Изучение корректности задач для уравнений смешанного типа с условиями Франкля и Бицадзе-Самарского на характеристике и на линии вырождения с помощью применения теории неклассических сингулярных интегральных уравнений" (справка Термезского государственного университета от 18-июля 2024-года №12/04.2417). Применение научных результатов позволили провести расчет путем численного решения интегральных уравнений, образующихся при нахождении решения комбинированных задач с условием Трикоми и условием смещения на внутренних характеристиках для уравнения Геллерстедта с сингулярным коэффициентом.

Апробация результатов исследования. Основные результаты данного исследования обсуждены на 9 научно-практических конференциях, в том числе на 7 международных и 2 республиканских.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 15 научных работ, из них 6 научных статей, в том числе 2 в зарубежных (в журналах из базы Scopus) и 4 в республиканских журналах, в рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов докторских диссертаций, а также получено 2 свидетельства о регистрации программных продукт для ЭВМ.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Объем диссертации составляет 84 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ.

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования с приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации, степен изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Полиномы Чебышева второго рода»** приведены необходимые предварительные сведения для изложения основных результатов диссертации. Изложены основные понятия о полиномах Чебышева второго рода и их свойствах, а также анализ существующих исследований по применению полиномов Чебышева второго рода.

В параграфе 1.1 приведена выражения полиномов Чебышева второго рода в тригонометрической и алгебраической формах, а также изложена важные свойства полиномов. При использовании этих полиномов в качестве ортогоналного базиса при решении обыкновенных дифференциальных уравнений спектральными методами приближенное решение ищется в следующем виде:

$$u_t(x) = \sum_{n=o}^{N} a_n U_n(x), \qquad (1)$$

где $a_n\ (n = 0,1,2,...,N)$- неизвестные коэффициенты, $U_n(x)$- полиномы Чебышева второго рода:

$U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x\ , U_{n+1}(x) = 2x \cdot U_n(x) - U_{n-1}(x), n \geq 1$

Для производных приближенного решения $u_t(x)$ построены следующие формулы :

$$\frac{du_t}{dy} = \sum_{n=0}^{N} 2(n+1) \left(\sum_{\substack{p=n+1 \\ p+n \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 2)}}^{N} a_p \right) U_n(x)$$

$$\frac{d^2u_t}{dy^2} = \sum_{n=0}^{N} (n+1) \left(\sum_{\substack{p=n+2 \\ p \equiv n (\mathrm{mod}\, 2)}}^{N} (p-n)(\mathrm{p} + \mathrm{n} + 2) a_p \right) U_n(x)$$

$$\frac{d^3u_t}{dy^3}=\sum_{n=0}^{N}4(n+1)\sum_{\substack{p=n+3\\ p+n\equiv 1(\mathrm{mod}\,2)}}^{N}\left(\left(\frac{p-n-1}{2}\right)^4+2\left(\frac{p-n-1}{2}\right)^3(n+1)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{p-n-1}{2}\right)^2\left(n^2+5n+5\right)+\left(\frac{p-n-1}{2}\right)\left(n^2+3n+2\right)\right)U_n(x)$$

$$\frac{d^4u_t}{dy^4}=\sum_{n=0}^{N}2(n+1)\sum_{\substack{p=n+4\\ p\equiv n(\mathrm{mod}\,2)}}^{N}(p-n-2)(p-n)\left(\frac{n^3}{3}\left(\frac{p-n+2}{2}\right)+\right.$$

$$+n^2\left(\frac{p-n+2}{2}\right)^2+n\left(\left(\frac{p-n+2}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{p-n+2}{2}\right)\right)+ \qquad (2)$$

$$\left.+\left(\frac{p-n+2}{2}\right)^2\frac{(p-n)(p-n+4)}{12}\right)U_n(x)$$

В параграфе 1.2 проведен анализ научно-исследовательских работ, связанных с применением полиномов Чебышева второго рода при создании различных методов, при решении практических задач для дифференциальных уравнений, в частности, при решении задачи на собственные значения, описываемый дифференциальным уравнением с малым параметром при старшей производной.

Вторая глава диссертации называется **«Численное решение краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения спектрально-сеточном методом»**, в которой однородная краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения общего вида решается с помощью спектрально-сеточного метода с полиномами Чебышева второго рода. Доказаны теоремы сходимости и оценки скорости сходимости.

В параграфе 2.1 рассмотрено линейное обыкновенное дифференциальное уравнение m-го порядка

$$L_0u=\frac{d^mu}{dy^m}+\sum_{i=0}^{m-1}q_i(y)\frac{d^iu}{dy^i}=f(y),\ -1<y<+1 \qquad (3)$$

при однородных краевых условиях

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left(\alpha_{ik}\frac{d^ku(-1)}{dy^k}+\beta_{ik}\frac{d^ku(+1)}{dy^k}\right)=0,\ i=1,2,\dots,m \qquad (4)$$

Предположим, что задача (3)-(4) при $f(y)=0$ имеет только тривиальное решение. Это обеспечивает существование функции Грина для рассматриваемой задачи. Известна функция Грина оператора $\frac{d^m}{dy^m}$ для задачи (3). Обозначим её через $G(y,\xi)$. Введем следующую непрерывную функцию:

$$x(y)=\frac{d^m}{dy^m}u(y), \tag{5}$$

где $u(y)$ является решением задачи (3)-(4). В таком случае

$$u(y)=\int_{-1}^{+1}G(y,\xi)\,x(\xi)\,d\xi \tag{6}$$

Теперь, подставив (6) в (3) и учитывая (5), получим уравнение:

$$x(y)+\int_{-1}^{+1}\left(\sum_{i=0}^{m-1}q_i(y)G^{(i)}(y,\xi)\right)x(\xi)d\xi=\int_{-1}^{+1}G(y,\xi)\,f(\xi)\,d\xi$$

Последнее уравнение можно записать в следующем виде:

$$x(y)+\int_{-1}^{+1}T(y,\xi)\,x(\xi)d\xi=\int_{-1}^{+1}G(y,\xi)\,f(\xi)\,d\xi \tag{7}$$

где $T(y,\xi)=\sum_{i=0}^{m-1}q_i(y)G^{(i)}(y,\xi)$. Из свойств функции Грина следует, что $T(y,\xi)$-непрерывная на $[-1,1]\times[-1,1]$функция, кроме “диагонали” $y=\xi$ на которой имеет конечный разрыв. Если ввести оператор $Tx=\int_{-1}^{+1}T(y,\xi)\,x(\xi)d\xi$ и функцию $F(y)=\int_{-1}^{+1}G(y,\xi)\,f(\xi)d\xi$, то (7) можно записать в виде непрерывного операторного уравнения второго рода:

$(I+T)x=F$, I-единичный оператор. (8)

В параграфе 2.2 дифференциальная задача (3)-(4) аппроксимируется спектрально-сеточным методам и сводится к дискретной задаче. В спектрально-сеточным методе рассматриваемый интервал интегрирования $[-1,+1]$ разбивается на сетки: $-1=y_0<y_1<\ldots<y_N=1,$ где N-заданное положительное целое число. Сетка может быть как равномерной, так и неравномерной. Приближенное решение задачи (3)-(4) на каждом из элементов сетке $[y_{j-1},y_j]$, $j=1,2,\ldots,N$ ищется в виде линейной комбинации различного числа полиномов Чебышева второго рода U_n:

$$u_j^{(p_j)}(y)=\sum_{n=0}^{p_j}a_n^{(p_j)}U_n(\tilde{y}),\ y\in[y_{j-1},y_j],\ y=\frac{m_j}{2}+\frac{l_j}{2}\tilde{y}, \tag{9}$$

где $m_j=y_j+y_{j-1}$, $l_j=y_j-y_{j-1}$, $-1\le\tilde{y}\le1$, причем l_j- длина j-го элемента сетки. p_j-количество полиномов Чебышева, используемых для аппроксимации решения дифференциальной задачи (3)-(4) на j -м интервале сетки $\left[y_{j-1}, y_j\right]$, где $p_j \to \infty$ для каждого фиксированного j и $p_j > m$, $\hbar = \max\limits_{1<j<N} l_j = \max\limits_{1<j<N}\left(y_j - y_{j-1}\right)$-максимальный шаг сетки, $p_- = \min\limits_{1<j<N} p_j$- минимальное количество, а $\bar{m} = \sum\limits_{j=1}^{N}(p_j + 1)$ общее количество полиномов Чебышева аппроксимирующих решение в элементах сетки. В спектрально-сеточном методе во внутренних узлах сетки y_j $\left(j = 1, 2, \dots N-1\right)$ налагается требование непрерывности приближенного решения (9) и его производных до $\left(m-1\right)$-го порядка, а в граничных узлах сетки $y_0 = -1$, $y_N = +1$ - удовлетворение краевых условий:

$$\begin{cases} \dfrac{d^s u_j^{(p_j)}(y_j)}{dy^s} = \dfrac{d^s u_{j+1}^{(p_{j+1})}(y_j)}{dy^s}, s = 0, 1, \dots, m-1, \; j = 1, 2, \dots, N-1, \\ \sum\limits_{k=0}^{m-1}\left[\alpha_{ik}\dfrac{d^k u_1^{(p_1)}(-1)}{dy^k} + \beta_{ik}\dfrac{d^k u_N^{(p_N)}(+1)}{dy^k}\right] = 0, \, i = 1, 2, \dots, m. \end{cases} \tag{10}$$

Коэффициенты приближенного решения $a_n^{(p_j)}$ определим с помощью требования ортогональности невязки $\left(L_0 u_j^{(p_j)}(y) - f_j\right)$ к полиномам Чебышева до номера $p_j - m$ с весом $\rho\left(\tilde{y}\right)$ на интервале $\left[y_{j-1}, y_j\right]$, т.е.

$$\int\limits_{y_{j-1}}^{y_j}\left(L_0 u_j^{(p_j)}(y) - f_j(y)\right)U_k(\tilde{y})\rho(\tilde{y})\,dy = 0, \quad \begin{array}{l} j = 1, 2, \dots N, \\ k = 0, 1, \dots, p_j - m, \end{array} \tag{11}$$

где $\rho\left(\tilde{y}\right) = \sqrt{1-\tilde{y}^2}$, $-1 \le \tilde{y} \le 1$, $\qquad f_j\left(y\right) = f\left(y\right)\Big|_{y\in\left[y_{j-1}, y_j\right]}$.

Тепер обозначим $x_j^{(p_j)}\left(y\right) = \dfrac{d^m}{dy^m}u_j^{(p_j)}\left(y\right), y \in \left[y_{j-1}, y_j\right]$, (12)

тогда $x_j^{(p_j)}\left(y\right) = \sum\limits_{n=0}^{p_j} a_n^{(p_j)}\left(\dfrac{2}{l_j}\right)^m U_n^{(m)}\left(\tilde{y}\right)$. (13)

Затем введем вектор $X^{(p)} = \left(x_1^{(p_1)}\left(y\right), x_2^{(p_2)}\left(y\right), \dots, x_N^{(p_N)}\left(y\right)\right)$, компоненты $x_j^{(p_j)}$ которого определены на своем интервале и представляют из себя, согласно (13) полиномы степени $(p_j - m)$ и скалярное произведение в конечномерное пространство $L_{2,\rho}^{(p)}$ векторов $X^{(p)}$ по формуле:

$\left(X^{(p)},Z^{(p)}\right)_{L_{2,\rho}^{(p)}}=\sum_{j=1}^{N}\int_{y_{j-1}}^{y_j} x_j^{(p_j)}\left(y\right)z_j^{(p_j)}\left(y\right)\rho\left(\tilde{y}\right)dy,\ \tilde{y}=\left[-1,+1\right].$ Так как введено гильбертово пространство $L_{2,\rho}^{N}$ вектор-функций $X=\left(x_1\left(y\right),x_2\left(y\right),...,x_N\left(y\right)\right)$, где $x_i\left(y\right)\in L_{2,\rho}\left(y_{i-1},y_i\right)$, т.е. $L_{2,\rho}^{N}\in L_{2,\rho}\left(y_0,y_1\right)\times L_{2,\rho}\left(y_1,y_2\right)\times...\times L_{2,\rho}\left(y_{N-1},y_N\right)$
и со скалярным произведением, как и в $L_{2,\rho}^{(p)}$

Задача (11) с использованием функций Грина сводится к уравнению с дискретным оператором вида :

$$X^{(p)}+P_pTX^{(p)}=P_pF,\ X^{(p)}\in L_{2,\rho}^{(p)}, \qquad (14)$$

где

$$X^{(p)}=\left(x_1^{(p_1)}\left(y\right),x_2^{(p_2)}\left(y\right),...,x_N^{(p_N)}\left(y\right)\right)$$

$$TX^{(p)}=\left(\sum_{i=1}^{N}T^ix_i^{(p_i)}(y)\Big|_{y\in[y_0,y_1]},\sum_{i=1}^{N}T^ix_i^{(p_i)}(y)\Big|_{y\in[y_1,y_2]},...\right),$$

$$F=\left(F_1(y)_{y\in[y_0,y_1]},F_2(y)\Big|_{y\in[y_1,y_2]}\Big|,...,F_N(y)\Big|_{y\in[y_{N-1},y_N]}\right).$$

Введен проектор $P_p:L_{2,\rho}^{N}\to L_{2,\rho}^{(p)}$- по правилу: если $X=\left(x_1\left(y\right),x_2\left(y\right),...,x_N\left(y\right)\right)$ и $x_i(y)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k^{(i)}U_k(\tilde{y})$, то $P_pX=\left(\sum_{k=0}^{p_1-m}c_k^{(1)}U_k(\tilde{y}),...,\sum_{k=0}^{p_N-m}c_k^{(N)}U_k(\tilde{y})\right)$.

Так как по вектору X всегда можно построить функцию $x\left(y\right)$ по правилу $x\left(y\right)=x_i\left(y\right)$ при $y\in\left[y_{i-1},y_i\right]$, то пространство $L_{2,\rho}^{N}$ изоморфно пространству $L_{2,\rho}^{N}\left(-1,+1\right)$ функций по его скалярному произведению. Если мы определим вектор, используя приведенный выше изоморфизма относительно функций $X\left(y\right)$ решения уравнения (8) $x\left(y\right)$, т.е.

$$X\left(y\right)=\left(x(y)\Big|_{y\in[y_0,y_1]},x(y)\Big|_{y\in[y_1,y_2]},...,x(y)\Big|_{y\in[y_{N-1},y_N]}\right)=\left(x_1,x_2,...,x_N\right),$$

а оператор T и функцию F из (8) считать действующими по правилам

$$TX=\left(\sum_{i=1}^{N}T^ix_i\Big|_{y\in[y_0,y_1]},...\right)=\left(\int_{-1}^{1}T(y,\xi)x(\xi)d\xi\Big|_{y\in[y_0,y_1]},...\right)=\left(Tx,Tx,...,Tx\right),$$

$$F=\left(F_1(y)\Big|_{y\in[y_0,y_1]},...\right)=\left(\int_{-1}^{1}G(y,\xi)f(\xi)d\xi\Big|_{y\in[y_0,y_1]},...\right)=\left(Fy,Fy,...,Fy\right),$$

то уравнение (8) примет эквивалентную форму:

$$X+TX=F,\ F\in L_{2,\rho}^{N} \qquad (15)$$

Это более удобно при сравнении с уравнением (14) для приближенных решений и позволяет использовать известные результаты.

В параграфе 2.3 доказываются теоремы об аппроксимации спектрально-сеточного метода и оценки скорости аппроксимации при рассмотрении дифференциального уравнения общего вида с однородными краевыми условиями.

Замечание 1. Если $X^{(p)} \to X$ при $(p)\to\infty$ в какой-нибудь норме (например, определяемой скалярным произведением в $L_{2,\rho}^N$), то строя по компонентам функции $X^{(p)}$и X функции $x^{(p)}(y)$ и $x(y)$, $y\in[-1,+1]$, как это было указано, получаем сходимость $x^{(p)}$ к xв $L_{2,\rho}^N$. Есть основание считать, что эта функция $x(y)$ есть решения (8).

При доказательстве сходимости покажем, что ССМ, примененный к задаче (3)-(4), эквивалентен операторному уравнению (15). К этому уравнению можно применить общие сходимости проекционных методов.

Теорема 1. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (3) – непрерывные функции. Обозначим через X_0 решение уравнения (15) (существование X_0 следует из однозначной разрешимости задачи (3)–(4)). Тогда при достаточно больших (p) (т.е. больших p_j для всех j) уравнение (14) имеет единственное решение $X^{(p)}$и справедлива оценка

$$\left\|X^{(p)} - X_0\right\|_{L_{2,\rho}^N} \le c_0 \left\|X_0 - X_p^0\right\|_{L_{2,\rho}^N} \tag{16}$$

где X_p^0-отрезок Фурье по полиномам Чебышева функции

$X_0 = (x_1^0,...,x_N^0)$ длины « p » т.е. $X_p^0 = (x_{p_1}^{(0)},...,x_{p_N}^{(0)})$,

$$x_{p_i}^{(0)} = \sum_{j=0}^{p_j-m} \tilde{c}_j^i U_j(\tilde{y}), \tilde{c}_j^i = \int_{y_{j-1}}^{y_j} x_i^0(y) U_j(\tilde{y})\rho(\tilde{y})dy,$$

$$\left(\left\|X_0\right\|_{L_{2,\rho}^N}^2 = \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=1}^{\infty}(\tilde{c}_i^{(j)})^2\right)\right), \left\|X^{(p)} - X_p^0\right\|_{L_{2,\rho}^N}^2 = \sum_{j=1}^{N}\left(\sum_{i=p_j-m+1}^{\infty}\left(\tilde{c}_i^{(j)}\right)^2\right);$$

c_0-постоянная, зависящая от нормы обратного оператора $(I+T)^{-1}$, I - единичный оператор.

Теорема 2. При тех же предположениях, что и в теореме 1, функция $u^{(p)}(y) = \int_{-1}^{+1} G(y,\xi)x^{(p)}(\xi)\,d\xi$, при $(p)\to\infty$ стремится к точному решению $u_0(y)$ задачи (3)-(4) по норме W_2^m: $\left(\|\varphi\|_{W_2^m}^2 = \sum_{k=0}^{m}\left\|\dfrac{d^k\varphi}{dy^k}\right\|^2\right)$ и справедлива оценка

$$\left\|u^{(p)} - u_0\right\|_{W_2^m(-1,+1)} \le \tilde{c}_0 \left\|X^{(p)} - X_0\right\|_{L_{2,\rho}^N}, \tag{17}$$

где $\tilde{c}_0 = c_0\tilde{c},\ \tilde{c} = \sup\limits_{\varphi\in L_{2,\rho}} \dfrac{\left\| \int_{-1}^{1} G(y,\xi)\varphi(\xi)d\xi \right\|_{W_2^m}}{\|\varphi\|_{L_{2,\rho}}}$.

Теорема 3. Пусть коэффициенты и правая часть уравнения (3) принадлежат пространству $C^{s+\alpha}[-1,+1]$, тогда справедливо утверждение теоремы 1, причем оценка (16) имеет вид:

$$\left\| X^{(p)} - X_0 \right\|_{L_{2,\rho}^N}^2 \le \tilde{c}_1 \left(\frac{\hbar}{p_- - m} \right)^{2(s+\alpha)}, \tag{18}$$

где $(p) = (p_1, p_2, \dots, p_N)$, $p_- = \min\limits_{1\le j\le N} p_j$, $\hbar = \max\limits_{1\le j\le N}\left(y_j - y_{j-1}\right)$,

$\tilde{c}_1 = c_0 c_1$, $\quad c_1 = \dfrac{\pi}{2}\left(c_s^{'} M\right)^2$, $\quad c_s^{'} = 12\dfrac{6^s s^s}{s!}\left(\dfrac{s+1}{2}\right)^{\alpha}$, $\quad s$ ($s = \overline{1,m}$)-порядок производной, константа M и α определяются из условия Липшица, т.е. $\left| f^{(s)}(y_j) - f^{(s)}(y_{j-1}) \right| \le M \left| y_j - y_{j-1} \right|^{\alpha}$.

Теорема 4. Если коэффициенты и правая часть уравнения (3) есть функция из $C^{s+\alpha}[-1,+1]$, то функция $u^{(p)}(y) = \int_{-1}^{+1} G(y,\xi) x^{(p)}(\xi) d\xi$ стремится к точному решению $u_0(y)$ задачи (3)-(4) по норме W_2^m и выполнена оценка

$$\left\| u^{(p)} - u_0 \right\|_{W_2^m(-1,1)}^2 \le c_2 \left(\frac{\hbar}{p_- - m} \right)^{2(s+\alpha)}, \tag{19}$$

где $c_2 = \tilde{c}_0 \tilde{c}_1$.

Глава 3 диссертации называется «**Применение спектрально-сеточного метода к решению проблемы на собственных значений**», в которой рассматривается применение спектрально-сеточного метода для проблеме на собственные значения, сначала непрерывная ,а затем дискретная задача на собственные значения, полученная спектрально-сеточным методом сводится к операторным уравнениям второго рода. Далее доказывается сходимость собственных значений дискретного операторного уравнения, полученных спектрально-сеточным методом, к собственным значениям непрерывного операторного уравнения, а также приводятся результаты исследований по получению оценки скорости сходимости.

В параграфе 3.1 рассмотрена проблему на собственные значения для дифференциального уравнения $m-$го порядка

$$L^{\lambda}u = u^{(m)}(y) + \sum_{i=0}^{m-1} q_i(y)u^{(i)}(y) - \lambda \sum_{i=0}^{l} \bar{q}_i(y)u^{(i)}(y) = 0,\ l < m,\ y \in (-1,+1) \quad (20)$$

при линейных однородных краевых условиях

$$\sum_{k=0}^{m-1}\left(\alpha_{ik}u^{(k)}(-1) + \beta_{ik}u^{(k)}(+1)\right) = 0,\ i = 1,2,...,m \quad (21)$$

Будем предполагать, что задача (20)-(21) при $\lambda = 0$ имеет только тривиальное решение. Это требование обеспечивает существование функции Грина для оператора L^{λ} краевыми условиями (21). Приближенное решение (20)-(21) ищется в виде (9) и требуем выполнение условий (10). Условия ортогональности невязки $L^{\lambda_p}u_j^{(p_j)}(y)$ полиномам Чебышева до номера $\left(p_j - m\right)$ записываются следующим образом:

$$\int_{y_{j-1}}^{y_j} L^{\lambda_p}u_j^{(p_j)}(y)U_k(\tilde{y})\rho(\tilde{y})dy = 0\ ,\quad \begin{matrix} j = 1,2,...,N, \\ k = 0,1,...,p_j - m' \end{matrix} \quad (22)$$

где $\rho(\tilde{y}) = \sqrt{1-\tilde{y}^2}$, $y = \dfrac{m_j}{2} + \dfrac{l_j}{2}\tilde{y}$, $y \in \left[y_{j-1}, y_j\right], \tilde{y} \in [-1,+1]$,

$m_j = y_j + y_{j-1},\ l_j = y_j - y_{j-1}$.

В проблемах гидродинамической устойчивости нас не будет интересовать нахождение самих коэффициентов $a_n^{(p_j)}$, а надо найти параметры λ^p, которые будем называть собственными значениями приближенной задачи и при которых имеется нетривиальное решение однородной системы. Если ввести оператор $Tx = \int_{-1}^{1} T\left(y,\xi\right)x(\xi)d\xi$, как параграфе 2.1, и $\bar{T}x = \int_{-1}^{1}\bar{T}\left(y,\xi\right)x(\xi)d\xi$, то (22) можно записать в операторном виде:

$$(I + T)x = \lambda\bar{T}x\,. \quad (23)$$

В параграфе 3.2 повторяя рассуждения, приведенные в праграфе 2.2. перепишем задачу (20)-(21) в дискретного операторного уравнения второго рода:

$$X^{(p)} + P_pTX^{(p)} = \lambda^{(p)}P_p\bar{T}X^{(p)}\,. \quad (24)$$

Уравнение (23) также запишем в эквивалентной форме:

$$X + TX = \lambda\bar{T}X \quad (25)$$

В параграфе 3.3 рассмотрена задача о сходимости $\lambda^{(p)}$ к λ. Введем обозначение $F_1 = \left(I + T\right)^{-1}$. Существование непрерывного из $L_{2,\rho}^N$ в $L_{2,\rho}^N$ обратного оператора F_1 следует из эквивалентности задачи (25) задаче (21) для уравнения (20) и в силу связи $x(y)=\dfrac{d^m u(y)}{dy^m}$. Тогда задача (25) эквивалентно редуцируется к задаче:

$$X=\lambda F_1\bar{T}X=\lambda FX\ ,\ F=F_1\bar{T}. \qquad (26)$$

По тем же причинам, что и T (см. 1.2 параграф) оператор $\bar{T}$ является вполне непрерывным из $L_{2,\rho}^N$ в $L_{2,\rho}^N$. Поэтому оператор F, как произведение вполне непрерывного оператора $\bar{T}$ и ограниченного оператора F_1, является вполне непрерывным. В силу оценки[2]

$$\left\|(I+P_pT)^{-1}\right\|\le c \qquad (27)$$

для достаточно больших (p) уравнение (24) также сводится к эквивалентному уравнению

$$X^{(p)}=\lambda^{(p)}\left(I+P_pT\right)^{-1}P_p\bar{T}X^{(p)}=\lambda^{(p)}F_pX^{(p)}, \qquad (28)$$

где $F_p=\left(I+P_pT\right)^{-1}P_p\bar{T}$.

Аналогично, так как $\bar{T}$ вполне непрерывен, а P_p ограничен, то $P_p\bar{T}$ также вполне непрерывен, а в силу непрерывности $(I+P_pT)^{-1}$(на основе оценки (27)) оператор $F_p:L_{2,\rho}^{(p)}\to L_{2,\rho}^{(p)}$ вполне непрерывен ((p)-достаточно велико).

Для описания сходимости приближенных собственных значений λ^p, при $(p)\to\infty$ задачи (28), найденных спектрального-сеточного метода, к точным собственным значениям λ задачи (26) были использованы аппроксимационные соображения, изложенные в монографии[3] .

Теорема 5. Пусть выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned}&\left\|U_p\right\|=\left\|F-P_pF\right\|\to 0,\, при\ (p)\to\infty\\ &\left\|S_p\right\|=\left\|F_p-P_pF\right\|\to 0,при\ (p)\to\infty\end{aligned}, \qquad (29)$$

и оператор S_p рассматривается в пространстве $L_{2,\rho}^{(p)}$, и оператор U_p рассматривается в пространстве $L_{2,\rho}^N$. Тогда для каждого собственного значения λ_0 уравнения (26) находится последовательность приближенных собственных значений $\lambda^{(p)}$ уравнения (28) такая, что $\lambda^{(p)}\to\lambda_0$ при $(p)\to\infty$. И наоборот, каждое предельное значение последовательности собственных значений $\lambda^{(p)}$ уравнения (28) является собственным значением λ_0 уравнения (26).

---

[2] Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рутицкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений– М.:Наука, 1969, 456 с. (оценка 15.19 стр. 188)

[3] Абуталиев Ф.Б., Нармурадов Ч.Б. Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости. – Т.: «Фан ва технология», 2011,188 с.(стр.14-16)

Теорема 6. Пусть коэффициенты уравнения (20) принадлежат к классу $C^{s+\alpha}, 0 \le \alpha \le 1$, пусть далее приближенное собственное значение $\lambda^{(p)}$ при $(p) \to \infty$ стремится к собственному значению λ_0, причем собственное значение λ_0 кратно r. Тогда справедлива оценка:

$$\left|\lambda^{(p)} - \lambda_0\right| \le c_0 \left(\sqrt{c_1} \left(\frac{\hbar}{p_- - m} \right)^{s+\alpha} \right)^{\frac{1}{r}} \tag{30}$$

где c_0 – постоянная зависящий от нормы обратного оператора $(I+T)^{-1}$, I - единичный оператор. c_0, c_1 - постоянные, определены в теоремах главы 2.

В параграфе 3.4 в табличном и графическом виде приведены результаты вычислительного эксперимента решения краевой задачи для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной. В табл.1 приведено результаты, когда количество полиномов Чебышева второго рода равно 50, значение малого параметра равно $\varepsilon = 10^{-2}$, в табл.2 и 3 приведены результаты расчётов в случае когда количество аппроксимирующих полиномов равны 50 и 100 соответственно, при $\varepsilon = 10^{-3}$. Точное решение дифференциальной задачи имеет вид:

$$u(y) = \frac{\varepsilon - 0.5}{1 - e^{-1/\varepsilon}} \left(1 - e^{-(y+1)/2\varepsilon} \right) - \varepsilon \frac{y+1}{2} + \frac{(y+1)^2}{8}$$

Таблица 1.

Сравнение точного и спектрального решения

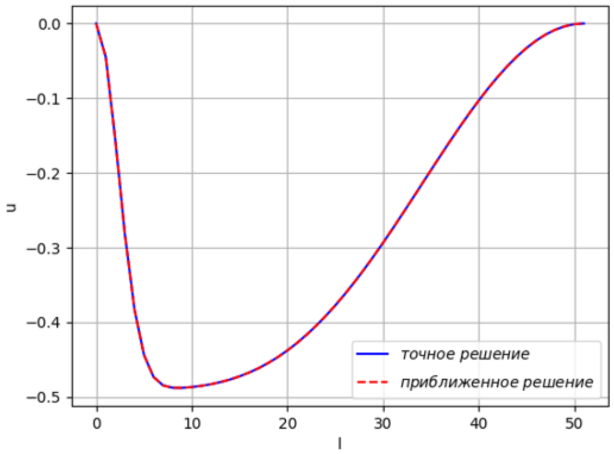
l	y_l -узлы	$u(y)$ -точное решение	$u_t(y)$ -приближенное решение	$\lvert u(y) - u_t(y) \rvert$ - погрешность
1	-0.998	-0.0443421265	-0.0443421266	0.0000000001
5	-0.953	-0.44336291586753	-0.44336291586749	0.00000000000004
25	-0.0308	-0.377426247392	-0.37742624739	0.000000000002
45	0.932	-0.032856246469	-0.032856246468	0.000000000001

Таблица 2.

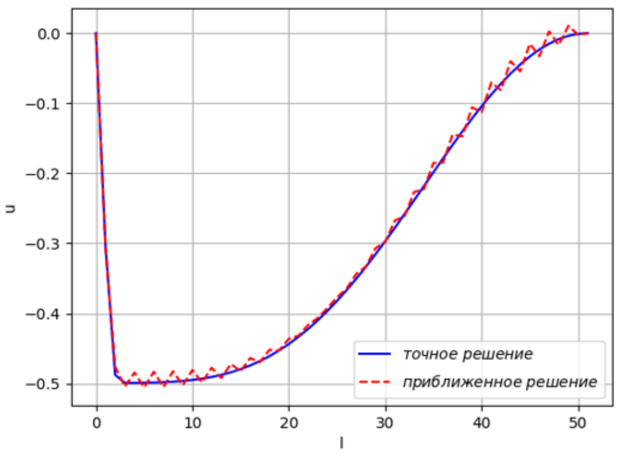
Сравнение точного и спектрального решения

l	y_l -узлы	$u(y)$ -точное Решение	$u_t(y)$ -приближенное решение	$\lvert u(y) - u_t(y) \rvert$ - погрешность
5	-0.953	-0.49875	-0.50574	0.00699
25	-0.0308	-0.38206	-0.37699	0.00507
35	0.552	-0.19855	-0.18514	0.01341
45	0.932	-0.03316	-0.01515	0.01801

Динамика точного и спектрального решений наглядно иллюстрируется на рисунках 1-2.



1-рис.Динамика точных и спектральных решений($\varepsilon = 0,01$)



2-рис.Динамика точных и спектральных решений($\varepsilon = 0,001$)

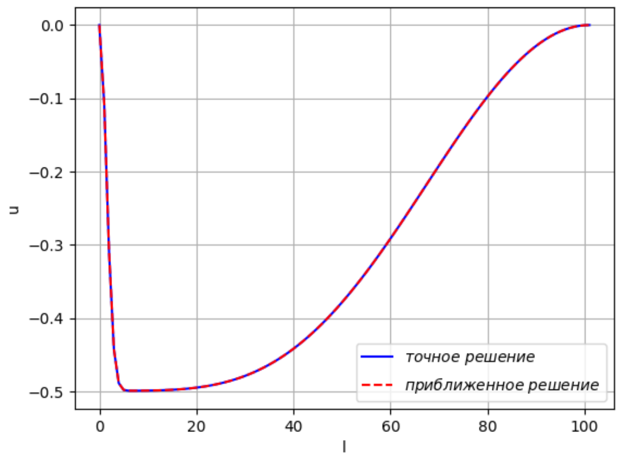
При малых значениях параметра $\varepsilon = 10^{-3}$ количество полиномов необходимо увеличить, чтобы обеспечить достаточную точность, например, при $N = 100$ сравнение решений приведено в следующей таб.3:

Таблица 3.

Сравнение точного и спектрального решения

l	y_l -узлы	$u(y)$ -точное Решение	$u_t(y)$ - приближенное решение	$\lvert u(y) - u_t(y)\rvert$ - абсолютная погрешность
10	-0.9520	-0.498736	-0.498734	0.000002
50	-0.016	-0.3783499	-0.3783504	0.0000005
100	0.999	-0.0002416	-0.0002413	0.0000003

Результаты приведенных в этой таблице иллюстрируется на рис.3.



ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Построены рекуррентные формулы для вычисления производных различного порядка рядов по полиномами Чебышева второго рода.

2. Построен спектрально-сеточный метод с полиномами Чебышева второго рода для численного решения краевой задачи обыкновенного дифференциального уравнения общего вида.

3. Доказаны теоремы сходимости спектрально-сеточного метода с полиномами Чебышева второго рода и получены оценки скорости сходимости.

4. Доказана сходимость приближенных собственных значений обыкновенных дифференциальных уравнений к точным собственным значениям и получена оценка скорости сходимости.

5. Разработан алгоритм, создана компьютерная программа и приведены численные расчёты с применением спектрального метода полиномами Чебышева второго рода для численного решения краевой задачи обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

TERMEZ STATE UNIVERSITY

TURSUNOVA BARNO ABDIYEVNA

CONVERGENCE OF THE SPECTRAL-GRID METHOD WITH CHEBYSHEV POLYNOMIALS OF THE SECOND KIND AND ESTIMATION OF THE RATE OF CONVERGENCE

01.01.03 – Computational mathematics and discrete mathematics

ABSTRACT
OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT – 2024

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number № B2020.3.PhD/FM519.

Dissertation has been prepared at Termez State University.

Abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the website http://ik-fizmat.nuu.uz/ and the «ZiyoNet» Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Normurodov Chori Begaliyevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
Official opponents:	**Hayotov Abdullo Raxmonovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Urunboyev Erkin Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
Leading organization:	**Karakalpak State University named after Berdakh**

Defense will take place «28» 11 2024 at 15^{30} at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №135) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 246-02-24)

Abstract of dissertation sent out on «14» 11 2024 year.
(Mailing report № 2 on «24» 09 2024 year).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI * MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI *

M.M. Aripov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S., Professor

Z.R. Rakhmanov
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S.dots.

R.D.Aloyev
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of the Phd thesis)

The purpose of the study is to prove the convergence and obtain an estimate for the speed of the spectral-grid method with Chebyshev polynomials of the second kind when solving boundary value problems and eigenvalue problems for a general linear ordinary differential equation under homogeneous boundary conditions.

The tasks of the research include:

to analyze the properties of Chebyshev polynomials of the second kind;

the approximation of a boundary value problem for an ordinary differential equation of general type by the spectral-grid method, proof of the convergence of the method

the obtaining an estimate of the rate of convergence of an approximate solution to the exact one, the relative maximum grid step, the minimum number of approximating Chebyshev polynomials and the index of the highest derivative of the differential equation;

the approximation of an eigenvalue problem for an ordinary differential equation of general type under homogeneous boundary conditions by the spectral-grid method, justification of the convergence of the method

the obtaining an estimate of the rate of convergence of approximate eigenvalues to the exact ones, the relative maximum grid step, the minimum number of approximating Chebyshev polynomials and the index of the highest derivative of the differential equation

the development of an algorithm for the numerical solution of a boundary value problem for a differential equation with a small parameter at the highest derivative, creation of software and performance of numerical calculations;

The object of the study is a boundary value problem for an ordinary differential equation of general form, as well as an eigenvalue problem for a similar equation.

The subject of the study: Approximation of the boundary value problem and eigenvalue problem for a linear ordinary differential equation of general form under linear homogeneous boundary conditions using the spectral-grid method with Chebyshev polynomials of the second kind, proof of the convergence of the method, obtaining an estimate of the rate of convergence, development of an algorithm for solving the boundary value problem for the differential equation with small parameter at the highest derivative and creation of software using the spectral grid method.

The scientific novelty of research :

recurrence formulas for calculating derivatives of different orders of series with respect to Chebyshev polynomials of the second kind were constructed;

a boundary value problem for an ordinary differential equation of general form was approximated using the spectral-grid method and convergence theorems were proved;

estimates were obtained for the rate of convergence of an approximate solution to an exact one, relative to the maximum grid step, the minimum number of approximating Chebyshev polynomials and the index of the highest derivative of the differential equation;

a boundary value problem for eigenvalues for an ordinary differential equation of general form was approximated using the spectral-grid method and a convergence theorem was proved;

an estimate was obtained for the rate of convergence of approximate eigenvalues to exact ones, relative to the maximum grid step, the minimum number of approximating Chebyshev polynomials and the index of the highest derivative of the differential equation.

Implementation of the research results.

Based on the spectral-grid method, algorithms and software for the numerical solution of the boundary value problem for an ordinary differential equation of general form and the eigenvalue problem for this equation using Chebyshev polynomials of the second kind:

allowed the development of an algorithm for solving boundary value problems for ordinary differential equations and eigenvalue problems for such equations, in the OT-F4-64 project on the topic “Construction and numerical study of hydrodynamic models of fluid leakage and migration of substances in inhomogeneous porous media” in the 2nd stage of the fundamental project “Construction and numerical analysis of hydrodynamic models of substance flow and anomalous migration in fractured-pore media” on the numerical study of problems of anomalous migration of substances and liquid flow in two-zone cylindrical inhomogeneous fractured-pore media (Certificate of Samarkand State University dated July 9, 2024, No. 10-3344). The application of scientific results on the numerical study of anomalous migration of substances and liquid leaks in two-zone cylindrical heterogeneous cracked-porous media made it possible in the second stage of the OT-F4-64 project to effectively solve numerical problems of the equation of convective-diffusion migration in the environment;

the software developed for the numerical solution of a boundary value problem for an ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative was used in the numerical study of non-classical singular integral equations in the fundamental project FZ-202009211 on the topic "Study of the correctness of problems for mixed-type equations with the Frankl and Bitsadze-Samarskii conditions on the characteristic and on the degeneracy line using the theory of non-classical singular integral equations" (Certificate of Termez State University dated July 18, 2024, No. 12/04.2417). The use of scientific results made it possible to carry out the calculation by numerically solving the integral equations formed when finding a solution to combined problems with the Tricomi condition and the shift condition on internal characteristics for the Gellerstedt equation with a singular coefficient.**Publications of the research results.** 15 scientific articles were published on the research topic. Of these 6 scientific articles published: 2 in foreign (including 2 in journals from the Scopus database) and 4 in republican journals, recommended by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for the publication of the main scientific results of doctoral dissertations; 2 certificates on registration of computer software products were received.

Structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, a list of references and appendix. The volume of the dissertation is 84 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (1 часть; part 1)

1. Нормуродов Ч.Б.,Турсунова Б.А. Сходимость спектрального-сеточного метода с полиномами Чебышева второго рода // Проблемы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, 2020. - №1. – С.94-101. (01.00.00 №9)
2. Normurodov Ch.B.,Tursunova B.A. Chegaraviy masalalarni spektral-to’r metodi bilan approksimatsiyalash // “Ilm sarchamalari”, Urganch davlat universitetining ilmiy-nazariy, metodik jurnali, №12.2020, 15-18 bet. (01.00.00 №12)
3. Нормуродов Ч.Б.,Турсунова Б.А. Численное решение обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной спектральным методом // Проблемы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, 2022. - №6(45). – С.95-101. (01.00.00 №9)
4. Normurodov Ch.B.,Tursunova B.A. Numerical modeling of the boundary value problem of an ordinary differential equation with a small parameter at the highest derivative by Chebyshev polynomials of the second kind // Results in Applied Mathematics, 19, 2023, 100388, (№3 Scopus IF=0.459)
5. Normurodov Ch.B., Tilovov M.A., Tursunova B.A., Djuraeva N.T. Numerical modeling of inhomogeneous singularly perturbed fourth-order boundary value problems using the spectral method // Проблемы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, 2023. - №5(52). – С.83-90. (01.00.00 №9)
6. Normurodov Ch.B.,Tursunova B.A. Numerical modeling of the eigenvalue problem for a linear ordinary differential equation with homogeneous boundary conditions using the second kind Chebyshev polynomials // AIP Conference Proceedings, 2024, Vol. 3004, Issue 1, 060034. (№3 Scopus IF=0.152)

II bo‘lim (2 часть; part 2)

7. Нормуродов Ч.Б.,Турсунова Б.А.,Математическое моделирование проблемы гидродинамической устойчивости с применением полиномов Чебышева 2-го рода// IV Международная научная конференция «Актуальные проблемы прикладной математики», 22-26 мая 2018г. Нальчик-Приэльбрусье, стр.191
8. Турсунова Б.А. Применение полиномов Чебышева 2-рода для решения краевых задач // Республиканская научно-практическая конференция с участием зарубежных женшин-ученых “Актуальные проблемы математики и механики – CAWMA-2018” , 25-26 октября 2018, стр. 74-76

9. Турсунова Б.А. Сходимость спектрально-сеточного метода с полиномами Чебышева второго рода // IV Международная научная конференция “Актуальные проблемы прикладной математики”, 2019, г.Караганда, стр.100

10. Турсунова Б.А. Численное моделирование гидродинамических систем с помощью рядов по полиномам Чебышева второго рода // Математиканинг замонавий масалалари:муаммолар ва ечимлар республика илмий онлайн конференцияси, Термиз, 21-23 октябр 2020 й.325-327 бетлар.

11. Турсунова Б.А. Численные методы решения однородной краевой задачи для обыкновенного дифференциального уравнения // Материалы международной конференции «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», г.Нальчик, 5-9 декабря 2021, стр.182

12. Нормуродов Ч.Б.,Турсунова Б.А. Численное моделирование проблемы на собственные значения для линейного обыкновенного дифференциального уравнения при однородных краевых условиях с применением полиномов Чебышева второго рода//“Амалий математика ва ахборот технологияларининг замонавий муаммолари” Ҳалқаро илмий-амалий анжуман материаллари, Бухоро,11-12 май 2022 й. 337-338 б.

13. Нормуродов Ч.Б.,Турсунова Б.А. Численное решение обыкновенного дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной спектральным методом // Abstracts of the international conference “Mathematical analysis and ITS applications in modern mathematical physics”, part II, Samarqand, September 23-24, 2022, pp.38-39

14. Нормуродов Ч.Б.,Турсунова Б.А. Численное моделирование уравнений с малым параметром при старшей производной полиномами Чебышева второго рода // Международная научно-практическая конференция “Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологии”, г.Нукус, май 2-3, 2023г. стр.279-281.

15. Normurodov Ch.B.,Tursunova B.A. Application of spectral-grid method for solving an ordinary differential equation with inhomogeneous gradients // VIII International conference “Actual Problems of Appliyed Mathematics and Information Technologies”- Al-Khwarizmi 2023, Samarkand, Sept. 25-26, 2023, p.135

16. Tursunova B.A. Dasturiy vosita “Yuqori tartibli hosila oldida kichik parametr bo‘lgan differensial tenglama uchun chegaraviy masalani spektral metod bilan yechish” // O‘zb.Res.Intellektual mulk agentligi, Guvohnoma №DGU 20890, 09.12.2022

17. Tursunova B.A. Dasturiy vosita “Singulyar-qo’zgaluvchan ikkinchi tartibli differensial tenglama uchun chegaraviy masalani spektral-to‘r metodi bilan yechish” // O‘zb.Res.Intellektual mulk agentligi, Guvohnoma №DGU 39913, 04.06.2024

Avtoreferat « Surxondaryoda ilm va fan » jurnali tahririyatida tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillarida matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

1715

Bosishga ruxsat etildi:07.11.2024 yil
Bichimi 60x84 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman»
garniturada raqamli bosma usulda chop etildi.
Shartli bosma tabog‘i 3. Adadi 100. Buyurtma № 118

“Fan va ta’lim poligraf” MChJ bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent shahri, Do‘rmon yo‘li ko‘chasi, 24-uy.