**SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

---

**BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI**

**LATIPOV HAKIMBOY MIRZO O‘G‘LI**

# TO‘RTINCHI TARTIBLI OPERATORLI MATRITSALAR SINFI UCHUN SPEKTRAL BAHOLASHLAR

**01.01.01 – Matematik analiz**

**fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi AVTOREFERATI**

**Samarqand – 2024**

**UDK: 517.984**

**Falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD)**

**Content of the abstract of doctor of philosophy (PhD) dissertation**

**SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

---

**BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI**

**LATIPOV HAKIMBOY MIRZO O‘G‘LI**

# TO‘RTINCHI TARTIBLI OPERATORLI MATRITSALAR SINFI UCHUN SPEKTRAL BAHOLASHLAR

**01.01.01 – Matematik analiz**

**fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi AVTOREFERATI**

**Samarqand – 2024**

**Falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi Oliy attestatsiya komissiyasida B2023.2.PhD/FM862 raqam bilan ro‘yxatga olingan.**

Dissertatsiya Buxoro davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida (www.samdu.uz) va “Ziyonet” axborot ta’lim tarmog‘ida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

| | |
|---|---|
| **Ilmiy rahbar:** | **Rasulov To‘lqin Husenovich**<br>fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor |
| **Rasmiy opponentlar:** | **Mo‘minov Muxiddin Eshqobilovich**<br>fizika-matematika fanlari doktori (DSc), dotsent |
| | **Kucharov Ramziddin Ruzimuradovich**<br>fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD), dotsent |
| **Yetakchi tashkilot:** | **Urganch davlat universiteti** |

Dissertatsiya himoyasi Samarqand davlat universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 raqamli Ilmiy kengashning 2024 yil “__ __” ____________ soat _____ dagi majlisida bo‘lib o‘tadi (Manzil: 140104, Samarqand sh., Universitet xiyoboni, 15-uy. Tel.: (+99866) 231 06 32; faks: (+998 66) 235 19 38, e-mail: patent@umail.uz).

Dissertatsiya bilan Samarqand davlat universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (____ raqami bilan ro‘yxatga olingan). (Manzil: 140104, Samarqand sh., Universitet xiyoboni, 15-uy. Tel.: (+99866) 231 06 32;

Dissertatsiya avtoreferati 2024 yil “____” ____________ kuni tarqatildi.
(2024 yil “____” ____________ dagi ____ raqamli reestr bayonnomasi).

**A.A. Soleyev**
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., professor

**A.M. Xolxo‘jayev**
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d., professor

**S.N. Laqayev**
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash qoshidagi Ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., professor, akademik

## KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

**Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati.** Jahonda olib borilayotgan ko‘plab izlanishlar, aksariyat hollarda elementlari Banax yoki Hilbert fazolarida ta’sir qiluvchi chiziqli operatorlardan iborat bo‘lgan blok operatorli matritsalarning spektral xossalarini o‘rganishga olib kelinadi. Blok operatorli matritsalar va ularning muhim sinflaridan biri bo‘lgan panjaradagi soni saqlanmaydigan chegaralangan sondagi zarrachalar sistemasiga mos Hamiltonianlarning muhim va diskret spektrlari bilan bog‘liq masalalar qattiq jismlar fizikasi, kvant maydon nazariyasi, statistik fizika, magnitogidrodinamika, kvant mexanikasi va boshqa ko‘plab sohalardagi dolzarb masalalardan hisoblanadi. Shuning uchun blok operatorli matritsalar, xususan, panjaradagi soni saqlanmaydigan va to‘rttadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos operatorli matritsaga oid tadqiqotlarni rivojlantirish muhim hisoblanadi.

Dunyoda operatorli matritsalar spektrining joylashuv o‘rnini aniqlash, ularning muhim spektri va xos qiymatlari sonini o‘rganishga doir ko‘plab ilmiy izlanishlar olib borilmoqda. Bu borada, to‘rtinchi tartibli operatorli matritsa uchun to‘rtinchi darajali sonli tasvirning tuzulishini tahlil qilish, hamda uni to‘rtinchi tartibli operatorli matritsa spektrining joylashuv o‘rnini aniqlashga tadbiq qilish, panjaradagi soni saqlanmaydigan va to‘rttadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos operatorli matritsa muhim spektrining tuzilishini tadqiq qilish, uning xos qiymatlar sonini tahlil qilishga alohida e’tibor berilmoqda.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqlariga ega bo‘lgan dolzarb yo‘nalishlariga e’tibor kuchaytirildi, xususan, mamlakatimiz olimlari tomonidan to‘rtinchi tartibli operatorli matritsalarning spektrlarini tahlil qilish, ayniqsa panjaradagi soni saqlanmaydigan va to‘rttadan oshmaydigan zarrachalar sistemalariga mos Hamiltonianlarning xossalarini tadqiq qilishga alohida e’tibor qaratilmoqda. Operatorli matritsalarning muhim spektrini aniqlash va xos qiymatlarining maksimal sonini topishga oid salmoqli natijalarga erishildi. “Matematika, fizika, amaliy matematika fanlarining ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish asosiy vazifalar va faoliyat yo‘nalishlari” etib belgilandi[1]. Bu borada operatorli matritsalarning spektral nazariyasini rivojlantirish, to‘rtinchi tartibli operatorli matritsalarning spektrlarining joylashuv o‘rnini aniqlash hamda ularning muhim spektri tuzilishini ko‘rsatish, uning xos qiymatlari soni chekli yoki cheksiz bo‘ladigan shartlarni topish, shu bilan birga muhim spektrdan tashqarida yotuvchi xos qiymatlarining maksimal sonini aniqlash muhim ilmiy ahamiyatga ega hisoblanadi.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 28-yanvardagi PF-60-son “2022-2026-yillarga mo‘ljallangan yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmoni, 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek,

[1] O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar mahkamasi 2017-yil 18-maydagi “O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish to‘g‘risida”gi 292-sonli qarori.

O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

**Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi.** Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

**Muammoning o‘rganilganlik darajasi.** Fok fazosining qirqilgan qism fazosidagi operatorli matritsalar spektral nazariyasiga oid tadqiqotlar H.Shpon, I.M.Sigal, A.Soffer, V.Bach, R.A.Minlos, Yu.V.Jukov, H.Neidhardt, S.N.Laqayev, T.H.Rasulov, M.E.Mo‘minov va boshqa ko‘plab olimlar tomonidan olib borilgan.
Hozirgi vaqtda operatorli matritsalar xos qiymatlari sonini tadqiq qilish masalasi operatorli matritsalar spektral nazariyasining chuqur o‘rganilayotgan obyektlaridan biri hisoblanadi. Uchinchi tartibli operatorli matritsalar spektral tahlilidagi asosiy masalalardan biri uning muhim spektridan chapda joylashgan cheksiz sondagi xos qiymatlar mavjudligini o‘rganish masalasidir. Bu hodisaning mavjudligi dastlab uchta zarrachalar sistemasi uchun V.N.Yefimov tomonidan o‘rganilgan hamda keyinchalik Yefimov hodisasi deb atalgan. Ushbu hodisa mavjudligining qat’iy matematik isboti dastlab D.R.Yafayev tomonidan keltirilgan. Keyinchalik Yu.N.Ovchinnikov, I.M.Sigal, H.Tamura, A.V.Sobolev va boshqa olimlar tomonidan uch zarrachali uzluksiz Shryodinger operatori uchun Yefimov hodisasining mavjudligi o‘rganilgan.

Qattiq jismlar fizikasi, shuningdek, panjaraviy maydon nazariyasida $\mathbb{R}^d$ Yevklid fazosidagi uch zarrachali Shryodinger operatorining panjaraviy analogi bo‘lgan diskret Shryodinger operatori deb ataluvchi operatorlar paydo bo‘ladi. Dastlab S.N.Laqayev tomonidan uch o‘lchamli panjaradagi o‘zaro juft-jufti bilan kontakt ta’sirlashuvchi uchta ixtiyoriy va uchta bir xil zarrachali sistemalar uchun Yefimov hodisasining mavjudligi matematik nuqtai nazardan qat’iy isbotlangan. S.N.Laqayev, S.Albeverio, J.I.Abdullaev va Z.E.Mo‘minovlarning ishlarida $H(K)$ uch zarrachali diskret Shryodinger operatorining $z$ dan chapda yotuvchi xos qiymatlari soni $N(K,z)$ uchun $K$ va $z$ spektral parametrlar bo‘yicha asimptotikalar olingan. M.E.Mo‘minovning ishida panjaradagi uchta ixtiyoriy zarrachalar sistemasiga mos Hamiltonian muhim spektrining bo‘shlig‘ida cheksiz sondagi xos qiymatlar mavjudligi isbotlangan.

Yuqorida keltirib o‘tilgan ishlarda soni saqlanadigan chekli sondagi zarrachalar sistemalari uchun Yefimov hodisasining mavjudligi o‘rganilgan. S.N.Laqayev, S.Albeverio, T.H.Rasulovlarning ishlarida esa uchinchi tartibli operatorli matritsa uchun Yefimov hodisasining mavjud bo‘lishi isbotlangan, hamda xos qiymatlar soni uchun asimptotik formula o‘rganilgan. H.Neidhardt, M.E.Mo‘minov va T.H.Rasulovlarning ishida uchinchi tartibli operatorli matritsalar uchun olingan natijalar yordamida panjaradagi ko‘pi bilan ikkita fotonli spin-bozon modelining spektri batafsil o‘rganilgan. M.E.Mo‘minov va T.H.Rasulovlarning ishlarida esa bu turdagi operatorli matritsalar uchun muhim spektrning ichida (muhim spektrning bo‘shlig‘ida, muhim spektrdan chapda) cheksiz sondagi xos qiymatlar mavjud bo‘lish shartlari topilgan. T.H.Rasulov va E.B.Dilmurodovlarning ishlarida esa panjaradagi soni saqlanmaydigan va uchtadan oshmaydigan zarrachalar sistemasi bilan bog‘liq ikkinchi tartibli operatorli matritsa uchun ikki yoqlama Yefimov hodisasining mavjudligi isbotlangan.

**Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi**. Dissertatsiya tadqiqoti Buxoro davlat universiteti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasining 2017-2026 yillarga mo‘ljallangan M.01.2017-raqamli “Chiziqli operatorlarning spektral nazariyasi” ilmiy-tadqiqot yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

**Tadqiqotning maqsadi** to‘rtinchi darajali sonli tasvir uchun alternativ formula topish, panjaradagi soni saqlanmaydigan va to‘rttadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos to‘rtinchi tartibli operatorli matritsa muhim spektrining tuzilishini aniqlash va uning xos qiymatlari sonini tadqiq qilishdan iborat.

**Tadqiqotning vazifalari**:

maxsus ko‘rinishdagi to‘rtinchi tartibli operatorli matritsaning to‘rtinchi darajali sonli tasviri uchun formula topish;

uch diagonalli to‘rtinchi tartibli operatorli matritsalar uchun Gershgorin teoremasining analogini olish;

diskret parametrli to‘rtinchi tartibli operatorli matritsa muhim hamda diskret spektrlarini tadqiq qilish.

**Tadqiqotning obyekti** sifatida panjaradagi soni saqlanmaydigan va to‘rttadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos to‘rtinchi tartibli operatorli matritsa olingan.

**Tadqiqotning predmetini** Fok fazosining qirqilgan qism fazosidagi o‘z-o‘ziga qo‘shma chegaralangan to‘rtinchi tartibli operatorli matritsaning spektral xossalari tashkil etgan.

**Tadqiqotning usullari**. Dissertatsiya ishida matematik analiz, funksional analiz, o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorlar spektral nazariyasi va zamonaviy matematik fizikaning “spektral baholash” va “spektrni aniqlash” usullaridan foydalanilgan.

**Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat**:

- to‘rtinchi darajali sonli tasvir uchun alternativ formula ishlab chiqarilgan hamda uning yordamida to‘rtinchi tartibli operatorli matritsalar sinfi spektrining quyi va yuqori chegaralari uchun klassik qo‘zg‘alishlar nazariyasi baholashlaridan farqli baholashlar olingan;

- uch diagonalli to‘rtinchi tartibli operatorli matritsalar sinfi uchun klassik Gershgorin teoremasining analogi isbotlangan hamda bu teorema yordamida matritsalar sinfining chegaralari uchun klassik qo‘zg‘alishlar nazariyasi va to‘rtinchi darajali sonli tasvir yordamida olingan baholashlardan farqli baholashlar topilgan;

- to‘rtinchi tartibli operatorli matritsa muhim spektrining ikki, uch, to‘rt zarrachali tarmoqlari joylashuv o‘rni aniqlangan, uni tashkil etuvchi kesmalar soni topilgan hamda blok elementlari orasida spektral munosabatlar o‘rnatilgan;

- uchinchi tartibli operatorli matritsa ko‘pi bilan sakkizta, to‘rtinchi tartibli operatorli matritsa koʻpi bilan oʻn oltita xos qiymatga ega boʻlishi Fredgolm determinantining xossalaridan foydalanib isbotlangan hamda bu xos qiymatlar koʻpi bilan ikki karrali boʻlishi koʻrsatilgan.

**Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat**:

panjaradagi soni saqlanmaydigan va toʻrttadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos toʻrtinchi tartibli operatorli matritsaning spektral xossalari haqidagi xulosalar atom fizikasida, kvant mexanikasida eksperimental tadqiqotlarning sifat koʻrsatkichini aniqlash hamda sonli hisoblashlarda foydalanilgan.

**Tadqiqot natijalarining ishonchliligi** matematik analiz, funksional analiz, zamonaviy matematik fizika va oʻz-oʻziga qoʻshma operatorlarning spektral nazariyasi metodlaridan foydalangan holda aniq matematik tahlillar va isbotlashlar bilan izohlangan.

**Tadqiqotning ilmiy va amaliy ahamiyati**. Tadqiqotda olingan natijalarning ilmiy ahamiyati ulardan oʻz-oʻziga qoʻshma operatorlar nazariyasining kvant maydonlar nazariyasi, qattiq jismlar fizikasi, statistik fizikada paydo boʻladigan, xususan, toʻrtinchi tartibli operatorli matritsalar bilan bogʻliq masalalarida foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

**Dissertatsiya natijalarining amaliy ahamiyati** shundan iboratki, operatorli matritsalarning xos qiymatlari soni yordamida qattiq jismlar fizikasi va kvant mexanikasining panjaradagi soni saqlanmaydigan va toʻrttadan oshmaydigan zarrachalar sistemalariga mos modellarning xos qiymatlari sonini aniqlash mumkinligi bilan izohlanadi.

**Tadqiqot natijalarini joriy qilinishi.** Toʻrtinchi tartibli operatorli matritsalarga doir olingan ilmiy natijalar asosida:

diskret parametrli toʻrtinchi tartibli operatorli matritsa koʻpi bilan 16 ta xos qiymatga ega boʻlishi; toʻrtinchi tartibli operatorli matritsalarning quyi va yuqori chegaralari uchun olingan baholashlardan Xoʻja Ahmad Yassaviy nomidagi xalqaro qozoq-turk universitetining № AP05131268 raqamli “Xususiy hosilali nolokal differensial tenglamalar uchun chegaraviy va boshlangʻinch-chegaraviy masalalarni yechish muammolari” mavzusidagi fundamental loyihasida foydalanilgan (Xoʻja Ahmad Yassaviy nomidagi Xalqaro qozoq-turk universitetining 2023-yil 24-noyabrdagi 04-3840-son ma’lumotnomasi). Toʻrtinchi tartibli operatorli matritsaning xos qiymatlari hamda toʻrtinchi darajali sonli tasvir xossalari nolokal Laplas operatori uchun ba’zi chegaraviy masalalarning xos funksiyalari va xos qiymatlarini qurish usullarini tadqiq qilish imkonini bergan.

Diskret parametrga ega toʻrtinchi tartibli operatorli matritsa muhim spektrining ikki, uch va toʻrt zarrachali tarmoqlarini aniqlashda, muhim spektr kesmalarining soni hamda blok elementlari orasidagi spektral munosabatlarini tekshirishda qoʻllanilgan metodlardan Malayziya Xalqaro islom universitetining FRGS19-039-0647 raqamli fundamental loyihasida foydalanilgan (Malayziya Xalqaro islom universitetining 2023-yil 23-oktabrdagi ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qoʻllanilishi oddiy differensial tenglamaga asoslangan usullar yordamida qiymatlar quyi chegarasiga sonli yaqinlashishni oʻrganish imkonini bergan.

**Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi**. Dissertatsiyaning asosiy natijalari 4 ta xalqaro va 2 ta Respublika miqyosidagi jami 6 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda muhokamadan o‘tgan.

**Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi**. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 12 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining dissertatsiyalar asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 6 ta, jumladan, 2 tasi xorijiy va 4 tasi Respublika jurnallarida nashr etilgan.

**Dissertatsiyaning hajmi va tuzilishi**. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat bo‘lib, 94 betni tashkil etgan.

## DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

**Kirish** qismida dissertatsiyada tanlangan mavzuning dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi yoritilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy va mahalliy ilmiy-tadqiqot ishlari farqi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan maqolalar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning birinchi bobi “**Dastlabki ma’lumotlar**” deb ataladi. Ushbu bobda dissertatsiya ishining asosiy natijalarini bayon qilishda va isbotlashda foydalanilgan muhim tushunchalar, tasdiqlar va teoremalar keltirilgan. Shuningdek, tadqiqot ishiga, Fok fazosining qirqilgan qism fazosida ta’sir qiluvchi operatorli matritsalarning tahliliga oid bir qator olimlarning ilmiy natijalari, hozirgacha o‘rganilgan dissertatsiya ishlari hamda ba’zi maqolalarning tahlili berilgan.

Dissertatsiya ishining ikkinchi bobi **“To‘rtinchi darajali sonli tasvir”** deb nomlanadi. Chiziqli operatorlarning spektral nazaryasidan yaxshi ma’lumki, $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4$ to‘rtta Hilbert fazolari to‘g‘ri yig‘indisida, ya’ni $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4$ fazoda ta’sir qiluvchi har qanday $\mathcal{A}$ chiziqli chegaralangan operator hamisha to‘rtinchi tartibli operatorli matritsa ko‘rinishida tasvirlanadi

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

bu yerda $A_{ij}: \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i, j = 1,2,3,4$ matritsaviy elementlar chiziqli chegaralangan operatorlardir. Ta’rifga ko‘ra, $\mathcal{A}$ operatorli matritsa o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lishi uchun $A_{ij}^* = A_{ji}$ $i, j = 1,2,3,4$ bo‘lishi zarur va yetarlidir, ya’ni

$$\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \Leftrightarrow A_{ij}^* = A_{ji},\ i, j = 1,2,3,4.$$

$S_{\mathcal{H}_i}$, $i = \overline{1,4}$ orqali $\mathcal{H}_i$ Hilbert fazosidagi birlik sferani belgilaymiz:

$$S_{\mathcal{H}_i} := \{x \in \mathcal{H}_i : \| x \| = 1\},$$

va quyidagi to‘plamni kiritamiz:

$$S_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4} \coloneqq S_{\mathcal{H}_1} \times S_{\mathcal{H}_2} \times S_{\mathcal{H}_3} \times S_{\mathcal{H}_4},$$

ya’ni

$$S_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4} := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{H}: x_i \in \mathcal{H}_i, \| x_i \| = 1, i = 1,2,3,4\}.$$

Agar $\mathcal{H}$ fazoning $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4$ yoyilmasi fiksirlangan bo‘lsa, u holda $S_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4}$ belgilash o‘rniga $S^4$ yoki $S_{\mathcal{H}}$ belgilashdan ham foydalanish mumkin.

Har bir fiksirlangan $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4}$ element uchun

$$\mathcal{A}_x := \begin{pmatrix} (A_{11}x_1, x_1) & (A_{12}x_2, x_1) & (A_{13}x_3, x_1) & (A_{14}x_4, x_1) \\ (A_{21}x_1, x_2) & (A_{22}x_2, x_2) & (A_{23}x_3, x_2) & (A_{24}x_4, x_2) \\ (A_{31}x_1, x_3) & (A_{32}x_2, x_3) & (A_{33}x_3, x_3) & (A_{34}x_4x_3) \\ (A_{41}x_1, x_4) & (A_{42}x_2, x_4) & (A_{43}x_3, x_4) & (A_{44}x_4, x_4) \end{pmatrix}$$

to‘rtinchi tartibli sonli matritsani qaraymiz. U holda ushbu

$$W_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4}(\mathcal{A}) := \bigcup_{x \in S^4} \sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_x),$$

to‘plamga $\mathcal{A}$ operatorli matritsaning (1) ko‘rinishiga mos to‘rtinchi darajali sonli tasviri deyiladi.

$\mathcal{H}$ fazoning fiksirlangan yoyilmasiga nisbatan

$$W^4(\mathcal{A}) = W_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4}(\mathcal{A})$$

kabi belgilashdan ham foydalanish mumkin.

$I$ orqali tegishli fazodagi birlik operatorni belgilaymiz. Chiziqli algebra kursidan yaxshi ma’lumki, har bir $x \in S^4$ element uchun

$$\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_x) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \ \det(\mathcal{A}_x - \lambda I) = 0\}$$

tenglik o‘rinlidir.

Shu sababli $W^4(\mathcal{A})$ to‘plamni

$$W^4(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C}: \exists x \in S^4, \det(\mathcal{A}_x - \lambda I) = 0\}$$

tenglik yordamida aniqlash mumkin.

Yuqoridagi mulohazalardan ko‘rinib turibdiki, to‘rtinchi tartibli $\mathcal{A}$ operatorli matritsaning to‘rtinchi darajali sonli tasvirini tadqiq qilishda to‘rtinchi tartibli sonli matritsaning nuqtali spektrini, ya’ni uning xos qiymatlari to‘plamini o‘rganish muhim ahamiyatga ega.

Keyingi natijalarni bayon qilish maqsadida quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

1) $W(A)$ – $A$ chiziqli operatorning sonli tasviri;

2) $W^2(A)$ – ikkinchi tartibli $A$ operatorli matritsaning kvadratik sonli tasviri;

3) $W^3(A)$ – uchinchi tartibli $A$ operatorli matritsaning kubik sonli tasviri.

(1) tenglik bilan aniqlangan $\mathcal{A}$ blok operatorli matritsa uchun quyidagi shartlar bajarilishini talab qilamiz:

1) $|i - j| > 1$ bo‘lganda $A_{ij} = 0$;

2) barcha $i < j$ lar uchun $A_{ji} = A_{ij}^*, \ i, j = \overline{1,4}$.

U holda $\mathcal{A}$ operatorli matritsa quyidagicha

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{12}^* & A_{22} & A_{23} & 0 \\ 0 & A_{23}^* & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & A_{34}^* & A_{44} \end{pmatrix} \tag{2}$$

uch diagonalli chegaralangan o‘z-o‘ziga qo‘shma operatorli matritsa ko‘rinishida tasvirlanadi. Uning $W^4(\mathcal{A})$ to‘rtinchi darajali sonli tasviri uchun alternativ formula keltirib chiqarish masalasini qaraymiz.

Dastlab $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$ bo‘lgani bois $W(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}$ bo‘lishini eslatib o‘tamiz. Shu bilan birgalikda $\mathcal{A}$ operatorli matritsaning chegaralangan ekanligidan uning sonli tasviri joylashgan sohani yanada aniqroq ko‘rsatuvchi $W(\mathcal{A}) \subset [-\| \mathcal{A} \|; \| \mathcal{A} \|]$ munosabatni hosil qilamiz. To‘rtinchi darajali sonli tasvirning asosiy xossalaridan biri bu uning sonli tasvirda joylashgan ekanligidir: $W^4(\mathcal{A}) \subset W(\mathcal{A})$. Operatorli matritsalar uchun isbotlangan “spektral munosabatlar” xossasidan foydalanib, $\mathcal{A}$ operatorli matritsaning nuqtali spektri uchun $\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}) \subset W^4(\mathcal{A})$ munosabatni va uning spektri uchun $\sigma(\mathcal{A}) \subset \overline{W^4(\mathcal{A})}$ munosabatni hosil qilamiz. Shunday qilib,

$$\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}) \subset W^4(\mathcal{A}) \subset W(\mathcal{A}) \subset [-\| \mathcal{A} \|; \| \mathcal{A} \|];$$

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \overline{W^4(\mathcal{A})} \subset \overline{W(\mathcal{A})} \subset [-\| \mathcal{A} \|; \| \mathcal{A} \|].$$

Ayrim muhim xususiy hollarda $\mathcal{A}$ blok operatorli matritsaning $W^4(\mathcal{A})$ to‘rtinchi darajali sonli tasvirini o‘rganamiz.

**1-tasdiq.** *Agar* (2) *tenglik yordamida aniqlangan $\mathcal{A}$ blok operatorli matritsada $A_{23} = 0$ bo‘lsa, u holda $W^4(\mathcal{A}) = W^2(\mathcal{A}_1) \cup W^2(\mathcal{A}_2)$ tenglik o‘rinli, bunda*

$$\mathcal{A}_1: \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \quad \mathcal{A}_2: \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4 \to \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4$$

*operatorli matritsalar*

$$\mathcal{A}_1 := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 := \begin{pmatrix} A_{33} & A_{34} \\ A_{34}^* & A_{44} \end{pmatrix}$$

*kabi aniqlangan*.

**2-tasdiq.** *Agar* (2) *tenglik yordamida aniqlangan $\mathcal{A}$ operatorli matritsada $A_{12} = 0$ bo‘lsa, u holda $W^4(\mathcal{A}) = W(A_{11}) \cup W^3(\mathcal{A}_3)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi, bunda*

$$\mathcal{A}_3: \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4 \to \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4$$

*operatorli matritsa*

$$\mathcal{A}_3 := \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} & 0 \\ A_{23}^* & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{34}^* & A_{44} \end{pmatrix}$$

*kabi aniqlangan*.

**3-tasdiq.** *Agar* (2) *tenglik yordamida aniqlangan $\mathcal{A}$ operatorli matritsada $A_{34} = 0$ bo‘lsa, u holda $W^4(\mathcal{A}) = W^3(\mathcal{A}_4) \cup W(A_{44})$ tenglik o‘rinli, bunda*

$$\mathcal{A}_4: \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$$

*operatorli matritsa*

$$\mathcal{A}_4 := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12}^* & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{23}^* & A_{33} \end{pmatrix}$$

*kabi aniqlangan.*

Quyidagicha belgilashlarni kiritamiz:

$$P(f) := |(A_{12}f_2, f_1)|^2 + |(A_{23}f_3, f_2)|^2 + |(A_{34}f_4, f_3)|^2;$$

$$Q(f) := |(A_{12}f_2, f_1)|^2 \cdot |(A_{34}f_4, f_3)|^2.$$

$$E_1(f):=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{P(f)+\sqrt{(P(f))^2-4Q(f)}};$$
$$E_2(f):=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{P(f)-\sqrt{(P(f))^2-4Q(f)}};$$
$$E_3(f):=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{P(f)-\sqrt{(P(f))^2-4Q(f)}};$$
$$E_4(f):=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{P(f)+\sqrt{(P(f))^2-4Q(f)}}.$$

**1-teorema.** a) *Faraz qilaylik,* (2) *tenglik yordamida aniqlangan* $\mathcal{A}$ *operatorli matritsada* $A_{ii}=0,\ i=1,2,3,4$ *bo'lsin. U holda* $\mathcal{A}$ *operatorli matritsaning to'rtinchi darajali sonli tasviri* $W^4(\mathcal{A})$ *uchun*

$$W^4(\mathcal{A})=\bigcup_{f\in S^4}\bigcup_{k=1}^{4}\{E_k(f)\}$$

*formula o'rinlidir.*

b) $\mathcal{A}$ *blok operatorli matritsaning quyi va yuqori chegaralari uchun quyidagi*

$$\min\sigma(\mathcal{A})\geq\inf W^4(\mathcal{A})=\inf\bigcup_{f\in S^4}\{E_1(f)\};$$
$$\max\sigma(\mathcal{A})\leq\sup W^4(\mathcal{A})=\sup\bigcup_{f\in S^4}\{E_4(f)\}$$

*baholashlar o'rinli.*

$\mathcal{H}$ Hilbert fazosida ta'sir qiluvchi (3) ko'rinishdagi operatorli matritsaning elementlari uchun $A_{ij}\in L(\mathcal{H}_j,\mathcal{H}_i)$, $|i-j|\leq 1$ va $A_{ii}^*=A_{ii}, i,j=\overline{1,4}$ bo'lsin.

Quyidagi $\mathcal{G}_i$, $i=\overline{1,4}$ to'plamlarni kiritamiz:

$$\mathcal{G}_1:=\sigma(A_{11})\cup\{\lambda\in\rho(A_{11}):\|(A_{11}-\lambda)^{-1}\|^{-1}\leq\|A_{12}\|\};$$
$$\mathcal{G}_2:=\sigma(A_{22})\cup\{\lambda\in\rho(A_{22}):\|(A_{22}-\lambda)^{-1}\|^{-1}\leq\|A_{12}\|+\|A_{23}\|\};$$
$$\mathcal{G}_3:=\sigma(A_{33})\cup\{\lambda\in\rho(A_{33}):\|(A_{33}-\lambda)^{-1}\|^{-1}\leq\|A_{34}\|+\|A_{23}\|\};$$
$$\mathcal{G}_4:=\sigma(A_{44})\cup\{\lambda\in\rho(A_{44}):\|(A_{44}-\lambda)^{-1}\|^{-1}\leq\|A_{34}\|\}.$$

**2-teorema.** (2) *tenglik yordamida aniqlangan* $\mathcal{A}$ *operatorli matritsaning spektri uchun*

$$\sigma(\mathcal{A})\subset\bigcup_{i=1}^{4}\mathcal{G}_i$$

*munosabat o'rinli. Bundan tashqari, uning chegaralari uchun*

$$\min\sigma(\mathcal{A})\geq-\|A_{23}\|-\max\{\|A_{12}\|,\|A_{34}\|\};$$
$$\max\sigma(\mathcal{A})\leq\|A_{23}\|+\max\{\|A_{12}\|,\|A_{34}\|\}$$

*baholashlar o'rinlidir.*

1-teorema va 2-teoremalarning afzallik tomonlarini ko'rsatish maqsadida $a\geq 0$ soni uchun

$$M:=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0\\ -1 & 0 & a & 0\\ 0 & a & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$
to‘rtinchi tartibli matritsani qaraymiz. Sodda hisoblashlar orqali
$$W^4(M)=\sigma_{\mathrm{p}}(M)=\{E_1,E_2,E_3,E_4\}$$
ekanligini hosil qilamiz, bu yerda
$$E_1:=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+2+\sqrt{a^4+4a^2}},\qquad E_2:=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+2-\sqrt{a^4+4a^2}};$$
$$E_3:=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+2-\sqrt{a^4+4a^2}},\qquad E_4:=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2+2+\sqrt{a^4+4a^2}}.$$
Aniqlanishiga, shu bilan birga 1-teoremaga ko‘ra
$$\min\sigma(M)=\min W^4(M)=E_1, \max\sigma(M)=\max W^4(M)=E_4.$$
2-teorema yordamida
$$\min\sigma(M)\geq -1-a;\ \max\sigma(M)\leq 1+a$$
quyi va yuqori chegaralarni topish mumkin.

1-teorema va 2-teoremalar yordamida hosil qilingan har ikkala chegaralar ustma-ust tushadigan $a$ parametrning yagona qiymati $a=0$ dir. Barcha $a>0$ uchun to‘rtinchi darajali sonli tasvir yordamida topilgan chegara 2-teorema (Gershgorin teoremasi analogi) yordamida topilgan chegaradan yaxshiroqdir.

1-teoremaga ko‘ra $\mathcal{A}$ operatorning quyi va yuqori chegaralari uchun
$$\min\sigma(\mathcal{A})\geq -\sqrt{\| A_{12}\|^2+\| A_{23}\|^2+\| A_{34}\|^2};$$
$$\max\sigma(\mathcal{A})\leq \sqrt{\| A_{12}\|^2+\| A_{23}\|^2+\| A_{34}\|^2}$$
baholashlar o‘rinli degan xulosaga kelamiz.

Dissertatsiyaning “**To‘rtinchi tartibli operatorli matritsaning muhim va diskret spektrlari**” deb nomlangan uchinchi bobida panjaradagi soni saqlanmaydigan va to‘rttadan oshmaydigan zarrachalar sistemasi Hamiltonianiga mos to‘rtinchi tartibli $\mathcal{A}$ operatorli matritsa qaraladi. Bu Hamiltonian $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$ Yevklid fazosidagi, ya’ni $L_2(\mathbb{R}^{\mathrm{d}},\mathbb{C}^2)$ Hilbert fazosi yordamida qurilgan bozonli Fok fazosidagi soni uchtadan ko‘p bo‘lmagan fotonli spin-bozon modeli bilan bog‘liq.

$\mathrm{d}\in\mathbb{N}$ natural son va $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}:=(-\pi;\pi]^{\mathrm{d}}$ esa d o‘lchamli tor bo‘lsin.

$m=1,2,3$ uchun $L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^m)$ orqali $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^m$ to‘plamda aniqlangan kvadrati bilan integrallanuvchi (umuman olganda kompleks qiymatli) funksiyalarning Hilbert fazosini belgilaymiz hamda quyidagi Hilbert fazolarni kiritamiz:
$$\mathcal{F}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})):=\mathbb{C}\oplus L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})\oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)\oplus\ldots;$$
$$\mathcal{F}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})):=\mathbb{C}\oplus L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}});$$
$$\mathcal{F}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})):=\mathbb{C}\oplus L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})\oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2);$$
$$\mathcal{F}^{(3)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})):=\mathbb{C}\oplus L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})\oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2)\oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^3);$$
$$\mathcal{H}^{(m)}:=\mathbb{C}^2\otimes\mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})),\quad m=1,2,3.$$
$\mathcal{F}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ Hilbert fazosiga $L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})$ fazo yordamida qurilgan Fok fazosi deyiladi, $\mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ Hilbert fazosiga esa Fok fazosining $m+1$ zarrachali qirqilgan qism fazosi deyiladi.

Ta’rifga ko‘ra $\mathcal{H}^{(3)}$ Hilbert fazosining ixtiyoriy $F$ elementi $F=$

$\{f_0^{(s)}, f_1^{(s)}, f_2^{(s)}, f_3^{(s)}, s=\pm\} \in \mathcal{H}^{(3)}$ ko‘rinishda bo‘lib uning normasi

$$\| F \|^2 = \sum_{s=\pm} \Bigg( |f_0^{(s)}|^2 + \int_{\mathbb{T}^d} |f_1^{(s)}(k_1)|^2 dk_1 + \int_{(\mathbb{T}^d)^2} |f_2^{(s)}(k_1,k_2)|^2 dk_1 dk_2 + \int_{(\mathbb{T}^d)^3} |f_3^{(s)}(k_1,k_2,k_3)|^2 dk_1 dk_2 dk_3 \Bigg)$$

formula orqali aniqlanadi.

$\mathcal{H}^{(3)}$ Hilbert fazosida quyidagi

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & 0 & 0 \\ A_{01}^* & A_{11} & A_{12} & 0 \\ 0 & A_{12}^* & A_{22} & A_{23} \\ 0 & 0 & A_{23}^* & A_{33} \end{pmatrix}$$

uch diagonalli operatorli matritsani qaraymiz, bunda matritsaviy elementlar

$$A_{00} f_0^{(s)} = s\varepsilon f_0^{(s)}, \quad A_{01} f_1^{(s)} = \alpha \int_{\mathbb{T}^d} v(t) f_1^{(-s)}(t) dt,$$

$$(A_{11} f_1^{(s)})(k_1) = (s\varepsilon + w(k_1)) f_1^{(s)}(k_1), (A_{12} f_2^{(s)})(k_1) = \alpha \int_{\mathbb{T}^d} v(t) f_2^{(-s)}(k_1,t) dt,$$

$$(A_{22} f_2^{(s)})(k_1,k_2) = (s\varepsilon + w(k_1) + w(k_2)) f_2^{(s)}(k_1,k_2),$$

$$(A_{23} f_3^{(s)})(k_1,k_2) = \alpha \int_{\mathbb{T}^d} v(t) f_3^{(-s)}(k_1,k_2,t) dt,$$

$$(A_{33} f_3^{(s)})(k_1,k_2,k_3) = (s\varepsilon + w(k_1) + w(k_2) + w(k_3)) f_3^{(s)}(k_1,k_2,k_3)$$

kabi aniqlangan. Bu yerda $\{f_0^{(s)}, f_1^{(s)}, f_2^{(s)}, f_3^{(s)}, s=\pm\} \in \mathcal{H}^{(3)}$; $i<j$ bo‘lganda $A_{ij}^*$ orqali $A_{ij}$ operatorga qo‘shma operator belgilangan, $v(\cdot)$, $w(\cdot)$ funksiyalar $\mathbb{T}^d$ torda aniqlangan haqiqiy qiymatli va uzluksiz funksiyalar hamda

$$\min_{k\in\mathbb{T}^d} w(k) = 0,$$

$\alpha > 0$ esa ta’sirlashish parametri. $\mathcal{A}$ operatorli matritsa $\mathcal{H}^{(3)}$ Hilbert fazosidagi chiziqli chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘ladi.

Quyida biz $\mathcal{A}$ operatorli matritsaning spektrini o‘rganish masalasini o‘rin almashtirish operatoridan foydalanib, nisbatan soddaroq ko‘rinishga ega bo‘lgan $\mathcal{A}^{(s)}$, $s=\pm$ operatorli matritsaning spektrini o‘rganish masalasiga keltiramiz. So‘ngra, $\mathcal{A}$ operatorli matritsaning spektri diskret parametrli $\mathcal{A}^{(s)}$, $s=\pm$ operatorli matritsalarning spektrlari orqali tavsiflanadi.

$m=1,2$ sonlari uchun $\mathcal{H}^{(m)}$ Hilbert fazosida ta’sir qiluvchi $(m+1)$-tartibli operatorli matritsalarni qaraymiz:

$$\mathcal{A}_1 := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} \\ A_{01}^* & A_{11} \end{pmatrix}, \mathcal{A}_2 := \begin{pmatrix} A_{00} & A_{01} & 0 \\ A_{01}^* & A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}.$$

Ta’kidlash joizki, $\mathcal{A}_m$, $m=1,2$ operatorli matritsa $\mathcal{H}^{(m)}$ Hilbert fazosida chiziqli, chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma operator bo‘ladi.

Keyingi izlanishlarda qulaylik tug‘dirish maqsadida $\mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^d))$ Hilbert fazosida ta’sir qiluvchi quyidagi chegaralangan va o‘z-o‘ziga qo‘shma bo‘lgan hamda $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$, $m=1,2,3$, $\mathrm{s}=\pm$ orqali belgilangan $(m+1)$-tartibli diskret parametrli operatorli matritsalarni qaraymiz:

$$\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}:=\begin{pmatrix}\widehat{\mathrm{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathrm{A}}_{01}\\ \widehat{\mathrm{A}}_{01}^{*} & \widehat{\mathrm{A}}_{11}^{(\mathrm{s})}\end{pmatrix},\qquad \mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}:=\begin{pmatrix}\widehat{\mathrm{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathrm{A}}_{01} & 0\\ \widehat{\mathrm{A}}_{01}^{*} & \widehat{\mathrm{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathrm{A}}_{12}\\ 0 & \widehat{\mathrm{A}}_{12}^{*} & \widehat{\mathrm{A}}_{22}^{(\mathrm{s})}\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})}:=\begin{pmatrix}\widehat{\mathrm{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathrm{A}}_{01} & 0 & 0\\ \widehat{\mathrm{A}}_{01}^{*} & \widehat{\mathrm{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathrm{A}}_{12} & 0\\ 0 & \widehat{\mathrm{A}}_{12}^{*} & \widehat{\mathrm{A}}_{22}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathrm{A}}_{23}\\ 0 & 0 & \widehat{\mathrm{A}}_{23}^{*} & \widehat{\mathrm{A}}_{33}^{(\mathrm{s})}\end{pmatrix}.$$

Bunda matritsaviy elementlar

$$\widehat{\mathrm{A}}_{00}^{(\mathrm{s})}f_0=\mathrm{s}\varepsilon f_0,\quad \widehat{\mathrm{A}}_{01}f_1=\alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}v(t)f_1(t)dt,$$

$$(\widehat{\mathrm{A}}_{11}^{(\mathrm{s})}f_1)(k_1)=(-\mathrm{s}\varepsilon+w(k_1))f_1(k_1),\quad (\widehat{\mathrm{A}}_{12}f_2)(k_1)=\alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}v(t)f_2(k_1,t)dt,$$

$$(\widehat{\mathrm{A}}_{22}^{(\mathrm{s})}f_2)(k_1,k_2)=(\mathrm{s}\varepsilon+w(k_1)+w(k_2))f_2(k_1,k_2),$$

$$(\widehat{\mathrm{A}}_{23}f_3)(k_1,k_2)=\alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}v(t)f_3(k_1,k_2,t)dt,$$

$$(\widehat{\mathrm{A}}_{33}^{(\mathrm{s})}f_3)(k_1,k_2,k_3)=(-\mathrm{s}\varepsilon+w(k_1)+w(k_2)+w(k_3))f_3(k_1,k_2,k_3),$$

$$(f_0,f_1)\in\mathcal{F}^{(1)}\left(L_2\left(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}\right)\right),\quad (f_0,f_1,f_2)\in\mathcal{F}^{(2)}\left(L_2\left(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}\right)\right),$$

$$(f_0,f_1,f_2,f_3)\in\mathcal{F}^{(3)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$$

ko‘rinishda aniqlangan.

Keyingi natijalarni bayon qilishda yozuvni qisqartirish maqsadida $\mathcal{A}_3:=\mathcal{A}$ deb faraz qilinadi.

$m=1,2,3$ sonlari uchun $\mathcal{A}_m$ va $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s}=\pm$ operatorli matritsalarning spektrlari o‘rtasidagi munosabatlarni aniqlovchi teoremani bayon qilamiz.

**3-teorema.** *Faraz qilaylik, $m=1,2,3$ bo‘lsin. $\mathcal{A}_m$ va $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s}=\pm$ operatorli matritsalarning spektrlari uchun $\sigma(\mathcal{A}_m)=\sigma(\mathcal{A}_m^{(+)})\cup\sigma(\mathcal{A}_m^{(-)})$ tenglik o‘rinli. Bundan tashqari, ularning muhim va nuqtali spektrlari uchun*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m)=\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m^{(+)})\cup\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m^{(-)}),$$

$$\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_m)=\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_m^{(+)})\cup\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_m^{(-)})$$

*tengliklar o‘rinlidir.*

**1-eslatma.** *$m=1,2,3$ bo‘lganda $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$ operatorli matritsa $\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})})$ diskret spektrining bir qismi $\mathcal{A}_m^{(-\mathrm{s})}$ operatorli matritsa $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m^{(-\mathrm{s})})$ muhim spektrida yotishi mumkin bo‘lgani bois quyidagi munosabatlar o‘rinli:*

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m)\subseteq\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(+)})\cup\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(-)}),\tag{3}$$

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m)=\{\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(+)})\cup\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(-)})\}\backslash\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m).\tag{4}$$

*Aniqroq qilib aytganda*

$$\sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}_m) = \bigcup_{s=\pm} \{\sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}_m^{(s)}) \backslash \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_m^{(-s)})\}$$

*tenglik o'rinli bo'ladi.*

Ma'lumki, $m = 1,2,3$ va $\mathrm{s} = \pm$ bo'lganda $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$ operatorli matritsa $\mathcal{A}_m$ operatorli matritsaga nisbatan soddaroq ko'rinishga ega, shuning uchun 1-teorema va (3)-(4) munosabatlar $\mathcal{A}_m$ operatorli matritsaning spektri haqida aniqroq ma'lumot olish imkonini beradi.

Chekli o'lchamli qo'zg'alishlarda muhim spektrning o'zgarmasligi haqidagi G.Veyl teoremasidan foydalanib $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}) = [-\mathrm{s}\varepsilon, -\mathrm{s}\varepsilon + M]$ tenglikni hosil qilamiz. U holda, 3-teoremaga ko'ra $\mathcal{A}_1$ operatorli matritsaning muhim spektri uchun

$$\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_1) = [-\varepsilon, -\varepsilon + M] \cup [\varepsilon, \varepsilon + M] \tag{5}$$

tenglik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

Ko'rinib turibdiki, agar (5) tenglikda $\varepsilon > M/2$ bo'lsa, u holda $\mathcal{A}_1$ operatorli matritsaning muhim spektri o'zaro kesishmaydigan ikkita kesmalarning birlashmasidan iborat bo'ladi. Boshqacha qilib aytganda, $\mathcal{A}_1$ operatorli matritsaning muhim spektrida $(-\varepsilon + M, \varepsilon)$ intervalga teng bo'shliq (lakuna) hosil bo'ladi.

$\mathbb{C} \backslash [-\mathrm{s}\varepsilon, -\mathrm{s}\varepsilon + M]$ sohada regulyar bo'lgan ushbu

$$\Delta_1^{(\mathrm{s})}(z) := \mathrm{s}\varepsilon - z - \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{-\mathrm{s}\varepsilon + w(t) - z}$$

funksiyani qaraymiz.

Odatda $\Delta_1^{(\mathrm{s})}(\cdot)$ funksiyaga $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$ operatorli matritsaga mos Fredgolm determinanti deyiladi.

Quyidagi lemmada $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$ operatorli matritsaning xos qiymatlari va $\Delta_1^{(\mathrm{s})}(\cdot)$ funksiyaning nollari o'rtasidagi bog'liqlik o'rnatilgan.

**1-lemma.** $z^{(\mathrm{s})} \in \mathbb{C} \backslash \sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})})$ *soni* $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$ *operatorli matritsaning xos qiymati bo'lishi uchun* $\Delta_1^{(\mathrm{s})}(z^{(\mathrm{s})}) = 0$ *bo'lishi zarur va yetarli.*

Faraz qilaylik,

$$\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{w(t)} < \infty, \quad \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{M - w(t)} < \infty$$

bo'lsin. U holda quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\alpha_1 := \sqrt{M + 2\varepsilon} \left( \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{M - w(t)} \right)^{-1/2}, \quad \alpha_2 := \sqrt{2\varepsilon} \left( \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{w(t)} \right)^{-1/2},$$

$$\alpha_3 := \sqrt{M} \left( \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{2\varepsilon + M - w(t)} \right)^{-1/2},$$

$$\alpha_{\min} := \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad \alpha_{\max} := \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}.$$

**2-lemma.** a) $\alpha > 0$ *ta'sirlashish parametrining barcha qiymatlarida* $\mathcal{A}_1^{(-)}$ *operatorli matritsa* $-\varepsilon$ *dan chapda yotuvchi yagona oddiy xos qiymatga ega. Agar*

*$\alpha \in (0, \alpha_1]$ bo'lsa, u holda $\mathcal{A}_1^{(-)}$ operatorli matritsa $M+\varepsilon$ dan o'ngda yotuvchi xos qiymatga ega emas. $\alpha > \alpha_1$ bo'lganda esa $\mathcal{A}_1^{(-)}$ operatorli matritsa $M+\varepsilon$ dan o'ngda joylashgan yagona oddiy xos qiymatga ega.*

b) *Agar $\alpha \in (0, \min\{\alpha_2, \alpha_3\}]$ bo'lsa, u holda $\mathcal{A}_1^{(+)}$ operatorli matritsa $-\varepsilon$ dan chapda yotuvchi va $M+\varepsilon$ dan o'ngda yotuvchi xos qiymatlarga ega emas. Agar $\alpha > \max\{\alpha_2, \alpha_3\}$ bo'lsa, u holda $\mathcal{A}_1^{(+)}$ operatorli matritsa $-\varepsilon$ dan chapda va $M+\varepsilon$ dan o'ngda joylashgan bittadan oddiy xos qiymatlarga ega.*

**1-natija.** *$\alpha > 0$ ta'sirlashish parametrining barcha qiymatlarida $\mathcal{A}_1$ operatorli matritsa kamida bitta va ko'pi bilan to'rtta xos qiymatlarga ega. Bundan tashqari, agar $\alpha \in (0, \alpha_{\min}]$ bo'lsa, u holda $\mathcal{A}_1$ operatorli matritsa yagona oddiy (yakkalangan) xos qiymatga ega va bu xos qiymat $-\varepsilon$ dan chapda joylashgan bo'ladi. Agar $\alpha \in (\alpha_{\max}, +\infty)$ bo'lsa, u holda $\mathcal{A}_1$ operatorli matritsa mos ravishda $-\varepsilon$ dan chapda va $M+\varepsilon$ dan o'ngda joylashgan ikkitadan xos qiymatlarga ega bo'ladi.*

**3-lemma.** *Faraz qilaylik, $\varepsilon > M/2$ bo'lsin. U holda $\alpha > 0$ ta'sirlashish parametrining barcha qiymatlari uchun $\mathcal{A}_1$ operatorli matritsa muhim spektrning $(M-\varepsilon, \varepsilon)$ bo'shlig'ida yotuvchi xos qiymatlarga ega emas. Agar $\alpha \in (0, \alpha_3)$ bo'lsa, u holda $\mathcal{A}_1$ operatorli matritsa muhim spektrida, aniqrog'i $(\varepsilon, M+\varepsilon)$ oraliqda yotuvchi xos qiymatga ega.*

Quyidagi

$$\sigma_1^{(\mathrm{s})} := \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_1^{(-\mathrm{s})})\}, \quad \Sigma_1^{(\mathrm{s})} := \sigma_1^{(\mathrm{s})} \cup [\mathrm{s}\varepsilon, \mathrm{s}\varepsilon + 2M]$$

belgilashlarni kiritamiz.

Quyidagi teorema $\mathcal{A}_2$ operatorli matritsa muhim spektrining joylashuv o'rnini tavsiflaydi.

**4-teorema.** *$\mathcal{A}_2$ operatorli matritsaning muhim spektri $\Sigma_1^{(+)} \cup \Sigma_1^{(-)}$ to'plam bilan ustma-ust tushadi, ya'ni $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2) = \Sigma_1^{(+)} \cup \Sigma_1^{(-)}$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan tashqari, $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2)$ to'plam ko'pi bilan oltita kesmalarning birlashmasidan iborat bo'ladi.*

$\mathcal{A}_2$ operatorli matritsa $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2)$ muhim spektrining quyidagi ikkita

$$\sigma_{\mathrm{two}}(\mathcal{A}_2) := \sigma_1^{(+)} \cup \sigma_1^{(-)} \quad \text{va} \quad \sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_2) := [-\varepsilon, -\varepsilon + 2M] \cup [\varepsilon, \varepsilon + 2M]$$

qism to'plamlarini kiritamiz.

**1-ta'rif.** *$\sigma_{\mathrm{two}}(\mathcal{A}_2)$ va $\sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_2)$ to'plamlarga mos ravishda $\mathcal{A}_2$ operatorli matritsa muhim spektrining ikki zarrachali va uch zarrachali tarmoqlari deyiladi.*

$\sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_2)$ to'plamning aniqlanishiga ko'ra uning quyi chegarasi uchun $\min(\sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_2)) = -\varepsilon$ tenglik o'rinlidir.

$\mathbb{C} \setminus \Sigma^{(\mathrm{s})}$ sohada regulyar bo'lgan quyidagi

$$\Delta_2^{(\mathrm{s})}(z) := \mathrm{s}\varepsilon - z - \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{\Delta_1^{(-\mathrm{s})}(z - w(t))}$$

funksiyani aniqlaymiz.

$\Delta_2(z) := \Delta_2^{(+)}(z)\Delta_2^{(-)}(z)$ kabi belgilash kiritamiz. Hosil bo‘lgan $\Delta_2(\cdot)$ funksiya $\mathbb{C}\backslash(\Sigma^{(+)} \cup \Sigma^{(-)})$ sohada regulyar funksiya bo‘ladi.

Quyidagi teoremada $\mathcal{A}_2$ operatorli matritsaning xos qiymatlari va $\Delta_2(\cdot)$ funksiyaning nollari o‘rtasidagi bog‘liqlik o‘rnatilgan hamda $\mathcal{A}_2$ operatorli matritsaning xos qiymatlari soni aniqlangan.

**5-teorema.** *Quyidagi tasdiqlar o‘rinli:*

a) $z \in \mathbb{C}\backslash\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_2)$ *soni* $\mathcal{A}_2$ *operatorli matritsaning xos qiymati bo‘lishi uchun* $\Delta_2(z) = 0$ *bo‘lishi zarur va yetarli.*

b) $\mathcal{A}_2$ *operatorli matritsa muhim spektrdan tashqarida karraligi bilan hisobga olganda ko‘pi bilan sakkizta xos qiymatlarga ega.*

**2-eslatma.** *Agar shunday* $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\left(\Sigma_1^{(+)} \cup \Sigma_1^{(-)}\right)$ *topilib,* $\Delta_2^{(+)}(z_0) = 0$ *va* $\Delta_2^{(-)}(z_0) = 0$ *bo‘lsa, u holda* $z_0$ *soni* $\Delta_2(\cdot)$ *funksiyaning ikki karrali noli bo‘ladi. Bundan esa* $z_0$ *soni* $\mathcal{A}_2$ *operatorli matritsaning ikki karrali xos qiymati ekanligi kelib chiqadi. Demak, agar* $\mathcal{A}_2$ *operatorli matritsa muhim spektrdan tashqarida karrali xos qiymatga ega bo‘lsa, u ikki karrali xos qiymat bo‘ladi.*

Quyidagi

$$\sigma_2^{(\mathrm{s})} := \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}_2^{(-\mathrm{s})})\} \cup \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma_1^{(\mathrm{s})}\},$$

$$\Sigma_2^{(\mathrm{s})} := \sigma_2^{(\mathrm{s})} \cup [\mathrm{s}\varepsilon, \mathrm{s}\varepsilon + 3M]$$

belgilashlarni kiritamiz.

Quyidagi teorema $\mathcal{A}_3$ operatorli matritsa muhim spektrining joylashuv o‘rnini tavsiflaydi.

**6-teorema.** $\mathcal{A}_3$ *operatorli matritsaning muhim spektri* $\Sigma_2^{(+)} \cup \Sigma_2^{(-)}$ *to‘plam bilan ustma-ust tushadi, ya’ni* $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_3) = \Sigma_2^{(+)} \cup \Sigma_2^{(-)}$. *Bundan tashqari,* $\sigma_{\text{ess}}(\mathcal{A}_3)$ *to‘plam ko‘pi bilan o‘n to‘rtta kesmalarning birlashmasidan iborat bo‘ladi.*

$\mathcal{A}_3$ operatorli matritsa muhim spektrining quyidagi

$$\sigma_{\text{two}}(\mathcal{A}_3) := \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}_2^{(-\mathrm{s})})\} \cup \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma_{\text{disc}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})\};$$

$$\sigma_{\text{three}}(\mathcal{A}_3) := \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma_1^{(-\mathrm{s})}\} \cup \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma_1^{(\mathrm{s})}\};$$

$$\sigma_{\text{four}}(\mathcal{A}_3) := [-\varepsilon, -\varepsilon + 3M] \cup [\varepsilon, \varepsilon + 3M]$$

qism to‘plamlarini kiritamiz.

**2-ta’rif.** $\sigma_{\text{two}}(\mathcal{A}_3)$, $\sigma_{\text{three}}(\mathcal{A}_3)$ *va* $\sigma_{\text{four}}(\mathcal{A}_3)$ *to‘plamlar mos ravishda* $\mathcal{A}_3$ *operatorli matritsa muhim spektrining ikki zarrachali, uch zarrachali va to‘rt zarrachali tarmoqlari deyiladi.*

$\sigma_{\text{four}}(\mathcal{A}_3)$ to‘plamning aniqlanishiga ko‘ra uning quyi chegarasi uchun $\min(\sigma_{\text{four}}(\mathcal{A}_3)) = -\varepsilon$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

$\mathbb{C}\backslash\Sigma_2^{(\mathrm{s})}$ sohada regulyar bo‘lgan quyidagi funksiyani aniqlaymiz:

$$\Delta^{(s)}(z) := s\varepsilon - z - \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^d} \frac{v^2(t)dt}{\Delta_2^{(-s)}(z - w(t))}.$$

$\Delta(z) := \Delta^{(+)}(z)\Delta^{(-)}(z)$ tenglik yordamida aniqlanuvchi va $\mathbb{C}\backslash(\Sigma_2^{(+)} \cup \Sigma_2^{(-)})$ sohada regulyar bo‘lgan $\Delta(\cdot)$ funksiyani qaraymiz.

**7-teorema.** *Quyidagi tasdiqlar o‘rinli:*

a) $z \in \mathbb{C}\backslash\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3)$ *soni* $\mathcal{A}_3$ *operatorli matritsaning xos qiymati bo‘lishi uchun* $\Delta(z) = 0$ *bo‘lishi zarur va yetarli.*

b) $\mathcal{A}_3$ *operatorli matritsa muhim spektrdan tashqarida yotuvchi karraligi bilan hisobga olganda ko‘pi bilan o‘n oltita xos qiymatlarga ega.*

**3-eslatma.** *Agar shunday* $z_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3^{(s)})$ *soni topilib,* $\Delta^{(-)}(z_0) = 0$ *va* $\Delta^{(+)}(z_0) = 0$ *bo‘lsa, u holda* $z_0$ *soni* $\Delta(\cdot)$ *funksiyaning ikki karrali noli bo‘ladi. Bundan esa* $z_0$ *soni* $\mathcal{A}_3$ *operatorli matritsaning ikki karrali xos qiymati ekanligi kelib chiqadi. Demak, agar* $\mathcal{A}_3$ *operatorli matritsa muhim spektrdan tashqarida karrali xos qiymatga ega bo‘lsa, u ikki karrali xos qiymat bo‘ladi*.

Endi $\mathcal{A}_3^{(s)}$ operatorli matritsaning blok elementlari orasida spektral munosabatlarini bayon qilamiz. Quyidagi yordamchi operatorlarni qaraymiz:

$$\tilde{\mathcal{A}}_{2,2}^{(s)} : \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3,\ \tilde{\mathcal{A}}_{2,2}^{(s)} = \begin{pmatrix} \widehat{A}_{22}^{(s)} & \widehat{A}_{23} \\ \widehat{A}_{23}^{*} & \widehat{A}_{33}^{(s)} \end{pmatrix};$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_{2,3}^{(s)} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3,\ \tilde{\mathcal{A}}_{2,3}^{(s)} = \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11}^{(s)} & \widehat{A}_{12} & 0 \\ \widehat{A}_{12}^{*} & \widehat{A}_{22}^{(s)} & \widehat{A}_{23} \\ 0 & \widehat{A}_{23}^{*} & \widehat{A}_{33}^{(s)} \end{pmatrix}.$$

**4-tasdiq.** $\tilde{\mathcal{A}}_{2,2}^{(s)}$ *operatorli matritsa sof muhim spektrga ega va*

$$\sigma\left(\tilde{\mathcal{A}}_{2,2}^{(s)}\right) = [-s\varepsilon, -s\varepsilon + 3M] \cup \bigcup_{k_1,k_2 \in \mathbb{T}^d} \left\{ w(k_1) + w(k_2) + \sigma_{\mathrm{disc}}\left(\mathcal{A}_1^{(s)}\right) \right\}.$$

*Bundan tashqari,* $\sigma\left(\tilde{\mathcal{A}}_{2,2}^{(s)}\right)$ *to‘plam ko‘pi bilan uchta kesmalar birlashmasidan iborat bo‘ladi.*

**5-tasdiq.** $\tilde{\mathcal{A}}_{2,3}^{(s)}$*operatorli matritsa sof muhim spektrga ega va*

$$\sigma\left(\tilde{\mathcal{A}}_{2,3}^{(s)}\right) = \sigma\left(\tilde{\mathcal{A}}_{2,2}^{(s)}\right) \cup \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^d} \left\{ w(k_1) + \sigma_{\mathrm{disc}}\left(\mathcal{A}_2^{(s)}\right) \right\}.$$

*Bundan tashqari,* $\sigma\left(\tilde{\mathcal{A}}_{2,3}^{(s)}\right)$ *to‘plam ko‘pi bilan yettita kesmalar birlashmasidan iborat bo‘ladi.*

Ta’kidlash joizki, ko‘p hollarda $\tilde{\mathcal{A}}_{2,3}^{(s)}$ operatorga $\mathcal{A}_3^{(s)}$ operatorli matritsaga mos kanal operatori deyiladi va $\sigma_{\mathrm{ess}}\left(\mathcal{A}_3^{(s)}\right) = \sigma\left(\tilde{\mathcal{A}}_{2,3}^{(s)}\right)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Yuqorida keltirilgan fikr-mulohazalardan quyidagi natijaga ega bo‘lamiz.

**4-lemma.** *Quyidagi spektral munosabatlar o‘rinli:*

$$\sigma(A_{33}) \subset \sigma\left(\tilde{\mathcal{A}}_{2,2}^{(s)}\right) \subset \sigma\left(\tilde{\mathcal{A}}_{2,3}^{(s)}\right) = \sigma_{\mathrm{ess}}\left(\mathcal{A}_3^{(s)}\right).$$

## XULOSA

Ushbu dissertatsiya ishida to‘rtinchi tartibli uch diagonalli operatorli matritsalar sinfi chegaralari uchun ikki turdagi baholashlar olingan. Shu bilan birgalikda Fok fazosining nol zarrachali, bir zarrachali, ikki zarrachali va uch zarrachali qism fazolari to‘g‘ri yig‘indisida aniqlangan $\mathcal{A}$ to‘rtinchi tartibli operatorli matritsaning muhim va diskret spektrlari tadqiq qilingan. Bunda $\mathcal{A}$ operatorli matritsa panjaradagi soni saqlanmaydigan va to‘rttadan oshmaydigan zarrachalar sistemasi Hamiltonianiga mos keladi.

Dissertatsiya ishida quyidagi asosiy natijalar olingan:

1) uch diagonalli $\mathcal{A}$ operatorli martitsaning to‘rtinchi darajali sonli tasviri $W^4(\mathcal{A})$ uchun alternativ formula topilgan. $\sigma(\mathcal{A})$ to‘plam uchun $\sigma(\mathcal{A}) \subset \overline{W^4(\mathcal{A})}$ spektral munosabat xossasidan foydalanib, $\mathcal{A}$ operatorli matritsaning quyi va yuqori chegaralari uchun baholashlar olingan;

2) to‘rtinchi tartibli operatorli matritsalar sinfi uchun Gershgorin teoremasining analogi isbotlangan va operatorning spektri uchun to‘rtinchi darajali sonli tasvir yordamida olingan baholashlardan farqli baholashlar topilgan;

3) panjaradagi soni saqlanmaydigan va to‘rttadan oshmaydigan zarrachalar sistemasiga mos $\mathcal{A}$ to‘rtinchi tartibli operatorli matritsa qaralgan. $\mathcal{A}$ operatorli matritsaning spektral xossalarini o‘rganish masalasi ikkinchi tartibli $\mathcal{A}_1$ va uchinchi tartibli $\mathcal{A}_2$ operatorli matritsalarning spektral xossalarini o‘rganish masalasiga keltirilgan. $\mathcal{A}$ operatorli matritsa o‘zining muhim spektridan tashqarida yotuvchi ko‘pi bilan o‘n oltita xos qiymatlarga ega bo‘lishi isbotlangan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.02.01**
**ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ**
**САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

**БУХАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**ЛАТИПОВ ХАКИМБОЙ МИРЗО УГЛИ**

# СПЕКТРАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ КЛАССА ОПЕРАТОРНЫХ МАТРИЦ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

**01.01.01 – Математический анализ**

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

**Самарканд-2024**

**Тема диссертации доктора философии (PhD) зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии за № B2023.2.PhD/FM862**

Диссертация выполнена в Бухарском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

| | |
|---|---|
| **Научный руководитель:** | **Расулов Тулкин Хусенович**<br>доктор физико-математических наук (DSc), профессор |
| **Официальные оппоненты:** | **Муминов Мухиддин Эшкобилович**<br>доктор физико-математических наук (DSc), доцент |
| | **Кучаров Рамзиддин Рузимурадович**<br>доктор философии (PhD) физико-математических наук, доцент |
| **Ведущая организация:** | **Ургенчский государственный университет** |

Защита диссертации состоится «____» ____________ 2024 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (998 66) 231-06-32, факс: (998 66) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за №____). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (998 66) 231-06-32, факс: (998 66) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «____» ____________ 2024 года.
(протокол рассылки №____ от «____» ____________ 2024 года).

**А.С. Солеев**
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

**А.М. Халхужаев**
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

**С. Н. Лакаев**
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор, академик.

## ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

**Актуальность и необходимость темы диссертации.** Многие исследования, проводимые в мире, посвящены изучению спектральных свойств блочно операторных матриц, элементы которых состоят из линейных операторов, действующих в банаховом или гильбертовом пространствах. Проблемы, связанные со существенными и дискретными спектрами блочно операторных матриц и гамильтонианы, являющихся одним из их важных классов, соответствующие системе несохраняющимся ограниченным числом частиц на решетке, относятся к числу актуальных задач физики твердого тела, квантовой теории поля, статистической физики, магнитной гидродинамики, квантовой механики и многих других областей. Поэтому важно развивать исследования по блочно операторных матриц, в частности, операторных матриц, соответвующих системы частиц на решетке, число которых не сохраняется и не превышает четырех.

В мире проводится множество научных исследований по изучению местоположению существенного спектра и числа собственных значений операторных матриц. В связи с этим особое внимание уделено анализу структуры числовой области значений четвертой степени операторной матрицы четвертого порядка, и его применение для определения положения спектра операторной матрицы четвертого порядка, определению структуры существенного спектра операторной матрицы четвертого порядка и нахождению условия конечности или бесконечности числа собственных значений.

В нашей стране уделяется внимание актуальным направлениям фундаментальной науки, имеющим научное и практическое применение, в частности, ученые нашей страны уделяют особое внимание анализу спектров операторных матриц четвертого порядка, особенно исследованию свойств гамильтонианов, соответствующих системам частиц, число которых в решетке не сохраняется и не превышает четырех. Достигнуты значительные результаты в определении существенного спектра операторных матриц и нахождении максимального числа собственных значений. В качестве основных задач и направления деятельности определено «проведение научных исследований на уровне международных стандартов в приоритетных областях математики, физики и прикладной математики»[2]. В связи с этим большое научное значение имеет развитие спектральной теории операторных матриц, определение расположение спектра и описание структуры существенного спектра операторных матриц четвертого порядка, нахождение условий, при которых число собственных значений становится конечным или бесконечным, и в то же время определить число максимальных собственных значений, лежащих вне существенного спектра.

---

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

Тема и объект исследования настоящей диссертации находится в русле проблем, которые входят в тематику задач, отмеченных в Указ Президента Республики Узбекистан УП-60 от 28 января 2022 года «О стратегии развития нового Узбекистана на 2022-2026 годы», в постановлениях ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан» и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования в области математики и развития научных исследований» и также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

**Соответствие исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологии в республике.** Данное исследование выполнено в рамках IV приоритетного направления развития науки и технологий республики Узбекистан: «Математика, механика и информатика».

**Степень изученности проблемы.** Исследования по спектральной теории операторных матриц в обрезанных подпространствах Фоковского пространства были проведены учеными таких как Г.Шпон, И.М.Сигал, А.Соффер, В.Бах, Р.А.Минлос, Ю.В.Жуков, Х.Нейдхардт, С.Н.Лакаев, Т.Х.Расулов, М.Э. Муминов и других. В настоящее время вопрос исследования числа собственных значений операторных матриц является одним из глубоко изучаемых объектов теории операторных матриц. Одним из основных вопросов спектрального анализа операторных матриц третьего порядка является вопрос изучения наличия бесконечного числа собственных значений, расположенных левее его существенного спектра. Существование этого явления было впервые изучено В.Н. Ефимовым для трехчастичной системы и позднее было названо эффектом Ефимова. Строгое математическое доказательство существования этого эффекта было впервые представлено Д.Р.Яфаевым. Позднее Ю.Н.Овчинников, И.М.Сигал, Х.Тамура, А.В.Соболев и другие ученые исследовали существование эффекта Ефимова для трехчастичного непрерывного оператора Шредингера.

В физике твердого тела, а также в решеточной теории поля появляются операторы, называемые дискретными операторами Шредингера, которые являются решеточным аналогом трехчастичного оператора Шредингера в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$. Существование эффекта Ефимова для трех произвольных и трех одинаковых систем частиц, взаимодействующих друг с другом в трехмерной решетке, впервые было строго доказано С.Н.Лакаевым с математической точки зрения. В работах С.Н.Лакаева, С.Альбеверио, Ж.И.Абдуллаева и З.Э.Муминова были получены асимптотики для числа собственных значений $N(K,z)$ трехчастичного дискретного оператора Шредингера $H(K)$, лежащий левее $z$ по спектральными параметрами $K$ и $z$. В работе М.Э. Муминова было доказано, что в лакуне существенного спектра гамильтониана, соответствующих трем произвольным частицам в решетке имеется бесконечное количество собственных значений.

В приведенных выше исследованиях было изучено существование эффект Ефимова для систем ограниченным числом частиц, количество которых сохраняется. В работах С.Н.Лакаева, С.Альберио, Т.Х.Расулова было доказано, что эффект Ефимова существует и для операторных матриц третьего порядка, и была изучена асимптотическая формула для числа собственных значений. В работах Х.Нейдхардта, М.Э.Муминова и Т.Х Расулова спектр модели спин-бозон с не более чем двумя фотонами на решетки была детально изучена с использованием результатов, полученных для операторных матриц третьего порядка. В работе М.Э.Муминова и Т.Х.Расулова, было найдено условия существования бесконечного числа собственных значений (в существенном спектре,) слева от существенного спектра для этого типа операторных матриц.

В работах Т.Х.Расулова и Э.Б.Дилмуродова, было доказано, что существует двусторонний эффект Ефимова для операторных матриц второго порядка, связанный с системой частиц, число которых не сохраняется и не превышает трех.

**Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего образовательного или научно-исследовательского учреждения, где выполнена работа.** Диссертационные исследования выполнено в соответствие с планом научного исследования научного направления М.01.2017 «Спектральная теория линейных операторов» Бухарского государственного университета на 2017-2026 гг.

**Цель исследования** – получение альтернативная формула для числового области значений четвертого степени операторных матриц четвертого порядка, определить структуру существенного спектра операторных матриц четвертого порядка, соответствующей системе частиц на решетке, число которых не сохраняется и не превышает четырех, и изучить число ее собственных значений.

**Задачи исследования:**

найти альтернативная формула для числового области значений четвертого степени оператоpых матриц четвертого порядка в специальной форме;

получить аналог теоремы Гершгорина для трехдиагональных операторных матриц четвертого порядка.

исследовать существенные и дискретные спектры операторных матриц четвертого порядка с дискретными параметрами.

**Объектом исследования** выбрана операторная матрица четвертого порядка, соответствующая системе частиц на решетке, число которых не сохраняется и не превышает четырех.

**Предмет исследования** составляют спектральные свойства самосопряженной ограниченной операторной матрицы четвертого порядка в обрезанном подпространстве пространства Фока.

**Методы исследования.** В диссертационной работе использованы методы «спектральные оценки» и «определения спектра» из математического анализа, функционального анализа, спектральной теории самосопряженных операторов и методы современной математической физики.

**Научная новизна исследования заключается в следующем:**

- разработана альтернативная формула числовой области значения четвертой степени и с ее помощью получены отличные от классической теории возмущений оценки нижнего и верхнего грани спектра класса операторных матриц четвертого порядка;

- доказывается аналог классической теоремы Гершгорина для класса трехдиагональных операторных матриц четвертого порядка и с помощью этой теоремы получаются иные оценки грани класса матриц, чем полученные с помощью классической теории возмущений и числовой области значений четвертой степени;

- определены местоположения двух-, трех- и четырехчастичных ветв существенного спектра операторной матрицы четвертого порядка, найдено количество составляющих его сегментов, а также установлены спектральные соотношения между блочными элементами;

- с помощью свойств определителя Фредгольма доказывается, что операторная матрица третьего порядка имеет не более восьми собственных значений, а операторная матрица четвертого порядка — не более шестнадцати собственных значений, и показаны, что эти собственные значения имеют кратность не более чем два.

**Практические результаты исследования заключаются в следующем:** полученные выводы о спектральных свойствах операторных матриц четвертого порядка, соответствующей системе частиц на решетке, число которых не сохраняется и не превышает четырех, использованы для определения показателя качества экспериментальных исследований в области атомной физики, квантовой механики и численные расчеты.

**Достоверность результатов исследования** объясняется точным математическим анализом и доказательствами с использованием методов математического анализа, функционального анализа, современной математической физики и спектральной теории самосопряженных операторов.

**Научная и практическая значимость исследования.** Научная значимость полученных результатов в исследовании объясняется тем, что они могут быть использованы в задачах теории самосопряженных операторов, теории квантовых полей, физики твердого тела, статистической физики, в частности, в вопросах, связанных с операторных матриц четвертого порядка.

**Практическая значимость результатов диссертации** состоит в том, что по числу собственных значений операторных матриц можно определить число собственных значений моделей, в физики твердого тела и квантовой механики соответствующих системам, в которых число частиц количество не сохраняется и не превышает четырех.

**Внедрение результатов исследований.** Утверждение о том, что операторная матрица четвертого порядка с дискретным параметром может иметь не более 16 собственных значений, а также полученные оценки для нижних и верхних границ операторных матриц четвертого порядка были использованы в фундаментальном проекте № AP05131268 «Проблемы решения граничных и начально-граничных задач для нелокальных дифференциальных уравнений с частными производными» в Международном казахско-турецком университете имени Ходжи Ахмеда Ясави (справка от 24 ноября 2023 года, Международный казахско-турецкий университет имена Ходжи Ахмеда Ясави). Свойства числовой области значений четвертой степени и собственных значений операторных матриц четвертого порядка позволило исследовать методы построения собственных функций и собственных значений некоторых краевых задач для нелокального оператора Лапласа.

Из методов определения двух-, трех- и четырехчастичных ветвей операторной матрицы четвертого порядка с дискретным параметром, структура существенного спектра, а также спектральные соотношение между блочными элементами, были использованы в фундаментальном гранте Международного исламского университета Малайзии № FRGS19-039-0647 (справка от 23 октября 2023 года, Международный исламский университет Малайзии). Применение научных результатов позволило изучить приближение значений к нижней границе с помощью методов, основанных на обыкновенных дифференциальных уравнениях.

**Апробация результатов исследования.** Основные результаты диссертации обсуждались на 4 международных и 2 республиканских научно-практических конференциях, всего 6 научно-практических конференций.

**Опубликованность результатов исследования.** Всего по теме диссертации опубликовано 12 научных работ, из них 6 опубликовано в научных изданиях, рекомендованных к публикации основных научных результатов диссертаций ВАК Республики Узбекистан, в том числе 2 в зарубежных и 4 в республиканских журналах.

**Объем и структура диссертации.** Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объём диссертационного исследования составляет 94 страниц.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации называется «**Предварительные сведения**». В этой главе приведены важные понятия, утверждения и теоремы, использованные при изложении и доказательстве основных результатов диссертационной работы. Исследование также включает результаты ученых, которые анализировали операторные матрицы, действующие на обрезанном пространстве пространства Фока. В него также включены анализ научных работ и некоторых статьей по данной теме.

Вторая глава диссертационной работы называется **«Числовой область значений четвертой степени».** Из спектральной теории линейных операторов хорошо известно, что всякий линейный ограниченный оператор $\mathcal{A}$, действующий на прямой сумме четырех гильбертовых пространств $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_3, \mathcal{H}_4$, т.е. на пространстве $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4$ всегда записывается в виде операторной матрицы четвертого порядка

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где матричные элементы $A_{ij}: \mathcal{H}_j \to \mathcal{H}_i$, $i, j = 1,2,3,4$ - линейные ограниченные операторы. По определению, операторная матрица $\mathcal{A}$ является самосопряженным тогда и только тогда, когда $A_{ij}^* = A_{ji}$ $i, j = 1,2,3,4$, т.е. $\mathcal{A}^* = \mathcal{A} \Leftrightarrow A_{ij}^* = A_{ji}$, $i, j = 1,2,3,4$.

Через $S_{\mathcal{H}_i}$, $i = \overline{1,4}$ обозначим единичную сферу в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}_i$, то есть $S_{\mathcal{H}_i} := \{x \in \mathcal{H}_i : \| x \| = 1\}$, и вводим следующее множество:

$$S_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4} \coloneqq S_{\mathcal{H}_1} \times S_{\mathcal{H}_2} \times S_{\mathcal{H}_3} \times S_{\mathcal{H}_4}$$

т.е.,

$$S_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4} := \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathcal{H} : x_i \in \mathcal{H}_i, \| x_i \| = 1, i = 1,2,3,4\}.$$

Если ражложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4$ пространства $\mathcal{H}$ фиксировано, то вместо $S_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4}$ можно использовать $S^4$ или $S_{\mathcal{H}}$.

Для каждого фиксированного элемента $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in S_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4}$ рассмотрим матрицу четвертого порядка

$$\mathcal{A}_x := \begin{pmatrix} (A_{11}x_1, x_1) & (A_{12}x_2, x_1) & (A_{13}x_3, x_1) & (A_{14}x_4, x_1) \\ (A_{21}x_1, x_2) & (A_{22}x_2, x_2) & (A_{23}x_3, x_2) & (A_{24}x_4, x_2) \\ (A_{31}x_1, x_3) & (A_{32}x_2, x_3) & (A_{33}x_3, x_3) & (A_{34}x_4 x_3) \\ (A_{41}x_1, x_4) & (A_{42}x_2, x_4) & (A_{43}x_3, x_4) & (A_{44}x_4, x_4) \end{pmatrix}.$$

Множество

$$W_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4}(\mathcal{A}) := \bigcup_{x \in S^4} \sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_x),$$

называется числовой область значений четвертой степени операторной матрицы $\mathcal{A}$, соответствующей форме (1).

Относительно разложения пространства $\mathcal{H}$ также можно использовать обозначение $W^4(\mathcal{A}) = W_{\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4}(\mathcal{A})$.

Через $I$ будем обозначать единичный оператор в соответствующем пространстве.

Из курса линейной алгебры хорошо известно, что для каждого элемента $x \in S^4$ выполняется равенство

$$\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_x) = \{\lambda \in \mathbb{C}\colon \det(\mathcal{A}_x - \lambda I) = 0\}. \qquad (2)$$

Следовательно, множество $W^4(\mathcal{A})$ можно определить с помощью уравнения

$$W^4(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} \colon \exists x \in S^4, \det(\mathcal{A}_x - \lambda I) = 0\}.$$

Как следует из приведенных выше рассуждений, точечный спектр матрицы четвертого порядка, то есть множество ее собственных значений, является важным при исследовании числовой область значений четвертой степени операторной матриц $\mathcal{A}$.

Для формулировки следующих результатов введем следующие обозначения:

1) $W(A)$ – числовая область значений линейного оператора $A$;

2) $W^2(A)$ – квадратичная числовая область значений операторной матрицы $A$ второго порядка;

3) $W^3(A)$ – кубическая числовая область значений операторной матрицы $A$ третьего порядка.

Для блочной операторной матрицы $\mathcal{A}$, заданной равенством (1), требуем следующие условия:

1) Если $|i - j| > 1$, то $A_{ij} = 0$;

2) $A_{ji} = A_{ij}^*$ для всех $i < j$, $i, j = \overline{1,4}$

Тогда операторная матрица $\mathcal{A}$ представляет трехдиагональную ограниченную самосопряженную матрицу

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{12}^* & A_{22} & A_{23} & 0 \\ 0 & A_{23}^* & A_{33} & A_{34} \\ 0 & 0 & A_{34}^* & A_{44} \end{pmatrix}. \qquad (2)$$

Рассматриваем вопрос о выведение альтернативной формулы для числовой область значений четвертого степени $W^4(\mathcal{A})$.

Напомним что поскольку $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$, то $W(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}$. Благодаря этому получаем соотношение $W(\mathcal{A}) \subset [-\| \mathcal{A} \|; \| \mathcal{A} \|]$, которая более точно показывает места, где расположеиа числовая область значений ограниченной операторной матрицы $\mathcal{A}$. Одним из основных свойств числовой обдасти значений четвертой степени является то, что оно лежит в числовом области значений: $W^4(\mathcal{A}) \subset W(\mathcal{A})$. Используя свойство «спектральных соотношений» для блочных операторных матриц, можно найти соотношение $\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}) \subset W^4(\mathcal{A})$ для точечного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}$ и соотношение $\sigma(\mathcal{A}) \subset \overline{W^4(\mathcal{A})}$ для ее спектра.

И поэтому

$$\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}) \subset W^4(\mathcal{A}) \subset W(\mathcal{A}) \subset [-\| \mathcal{A} \|; \| \mathcal{A} \|];$$

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \overline{W^4(\mathcal{A})} \subset \overline{W(\mathcal{A})} \subset [-\| \mathcal{A} \|; \| \mathcal{A} \|].$$

В некоторых важных частных случаях мы исследуем числовой область значений четвертой степени $W^4(\mathcal{A})$ блочно операторной матрицы $\mathcal{A}$.

**Утверждение 1.** *Если* $A_{23} = 0$ *в блочно операторной матрицы* $\mathcal{A}$, *определенной равенством* (2), *то выполняется равенство* $W^4(\mathcal{A}) = W^2(\mathcal{A}_1) \cup W^2(\mathcal{A}_2)$, *где операторные матрицы*

$$\mathcal{A}_1: \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2, \quad \mathcal{A}_2: \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4 \to \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4$$

*определяются как*

$$\mathcal{A}_1 := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{12}^* & A_{22} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 := \begin{pmatrix} A_{33} & A_{34} \\ A_{34}^* & A_{44} \end{pmatrix}.$$

**Утверждение 2.** *Если* $A_{12} = 0$ *в операторной матрицы* $\mathcal{A}$, *определенной равенством* (2), *то выполняется равенство* $W^4(\mathcal{A}) = W(A_{11}) \cup W^3(\mathcal{A}_3)$, *где операторная матрица*

$$\mathcal{A}_3: \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4 \to \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \oplus \mathcal{H}_4$$

*определяется как*

$$\mathcal{A}_3 := \begin{pmatrix} A_{22} & A_{23} & 0 \\ A_{23}^* & A_{33} & A_{34} \\ 0 & A_{34}^* & A_{44} \end{pmatrix}.$$

**Утверждение 3.** *Если* $A_{34} = 0$ *в операторной матрицы* $\mathcal{A}$, *определённой равенством* (2), *то выполняется равенство* $W^4(\mathcal{A}) = W^3(\mathcal{A}_4) \cup W(A_{44})$, *где операторная матирица*

$$\mathcal{A}_4: \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \to \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3$$

*определяется как*

$$\mathcal{A}_4 := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12}^* & A_{22} & A_{23} \\ 0 & A_{23}^* & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Введем следующие обозиачения:

$$P(f) := |(A_{12}f_2, f_1)|^2 + |(A_{23}f_3, f_2)|^2 + |(A_{34}f_4, f_3)|^2;$$

$$Q(f) := |(A_{12}f_2, f_1)|^2 \cdot |(A_{34}f_4, f_3)|^2.$$

$$E_1(f) := -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{P(f) + \sqrt{(P(f))^2 - 4Q(f)}};$$

$$E_2(f) := -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{P(f) - \sqrt{(P(f))^2 - 4Q(f)}};$$

$$E_3(f) := \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{P(f) - \sqrt{(P(f))^2 - 4Q(f)}};$$

$$E_4(f) := \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{P(f) + \sqrt{(P(f))^2 - 4Q(f)}}.$$

**Теорема 1.** *а*) *Будем предполагать, что* $A_{ii} = 0, i = 1,2,3,4$ *в блочно операторной матрицы* $\mathcal{A}$, *определяемой равенством* (2). *Тогда для числовой области значений четвертой степени* $W^4(\mathcal{A})$ *имеет место равенство*

$$W^4(\mathcal{A}) = \bigcup_{f \in S^4} \bigcup_{k=1}^{4} \{E_k(f)\}.$$

*б*) *Для нижних и верхних границ блочно-операторной матрицы* $\mathcal{A}$, *имеет* *место следующие оценки*

$$\min\sigma(\mathcal{A}) \geq \inf W^4(\mathcal{A}) = \inf \bigcup_{f\in S^4} \{E_1(f)\};$$

$$\max\sigma(\mathcal{A}) \leq \sup W^4(\mathcal{A}) = \sup \bigcup_{f\in S^4} \{E_4(f)\}.$$

Пусть для элементов операторной матрицы вида (2), действующего в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ имеем $A_{ij} \in L(\mathcal{H}_j, \mathcal{H}_i)$, $|i-j| \leq 1$ и $A_{ii}^* = A_{ii}, i, j = \overline{1,4}$. Введем следующие множества $\mathcal{G}_i$, $i = \overline{1,4}$:

$$\mathcal{G}_1 := \sigma(A_{11}) \cup \{\lambda \in \rho(A_{11}) : \| (A_{11} - \lambda)^{-1} \|^{-1} \leq \| A_{12} \|\};$$

$$\mathcal{G}_2 := \sigma(A_{22}) \cup \{\lambda \in \rho(A_{22}) : \| (A_{22} - \lambda)^{-1} \|^{-1} \leq \| A_{12} \| + \| A_{23} \|\};$$

$$\mathcal{G}_3 := \sigma(A_{33}) \cup \{\lambda \in \rho(A_{33}) : \| (A_{33} - \lambda)^{-1} \|^{-1} \leq \| A_{34} \| + \| A_{23} \|\};$$

$$\mathcal{G}_4 := \sigma(A_{44}) \cup \{\lambda \in \rho(A_{44}) : \| (A_{44} - \lambda)^{-1} \|^{-1} \leq \| A_{34} \|\}.$$

**Теорема 2.** *Для спектра операторной матрицы $\mathcal{A}$, определенный по формуле* (2)*, справедливо соотношение*

$$\sigma(\mathcal{A}) \subset \bigcup_{i=1}^{4} \mathcal{G}_i.$$

*Более того, для его границ имеют места оценки*

$$\min\sigma(\mathcal{A}) \geq -\| A_{23} \| - \max\{\| A_{12} \|, \| A_{34} \|\};$$

$$\max\sigma(\mathcal{A}) \leq \| A_{23} \| + \max\{\| A_{12} \|, \| A_{34} \|\}.$$

Чтобы показать эффективность Теоремы 1 и Теоремы 2, для числа $a \geq 0$ рассмотрим матрицу четвертого порядка

$$M := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & a & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

С помощью простых вычислений получаем, что

$$W^4(M) = \sigma_{\mathrm{p}}(M) = \{E_1, E_2, E_3, E_4\},$$

где

$$E_1 := -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + 2 + \sqrt{a^4 + 4a^2}}, \qquad E_2 := -\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + 2 - \sqrt{a^4 + 4a^2}};$$

$$E_3 := \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + 2 - \sqrt{a^4 + 4a^2}}, \qquad E_4 := \frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{a^2 + 2 + \sqrt{a^4 + 4a^2}}.$$

По определению, в то же время, согласно Теореме 1 имеем

$$\min\sigma(M) = \min W^4(M) = E_1, \max\sigma(M) = \max W^4(M) = E_4.$$

Используя теорему 2, можно найти оценку для нижней и верхней грани

$$\min\sigma(M) \geq -1 - a; \ \max\sigma(M) \leq 1 + a.$$

Единственное значение параметра $a$, при котором обе границы, сформированные с помощью теоремы 1 и теоремы 2, совпадают-это $a = 0$. Для всех $a \geq 0$ граница, найденная с помощью числовой области значений четвертой степени, лучше, чем граница, найденная с помощью теоремы 2 (аналог теоремы Гершгорина). Согласно теореме 1, мы приходим к выводу, что оценки

$$\min\sigma(\mathcal{A}) \geq -\sqrt{\| A_{12} \|^2 + \| A_{23} \|^2 + \| A_{34} \|^2};$$
$$\max\sigma(\mathcal{A}) \leq \sqrt{\| A_{12} \|^2 + \| A_{23} \|^2 + \| A_{34} \|^2}$$
для нижней и верхней границ $\mathcal{A}$ являются верными.

В третьей главе этой диссертации, называемой «**Существенные и дискретные спектры операторной матрицы четвертого порядка**», рассматривается операторная матрица четвертого порядка $\mathcal{A}$, соответствующая гамильтониану системы частиц на решетке, число которых не сохраняется и не превышает четырех. Этот гамильтониан связано с моделью спин-бозон с не более чем тремя фотонами в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{\mathrm{d}}$, т.е. в бозонное пространство Фока, построенными с помощью гильбертова пространства $L_2\left(\mathbb{R}^{\mathrm{d}}, \mathbb{C}^2\right)$. Пусть $\mathrm{d} \in \mathbb{N}$ - натуральное число, а $\mathbb{T}^{\mathrm{d}} := (-\pi; \pi]^{\mathrm{d}}$ - d-мерная тор. При $m = 1,2,3$ через $L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^m)$ обозначим гильбертово пространство квадратично-интегрируемых (комплекснозначных) функций, определенных на $(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^m$, и вводим следующие гильбертовы пространства:
$$\mathcal{F}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})) := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) \oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2) \oplus \dots;$$
$$\mathcal{F}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})) := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}});$$
$$\mathcal{F}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})) := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) \oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2);$$
$$\mathcal{F}^{(3)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})) := \mathbb{C} \oplus L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}) \oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2) \oplus L_2((\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^3);$$
$$\mathcal{H}^{(m)} := \mathbb{C}^2 \otimes \mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})), \quad m = 1,2,3.$$

Гильбертово пространство $\mathcal{F}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ называется пространством Фока, построенное по пространству $L_2\left(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}\right)$, и гильбертово пространство $\mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$ называется $(m+1)$-частичное обрезанное подпространство пространства Фока.

Согласно определению, произвольный элемент $F$ гильбертова пространства $\mathcal{H}^{(3)}$ имеет вид $F = \{f_0^{(\mathrm{s})}, f_1^{(\mathrm{s})}, f_2^{(\mathrm{s})}, f_3^{(\mathrm{s})}, \mathrm{s} = \pm\} \in \mathcal{H}^{(3)}$, а его норма определяется формулой
$$\| F \|^2 = \sum_{\mathrm{s}=\pm} \left( |f_0^{(\mathrm{s})}|^2 + \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} |f_1^{(\mathrm{s})}(k_1)|^2 dk_1 + \int_{(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^2} |f_2^{(\mathrm{s})}(k_1, k_2)|^2 dk_1 dk_2 \right.$$
$$\left. + \int_{(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})^3} \left| f_3^{(\mathrm{s})}(k_1, k_2, k_3) \right|^2 dk_1 dk_2 dk_3 \right).$$

В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(3)}$ мы рассматриваем следующую трехдиагональную операторную матрицу
$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} \mathrm{A}_{00} & \mathrm{A}_{01} & 0 & 0 \\ \mathrm{A}_{01}^* & \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12} & 0 \\ 0 & \mathrm{A}_{12}^* & \mathrm{A}_{22} & \mathrm{A}_{23} \\ 0 & 0 & \mathrm{A}_{23}^* & \mathrm{A}_{33} \end{pmatrix},$$
с матричными элементами
$$\mathrm{A}_{00} f_0^{(\mathrm{s})} = \mathrm{s}\varepsilon f_0^{(\mathrm{s})}, \quad \mathrm{A}_{01} f_1^{(\mathrm{s})} = \alpha \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} v(t) f_1^{(-\mathrm{s})}(t) dt,$$

$$(\mathrm{A}_{11}f_1^{(\mathrm{s})})(k_1)=(\mathrm{s}\varepsilon+w(k_1))f_1^{(\mathrm{s})}(k_1),(\mathrm{A}_{12}f_2^{(\mathrm{s})})(k_1)=\alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}v(t)f_2^{(-\mathrm{s})}(k_1,t)dt,$$

$$(\mathrm{A}_{22}f_2^{(\mathrm{s})})(k_1,k_2)=(\mathrm{s}\varepsilon+w(k_1)+w(k_2))f_2^{(\mathrm{s})}(k_1,k_2),$$

$$(\mathrm{A}_{23}f_3^{(\mathrm{s})})(k_1,k_2)=\alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}v(t)f_3^{(-\mathrm{s})}(k_1,k_2,t)dt,$$

$$\left(\mathrm{A}_{33}f_3^{(\mathrm{s})}\right)(k_1,k_2,k_3)=\left(\mathrm{s}\varepsilon+w(k_1)+w(k_2)+w(k_3)\right)f_3^{(\mathrm{s})}(k_1,k_2,k_3).$$

Здесь $\left\{f_0^{(\mathrm{s})},f_1^{(\mathrm{s})},f_2^{(\mathrm{s})},f_3^{(\mathrm{s})},\mathrm{s}=\pm\right\}\in\mathcal{H}^{(3)}$; $\mathrm{A}_{ij}^*$ - сопраженный оператор к $\mathrm{A}_{ij}$, $i<j$; функции $v(\cdot)$, $w(\cdot)$ являются вещественнозначными и непрерывными на $\mathbb{T}^{\mathrm{d}}$, причем $\min\limits_{k\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}w(k)=0$; $\alpha>0$- «параметр взаимодействия». Операторная матрица $\mathcal{A}$ является ограниченной и самосопряженной в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(3)}$.

Ниже с помощью оператора перестановки мы сводим задачу изучения спектра операторной матрицы $\mathcal{A}$ к задаче изучения спектра операторной матрицы $\mathcal{A}^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s}=\pm$, которая имеет относительно более простой вид.

При $m=1{,}2$ рассмотрим следующие операторные матрицы $(m+1)$-го порядка, действующие в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(m)}$:

$$\mathcal{A}_1:=\begin{pmatrix}\mathrm{A}_{00} & \mathrm{A}_{01}\\ \mathrm{A}_{01}^* & \mathrm{A}_{11}\end{pmatrix},\mathcal{A}_2:=\begin{pmatrix}\mathrm{A}_{00} & \mathrm{A}_{01} & 0\\ \mathrm{A}_{01}^* & \mathrm{A}_{11} & \mathrm{A}_{12}\\ 0 & \mathrm{A}_{12}^* & \mathrm{A}_{22}\end{pmatrix}.$$

Отметим, что операторная матрица $\mathcal{A}_m$, $m=1{,}2$, является линейной, ограниченной и самосопряженной в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^{(m)}$.

Для удобства в дольнейших исследований рассмотрим еще три ограниченных и самосопряженных операторов $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$, $m=1{,}2{,}3$, $\mathrm{s}=\pm$, действующих в $\mathcal{F}^{(m)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}}))$, в виде операторных матриц $(m+1)$-го порядка с дискретным пораметром:

$$\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}:=\begin{pmatrix}\widehat{\mathrm{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathrm{A}}_{01}\\ \widehat{\mathrm{A}}_{01}^* & \widehat{\mathrm{A}}_{11}^{(\mathrm{s})}\end{pmatrix},\qquad \mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})}:=\begin{pmatrix}\widehat{\mathrm{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathrm{A}}_{01} & 0\\ \widehat{\mathrm{A}}_{01}^* & \widehat{\mathrm{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathrm{A}}_{12}\\ 0 & \widehat{\mathrm{A}}_{12}^* & \widehat{\mathrm{A}}_{22}^{(\mathrm{s})}\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})}:=\begin{pmatrix}\widehat{\mathrm{A}}_{00}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathrm{A}}_{01} & 0 & 0\\ \widehat{\mathrm{A}}_{01}^* & \widehat{\mathrm{A}}_{11}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathrm{A}}_{12} & 0\\ 0 & \widehat{\mathrm{A}}_{12}^* & \widehat{\mathrm{A}}_{22}^{(\mathrm{s})} & \widehat{\mathrm{A}}_{23}\\ 0 & 0 & \widehat{\mathrm{A}}_{23}^* & \widehat{\mathrm{A}}_{33}^{(\mathrm{s})}\end{pmatrix},$$

Здесь матричные элементы опредены следующим образом:

$$\widehat{\mathrm{A}}_{00}^{(\mathrm{s})}f_0=\mathrm{s}\varepsilon f_0,\quad \widehat{\mathrm{A}}_{01}f_1=\alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}v(t)f_1(t)dt,$$

$$(\widehat{\mathrm{A}}_{11}^{(\mathrm{s})}f_1)(k_1)=(-\mathrm{s}\varepsilon+w(k_1))f_1(k_1),\quad (\widehat{\mathrm{A}}_{12}f_2)(k_1)=\alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}v(t)f_2(k_1,t)dt,$$

$$(\widehat{\mathrm{A}}_{22}^{(\mathrm{s})}f_2)(k_1,k_2)=(\mathrm{s}\varepsilon+w(k_1)+w(k_2))f_2(k_1,k_2),$$

$$(\widehat{\mathrm{A}}_{23}f_3)(k_1,k_2)=\alpha\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}v(t)f_3(k_1,k_2,t)dt,$$
$$(\widehat{\mathrm{A}}_{33}^{(\mathrm{s})}f_3)(k_1,k_2,k_3)=(-\mathrm{s}\varepsilon+w(k_1)+w(k_2)+w(k_3))f_3(k_1,k_2,k_3),$$
$$(f_0,f_1)\in\mathcal{F}^{(1)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})),\qquad(f_0,f_1,f_2)\in\mathcal{F}^{(2)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})),$$
$$(f_0,f_1,f_2,f_3)\in\mathcal{F}^{(3)}(L_2(\mathbb{T}^{\mathrm{d}})).$$

Далее, для сокращения записи всюду предполагается, что $\mathcal{A}_3:=\mathcal{A}$.

Для $m=1,2,3$ установим связь между спектрами операторных матриц $\mathcal{A}_m$ и $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$, $\mathrm{s}=\pm$.

**Теорема 3.** *Пусть* $m=1,2,3$. *Между спектрами операторных матриц* $\mathcal{A}_m$ *и* $\mathcal{A}_m^{(s)}$, $s=\pm$, *справедливо равенство* $\sigma(\mathcal{A}_m)=\sigma\left(\mathcal{A}_m^{(+)}\right)\cup\sigma\left(\mathcal{A}_m^{(-)}\right)$. *Кроме того, для их существенного и точечного спектров справедливы равенства*

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m)=\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m^{(+)})\cup\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m^{(-)}),$$
$$\sigma_{\mathrm{p}}(\mathcal{A}_m)=\sigma_{\mathrm{p}}\left(\mathcal{A}_m^{(+)}\right)\cup\sigma_{\mathrm{p}}\left(\mathcal{A}_m^{(-)}\right).$$

**Замечание 1.** *При* $m=1,2,3$ *часть дискретного спектра* $\sigma_{\mathrm{disc}}\left(\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}\right)$ *операторной матрицы* $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$ *может лежать в существенном спектре* $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m^{(-\mathrm{s})})$ *операторной матрицы* $\mathcal{A}_m^{(-\mathrm{s})}$, *поэтому имеют место соотношения*

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m)\subseteq\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(+)})\cup\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(-)}),\tag{3}$$
$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m)=\{\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(+)})\cup\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m^{(-)})\}\backslash\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_m).\tag{4}$$

*Точнее,*

$$\sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_m)=\bigcup_{\mathrm{s}=\pm}\left\{\sigma_{\mathrm{disc}}\left(\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}\right)\backslash\sigma_{\mathrm{ess}}\left(\mathcal{A}_m^{(-\mathrm{s})}\right)\right\}.$$

Очевидно, что при $m=1,2,3$ и $\mathrm{s}=\pm$ операторная матрица $\mathcal{A}_m^{(\mathrm{s})}$ имеет более простую структуру, чем $\mathcal{A}_m$, поэтому теорема 3 и соотношения (3), (4) дают возможность получить более точную информацию относительно спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_m$.

Используя теорему Г. Вейля о сохранении существенного спектра при возмущениях конечного ранга, имеем $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})})=[-\mathrm{s}\varepsilon,-\mathrm{s}\varepsilon+M]$. Тогда, по теорему 3 получаем, что справедливо равенство

$$\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1)=[-\varepsilon,-\varepsilon+M]\cup[\varepsilon,\varepsilon+M].\tag{5}$$

Видно, что если $\varepsilon>\frac{M}{2}$ в равенстве (5) существенный спектр операторной матрицы $\mathcal{A}_1$ есть объединение двух отрезков конечной длины, которые не пересекаются. Иначе говоря, если в существенном спектре операторной матрицы $\mathcal{A}_1$ имеется лакуна $(-\varepsilon+M,\varepsilon)$.

Определим регулярную в $\mathbb{C}\backslash[-\mathrm{s}\varepsilon,-\mathrm{s}\varepsilon+M]$ функцию

$$\Delta_1^{(\mathrm{s})}(z):=\mathrm{s}\varepsilon-z-\alpha^2\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\frac{v^2(t)dt}{-\mathrm{s}\varepsilon+w(t)-z}.$$

Обычно функцию $\Delta_1^{(\mathrm{s})}(\cdot)$ называют определителем Фредгольма, ассоциированным с операторной матрицей $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$.

Следующая лемма устанавливает связь между собственными значениями операторной матрицы $\mathcal{A}_1^{(\mathrm{s})}$ и нулями функции $\Delta_1^{(\mathrm{s})}(\cdot)$.

**Лемма 1.** *Число $z^{(s)} \in \mathbb{C} \backslash \sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_1^{(s)})$ является собственным значением операторной матрицы $\mathcal{A}_1^{(s)}$ тогда и только тогда, когда $\Delta_1^{(s)}(z^{(s)}) = 0$.*

Предположим, что

$$\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{w(t)} < \infty, \quad \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{M - w(t)} < \infty.$$

Тогда вводим следующие обозначения:

$$\alpha_1 := \sqrt{M + 2\varepsilon} \left( \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{M - w(t)} \right)^{-1/2}, \quad \alpha_2 := \sqrt{2\varepsilon} \left( \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{w(t)} \right)^{-1/2},$$

$$\alpha_3 := \sqrt{M} \left( \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{2\varepsilon + M - w(t)} \right)^{-1/2},$$

$$\alpha_{\min} := \min\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}, \quad \alpha_{\max} := \max\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}.$$

**Лемма 2.** *а) При всех значениях параметра взаимодействия $\alpha > 0$ операторная матрица $\mathcal{A}_1^{(-)}$ имеет единственное простое собственное значение, лежащее слева от $-\varepsilon$. Если $\alpha \in (0, \alpha_1]$, то операторная матрица $\mathcal{A}_1^{(-)}$ не имеет собственных значений, лежащих справа от $M + \varepsilon$. При $\alpha > \alpha_1$ операторная матрица $\mathcal{A}_1^{(-)}$ имеет единственное простое собственное значение справа от $M + \varepsilon$.*

*б) Если $\alpha \in (0, \min\{\alpha_2, \alpha_3\}]$, то операторная матрица $\mathcal{A}_1^{(+)}$ не имеет собственных значений, лежащих слева от $-\varepsilon$ и справа от $M + \varepsilon$. Если $\alpha > \max\{\alpha_2, \alpha_3\}$, то операторная матрица $\mathcal{A}_1^{(+)}$ имеет одно простое собственное значение слева от $-\varepsilon$ и одно справа от $M + \varepsilon$.*

**Следствие 1**. *При всех значениях параметра взаимодействия $\alpha > 0$ операторная матрица $\mathcal{A}_1$ имеет не менее одного и не более четырех собственных значений. Более того, если $\alpha \in (0, \alpha_{\min}]$, то операторная матрица $\mathcal{A}_1$ имеет единственное простое (изолированное) собственное значение, и это собственное значение лежит слева от $-\varepsilon$. Если $\alpha \in (\alpha_{\max}, +\infty)$, то операторная матрица $\mathcal{A}_1$ имеет два собственных значения слева от $-\varepsilon$ и справа от $M + \varepsilon$, соответственно.*

**Лемма 3.** *Предположим, что $\varepsilon > M/2$. Тогда при всех значениях параметра взаимодействия $\alpha > 0$ операторная матрица $\mathcal{A}_1$ не имеет* *собственных значений, лежащих в лакуне* $(M-\varepsilon,\varepsilon)$ *существенного спектра. Если* $\alpha\in(0,\alpha_3)$, *то операторная матрица* $\mathcal{A}_1$ *имеет собственное значение, лежащее в существенном спектре, а именно, в интервале* $(\varepsilon, M+\varepsilon)$.

Вводим следующие обозначения:

$$\sigma_1^{(\mathrm{s})}:=\bigcup_{k_1\in\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\left\{w(k_1)+\sigma_{\mathrm{disc}}\left(\mathcal{A}_1^{(-\mathrm{s})}\right)\right\},\quad \Sigma_1^{(\mathrm{s})}:=\sigma_1^{(\mathrm{s})}\cup[\mathrm{s}\varepsilon,\mathrm{s}\varepsilon+2M].$$

Следующая теорема описывает местоположение существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_2$.

**Теорема 4.** *Существенный спектр операторной матрицы* $\mathcal{A}_2$ *совпадает с множеством* $\Sigma_1^{(+)}\cup\Sigma_1^{(-)}$, *то есть справедливо равенство* $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2)=\Sigma_1^{(+)}\cup\Sigma_1^{(-)}$. *Более того, множество* $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2)$ *представляет собой объединения не более чем шести отрезков.*

Вводим следующие два подмножества $\sigma_{\mathrm{two}}(\mathcal{A}_2):=\sigma_1^{(+)}\cup\sigma_1^{(-)}$ и $\sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_2):=[-\varepsilon,-\varepsilon+2M]\cup[\varepsilon,\varepsilon+2M]$ существенного спектра $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2)$ операторной матрицы $\mathcal{A}_2$.

**Определение 1.** *Множества* $\sigma_{\mathrm{two}}(\mathcal{A}_2)$ *и* $\sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_2)$ *называются двухчастичной и трехчастичной ветвями существенного спектра операторной матрицы* $\mathcal{A}_2$.

Согласно определению множества $\sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_2)$, для его нижней границы справедливо равенство $\min(\sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_2))=-\varepsilon$.

Определим регулярную в $\mathbb{C}\backslash\Sigma^{(\mathrm{s})}$ следующую функцию

$$\Delta_2^{(\mathrm{s})}(z):=s\varepsilon-z-\alpha^2\int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}}\frac{v^2(t)dt}{\Delta_1^{(-\mathrm{s})}\big(z-w(t)\big)},$$

.

Введем обозначение $\Delta_2(z):=\Delta_2^{(+)}(z)\Delta_2^{(-)}(z)$. Полученная функция $\Delta_2(\cdot)$ является регулярной функцией в области $\mathbb{C}\backslash\left(\Sigma_1^{(+)}\cup\Sigma_1^{(-)}\right)$

В следующей теореме устанавливается связь между собственными значениями операторной матрицы $\mathcal{A}_2$ и нулями функции $\Delta_2(\cdot)$, а также определяется количество собственных значений операторной матрицы $\mathcal{A}_2$.

**Теорема 5.** *Верны следующие утверждения:*

*а*) *Число* $z\in\mathbb{C}\backslash\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2)$ *является собственным значением операторной матрицы* $\mathcal{A}_2$ *тогда и только тогда, когда* $\Delta_2(z)=0$.

*б*) *Операторная матрица* $\mathcal{A}_2$ *имеет не более восьми* (*с учетом кратности*) *собственных значений вне существенного спектра.*

**Замечание 2.** *Если для некоторого* $z_0\in\mathbb{C}\backslash\left(\Sigma_1^{(+)}\cup\Sigma_1^{(-)}\right)$ *выпольняется* $\Delta_2^{(+)}(z_0)=0$ *и* $\Delta_2^{(-)}(z_0)=0$, *одновременно, то число* $z_0$ *является двухкратным нулем функции* $\Delta_2(\cdot)$. *Отсюда следует, что* $z_0$ *является двухкратным собственным значением операторной матрицы* $\mathcal{A}_2$. *Следовательно, если операторная матрица* $\mathcal{A}_2$ *имеет кратные собственные значения вне* *существенного спектра, то эти собственные значения являются двухкратными.*

Вводим следующие обозначения:

$$\sigma_2^{(\mathrm{s})} := \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_2^{(-\mathrm{s})})\} \cup \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma_1^{(\mathrm{s})}\},$$

$$\Sigma_2^{(\mathrm{s})} := \sigma_2^{(\mathrm{s})} \cup [\mathrm{s}\varepsilon, s\varepsilon + 3M].$$

Следующая теорема описывает местоположение существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_3$.

**Теорема 6.** *Существенный спектр операторной матрицы* $\mathcal{A}_3$ *совпадает с множеством* $\Sigma_2^{(+)} \cup \Sigma_2^{(-)}$, *т.е.* $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_2) = \Sigma_2^{(+)} \cup \Sigma_2^{(-)}$. *Кроме того, множество* $\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3)$ *является объединением не более четырнадцати отрезков.*

Вводим следующие подмножества

$$\sigma_{\mathrm{two}}(\mathcal{A}_3) := \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_2^{(-\mathrm{s})})\} \cup \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma_{\mathrm{disc}}(\mathcal{A}_2^{(\mathrm{s})})\};$$

$$\sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_3) := \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma_1^{(-\mathrm{s})}\} \cup \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \{w(k_1) + \sigma_1^{(\mathrm{s})}\};$$

$$\sigma_{\mathrm{four}}(\mathcal{A}_3) := [-\varepsilon, -\varepsilon + 3M] \cup [\varepsilon, \varepsilon + 3M]$$

существенного спектра операторной матрицы $\mathcal{A}_3$.

**Определение 2.** *Множества* $\sigma_{\mathrm{two}}(\mathcal{A}_3)$, $\sigma_{\mathrm{three}}(\mathcal{A}_3)$ *и* $\sigma_{\mathrm{four}}(\mathcal{A}_3)$ *называются двухчастичной, трехчастичной и четырехчастичной ветвями существенного спектра операторной матрицы* $\mathcal{A}_3$.

Согласно определению множества $\sigma_{\mathrm{four}}(\mathcal{A}_3)$, для его нижней границы справедливо равенство $\min(\sigma_{\mathrm{four}}(\mathcal{A}_3)) = -\varepsilon$.

Определим следующую регулярную в $\mathbb{C}\backslash\Sigma_2^{(\mathrm{s})}$ функцию

$$\Delta^{(\mathrm{s})}(z) := \mathrm{s}\varepsilon - z - \alpha^2 \int_{\mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \frac{v^2(t)dt}{\Delta_2^{(-\mathrm{s})}(z - w(t))}.$$

Введем обозначение $\Delta(z) := \Delta^{(+)}(z)\Delta^{(-)}(z)$. Полученная функция $\Delta(z)$ является регулярной функцией в области $\mathbb{C}\backslash\left(\Sigma_2^{(+)} \cup \Sigma_2^{(-)}\right)$

**Теорема 7.** *Имеют место следующие утверждения:*

*а) Число* $z \in \mathbb{C}\backslash\sigma_{\mathrm{ess}}(\mathcal{A}_3)$ *является собственное значение операторной матрицы* $\mathcal{A}_3$ *тогда и только тогда, когда* $\Delta(z) = 0$.

*б) Операторная матрица* $\mathcal{A}_3$ *имеет не более шестнадцати (с учетом кратности) собственных значений, лежащих вне существенного спектра.*

**Замечание 2.** Если для некоторого $z_0 \in \mathbb{C} \backslash \left(\Sigma_1^{(+)} \cup \Sigma_1^{(-)}\right)$ выпольняется $\Delta^{(-)}(z_0) = 0$ и $\Delta^{(+)}(z_0) = 0$, одновременно, то число $z_0$ является двухкратним нулем функции $\Delta(\cdot)$. Отсюда следует, что $z_0$ является двухкратним собственным значением операторной матрицы $\mathcal{A}_3$. Следовательно, если операторная матрица $\mathcal{A}_3$ имеет кратные собственное значение вне существенного спектра, то эти собственные значения является двухкратными.

**Теперь сформулируем спектральные соотношения между блочными элементами операторной матрицы $\boldsymbol{\mathcal{A}_3^{(s)}}$.** Рассмотрим следующие вспомогательные операторы:

$$\tilde{\mathcal{A}}_{2,2}^{(s)} : \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \longrightarrow \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3, \tilde{\mathcal{A}}_{2,2}^{(s)} = \begin{pmatrix} \widehat{A}_{22}^{(s)} & \widehat{A}_{23} \\ \widehat{A}_{23}^* & \widehat{A}_{33}^{(s)} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{\mathcal{A}}_{2,3}^{(s)} : \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3 \longrightarrow \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \oplus \mathcal{H}_3, \tilde{\mathcal{A}}_{2,3}^{(s)} = \begin{pmatrix} \widehat{A}_{11}^{(s)} & \widehat{A}_{12} & 0 \\ \widehat{A}_{12}^* & \widehat{A}_{22}^{(s)} & \widehat{A}_{23} \\ 0 & \widehat{A}_{23}^* & \widehat{A}_{33}^{(s)} \end{pmatrix}.$$

**Утверждение 4.** *Операторная матрица $\tilde{\mathcal{A}}_{2,2}^{(s)}$ имеет чисто существенный спектр и*

$$\sigma\left(\tilde{\mathcal{A}}_{2,2}^{(s)}\right) = [-s\varepsilon, -s\varepsilon + 3M] \cup \bigcup_{k_1, k_2 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \left\{w(k_1) + w(k_2) + \sigma_{disc}\left(\mathcal{A}_1^{(s)}\right)\right\}.$$

*Более того, множество $\sigma\left(\tilde{\mathcal{A}}_{2,2}^{(s)}\right)$ состоит из объединениа не более трех отрезков.*

**Утверждение 5.** *Операторная матрица $\tilde{\mathcal{A}}_{2,3}^{(s)}$ имеет только существенного спектра и*

$$\sigma\left(\tilde{\mathcal{A}}_{2,3}^{(s)}\right) = \sigma\left(\tilde{\mathcal{A}}_{2,2}^{(s)}\right) \cup \bigcup_{k_1 \in \mathbb{T}^{\mathrm{d}}} \left\{w(k_1) + \sigma_{\mathrm{disc}}\left(\mathcal{A}_2^{(s)}\right)\right\}.$$

*Более того, множество $\sigma\left(\tilde{\mathcal{A}}_{2,3}^{(s)}\right)$ состоит из объединения не более семи отрезков.*

Надо отметить, что операторная матрица $\tilde{\mathcal{A}}_{2,3}^{(s)}$ называется канальным оператором соответствующий операторной матрицы $\mathcal{A}_3^{(s)}$ и имеет место равенство

$$\sigma_{\mathrm{ess}}\left(\mathcal{A}_3^{(s)}\right) = \sigma\left(\tilde{\mathcal{A}}_{2,3}^{(s)}\right).$$

Из вышеизложенных рассуждение получаем следующий результат.

**Лемма 4.** Имеет место следующие спектральные соотношения:

$$\sigma(A_{33}) \subset \sigma\left(\tilde{\mathcal{A}}_{2,2}^{(s)}\right) \subset \sigma\left(\tilde{\mathcal{A}}_{2,3}^{(s)}\right) = \sigma_{\mathrm{ess}}\left(\mathcal{A}_3^{(\mathrm{s})}\right).$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе получены два типа оценок для границы класса трехдиагональных операторных матриц четвертого порядка. Исследованы существенный и дискретный спектры операторной матрицы четвертого порядка $\mathcal{A}$, действующих в прямой сумме нолчастичных, одночастичных, двухчастичных и трехчастичных подпространств пространства Фока. В этом случае операторная матрица $\mathcal{A}$ соответствует гамильтониану системы частиц на решетке, число которых не сохраняется и не превышает четырех.

Основные результаты данной диссертации являются следующие:

1) найдена альтернативная формула для числовой области значений четвертой степени $W^4(\mathcal{A})$ трехдиагональный операторный матрицы $\mathcal{A}.$ Для множества $\sigma(\mathcal{A})$ с использованием свойства спектрального соотношения $\sigma(\mathcal{A}) \subset \overline{W^4(\mathcal{A})}$ получены оценки нижней и верхней границ операторной матрицы $\mathcal{A}$;

2) доказан аналог теоремы Гершгорина для класса операторных матриц четвертого порядка и найдены оценки спектра оператора, отличные от полученных с использованием числовой области значений четвертого порядка;

3) рассматривается операторная матрица четвертого порядка $\mathcal{A}$, соответствующая системе частиц на решетке, число которых не сохраняется и не превышает четырех. Задача исследования спектральных свойств операторной матрицы $\mathcal{A}$ приведена к задаче исследования спектральных свойств операторных матриц второго порядка $\mathcal{A}_1$ и третьего порядка $\mathcal{A}_2$. Доказано, что число собственных значений оператора $\mathcal{A}_3$ (с учетом кратности) не превышает шестнадцати.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 AT SAMARKAND STATE UNIVERSITY**

---

**BUKHARA STATE UNIVERSITY**

**LATIPOV HAKIMBOY MIRZO UGLI**

# SPECTRAL ESTIMATES FOR THE CLASS OF FOURTH-ORDER OPERATOR MATRICES

**01.01.01 – Mathematical analysis**

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

**Samarkand – 2024**

**The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) was registered at the Supreme Attestation Commission under number B2023.2.PhD/FM862**

The dissertation has been preparet at Bukhara State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website of scientific council (www.samdu.uz) and an the website of «ZiyoNet» Information and educational portal (http: www.ziyonet.uz).

| | |
|---|---|
| **Scientific supervisor:** | **Rasulov Tulkin Husenovich**<br>Doctor of physical and mathematical sciences (DSc), professor |
| **Official opponents:** | **Muminov Mukhiddin Eshkobilovich**<br>Doctor of physical and mathematical sciences (DSc), docent |
| | **Kucharov Ramziddin Ruzimuradovich**<br>Doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences, docent |
| **Leading organization:** | **Urgench State University** |

Defense will take place «____» ______________2024 at ____ at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 at Samarkand State University (Address: University Boulevard, 15, Samarkand city, 140104, Uzbekistan, Ph.: (998 66) 231-06-32, fax: (998 ) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Samarkand State University (is registered №_____). (Address: University Boulevard, 15, Samarkand city, 140104, Uzbekistan. Ph.: (998 66) 231 06 32, fax: (998 ) 235 19 38).

Abstract of dissertation sent out on «____» ________________2024 year.
(Mailing report №____________ on «____» ________________2024 year).

**A.S. Soleev**
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S., Professor

**A.M. Khalkhuzhaev**
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S., Professor

**S.N. Lakaev**
Chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S., Professor, Academician

## INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

**The aim of the research work** is to find an alternative formula for a quartic numerical range, to determine the structure of the essential spectrum of a fourth-order operator matrix, corresponding to the system of particles on a lattice, the number of which is not conserved and does not exceed four, and to study the number of its eigenvalues.

**The object of the research work.** An operator matrix of order four corresponding to a system of particles on the lattice whose number is not preserved and does not exceed four is obtained.

**The scientific novelty of the research work** is as follows:

- an alternative formula for the quartic numerical range was developed and with its help estimates different from those of the classical perturbation theory were obtained for the lower and upper bounds of the spectrum of the class of operator matrices of order four;

- an analogue of the classical Gershgorin theorem for the class of tridiagonal operator matrices of order four is proved, and with the help of this theorem, different estimates for the bounds of the class matrices than those obtained using the classical perturbation theory and quartic numerical range are found;

- the locations of two-, three- and four-particle branches of the essential spectrum of the operator matrix of order four are determined, the number of segments that make up it is found, and the spectral relations between the block elements are established;

- using the properties of the Fredholm determinant it is proved that the operator matrix of order three has at most eight eigenvalues, and the operator matrix order four has at most sixteen eigenvalues, and it is shown that these eigenvalues are with multiplicity at most two.

**Implementation of the research results.** Based on scientific results obtained on operator matrices of order four:

a operator matrix of order four with a discrete parameter has at most 16 eigenvalues; from the estimates obtained for the lower and upper bounds of the operator matrices of order four, were used in the grant AP05131268 of the International Kazakh-Turkish University named after Khoja Ahmed Yassavi (reference No. 04-3840 of Khoja Ahmad Yassavi National Kazakh-Turkish University, November 24, 2023). The eigenvalues of the operator matrix of order four and the properties of the quartic numerical range made it possible to study the methods of constructing the eigenfunctions and eigenvalues of some boundary value problems for the nonlocal Laplace operator.

The methods used to determine the two-, three-, and four-particle new branches of the essential spectrum of the fourth-order operator matrix with discrete parameters, the number of essential spectrum segments, and the spectral relations between the block elements were used in the fundamental project number FRGS19-039-0647 of the International Islamic University of Malaysia (International Islamic

University Malaysia, reference dated 23 October 2023). The application of scientific results made it possible to study the numerical approach to the lower limit of values using methods based on ordinary differential equations.

**The structure and volume of the thesis.** The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 94 pages.

**E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI**
**СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ**
**LIST OF PUBLISHED WORKS**

## I bo‘lim (Часть I; Part I)

1. Расулов Т.Х., Латипов Х.М. Описание спектра одной операторной матрицы четвертого порядка // Вестн. Самарск. госуд. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. DOI: https://doi.org/10.14498/vsgtu2003, 27:3 (2023). – С. 427-445. (Scopus, IF=1.4).

2. Latipov H.M., Rasulov T.H. Spectral relations for a 4×4 block operator matrix // AIP Conf. Proc. 2764, 030006 (2023). – P. 1-8. (Scopus).

3. Latipov H.M. Some properties of the quartic numerical range for 4x4 operator // Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, 5:1 (2023). – P. 13-20. (01.00.00; №17).

4. Latipov H.M., Rasulov T.H. Quartic numerical range of a tridiagonal 4x4 self-adjoint operator matrices // Uzbek Mathematical Journal. 6:4 (2022). – P. 53-60 (01.00.00; №06).

5. Latipov H.M. To‘rtinchi tartibli operatorli matritsaning blok elementlari orasida spektral munosabatlar // Ilm sarchashmalari. 10 (2022). – B. 15-18. (01.00.00; №12).

6. Latipov H.M. To‘rtinchi tartibli operatorli matritsaga mos Fredgolm determinantining asosiy xossalari // Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti, 2 (2023). – P. 3-8. (01.00.00; №3).

## II bo‘lim (Часть II; Part II)

7. Latipov H.M. An application of the quartic numerical range of 4x4 operator matrices. Abstracts II Republican Scientific and Practical Conference of Young Scientists “Mathematics, Mechanics and Intellectual Technologies”. (28-29 March, 2023, Tashkent, Uzbekistan). – P. 49-50.

8. Латипов Х.М. Соотношение для спектра операторной матрицы четвертого порядка. Сборник международная конференция «Инновационное развитие науки и образования 2023». (Март, 2023, Павлодар, Казахстан). – С. 25-27.

9. Latipov H.M. The lower and upper bounds of a tridiagonal 4x4 operator matrix. International scientific and practical conferences “Scientific ideas of young scientists 2023”. (11 march, 2023, Warsaw, Poland). – P. 58-60.

10. Latipov H.M. To‘rtinchi tartibli operatorli matritsaning blok elementlari orasida spektral munosabatlar. Тезисы докладов научной конференции “Операторные алгебры, неассоциа тивные структуры и смежные проблемы” (14–15 сентября 2022, Ташкент, Узбекистан). – B. 156-158.

11. Latipov H.M. Gershgorin’s bounds for a 4x4 operator matrix in cut Fock space. Abstracts of the international conference “Mathematical analysis and its

applications in modern mathematical physics”. Part I. (23-24 September, 2022. Samarkand, Uzbekistan). – P. 78-80.

12. Латипов Х.М. Исследование существенного спектра одной операторной матрицы четвертого порядка. Тезисы докладов международной научно-практической конференции “Актуальные проблемы физики, математики и механики”, Часть I. (24-25 мая, 2023, Бухара, Узбекистан). – С. 101-104.