Ўзбекистон Республикаси
Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги

ҚАРШИ ДАВЛАТ УНИВЕРСИТЕТИ

Р Е Ф Е Р А Т

Мавзу: Чекли элементлар усулининг симметрик
t-гиперболик системаларга тадбиқи.

Бажарди: ҚарДУ Математика кафедрасининг
ўқитувчиси **Шокир Давлатов**

Қарши - 2014 йил

Мундарижа.

Кириш

Чекли элементлар усули(ЧЭУ) мухандислик ва физикавий масалаларни ечишда энг самарали сонли усул ҳисобланади. Бу усулнинг қўлланиш соҳаси самолетларнинг ёки автомобилларнинг конструкцияларида кучланишлар таҳлилидан тортиб то атом электрстанциясига ўхшаган мураккаб системаларнинг ҳисобини олишгача бўлган кенгликни қамраб олган. Унинг ёрдамида суюқликнинг трубаларда, плотина орқали,пористик муҳитда оқиши, сиқиладиган газнинг оқими ўрганилади, электростатика ва смазка масалалари ечилади, тебраниш системалари таҳлил қилинади.

Бу китобда ЧЭУнинг гиперболик типдаги тенгламаларга ва системаларга татбиқи қаралади. Бунда усулнинг асосий ғоялари ва уларнинг татбиқлари келтирилган. Баён этилган материаллар ЧЭУнинг гиперболик типдаги тенгламаларга ва системаларга бошланғич татбиқи сифатида юқори курс талабаларига етарли деб ҳисоблаймиз. Ушбу китоб ЧЭУ билан гиперболик типдаги тенгламаларни ва системаларни сонли ечимини топишни ҳохловчилар учун мўлжалланган.

1. **ЧЭУ ҳақида умумий маълумот.**

ЧЭУ – бу физика ва техникада учрайдиган дифференциал тенгламаларни сонли ечиш усулидир.Бу усулнинг пайдо бўлиши 1950 йилда космик тадқиқот масалаларини ечиш билан боғлиқ.. У биринчи бўлиб Тернера, Клужа, Мартина ва Топпа [8] мақоласида баён этилган. Ушбу мақола бошқа мақолаларнинг пайдо булишига сабаб бўлди. ЧЭУни қўллаш билан қурилиш механикаси ва жипс муҳитлар механикаси масалалари ечимини топишга оид бир нечта мақолалар чоп этилди. 1963 йилда Мелош ЧЭУнинг назарий ишланмасига мухим ҳисса қушди. У ЧЭУни ҳаммага яхши таниш бўлган Рэлея-Ритца усулининг бир вариантидек қарашни кўрсатди. Қурилиш механикасида ЧЭУ ёрдамида потенциал энергияни минималлаштириш масалани чизиқли тенгламалар системаси мувозанатига олиб келишга рухсат беради. ЧЭУни минималлаштириш процедураси билан боғликлиги бошқа техника соҳаларининг масалаларини ечишда ушбу усулдан кенг фойдаланишга олиб келди. Усул Лаплас ёки Пуассон тенгламалари орқали ечиладиган масалаларга қўлланилар эди. Бу масалаларни ечиш ҳам бирор функционални минималлаштириш билан боғлиқ эди. Биринчи мақолаларда [10,11] ЧЭУ ёрдамида иссиқлик тарқалиш масалалари ечилар эди. Кейинчалик усул гидромеханика масалаларига, хусусан порис муҳитда суюқликнинг оқиши масалаларига қўлланилди.

Қурилиш механикаси, иссиқлик тарқалиши, гидродинамика масалаларида элементларни аниқлайдиган тенгламалар ЧЭУ вариантлари яъни Галеркин усули ёки энг кичик квадратлар усули ёрдамида осон олиниши кўрсатилганда [7,12] ЧЭУ қўлланиш соҳаси сезиларли даражада кенгайди. Ушбу далилни ўрнатилиши ЧЭУни назарий асослашда муҳим рол ўйнади, яъни ихтиёрий дифференциал тенгламаларни ечишда уни қуллашга рухсат беради. Шуни таъкидлаш керакки умумий назарий асослар физик масалаларни вариацион тарзда қўйиш шарт эмаслигини кўрсатади.

ЧЭУнинг асосий ғояси шундан иборатки, ихтиёрий узлуксиз катталикни масалан ҳарорат, босим, кўчиш ва ҳ. к. катталикларни дискрет модул билан аппроксимация қилиш мумкин, у бўлакли-узлуксиз функциялар тўпламида қурилади.Бўлакли-узлуксиз функция қаралаётган соҳанинг чекли сондаги нуқталардаги узлуксиз катталикнинг қийматлари ёрдамида аниқланади.

Умумий ҳолда узликсиз катталик олдиндан аниқ эмас ва бу катталикнинг қийматларини соҳанинг ички нуқталарида аниқлаш керак. Агар соҳанинг ички нуқталарида катталикнинг қийматлари аниқ деб ҳисобласак, у ҳолда дискрет моделни осон қуриш мумкин. Шундан сунг умумий ҳолга утиш мумкин. Шундай қилиб узлуксиз катталикнинг дискрет модулини қуришда қуйидагича иш тутилади.

1. Қараладиган соҳада чекли сондаги нуқталар фиксирланади. Бу нуқталар тугун нуқталар ёки оддий сўз билан айтганда тугунлар деб аталади.
2. Аниқланиши керак бўлган узлуксиз катталикнинг қиймати ҳар бир тугунда ўзгарувчи ҳисобланади.
3. Узлуксиз катталик аниқланган соҳа чекли сондаги бўлакларга бўлинади. Бу бўлаклар элементлар деб аталади. Бу элементлар умумий тугун нуқталарга эга бўлади ва соҳа формасини аппроксимация қилади.
4. Узлуксиз катталик ҳар бир элементда шу катталикнинг тугунлардаги қийматлари билан аниқланадиган кўпҳад билан аппроксимация қилинади.

Ҳар бир элемент учун ўзининг кўпҳади аниқланади, аммо кўпҳадлар шундай танланадики элемент чегараларида катталикнинг узлуксизлиги таъминланади.

2. Базис функциялар.

Базиси бир нечта базис функциялардан иборат бўлган юқори тартибли бўлакли-полиномли функциялар фазосини қуриш мумкин.Бундай фазолар қандай қўрилиши [6] китобда келтирилган.Шу базис функциялардан бир нечта намуналар келтирамиз.

2.1 Бир ўлчамли фазода базис функциялар.

Сонлар ўқида $[a;b]$ кесма N та бўлакга бўлинган бўлсин.

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{N-1} < x_N = b$

i - бўлак узунлигини қуйидагича белгилайлик $h_i = x_i - x_{i-1} \quad i = 1,..., \mathrm{N}$.

Базиси бир дона базис функциядан иборат бўлган бўлакли-полиномли функциялар фазосига тегишли функция қуйидаги кўринишда бўлади.

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^{N} u_i \varphi_i^h(x) \qquad (2.1)$$

Бу ерда $\varphi_i^h(x)$ базис функция.

Энг оддий базис функция бўлакли-чизиқли функция бўлиб, у қуйидаги кўринишда бўлади.

$$\varphi_0^h(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h_1}, & \mathrm{x} \in [x_0, x_1] \\ 0, & \mathrm{x} \notin [x_0, x_1] \end{cases} \qquad (2.2)$$

$$\varphi_i^h(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h_i}, & \mathrm{x} \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h_{i+1}}, & \mathrm{x} \in [x_i, x_{i+1}] \\ 0, & \mathrm{x} \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \quad i = 1,..., \mathrm{N}-1 \qquad (2.3)$$

$$\varphi_N^h(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{N-1}}{h_N}, & \mathrm{x} \in [x_{N-1}, x_N] \\ 0, & \mathrm{x} \notin [x_{N-1}, x_N] \end{cases} \qquad (2.4)$$

Яна бир базис функцияга мисол қилиб бўлакли-учинчи даражали кўпҳадли функцияни келтиришимиз мумкин

$$\varphi_i^h(x) = \begin{cases} 1 - \dfrac{3(x - x_i)^2}{h_i^2} - \dfrac{2(x - x_i)^3}{h_i^3}, & \mathrm{x} \in [x_{\mathrm{i}-1}, x_i] \\ 1 - \dfrac{3(x - x_i)^2}{h_{i+1}^2} + \dfrac{2(x - x_i)^3}{h_{i+1}^3}, & \mathrm{x} \in [x_{\mathrm{i}}, x_{i+1}] \\ 0, & \mathrm{x} \notin [x_{\mathrm{i}-1}, x_{i+1}] \end{cases} \quad \mathrm{i} = 1,..., \mathrm{N}-1 \qquad (2.5)$$

Шу кўринишдаги базис функцияларга жуда кўп мисол келтиришмиз мумкин.

Базиси иккита базис функциялардан иборат бўлган бўлакли-полиномли функциялар фазосига тегишли бўлган функция қуйидаги кўринишда бўлади.

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^{N} (a_i \varphi_{1,i}^h(x) + b_i \varphi_{2,i}^h(x)) \qquad (2.6)$$

Бу ерда $\varphi_{1,i}^h(x), \varphi_{2,i}^h(x)$ базис функциялар.

Базис функциялар сифатида қуйидаги функцияларни олиш мумкин.

$$\varphi_{1,i}^h(x)=\begin{cases}1-\dfrac{3(x-x_i)^2}{h_i^2}-\dfrac{2(x-x_i)^3}{h_i^3}, & \mathrm{x}\in[x_{\mathrm{i-1}},x_i]\\ 1-\dfrac{3(x-x_i)^2}{h_{i+1}^2}+\dfrac{2(x-x_i)^3}{h_{i+1}^3}, & \mathrm{x}\in[x_{\mathrm{i}},x_{i+1}]\\ 0, \quad \mathrm{x}\notin[x_{\mathrm{i-1}},x_{i+1}] & \end{cases} \qquad \mathrm{i}=1,\dots,\mathrm{N}-1 \qquad (2.7)$$

$$\varphi_{2,i}^h(x)=\begin{cases}\left(1+\dfrac{x-x_i}{h_i}\right)^2(x-x_i), & \mathrm{x}\in[x_{\mathrm{i-1}},x_i]\\ \left(1-\dfrac{x-x_i}{h_{i+1}}\right)^2(x-x_i), & \mathrm{x}\in[x_{\mathrm{i}},x_{i+1}]\\ 0, \quad \mathrm{x}\notin[x_{\mathrm{i-1}},x_{i+1}] & \end{cases} \qquad \mathrm{i}=1,\dots,\mathrm{N}-1 \qquad (2.8)$$

Базиси уч ва ундан ортиқ бўлган базис функциялардан иборат бўлган бўлакли-полиномли функциялар фазосини шу тариқа тузиш мумкин.Шунга ухшаш фазолар қуришнинг бошқа усуллари ҳам бор[6].

2.2 Икки ўлчамли фазода базис функциялар.

Икки ўлчамли фазода Ω-соҳа, томонлари Oxy ўқларига паралел қилиб олинган, тўғри тўртбурчак ичида бўлсин. Тўғри тўртбурчак томонларининг Ox ва Oy ўқдаги проекциялари мос равишда $[a;b]$, $[c;d]$ кесмалар бўлсин. $[a;b]$ кесмани N_x та бўлакга бўламиз.

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_{Nx-1}<x_{Nx}=b$$

i - бўлак узунлигини қуйидагича белгилайлик $h_i^x=x_i-x_{i-1} \quad i=1,\dots,\mathrm{N_x}$.

Шу тариқа $[c;d]$ кесмани N_y та бўлакга бўламиз.

$$c=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_{Ny-1}<y_{Ny}=d$$

j - бўлак узунлигини қуйидагича белгилайлик $h_j^y=y_j-y_{j-1} \quad \mathrm{j}=1,\dots,\mathrm{N_y}$.

Базиси бир дона базис функциядан иборат бўлган бўлакли-полиномли функциялар фазосига тегишли функция қуйидаги кўринишда бўлади.

$$u_h(x,y)=\sum_{i=0}^{Nx}\sum_{j=0}^{Ny}u_{ij}Q_{ij}^h(x,y) \qquad (2.9)$$

Бу ерда $Q_{ij}^h(x,y)$ базис функция.

Базис функция сифатида қуйидаги $Q_{ij}(x,y)=\varphi_i(x)\psi_j(y)$ кўринишдаги функцияни олишимиз мумкин. Бу ерда

$$\varphi_i^h(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{h_i}, & \mathrm{x}\in[x_{i-1},x_i]\\ \dfrac{x_{i+1}-x}{h_{i+1}}, & \mathrm{x}\in[x_i,x_{i+1}]\\ 0, & \mathrm{x}\notin[x_{i-1},x_{i+1}]\end{cases}\qquad i=1,\ldots,\mathrm{N_x}\text{ -1} \tag{2.10}$$

$$\psi_j(y)=\begin{cases}\dfrac{y-y_{j-1}}{h_j^y}, & \mathrm{y}\in[y_{j-1},y_j]\\ \dfrac{y_{j+1}-y}{h_{j+1}^y}, & \mathrm{y}\in[y_j,y_{j+1}]\\ 0, & \mathrm{y}\notin[y_{j-1},y_{j+1}]\end{cases}\qquad \mathrm{j}=1,\ldots,\mathrm{N_y}\text{ -1} \tag{2.11}$$

ёки

$$\varphi_i^h(x)=\begin{cases}1-\dfrac{3(x-x_i)^2}{h_i^2}-\dfrac{2(x-x_i)^3}{h_i^3}, & \mathrm{x}\in[x_{i-1},x_i]\\ 1-\dfrac{3(x-x_i)^2}{h_{i+1}^2}+\dfrac{2(x-x_i)^3}{h_{i+1}^3}, & \mathrm{x}\in[x_i,x_{i+1}]\\ 0, & \mathrm{x}\notin[x_{i-1},x_{i+1}]\end{cases}\qquad \mathrm{i}=1,\ldots,\mathrm{N_x}\text{ -1} \tag{2.12}$$

$$\Psi_j^h(y)=\begin{cases}1-3\left(\dfrac{y-y_j}{h_j^y}\right)^2-2\left(\dfrac{y-y_j}{h_j^y}\right)^3, & \mathrm{y}\in[y_{j-1},y_j]\\ 1-3\left(\dfrac{y-y_j}{h_{j+1}^y}\right)^2+2\left(\dfrac{y-y_j}{h_{j+1}^y}\right)^3, & \mathrm{y}\in[y_j,y_{j+1}]\\ 0, & \mathrm{y}\notin[y_{j-1},y_{j+1}]\end{cases}\qquad \mathrm{j}=1,\ldots,\mathrm{N_y}\text{ -1} \tag{2.13}$$

ёки бошқа шуларга ўхшаган функциялар бўлиши мумкин.

Агар Ω соҳа элементлари учбурчак бўлган тўр билан қопланган бўлса.Ҳар бир учбурчакда x ва y ўзгарувчилардан даражаси m бўлган қуйидаги кўринишдаги кўпҳад курилади.

$$g(x,y)=\sum_{i=0}^{m}\sum_{j_1+j_2=i}c_{j_1j_2}x^{j_1}y^{j_2} \tag{2.14}$$

Ҳар бир учбурчакда кўпҳад коэффициентлари шундай танланадиги ушбу кўпҳадларнинг бирлашмасидан ҳосил бўлган функция узлуксиз бўлади.

Юқорида айтилган усулни мисолларда тушунтирамиз.Мисол учун $m=1$, яъни бўлакли-чизиқли функция холи учун

$$g(x,y) = c_{0,0} + c_{1,0}x + c_{0,1}y \tag{2.15}$$

Функциянинг коэффициентлари тайин учбурчакда, учбурчак p_1, p_2, p_3 учларида берилган $u(p_1), u(p_2), u(p_3)$ қийматлар билан аниқланади. Ω соҳани ташкил қилган учбурчакларнинг ҳар бирида мана шундай функцияни қуриб, бу функцияларнинг бирлашмасидан ҳосил бўлган функция соҳада узлуксиз эканлигига ишонч ҳосил қиламиз.

Агар $m=2$ бўлса, яъни кватратли интерполяцион холи учун

$$g(x,y) = c_{0,0} + c_{1,0}x + c_{0,1}y + c_{2,0}x^2 + c_{1,1}xy + c_{0,2}y^2 \tag{2.16}$$

Уларнинг бирлашмасидан ҳосил бўлган $u^h(x,y)$ функция узлуксиз бўлишини таъминлашнинг энг қулай йули қуйидагича. $u^h(x,y)$ функциянинг қийматлари учбурчак p_1, p_2, p_3 учларида ва $[p_1,p_2],[p_2,p_3],[p_3,p_1]$ кесмаларни мос ривишда тенг иккига бўлувчи $p_{1,2}, p_{2,3}, p_{3,1}$ нуқталарда берилади.

Кватратли интерполяцион кўпҳад ёрдамида қурилган узлуксиз функция базиси иккита базис функциядан иборат бўлган бўлакли-полиномли функциялар фазосига тегишли бўлади.

Базиси икки ва ундан ортиқ бўлган базис функциялардан иборат бўлган бўлакли-полиномли функциялар фазосини қуриш [9]. китобида кўрсатилган.

Уч ўлчамли фазода бўлакли-полиномли функциялар фазоси юқорида айтиб ўтилгандай қурилади.

3. Бир ўлчовли биринчи тартибли гиперболик типдаги тенглама ва системалар учун чекли элементлар усули.

3.1 Масаланинг қўйилиши:

$G = \{(t,x) : t \in (0,T), x \in \Omega\}$ соҳада

$$A\frac{\partial u}{\partial t} + B\frac{\partial u}{\partial x} + Cu = F(x,t) \tag{3.1}$$

симметрик t-гиперболик системани

$$\begin{aligned} R_1(t)u(\ell_1,t) &= g_1(t) \\ R_2(t)u(\ell_2,t) &= g_2(t) \end{aligned} \tag{3.2}$$

чегаравий шартларни ва $t=0$ да

$$u(x,0) = \psi(x), \quad x \in \Omega \tag{3.3}$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи u вектор-функцияни топиш талаб қилинган бўлсин. (3.1)-(3.3) масаласи симметрик t-гиперболик система учун қўйилган аралаш масала деб номланади ([1]).

Бу ерда $\Omega = (\ell_1, \ell_2)$, A симметрик мусбат аниқланган матрица, B симметрик матрица, C ихтиёрий матрица, R_1, R_2-мос тўғрибурчакли ўзгарувчан матрица, g_1, g_2, ψ –берилган вектор функциялар . A,B,C - $M \times M$ ўлчамли ҳақиқий ўзгармас матрицалар , x,t эркли ўзгарувчилар,

$u(x,t) = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_M \end{pmatrix}$ x,t га боғлиқ ноъмалум вектор функция, $F(x,t) = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_M \end{pmatrix}$ x,t га боғлиқ берилган вектор функция.

3.2 Тавсия этиладиган усул ва унинг турғунлиги.

Сонли аппроксимацион схемамизнинг тургунлигини исботлаш қулай бўлиши учун A матрицани бирлик матрица деб ҳисоблаймиз. Ω соҳани чекли,ички умумий нуқталарга эга бўлмаган элементларга(кесмаларга) бўламиз .Элементни(кесмани) K ҳарфи билан белгилаймиз.У холда $\Omega = \bigcup\limits_{K \subset \Omega} K$

$[0,T]$ кесмани N_t бўлакга бўламиз. $t_k = \tau \cdot k, (k = 0,\ldots, N_t), \tau = \dfrac{T}{N_t}$

Сонли аппроксимацион схемамизнинг тургунлигини исботлаш учун (1)-(4) аралаш масала ягона ечимга эга ва қуйидаги шартлар

$$(Du,u)\big|_{\Gamma(\Omega)} = (Bu,u)\big|_{x=\ell_2} - (Bu,u)\big|_{x=\ell_1} \geq 0 \qquad (3.4)$$

$$C + C^* \geq 0 \qquad (3.5)$$

бажарилади деб фараз қиламиз[2]-[4]. Бу ерда $D = nB$, n Ω сохага бирлик ташқи нормал,
I бирлик матрица.

Қуйидаги системани кўриб чиқамиз.

$$Lu \equiv \tau B \frac{\partial u}{\partial x}(t,x) + (I + \tau \cdot C)u(t,x) = u(t-\tau,x) + \tau \cdot F(t,x) \qquad (3.6)$$

Бу ерда I бирлик матрица.

Бичизиқли форма киритамиз

$$a(u,v) \equiv (Lu,v)_K \qquad (3.7)$$

Бу ерда

$$(u,v)_K = \int\limits_K u \cdot v \qquad (3.8)$$

Ҳар бир элемент K да u ечимни $u_h \in P_m(K)$ орқали аппроксимация қиламиз. Бу ерда $P_m(K)$ коэффициентлари t га боғлиқ бўлган, даражаси $\leq m$, K да аниқланган кўпҳадлар тўплами.

У ҳолда, ҳар бир элемент K да, қуйидаги тенглик ўринли бўлади.

$$a(u_h, v_h) = (u_h(t-\tau,x) + \tau \cdot F(t,x), v_h)_K, \forall v_h \in P_m(K) \qquad (3.9)$$

Агар вақт бўйича $t-\tau$ қатламгача яқинлашувчи ечим қийматлари аниқ бўлиб, $v_h(x) \in P_m(K)$ базис функция бўлса (3.9) тенгликдан, t қатламдаги яқинлашувчи ечим қийматларини топиш учун, чизиқли алгебраик системани оламиз.

Схема турғунлигини исботлаш учун қуйидаги операторни киритамиз

$$L^* v \equiv v - \tau B \frac{\partial v}{\partial x}(t,x) + \tau C^* v(t,x) \tag{3.10}$$

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

Агар $K = [\alpha, \beta]$ кесма бўлса, у холда $\Gamma(K) = \{\alpha; \beta\}$ бўлади.

$$(Du \cdot v)\big|_{\Gamma(K)} = (Du \cdot v)\big|_{x=\beta} + (Du \cdot v)\big|_{x=\alpha} = (Bu \cdot v)\big|_{x=\beta} - (Bu \cdot v)\big|_{x=\alpha} \tag{3.11}$$

Бу ерда $D = nB$, n K кесмага бирлик ташқи нормал.

Лемма-1

$$a(u,v) = (u, L^* v)_K + \tau (Du \cdot v)\big|_{\Gamma(K) - \Gamma^*(K)} + \tau (Du \cdot v)\big|_{\Gamma^*(K)} \tag{3.12}$$

Бу ерда $\Gamma^*(K) = \Gamma(K) \cap \Gamma(\Omega)$

Исбот.

$$a(u,v) \equiv (Lu, v)_K = \left(\tau B \frac{\partial u}{\partial x} + (I + \tau \cdot C)u, v \right)_K =$$

Бўлаклаб интеграллашни қўллаймиз.

$$= \tau \left((Du \cdot v)\big|_{\Gamma(K)} - \left(B \frac{\partial v}{\partial x}, u \right)_K \right) + \left((I + \tau \cdot C^*) v, u \right)_K =$$

$$= \left(v - \tau B \frac{\partial v}{\partial x} + \tau C^* v, u \right)_K + \tau (Du \cdot v)\big|_{\Gamma(K) - \Gamma^*(K)} + \tau (Du \cdot v)\big|_{\Gamma^*(K)} \tag{3.13}$$

Лемма-1 исбот қилинди.

Лемма-2

$$a(u,u) \geq (u,u)_K + \frac{\tau}{2} (Du \cdot v)\big|_{\Gamma(K) - \Gamma^*(K)} + \frac{\tau}{2} (Du \cdot u)\big|_{\Gamma^*(K)} \tag{3.14}$$

Исбот.

Бир нечта содда амалларни бажарамиз

$$(u, L^* u)_K = \left(u - \tau B \frac{\partial u}{\partial x} + \tau C^* u, u \right)_K = -\left(u + \tau B \frac{\partial u}{\partial x} + \tau C u, u \right)_K + (u + \tau C u + \tau C^* u, u)_K =$$

$$= -a(u,u) + \left((2I + \tau (C + C^*)) u, u \right)_K \tag{3.15}$$

(3.12) ва (3.15) ёрдамида, (3.5) шартни эътиборга олиб,қуйидагини хосил қиламиз.

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \frac{1}{2} \left((2I + \tau (C + C^*)) u, u \right)_K + \frac{\tau}{2} (Du \cdot u)\big|_{\Gamma(K) - \Gamma^*(K)} + \\ &+ \frac{\tau}{2} (Du \cdot u)\big|_{\Gamma^*(K)} \geq (u,u)_K + \frac{\tau}{2} (Du \cdot u)\big|_{\Gamma(K) - \Gamma^*(K)} + \frac{\tau}{2} (Du \cdot u)\big|_{\Gamma^*(K)} \end{aligned} \tag{3.16}$$

1-Теорема.

Яқинлашувчи ечим $u_h \in P_n(K)$ K да бир қийматли аниқланган ва қуйидаги тенгсизлик ўринли

$$\| u_h(t,x) \|_{\Omega}^2 \leq e^T \| u_h(0,x) \|_{\Omega}^2 + (T+1)(e^T - 1) F \tag{3.17}$$

Бу ерда норма $\| u \|_{\Omega} = \sqrt{\int_{\Omega} u \cdot u}$, $\quad F = \max_{t \in [0,T]} \| F_h(t,x) \|_{\Omega}^2$

Исбот.

Вақт бўйича $t_{k-1} = \tau(k-1)$ қатламгача яқинлашувчи ечим $u_h^{k-1} \in P_m(K)$ қийматлари топилган ва $v_h(x) \in P_m(K)$ базис функция танланган деб фараз қилсак

$t_k = \tau k$ қатламдаги $u_h^k \in P_m(K)$ яқинлашувчи ечим қийматларини топиш учун (3.9) тенгликдан қуйидаги чизиқли алгебраик системани оламиз.

$$\left(\tau B\frac{\partial u_h}{\partial x}(t_k,x)+(I+\tau\cdot C)u_h(t_k,x),v_h\right)_K=(u_h(t_{k-1},x)+\tau\cdot F_h(t_k,x),v_h)_K \qquad (3.18)$$

Охирги (3.18) чизиқли алгебраик системани матрица кўринишида ёзамиз.

$$A_h u_h = b_h \qquad (3.19)$$

Агар $A_h u_h = 0$ система тривиал ечимга $u_h \equiv 0$ эга эканлигини кўрсата олсак, u_h ечим бир қийматли аниқланганлиги келиб чиқади.Бу K да $u_h = 0$ эканлигини кўрсатиш билан тенг кучли, яъни

$$\left(\tau B\frac{\partial u_h}{\partial x}(t_k,x)+(I+\tau\cdot C)u_h(t_k,x),v_h\right)_K= \\ =0,\forall v_h\in P_n(K) \qquad (3.20)$$

$v_h = u_h$ олиб, (3.20) нинг чап томони $a(u_h,v_h)$ эканини эътиборга олиб 2-леммадан қуйидаги тенгсизликни оламиз.

$$(u_h,u_h)_K+\frac{\tau}{2}(D_h u_h\cdot u_h)\big|_{\Gamma(K)-\Gamma^*(K)}+\frac{\tau}{2}(D_h u_h\cdot u_h)\big|_{\Gamma^*(K)}\le 0 \qquad (3.21)$$

У холда $K\in\Omega_h$ ихтиёрий элемент бўлгани учун (3.21) тенгсизликдан қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади.

$$(u_h,u_h)_\Omega+\frac{\tau}{2}\sum_{K\in\Omega}(D_h u_h\cdot u_h)\big|_{\Gamma(K)-\Gamma^*(K)}+\frac{\tau}{2}(D_h u_h\cdot u_h)\big|_{\Gamma(\Omega)}\le 0 \qquad (3.22)$$

Кўриниб турибдики

$$\sum_{K\in\Omega}(D_h u_h\cdot u_h)\big|_{\Gamma(K)-\Gamma^*(K)}\equiv 0 \qquad (3.23)$$

(3.23) ни ва (3.4) шартни эътиборга олиб (3.22) дан қуйидаги тенгсизлик келиб чиқади.

$$(u_h,u_h)_\Omega\le 0 \qquad (3.24)$$

Охирги тенгсизликдан $u_h\equiv 0$.

2-леммага кўра (3.14) тенгсизликдан қуйидаги тенгсизликни оламиз.

$$2(u_h^k,u_h^k)_K+\tau(D_h u_h^k\cdot u_h^k)\big|_{\Gamma(K)-\Gamma^*(K)}+\tau(D_h u_h^k\cdot u_h^k)\big|_{\Gamma^*(K)}\le 2(u_h^{k-1}+\tau\cdot F_h^k,u_h^k)_K \qquad (3.25)$$

Бу ерда $u_h^k=u_h(t_k,x), u_h^{k-1}=u_h(t_{k-1},x), F_h^k=F_h(t_k,x)$

(25) тенгсизликни қуйидаги кўринишда ёзамиз.

$$2\|u_h^k\|_K^2+\tau(D_h u_h^k\cdot u_h^k)\big|_{\Gamma(K)-\Gamma^*(K)}+\tau(D_h u_h^k\cdot u_h^k)\big|_{\Gamma^*(K)}\le 2(u_h^{k-1}+\tau\cdot F_h^k,u_h^k)_K\le \\ \|u_h^{k-1}+\tau\cdot F_h^k\|_K^2+\|u_h^k\|_K^2 \qquad (3.26)$$

Охирги тенгсизликдан қуйидаги тенгсизликни оламиз.

$$\|u_h^k\|_K^2+\tau(D_h u_h^k\cdot u_h^k)\big|_{\Gamma(K)-\Gamma^*(K)}+\tau(D_h u_h^k\cdot u_h^k)\big|_{\Gamma^*(K)}\le\|u_h^{k-1}+\tau\cdot F_h^k\|_K^2\le \\ \le\left(\|u_h^{k-1}\|_K+\tau\|F_h^k\|_K\right)^2\le(\tau+1)\|u_h^{k-1}\|_K^2+(\tau^2+\tau)\|F_h^k\|_K^2 \qquad (3.27)$$

(3.23) айниятни ва (3.4) шартни эътиборга олиб (3.27) тенгсизликдан қуйидаги тенгсизлик ўринли эканлиги келиб чиқади.

$$\left\| u_h^k \right\|_\Omega^2 \le (\tau+1)\left\| u_h^{k-1} \right\|_\Omega^2 + (\tau^2+\tau)\left\| F_h^k \right\|_\Omega^2 \qquad (3.28)$$

Охирги тенгсизликдан

$$\left\| u_h(t,x) \right\|_\Omega^2 \le e^T \left\| u_h(0,x) \right\|_\Omega^2 + (T+1)(e^T-1)F \qquad (3.29)$$

Келиб чиқади.

Бу ерда $F = \max\limits_{t\in[0,T]} \left\| F_h(t,x) \right\|_\Omega^2$

Теорема исбот қилинди.

Ушбу теорема аппроксимацион ошкормас схемамизнинг (3.4) ва (3.5) шартлар бажарилганда турғун эканлигини кўрсатади.

Агар $[\ell_1, \ell_2]$ кесмани N_x та тенг бўлакга бўлиб $x_i = \ell_1 + hi$, $i = 0,\dots,N_x, h = \frac{\ell_2 - \ell_1}{N_x}$)

$u_h(t,x)$ яқинлашувчи ечимни $u_h(t,x) = \sum\limits_{i=0}^{Nx} u_i(t)\varphi_i(x)$ кўринишда изласак. Бу ерда $\varphi_i(x)$ базис функция, $u_i(t) = u(x_i,t) = \begin{pmatrix} u_{1i}(t) \\ u_{2i}(t) \\ \vdots \\ u_{Mi}(t) \end{pmatrix}$ вектор функция. Базис функция сифатида

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} \dfrac{x_1 - x}{h}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & x \notin [x_0, x_1] \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{h}, & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \dfrac{x_{i+1} - x}{h}, & x \in [x_i, x_{i+1}] \qquad i = 1,\dots,N_x - 1 \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}] \end{cases} \qquad (3.30)$$

$$\varphi_N(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{N-1}}{h}, & x \in [x_{N-1}, x_N] \\ 0, & x \notin [x_{N-1}, x_N] \end{cases}$$

функцияни оладиган бўлсак (3.1) система учун

$$ALU_i^{n+1} + B\xi U_i^{n+1} + CLU_i^{n+1} = \tau \cdot F_i^{n+1} + ALU_i^n$$
$$i = 1,\dots N_x - 1 \qquad (3.31)$$

айирмали схемалар системасини оламиз.

Бу ерда $U_i^n = u(x_i, t_n)$, $F_i^n = F(x_i, t_n)$ вектор функцияларнинг аппроксимацияси ва қуйидаги силжиш, ўрта, айирмали операторлар киритилган:

$$\psi^{\pm1} U_i^n = U_{i\pm1}^n$$

$$L = \frac{h}{6}\psi^{-1} + \frac{2}{3}h + \frac{h}{6}\psi^{+1}$$

$$\xi = \frac{\psi^{+1} - \psi^{-1}}{2}$$

чизиқли тенгламалар системаси ёпиқ бўлиши учун

$x = \ell_1$ да

$$R_1(t_{n+1})U_0(t_{n+1}) = g_1(t_{n+1})$$

(3.32)

$x = l_2$ да

$$R_2(t_{n+1})U_{N_x}(t_{n+1}) = g_2(t_{n+1})$$

чегаравий шартлар

$$U_i(0) = \Psi(x_i) \quad \mathrm{i} = \overline{0, \mathrm{N_x}} \qquad (3.33)$$

бошланғич шарт , $x = \ell_1$ ва $x = l_2$ да $u(x,t)$ вектор функциянинг чегаравий шарт қўйилмаган компоненталари учун (3.1)-(3.3) системанинг уларга мос келувчи тенгламалари аппроксимация қилинади. Шундай қилиб ёпиқ чизиқли тенгламалар системаси хосил қилинади.Бу чизиқли тенгламалар системаси бирорта итерацион метод билан ечилади.

Ушбу алгоритм асосида, Delphi-7 дастурлаш тилида, схема турғунлигини етарли шартлари бўлган (3.4) ва (3.5) шартларни текшириб шартлар бажарилмаган ҳолатда бажарилмаганлиги ҳақида маълумот берадиган ва (3.1)-(3.3) масалани сонли ечимини берадиган, фойдаланишга қулай, интерфейсли дастур яратилган.

3.2 Дастур ёрдамида олинган натижалар .

1-масала.

$\Omega \subset R^1$ соҳада сўнувчи тўлқин тенламаси

$$w_{tt} + \beta w_t - w_{xx} = \phi, \beta \geq 0$$

$t = 0$ да w, w_t берилган

$\Gamma(\Omega)$ да $w = 0$

$u_1 = w_x, u_2 = w_t$ белгилашлар киритиб қуйидаги системани оламиз

$$u_t + \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} u_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi \end{pmatrix}$$

Бу масалада

$$D = \begin{pmatrix} 0 & -n_1 \\ -n_1 & 0 \end{pmatrix}$$ бўлади,

Агар соха $\Omega = \{x: 0 < x < 2\pi\}$, $\beta = 1$ ва $\phi = \sqrt{2}\sin x \cos\sqrt{2}t - \sin x \sin\sqrt{2}t$

Бўлиб $t = 0$ да $u_1 = 0, u_2 = \sqrt{2}\sin x$

$x = 0$ ва $x = 2\pi$ да чегаравий шарт $u_2 = 0$.

$t > 0$ учун бундай аралаш масаланинг аниқ ечими

$$u_1 = \cos x \sin\sqrt{2}t, u_2 = \sqrt{2}\sin x \cos\sqrt{2}t$$

бўлади.

Текшириб кўриш қийин эмас берилган аралаш масалада теорема шартлари бажарилади.

Пастдаги жадвалда $\|u\|_\Omega = \sqrt{\int_\Omega u \cdot u}$ нормада, x бўйича бўлаклар сони $N_x = 10$ ва $N_x = 20$ бўлганда, вақт бўйича бўлаклар сони N_t хар хил бўлганда, $t = 10$ даги аниқ ечим билан чекли элементлар усули орқали олинган ечим фарқи $\|u - v\|$ қандай бўлгани келтирилган. Бу ерда v чекли элементлар усули орқали олинган ечим .

N_t	$N_x = 10$	$N_x = 20$
10	1.4727946	1.4809423
20	0.8696831	0.9004951
30	0.6106927	0.6495351
40	0.4648763	0.5072824
50	0.3713381	0.4152946
100	0.1727490	0.2133765
200	0.0872766	0.1022803
250	0.0797011	0.0794215
300	0.0784801	0.0642277
600	0.0898479	0.0288687
1200	0.1018759	0.0201977

2-масала.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u_1}{\partial x} - u_2 = x^2 + 2e^x - t - 3 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 = e^x + 2x + t \end{cases}$$

Агар соха $\Omega = \{x : 0 < x < 2\}$ бўлиб $t = 0$ да $u_1 = e^x - 1, u_2 = 4 - x^2$

чегаравий шартлар

$x = 0$ да

$u_1 = u_2 - 4$

$x = 2$ да

. $u_2 = u_1 + 1 - e^2$

$t > 0$ учун бундай аралаш масаланинг аниқ ечими

$$u_1 = e^x + t - 1, u_2 = t - x^2 + 4$$

бўлади.

Текшириб кўриш қийин эмас берилган аралаш масалада теорема шартлари бажарилади.

Пастдаги жадвалда $\|u\|_\Omega = \sqrt{\int_\Omega u \cdot u}$ нормада, x бўйича бўлаклар сони $N_x = 10$ ва $N_x = 50$ бўлганда, вақт бўйича бўлаклар сони N_t хар хил бўлганда, $t = 10$ даги аниқ ечим билан чекли элементлар усули орқали олинган ечим фарқи $\|u - v\|$ қандай бўлгани келтирилган. Бу ерда v чекли элементлар усули орқали олинган ечим .

N_t	$N_x = 10$	$N_x = 50$

1	0.2686729	0.0107586
5	0.3160192	0.0126509
6	0.3183041	0.0127420
10	0.3228699	0.0129239
20	0.3262483	0.0130583
100	0.3293328	0.0131816

3-масала.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_1}{\partial t} + 2\dfrac{\partial u_1}{\partial x} - u_1 - u_2 = x^2 - 4x - e^x - 2t - 2 \\ \dfrac{\partial u_2}{\partial t} - \dfrac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 - u_2 = 6 - 2e^x - x^2 \end{cases}$$

Агар соха $\Omega = \{x : 0 < x < 2\}$ бўлиб $t = 0$ да $u_1 = 4 - x^2, u_2 = e^x - 1$ чегаравий шартлар

$x = 0$ да

$u_1 = u_2 + 4$

$x = 2$ да

. $u_2 = u_1 + e^2 - 1$

$t > 0$ учун бундай аралаш масаланинг аниқ ечими

$$u_1 = t - x^2 + 4, u_2 = e^x + t - 1$$

бўлади.

Текшириб кўриш қийин эмас берилган аралаш масалада теорема шартлари бажарилмайди.

Пастдаги жадвалда $\|u\|_\Omega = \sqrt{\int_\Omega u \cdot u}$ нормада, x бўйича бўлаклар сони $N_x = 10$ ва $N_x = 50$ бўлганда, вақт бўйича бўлаклар сони N_t хар хил бўлганда, $t = 10$ даги аниқ ечим билан чекли элементлар усули орқали олинган ечим фарқи $\|u - v\|$ қандай бўлгани келтирилган. Бу ерда v чекли элементлар усули орқали олинган ечим .

N_t	$N_x = 10$	$N_x = 50$
1	0.0915250	0.0037183
5	3.0694630	0.1295768
6	6043.796	285.2882286
10	849.7957	32.0050905
20	46.48143	1.8016243
100	46.81653	1.9184525

4. Икки ўлчовли биринчи тартибли гиперболик типдаги тенглама ва системалар учун чекли элементлар усули.

4.1 Масаланинг қўйилиши:

$G = \{(x, y, t) : t \in (0, T), (x, y) \in \Omega\}$ соҳада

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}+Du=F(x,y,t) \qquad (4.1)$$

симметрик t-гиперболик системани , $\partial\Omega$ да (4. $\partial\Omega$ - Ω соҳанинг чегараси)

$$R(x,y,t)u\big|_{\partial\Omega}=g(t,x,y) \qquad (4.2)$$

чегаравий шартларни ва $t=0$ да

$$u(0,x,y)=u_0(x,y), \quad (x;y)\in\Omega \qquad (4.3)$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи u вектор-функцияни топиш талаб қилинган бўлсин. (4.1)-(4.3) масаласи симметрик t-гиперболик система учун қўйилган аралаш масала деб номланади [1].

Бу ерда $A=(a_{ks})$, $B=(b_{ks}), C=(c_{ks})$ симметрик матрицалар , бундан ташқари A мусбат аниқланган матрица, $D=(d_{ks})$ ихтиёрий матрица, R-мос тўғрибурчакли ўзгарувчан матрица. A,B,C,D - $N\times N$ ўлчамли ҳақиқий ўзгармас матрицалар , x,y,t эркли ўзгарувчилар,

$u(x,y,t)=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\ \vdots\\u_N\end{pmatrix}$ x,y,t га боғлиқ номаълум вектор функция, $F(x,y,t)=\begin{pmatrix}f_1\\f_2\\ \vdots\\f_N\end{pmatrix}$

x,y,t га боғлиқ берилган вектор функция.

4.2 Берилган сохада айирмали тенгламалар системасини тузиш.

(4.1) системанинг ошкормас айирмали тенгламалар системасини $\Omega=\{(x,y):0<x<l_x, 0<y<l_y\}$ сохада тузамиз.

Аралаш масаланинг берилган сохода қўйилиши [1].

$\Omega:=\{(t,x,y): t\in(0,T), x\in(0,l_x), y\in(0,l_y)\}$ соҳада қуйидаги симметрик t-гиперболик системани U ечимини топиш талаб қилинсин:

$$A\frac{\partial u}{\partial t}+B\frac{\partial u}{\partial x}+C\frac{\partial u}{\partial y}+Du=F(x,y,t) \qquad (4.4)$$

қуйидаги чегаравий шартларни қаноатлантирадиган:

$x=0$ да

$$\Phi_1(y,t)U(0,y,t)=\varphi_1(y,t), \quad 0<t\le T,\ 0\le y\le l_y \qquad (4.5)$$

$x=l_x$ да

$$\Phi_2(y,t)U(l_x,y,t)=\varphi_2(y,t), \quad 0<t\le T,\ 0\le y\le l_y$$

$y=0$ да

$$\Psi_1(x,t)U(x,0,t)=\psi_1(x,t), \quad 0<t\le T,\ 0\le x\le l_x$$

$y=l_y$ да

$$\Psi_2(x,t)U(x,l_y,t)=\psi_2(x,t), \quad 0<t\le T,\ 0\le x\le l_x$$

ва $t=0$ да бошланғич шарт билан

$$U(0,x,y)=U_0(x,y) \qquad (4.6)$$

Бу ерда $\Phi_1,\Phi_2,\Psi_1,\Psi_2$ тўғри бурчакли матрицалар бўлиб, уларнинг сатрлар сони мос равишда $A^{-1}B$ ёки $A^{-1}C$ матрицаларнинг мусбат ва манфий хос қийматлари сонига тенг[2].

Сохани аппроксимация қиламиз.Тенг ўлчамли тўр тугунларининг координаталари қуйидаги тенгликлардан топилади $x_i=h_x i \quad (i=0,...,N_x, h_x=\frac{l_x}{N_x})$, $y_j=h_y j \quad (j=0,\ldots,N_y,h_y=\frac{l_y}{N_y})$. $[0;T]$ кесмани N_t бўлакга бўламиз, у холда вақт бўйича қатламлар қуйидаги тенгликлардан топилади $t_n=\tau n \quad (n=0,...,N_t,\tau=\frac{T}{N_t})$.

(4.4-4.6) аралаш масаланинг $U_h(t,x,y)$ яқинлашувчи ечимини

$$U_h(t,x,y)=\sum_{i=0}^{N_x}\sum_{j=0}^{N_y}U_{ij}\cdot\varphi_i(x)\cdot\psi_j(y) \qquad (4.7)$$

кўринишда излаймиз. Бу ерда $U_{ij}(t)$ қуйидаги дифференциал тенгламалар системасидан:

$$\left(A\frac{\partial u_h}{\partial t},Q_{ij}\right)(t)+\left(B\frac{\partial u_h}{\partial x},Q_{ij}\right)(t)+\left(C\frac{\partial u_h}{\partial y},Q_{ij}\right)(t)+(Du_h,Q_{ij})(t)=(F,Q_{ij})(t), \ (x_i,y_j)\in\Omega \quad (4.8)$$

Бу ерда

$$(u,v)=\iint_{\Omega_{ij}}u(x,y)\cdot v(x,y)d\Omega_{ij}$$

ва қуйидаги чегаравий шартлардан топилади:

$x=0$ да

$$\Phi_1(y_j,t)U_{0j}(t)=\varphi_1(y_j,t),\quad \mathrm{j}=0,...,N_y \qquad (4.9)$$

$x=l_x$ да

$$\Phi_2(y_j,t)U_{N_x j}(t)=\varphi_2(y_j,t),\quad \mathrm{j}=0,...,N_y$$

$y=0$ да

$$\Psi_1(x_i,t)U_{i0}(t)=\psi_1(x_i,t),\quad \mathrm{i}=0,...,N_x$$

$y=l_y$ да

$$\Psi_2(x_i,t)U_{iN_y}(t)=\psi_2(x_i,t),\quad \mathrm{i}=0,...,N_x$$

бошланғич шарт:

$$U_{ij}(0)=U_0(x_i,y_j)\quad \mathrm{i}=\overline{0,\mathrm{N_x}}\quad \mathrm{j}=\overline{0,\mathrm{N_y}} \qquad (4.10)$$

(4.8) оддий дифференциал тенгламалар системасини ошкормас схема билан аппроксимациясини кўриб чиқамиз.

$$\left(A(\frac{u_h^{n+1}-u_h^n}{\tau},Q_{ij}\right)+\left(B\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial x},Q_{ij}\right)+\left(C\frac{\partial u_h^{n+1}}{\partial y},Q_{ij}\right)+(Du_h^{n+1},Q_{ij})=(F_h^{n+1},Q_{ij})\ (x_i,y_j)\in\Omega$$

$M_{ij}=M(x_i;y_j)\in\Omega$, $(i=1,...,N_x-1, j=1,...,N_y-1)$ тугунда айирмали тенгламалар системаси қуйидаги кўринишда бўлади.

$$\sum_{s=1}^{N}\left[\begin{array}{l}\alpha_{1ks}\cdot u_{sij}^{n+1}+\alpha_{2ks}\cdot u_{si+1j}^{n+1}+\alpha_{3ks}\cdot u_{si+1j+1}^{n+1}+\alpha_{4ks}\cdot u_{sij+1}^{n+1}+\alpha_{5ks}\cdot u_{si-1j+1}^{n+1}+\\+\alpha_{6ks}\cdot u_{si-1j}^{n+1}+\alpha_{7ks}\cdot u_{si-1j-1}^{n+1}+\alpha_{8ks}\cdot u_{sij-1}^{n+1}+\alpha_{9ks}\cdot u_{si+1j-1}^{n+1}\end{array}\right]=f_{kij}^{n+1}+$$

$$\sum_{s=1}^{N}\left[\begin{array}{l}\frac{a_{ks}}{\tau}\cdot(\frac{4}{9}u_{sij}^{n}+\frac{1}{9}(u_{si+1j}^{n}+u_{sij+1}^{n}+u_{si-1j}^{n}+u_{sij-1}^{n})+\frac{1}{36}(u_{si+1j+1}^{n}+\\+u_{si-1j+1}^{n}+u_{si-1j-1}^{n}+u_{si+1j-1}^{n}))\end{array}\right] \tag{4.11}$$

$k=1,\ldots,N$

Бу ерда

$$\alpha_{1ks}=\frac{4}{9}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})$$

$$\alpha_{2ks}=\frac{1}{9}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})+\frac{1}{3}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x}$$

$$\alpha_{3ks}=\frac{1}{36}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})+\frac{1}{12}\cdot(\frac{b_{ks}}{h_x}+\frac{c_{ks}}{h_y})$$

$$\alpha_{4ks}=\frac{1}{9}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})+\frac{1}{3}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$$\alpha_{5ks}=\frac{1}{36}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})-\frac{1}{12}\cdot(\frac{b_{ks}}{h_x}-\frac{c_{ks}}{h_y})$$

$$\alpha_{6ks}=\frac{1}{9}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})-\frac{1}{3}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x}$$

$$\alpha_{7ks}=\frac{1}{36}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})-\frac{1}{12}\cdot(\frac{b_{ks}}{h_x}+\frac{c_{ks}}{h_y})$$

$$\alpha_{8ks}=\frac{1}{9}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})-\frac{1}{3}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$$\alpha_{9ks}=\frac{1}{36}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})+\frac{1}{12}\cdot(\frac{b_{ks}}{h_x}-\frac{c_{ks}}{h_y})$$

$M_{00}=M(x_0;y_0)\in\partial\Omega$ тугунда, агар ечимнинг k-компонентасига чегаравий шарт қўйилмаган бўлса, ечимнинг k-компонентаси учун қуйидаги айирмали тенгламани оламиз.

$$\sum_{s=1}^{N}\left[\alpha_{1ks}\cdot u_{s00}^{n+1}+\alpha_{2ks}\cdot u_{s10}^{n+1}+\alpha_{3ks}\cdot u_{s11}^{n+1}+\alpha_{4ks}\cdot u_{s01}^{n+1}\right]=\frac{1}{4}f_{k00}^{n+1}+$$

$$\sum_{s=1}^{N}\left[\frac{a_{ks}}{\tau}\cdot(\frac{1}{9}u_{s00}^{n}+\frac{1}{18}u_{s10}^{n}+\frac{1}{36}\cdot u_{s11}^{n}+\frac{1}{18}u_{s01}^{n}\right] \tag{4.12}$$

Бу ерда

$$\alpha_{1ks}=\frac{1}{9}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})-\frac{1}{6}\cdot(\frac{b_{ks}}{h_x}+\frac{c_{ks}}{h_y})$$

$$\alpha_{2ks}=\frac{1}{18}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})+\frac{1}{6}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x}-\frac{1}{12}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$$\alpha_{3ks}=\frac{1}{36}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})+\frac{1}{12}\cdot(\frac{b_{ks}}{h_x}+\frac{c_{ks}}{h_y})$$

$$\alpha_{4ks}=\frac{1}{18}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})-\frac{1}{12}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x}+\frac{1}{6}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$M_{0j}=M(x_0;y_j)\in\partial\Omega,\ (j=1,...,N_y-1)$ тугунда, агар ечимнинг k-компонентасига чегаравий шарт қўйилмаган бўлса, ечимнинг k-компонентаси учун қуйидаги айирмали тенгламани оламиз.

$$\sum_{s=1}^{N}\left[\alpha_{1ks}\cdot u_{s0j}^{n+1}+\alpha_{2ks}\cdot u_{s1j}^{n+1}+\alpha_{3ks}\cdot u_{s1j+1}^{n+1}+\alpha_{4ks}\cdot u_{s0j+1}^{n+1}+\alpha_{5ks}\cdot u_{s0j-1}^{n+1}+\alpha_{6ks}\cdot u_{s1j-1}^{n+1}\right]=\frac{1}{2}f_{k0j}^{n+1}+$$
$$\sum_{s=1}^{N}\left[\frac{a_{ks}}{\tau}\cdot(\frac{2}{9}u_{s0j}^{n}+\frac{1}{9}u_{s1j}^{n}+\frac{1}{18}u_{s0j+1}^{n}+\frac{1}{18}u_{s0j-1}^{n}+\frac{1}{36}(u_{s1j+1}^{n}+u_{s1j-1}^{n}))\right] \qquad (4.13)$$

Бу ерда

$$\alpha_{1ks}=\frac{2}{9}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})-\frac{1}{3}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x}$$

$$\alpha_{2ks}=\frac{1}{9}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})+\frac{1}{3}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x}$$

$$\alpha_{3ks}=\frac{1}{36}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})+\frac{1}{12}\cdot(\frac{b_{ks}}{h_x}+\frac{c_{ks}}{h_y})$$

$$\alpha_{4ks}=\frac{1}{18}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})-\frac{1}{12}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x}+\frac{1}{6}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$$\alpha_{5ks}=\frac{1}{18}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})-\frac{1}{12}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x}-\frac{1}{6}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$$\alpha_{6ks}=\frac{1}{36}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})+\frac{1}{12}\cdot(\frac{b_{ks}}{h_x}-\frac{c_{ks}}{h_y})$$

$M_{0N_y}=M(x_0;y_{N_y})\in\partial\Omega$ тугунда, агар ечимнинг k-компонентасига чегаравий шарт қўйилмаган бўлса, ечимнинг k-компонентаси учун қуйидаги айирмали тенгламани оламиз.

$$\sum_{s=1}^{N}\left[\alpha_{1ks}\cdot u_{s0N_y}^{n+1}+\alpha_{2ks}\cdot u_{s0N_y-1}^{n+1}+\alpha_{3ks}\cdot u_{s1N_y-1}^{n+1}+\alpha_{4ks}\cdot u_{s1N_y}^{n+1}\right]=\frac{1}{4}f_{k0N_y}^{n+1}+$$
$$\sum_{s=1}^{N}\left[\frac{a_{ks}}{\tau}\cdot(\frac{1}{9}u_{s0N_y}^{n}+\frac{1}{18}u_{s0N_y-1}^{n}+\frac{1}{36}\cdot u_{s1N_y-1}^{n}+\frac{1}{18}u_{s1N_y}^{n}\right] \qquad (4.14)$$

Бу ерда

$$\alpha_{1ks}=\frac{1}{9}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})-\frac{1}{6}\cdot(\frac{b_{ks}}{h_x}-\frac{c_{ks}}{h_y})$$

$$\alpha_{2ks}=\frac{1}{18}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})-\frac{1}{12}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x}-\frac{1}{6}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$$\alpha_{3ks}=\frac{1}{36}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})+\frac{1}{12}\cdot(\frac{b_{ks}}{h_x}-\frac{c_{ks}}{h_y})$$

$$\alpha_{4ks}=\frac{1}{18}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})+\frac{1}{6}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x}+\frac{1}{12}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$M_{N_x0}=M(x_{N_x};y_0)\in\partial\Omega$ тугунда, агар ечимнинг k-компонентасига чегаравий шарт қўйилмаган бўлса, ечимнинг k-компонентаси учун қуйидаги айирмали схемани оламиз.

$$\sum_{s=1}^{N}\left[\alpha_{1ks}\cdot u^{n+1}_{sN_x0}+\alpha_{2ks}\cdot u^{n+1}_{sN_x1}+\alpha_{3ks}\cdot u^{n+1}_{sN_x-11}+\alpha_{4ks}\cdot u^{n+1}_{sN_x-10}\right]=\frac{1}{4}f^{n+1}_{kN_x0}+$$
$$\sum_{s=1}^{N}\left[\frac{a_{ks}}{\tau}\cdot(\frac{1}{9}u^{n}_{sN_x0}+\frac{1}{18}u^{n}_{sN_x1}+\frac{1}{36}\cdot u^{n}_{sN_x-11}+\frac{1}{18}u^{n}_{sN_x-10}\right] \quad (4.15)$$

Бу ерда

$$\alpha_{1ks}=\frac{1}{9}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})+\frac{1}{6}\cdot(\frac{b_{ks}}{h_x}-\frac{c_{ks}}{h_y})$$

$$\alpha_{2ks}=\frac{1}{18}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})+\frac{1}{12}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x}+\frac{1}{6}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$$\alpha_{3ks}=\frac{1}{36}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})-\frac{1}{12}\cdot(\frac{b_{ks}}{h_x}-\frac{c_{ks}}{h_y})$$

$$\alpha_{4ks}=\frac{1}{18}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})-\frac{1}{6}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x}-\frac{1}{12}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$M_{N_xj}=M(x_{N_x};y_j)\in\partial\Omega,\ (j=1,...,N_y-1)$ тугунда, агар ечимнинг k-компонентасига чегаравий шарт қўйилмаган бўлса, ечимнинг k-компонентаси учун қуйидаги айирмали схемани оламиз.

$$\sum_{s=1}^{N}\begin{bmatrix}\alpha_{1ks}\cdot u^{n+1}_{sN_xj}+\alpha_{2ks}\cdot u^{n+1}_{sN_xj+1}+\alpha_{3ks}\cdot u^{n+1}_{sN_x-1j+1}+\\ +\alpha_{4ks}\cdot u^{n+1}_{sN_x-1j}+\alpha_{5ks}\cdot u^{n+1}_{sN_x-1j-1}+\alpha_{6ks}\cdot u^{n+1}_{sN_xj-1}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}f^{n+1}_{kN_xj}+$$
$$\sum_{s=1}^{N}\left[\frac{a_{ks}}{\tau}\cdot(\frac{2}{9}u^{n}_{sN_xj}+\frac{1}{18}u^{n}_{sN_xj+1}+\frac{1}{9}u^{n}_{sN_x-1j}+\frac{1}{18}u^{n}_{sN_xj-1}+\frac{1}{36}(u^{n}_{sN_x-1j+1}+u^{n}_{sN_x-1j-1})\right] \quad (4.16)$$

Бу ерда

$$\alpha_{1ks} = \frac{2}{9}\cdot(d_{ks} + \frac{a_{ks}}{\tau}) + \frac{1}{3}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x}$$

$$\alpha_{2ks} = \frac{1}{18}\cdot(d_{ks} + \frac{a_{ks}}{\tau}) + \frac{1}{12}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x} + \frac{1}{6}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$$\alpha_{3ks} = \frac{1}{36}\cdot(d_{ks} + \frac{a_{ks}}{\tau}) - \frac{1}{12}\cdot(\frac{b_{ks}}{h_x} - \frac{c_{ks}}{h_y})$$

$$\alpha_{4ks} = \frac{1}{9}\cdot(d_{ks} + \frac{a_{ks}}{\tau}) - \frac{1}{3}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x}$$

$$\alpha_{5ks} = \frac{1}{36}\cdot(d_{ks} + \frac{a_{ks}}{\tau}) - \frac{1}{12}\cdot(\frac{b_{ks}}{h_x} + \frac{c_{ks}}{h_y})$$

$$\alpha_{6ks} = \frac{1}{18}\cdot(d_{ks} + \frac{a_{ks}}{\tau}) + \frac{1}{12}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x} - \frac{1}{6}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$M_{N_x N_y} = M(x_{N_x}; y_{N_y}) \in \partial\Omega$ тугунда, агар ечимнинг k-компонентасига чегаравий шарт қўйилмаган бўлса, ечимнинг k-компонентаси учун қуйидаги айирмали схемани оламиз.

$$\sum_{s=1}^{N}\left[\alpha_{1ks}\cdot u_{sN_xN_y}^{n+1} + \alpha_{2ks}\cdot u_{sN_x-1N_y}^{n+1} + \alpha_{3ks}\cdot u_{sN_x-1N_y-1}^{n+1} + \alpha_{4ks}\cdot u_{sN_xN_y-1}^{n+1}\right] = \frac{1}{4} f_{kN_xN_y}^{n+1} + \sum_{s=1}^{N}\left[\frac{a_{ks}}{\tau}\cdot(\frac{1}{9}u_{sN_xN_y}^{n} + \frac{1}{18}u_{sN_x-1N_y}^{n} + \frac{1}{36}\cdot u_{sN_x-1N_y-1}^{n} + \frac{1}{18}u_{sN_xN_y-1}^{n}\right] \quad (4.17)$$

Бу ерда

$$\alpha_{1ks} = \frac{1}{9}\cdot(d_{ks} + \frac{a_{ks}}{\tau}) + \frac{1}{6}\cdot(\frac{b_{ks}}{h_x} + \frac{c_{ks}}{h_y})$$

$$\alpha_{2ks} = \frac{1}{18}\cdot(d_{ks} + \frac{a_{ks}}{\tau}) - \frac{1}{6}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x} + \frac{1}{12}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$$\alpha_{3ks} = \frac{1}{36}\cdot(d_{ks} + \frac{a_{ks}}{\tau}) - \frac{1}{12}\cdot(\frac{b_{ks}}{h_x} + \frac{c_{ks}}{h_y})$$

$$\alpha_{4ks} = \frac{1}{18}\cdot(d_{ks} + \frac{a_{ks}}{\tau}) + \frac{1}{12}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x} - \frac{1}{6}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$M_{i0} = M(x_i; y_0) \in \partial\Omega$, $(i = 1,..., N_x - 1)$ тугунда, агар ечимнинг k-компонентасига чегаравий шарт қўйилмаган бўлса, ечимнинг k-компонентаси учун қуйидаги айирмали схемани оламиз.

$$\sum_{s=1}^{N}\left[\alpha_{1ks}\cdot u_{si0}^{n+1} + \alpha_{2ks}\cdot u_{si+10}^{n+1} + \alpha_{3ks}\cdot u_{si+11}^{n+1} + \alpha_{4ks}\cdot u_{si1}^{n+1} + \alpha_{5ks}\cdot u_{si-11}^{n+1} + \alpha_{6ks}\cdot u_{si-10}^{n+1}\right] = \frac{1}{2} f_{kij}^{n+1} + \sum_{s=1}^{N}\left[\frac{a_{ks}}{\tau}\cdot(\frac{2}{9}u_{si0}^{n} + \frac{1}{18}u_{si+10}^{n} + \frac{1}{9}u_{si1}^{n} + \frac{1}{18}u_{si-10}^{n} + \frac{1}{36}(u_{si+11}^{n} + u_{si-11}^{n}))\right] \quad (4.18)$$

Бу ерда

$$\alpha_{1ks}=\frac{2}{9}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})-\frac{1}{3}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$$\alpha_{2ks}=\frac{1}{18}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})+\frac{1}{6}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x}-\frac{1}{12}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$$\alpha_{3ks}=\frac{1}{36}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})+\frac{1}{12}\cdot(\frac{b_{ks}}{h_x}+\frac{c_{ks}}{h_y})$$

$$\alpha_{4ks}=\frac{1}{9}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})+\frac{1}{3}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$$\alpha_{5ks}=\frac{1}{36}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})-\frac{1}{12}\cdot(\frac{b_{ks}}{h_x}-\frac{c_{ks}}{h_y})$$

$$\alpha_{6ks}=\frac{1}{18}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})-\frac{1}{6}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x}-\frac{1}{12}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$M_{iN_y}=M(x_i;y_{N_y})\in\partial\Omega$, $(i=1,...,N_x-1)$ тугунда, агар ечимнинг k-компонентасига чегаравий шарт қўйилмаган бўлса, ечимнинг k-компонентаси учун қуйидаги айирмали схемани оламиз.

$$\sum_{s=1}^{N}\begin{bmatrix}\alpha_{1ks}\cdot u_{siN_y}^{n+1}+\alpha_{2ks}\cdot u_{si-1N_y}^{n+1}+\alpha_{3ks}\cdot u_{si-1N_y-1}^{n+1}+\\+\alpha_{4ks}\cdot u_{siN_y-1}^{n+1}+\alpha_{5ks}\cdot u_{si+1N_y-1}^{n+1}+\alpha_{6ks}\cdot u_{si+1N_y}^{n+1}\end{bmatrix}=\frac{1}{2}f_{kij}^{n+1}+$$

$$\sum_{s=1}^{N}\left[\frac{a_{ks}}{\tau}\cdot(\frac{2}{9}u_{siN_y}^{n}+\frac{1}{18}(u_{si+1N_y}^{n}+u_{si-1N_y}^{n})+\frac{1}{9}u_{siN_y-1}^{n}+\frac{1}{36}(u_{si-1N_y-1}^{n}+u_{si+1N_y-1}^{n}))\right] \tag{4.19}$$

Бу ерда

$$\alpha_{1ks}=\frac{2}{9}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})+\frac{1}{3}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$$\alpha_{2ks}=\frac{1}{18}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})-\frac{1}{6}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x}+\frac{1}{12}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$$\alpha_{3ks}=\frac{1}{36}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})-\frac{1}{12}\cdot(\frac{b_{ks}}{h_x}+\frac{c_{ks}}{h_y})$$

$$\alpha_{4ks}=\frac{1}{9}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})-\frac{1}{3}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$$\alpha_{5ks}=\frac{1}{36}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})+\frac{1}{12}\cdot(\frac{b_{ks}}{h_x}-\frac{c_{ks}}{h_y})$$

$$\alpha_{6ks}=\frac{1}{18}\cdot(d_{ks}+\frac{a_{ks}}{\tau})+\frac{1}{6}\cdot\frac{b_{ks}}{h_x}+\frac{1}{12}\cdot\frac{c_{ks}}{h_y}$$

$u(x,t)$ вектор функциянинг чегаравий шарт қўйилмаган компоненталари учун (4.4) системанинг уларга мос келувчи тенгламалари аппроксимация қилинади. Шундай қилиб ёпиқ чизиқли тенгламалар системаси хосил қилинади.Бу чизиқли тенгламалар системаси бирорта итерацион метод билан ечилади.

4.3 Чекли элементлар усули ёрдамида олинган айирмали схемалар системасининининг турғунлиги.

(4.1)-(4.3) аралаш масала ягона ечимга эга ва қуйидаги шартлар[2-4]

$$\int_{\Gamma(\Omega)} Su \cdot u \geq 0 \qquad \forall t \in [0,T] \qquad (4.20)$$

$$D + D^* \geq 0 \qquad (4.21)$$

бажарилади деб фараз қиламиз. Бу ерда $S = n_x B + n_y C$, $n = (n_x, n_y)$

Ω сохага бирлик ташқи нормал. Ω соҳани чекли, ички умумий нуқталарга эга бўлмаган элементларга бўламиз(юқорида кўрсатилгандек) . Элементни K ҳарфи билан белгилаймиз.У холда $\Omega = \bigcup_{K \subset \Omega} K$. У ҳолда қуйидаги теорема ўринли.

2-Теорема.

Яқинлашувчи ечим $u_h \in P_n(K)$ K да бир қийматли аниқланган ва қуйидаги тенгсизлик ўринли

$$\|u_h(t,x)\|_{\Omega}^2 \leq e^T \|u_h(0,x)\|_{\Omega}^2 + (T+1)(e^T - 1)F \qquad (4.22)$$

Бу ерда норма $\|u\|_{\Omega} = \sqrt{\int_{\Omega} u \cdot u}$, $\quad F = \max_{t \in [0,T]} \|F_h(t,x)\|_{\Omega}^2$

Ушбу схема асосида, Delphi-7 дастурлаш тилида, схема турғунлигини етарли шартлари бўлган (4.20) ва (4.21) шартларни текшириб шартлар бажарилмаган ҳолатда бажарилмаганлиги ҳақида маълумот берадиган ва (4.4)-(4.6) масалани сонли ечимини берадиган, фойдаланишга қулай, интерфейсли дастур яратилган.

4.4 Дастур ёрдамида олинган натижалар .

1-масала.

Ушбу ошкормас схемамиз орқали олинган тўлқин тенгламасининг сонли ечими билан аниқ ечими фарқини келтирамиз [2].

$\Omega \subset R^2$ соҳада сўнувчи тўлқин тенламаси

$w_{tt} + \beta w_t - w_{xx} - w_{yy} = \phi, \beta \geq 0$

$t = 0$ да w, w_t берилган

$\Gamma(\Omega)$ да $w = 0$

$u_1 = w_x, u_2 = w_y, u_3 = w_t$ белгилашлар киритиб қуйидаги системани оламиз

$$u_t + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} u_x + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} u_y + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \phi \end{pmatrix}$$

Бу масалада

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -n_1 \\ 0 & 0 & -n_2 \\ -n_1 & -n_2 & 0 \end{pmatrix}$$ бўлади,

Агар соха $\Omega = \{(x, y) : 0 < x < 2\pi, 0 < y < 2\pi\}$, $\beta = 1$ ва $\phi = \sqrt{2}\sin x \sin y \cos\sqrt{2}t$
Бўлиб $t = 0$ да $u_1 = 0, u_2 = 0, u_3 = \sqrt{2}\sin x \sin y$
Квадратнинг ҳамма томонида чегаравий шарт $u_3 = 0$ эканини текшириш қийин эмас.
$t > 0$ учун бундай аралаш масаланинг аниқ ечими

$$u_1 = \cos x \sin y \sin\sqrt{2}t, u_2 = \sin x \cos y \sin\sqrt{2}t,$$

$$u_3 = \sqrt{2}\sin x \sin y \cos\sqrt{2}t$$

бўлади.
Текшириб кўриш қийин эмас берилган аралаш масалада теорема шартлари бажарилади.
Пастдаги жадвалда $\|u\|_\Omega = \sqrt{\int_\Omega u \cdot u}$ нормада, x ва y бўйича бўлаклар сони мос равишда $N_x = 10$ ва $N_y = 10$ бўлганда, x ва y бўйича бўлаклар сони мос равишда $N_x = 20$ ва $N_y = 20$ бўлганда, вақт бўйича бўлаклар сони N_t хар хил бўлганда, $t = 5$ даги аниқ ечим билан чекли элементлар усули орқали олинган ечим фарқи $\|u - v\|$ қандай бўлгани келтирилган. Бу ерда v чекли элементлар усули орқали олинган ечим .

N_t	$N_x = 10, N_y = 10$	$N_x = 20, N_y = 20$
10	1.5946068	1.8541702
20	0.8277012	1.1462326
40	0.2609793	0.6105126
80	0.1678327	0.2709303
160	0.3566830	0.0801252

5. Хулоса.

Кўриниб турибдики чекли элементлар усули(ЧЭУ) мухандислик ва физикавий масалаларни ечишда энг самарали усуллардан бири. Базис функцияларнинг даражаларини, сонини ошириб янада аникроқ ечим олишимиз мумкин. ЧЭУ камчилиги шундан иборатки, базис функцияларнинг даражаси, сони ортган сари хисоблаш алгоритми мураккаблашиб боради.

Фойдаланилган адабиётлар.

1. С. К. Годунов Уравнения математической физики. М.:Наука,1979,372с.
2. R. S. Falk and G. R. Richter. Explicit finite element methods for symmetric hyperbolic equations. SIAM J. NUMER. ANAL.Vol.36,No.3 pp. 935-952
3. K. O. Friedrichs,Symmetric positive linear differential equations, Comm. Pure Appl.Math.,11 (1958), pp. 333-418.
4. С.К.Годунов, А.В.Забродин и др.Численное решение многомерных задач газовой динамики. М.:Наука,1976. 75с.
5. L. J. Segerlind.Applied Finite Element Analysis. John Wiley & Sons, Inc. 1976. 289-308 с.
6. Марчук Р.И. Методы вычислительной мат-ки. М.:Наука,1980.
7. Szabo B.A.,Lee G.C.,Derivation of Stiffness Matrices for Problems in Plane Elasticity by Galerkin's Method, Intern.J. of Numerical Methods in Engineering, 1, 301-310 (4.1969).
8. Turner M.J., Clough R.W., Martin H.C., Topp L.J., Stifness and Deflection Analysis of Complex Structures, J. Aeronaut. Sci., 23 805-824(4.1956).
9. Wilson E.L., Nickell R.E., Application of the Finite Element Method to Heat Conduction Analysis, Nuclear Engineering and Design 4, 276-286(4.1966)
10. Zienkiewicz O.C., Cheung Y.K., Finite Elements in the Solution of Field Problems, The Engineer, 507-510(4.1965)
11. Зенкевич О., Метод конечных элементов в технике. Изд-во «Мир» М., 1975
12. Applied Finite Element Analysis. Larry J. Segerlind. John Wiley & Sons, Inc. 1976.