

**M.T.O'ROZBOYEV NOMIDAGI MEXANIKA VA INSHOOTLAR
SEYSMIK MUSTAHKAMLIGI INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY
DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.T/FM.61.01 RAQAMLI
ILMIY KENGASH**

O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

TILOVOV OTAJON O'KTAMOVICH

**ELASTIK VA TERMOELASTIK CHEGARAVIY MASALALARNI
KUCHLANISHLARGA NISBATAN SONLI YECHISH**

01.02.04-Deformatsiyalanuvchan qattiq jismlar mexanikasi

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Toshkent - 2024

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации
доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD)
on physical-mathematical sciences**

Tilovov Otajon O'ktamovich

Elastik va termoelastik chegaraviy masalalarni kuchlanishlarga nisbatan sonli yechish.....3

ТИЛОВОВ ОТАЖОН УКТАМОВИЧ

Численное решение упругих и термоупругих краевых задач в напряжениях.
.....23

Tilovov Otajon O'ktamovich

The numerical solution of elastic and thermoelastic boundary problems in stresses.....43

Эълон қилинган ишлар рўйхати

Список опубликованных работ

List of published works.....46

**M.T.O'ROZBOYEV NOMIDAGI MEXANIKA VA INSHOOTLAR
SEYSMIK MUSTAHKAMLIGI INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY
DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.T/FM.61.01 RAQAMLI
ILMIY KENGASH**

O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

TILOVOV OTAJON O'KTAMOVICH

**ELASTIK VA TERMOELASTIK CHEGARAVIY MASALALARNI
KUCHLANISHLARGA NISBATAN SONLI YECHISH**

01.02.04-Deformatsiyalanuvchan qattiq jismlar mexanikasi

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO'YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

Toshkent - 2024

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida № B2023.4.PhD/FM962 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz) Ilmiy kengash veb-sahifasida (<https://instmech.academy.uz>) va «ZiyoNet» Axborot ta'lim portalida (www.ziynet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy raxbar:

Xaldjigitov Abduvali Abdisamadovich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Rasmiy opponentlar:

Xusanov Baxtiyor Ergashbaevich
fizika-matematika fanlari doktori, katta ilmiy xodim

Safarov Ismoil Ibrohimovich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Yetakchi tashkilot:

Toshkent Davlat Transport Universiteti.

Dissertatsiya himoyasi O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi M.T.O'rozboyev nomidagi Mexanika va inshootlar seysmik mustahkamligi instituti huzuridagi ilmiy darajalar beruvchi DSc.02/30.12.2019.t/fm.61.01 raqamli Ilmiy kengashining 2024 yil «15» yanvar soat 16:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100047, Toshkent sh., Do'rmon yo'li ko'chasi, 40-uy.320-majlislar zali. Tel.: (+99871) 262-71-52, faks: (+99871) 262-71-32, e-mail: instmech@academy.uz.)

Dissertatsiya bilan O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi M.T.O'rozboyev nomidagi Mexanika va inshootlar seysmik mustahkamligi institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (24 raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100047, Toshkent sh., Do'rmon yo'li ko'chasi, 40-uy. M.T.O'rozboyev nomidagi Mexanika va inshootlar seysmik mustahkamligi instituti, ARM bo'limi. Tel.: (+99871) 262-71-52, e-mail: instmech@academy.uz.)

Dissertatsiya avtoreferati 2024 yil «26» dekabr kuni tarqatildi.
(2024yil «24» dekabrda 24-raqamli reester bayonnomasi).

M.Mirsaidov

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, t.f.d., professor., O'zR FA akademigi

M.K.Usarov

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash ilmiy kotibi, f-m.f.d., professor

R.A.Abirov

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi, f-m.f.d., k.i.x.

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahonda fan va zamonaviy texnologiyalar sohasida olib borilayotgan izlanishlarda turli xil konstruksiyalar va ular elementlarining mustahkamlik zahiralarini aniqlash muhim rol o'ynaydi. Mustahkamlik zahiralarini aniqlash, odatda deformatsiyalanuvchi qattiq jismlardan yasalgan konstruksiyalarda kuchlanishlarning tarqalishini o'rganishga va xavfli maksimal qiymatlarini aniqlashga keltiriladi. Shu jihatdan jahon miqyosida, turli ob'ektlar va ular qismlarining mustahkamlik zahiralarini aniqlash, tajribalarga asoslangan empirik formulalarga yoki ko'chish vektorlariga nisbatan chegaraviy masalarni sonli yechishga va ular yordamida zaruriy kuchlanishlarni hisoblashga asoslangan. Kuchlanishlarni ko'chishlar orqali sonli hisoblashda, tabiiy ravishda ma'lum approksimatsiya xatoliklariga yo'l qo'yiladi va u mustahkamlik zahiralarining aniqligiga katta ta'sir ko'rsatadi.

Jahonda turli ob'ektlar va ular qismlarining mustahkamlik zahiralarini aniqlashda, odatiy ko'chish funksiyalaridan tashqari kuchlanish va deformatsiyalarga asoslangan matematik modellarni qurish keng tadqiq etilmoqda. Ayniqsa, kuchlanishlarga asoslangan modellarga, u samarali bo'lganligi uchun, oxirgi paytlarda olimlar tomonidan alohida e'tiborga sazovor bo'lmoqda. Shu sababli kuchlanishlarga nisbatan deformatsiyalanuvchan qattiq jismlar mexanikasining ikki va uch o'lchovli chegaraviy masalalarni tuzish asosan kuchlanish funksiyasini kiritish orqali kuchlanishlarni aniqlashga qaratilgan ilmiy tadqiqotlar olib borilmoqda. Ushbu yo'nalishda bino va inshootlarining konstruksiyalarni mustahkamlik zahiralarini yanada aniqroq va samarali usullarda aniqlash masalasi deformatsiyalanuvchan qattiq jismlar mexanikasining xalqaro miqyosdagi dolzarb muammolaridan biridir. Ushbu muammolarni mazkur tadqiqotda taklif qilingan usullar yordamida qisman hal qilish mumkin.

Respublikamizda fundamental fanlar va axborot texnologiyalari doirasida matematika, amaliy matematika va matematik modellashtirish hamda sonli modellashtirishning rivojlantirishga alohida e'tibor qaratilmoqda. Xususan, chiziqli va nochiziqli deformatsiyalanish jarayonlarini matematik va sonli modellashtirish, hamda chekli-ayirmali usul, oshkor va oshkormas sxemalar, ketma-ket yaqinlashish usullarini takomillashtirish bo'yicha salmoqli natijalarga erishildi. "Matematika-fizika, amaliy matematika va matematik modellashtirish" fanining muhim yo'nalishlari bo'yicha xalqaro miqyosda ilmiy tadqiqotlar olib borish fundamental tadqiqotlarning asosiy vazifasi sifatida alohida belgilangan¹. Mazkur qaror ijrosini ta'minlash doirasida qattiq jismlarning deformatsiyalanish jarayonini matematik va sonli modellashtirish sohasidagi ilmiy tadqiqotlar dolzarb hisoblanadi. Qaror ijrosini ta'minlashda deformatsiyalarga asoslangan matematik va sonli modellarni qurish va samarali dasturiy ta'minot muhim ahamiyatga ega.

O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022 yil 30 maydagi "O'zbekiston Respublikasining seysmik xavfsizligini ta'minlash tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida" gi PF-144 sonli Farmonida bino va

¹ O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 7 maydagi "Matematika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida" gi PQ-4708-son qarori.

inshootlar zilzilabardoshligini ta'minlashning ustuvor yo'nalishlari ko'rsatib o'tilgan¹. Qaror ijrosini ta'minlashda kuchlanishlarga nisbatan asoslangan zamonaviy matematik va sonli modellar qurish va ularni samarali sonli yechish va dasturiy ta'minotini yaratish muhim ahamiyatga ega. 2022–2026 yillarda Yangi O'zbekistonni rivojlantirish strategiyasida yer osti inshootlarining seysmik mustahkamligi muammolarini hal etish bo'yicha ilmiy tadqiqotlarni yanada rivojlantirish vazifasi ham belgilab qo'yilgan. Ushbu vazifalarni amalga oshirishda bino va inshootlarning mustahkamlik zahiralari yuqori aniqlikda hisoblash muhim ahamiyatga ega.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalarni rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga mosligi. Dissertatsiya O'zbekiston Respublikasining fan va texnologiyalar rivojlanishining IV "Matematika, mexanika va informatika" ustuvor yo'nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o'rganilganlik darajasi. Ma'lumki, deformatsiyalanuvchan qattiq jismlar mexanikasida chiziqli statik chegaraviy masala, muvozanat tenglamasi, Guk qonuni, Koshi munosabati va mos chegaraviy shartlardan tashkil topgan va odatda ko'chish vektori komponentalariga nisbatan Lamé tenglamasiga keltirib olinadi. Zarur kuchlanishlar esa ko'chishlar orqali Guk qonuni yordamida hisoblab olinadi.

Odatda, chegaraviy masalalarini sonli yechishda chekli-ayirmali usul, chekli elementlar usuli, chegaraviy elementlar usuli va boshqa usullar keng foydalaniladi. Mazkur usullar va turli xil modellar O.Zenkevich, B.Pobedrya, V.Kabulov, T. Bo'riyev, M. Mirsaidov, K. Sultonov, M. Aripov, I. N. Molchanov, B. Qurmanboyev, Mirzayev, A. Xaldjigitov, B. Xusanov, A. Abirov va boshqalarning ishlarida qaralgan.

Elastiklik nazariyasining chegaraviy masalalarini kuchlanishlarga nisbatan qo'yilishi deformatsiyalanuvchi qattiq jismlar mexanikasining dolzarb muammosidir. Birinchi marta kuchlanishlarga nisbatan chegaraviy masalalarni shakllantirish Beltrami (1886) va Mitchell (1900) ishlarida, deformatsiyalarning uzluksizligi shartlari ostida ko'rib chiqilgan va oltita differentsial tenglamadan iborat. Ma'lumki, kuchlanishlardagi tekis masalalar, odatda, deformatsiyalarning birgalikdagi sharti $\varepsilon_{x,y} + \varepsilon_{y,x} = 2\varepsilon_{xy,xy}$ asosida, Eri kuchlanish funksiyasiga nisbatan bigarmonik tenglamani yechishga keltiriladi. Eri funksiyasiga o'xshash, Maksvell va Moreraning fazoviy kuchlanish funksiyalari ham ma'lum. Filonenko-Borodich kuchlanish tenzorini trigonometrik funksiyalar qatori sifatida qarab, variatsion usul yordamida fazoviy masalani Maksvell funksiyasiga nisbatan yechishga keltirgan. Konovalov ishlarida kuchlanishlarga oid dinamik chegaraviy masalalar ko'rib chiqilgan. Borodachevning ishlarida Beltrami-Mitchellning oltita tenglamasidan faqat uchta mustaqil ekanligi ko'rsatilgan. Kuchlanishlardagi chegaraviy masalalarning yangicha usulda qo'yilishi Pobedriyaning ishlarida taklif qilingan, xususiyl holda undan Beltrami-Mitchell tenglamalari kelib chiqadi. Erishilgan yutuqlarga qaramasdan, kuchlanishlarga nisbatan chegaraviy masalalarni sonli

¹ O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022 yil 30-maydagi "O'zbekiston Respublikasining seysmik xavfsizligini ta'minlash tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida" PF-144 sonli Farmoni

yechish ochiqlicha qolmoqda. Mazkur ish, elastiklik va termoelastiklik nazariyasining chegaraviy masalalarini kuchlanishlarga nisbatan shakllantirish va sonli yechishga bag'ishlangan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta'lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejaları bilan bog'liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti O'zbekiston Milliy universiteti "Mexanika va matematik modellashtirish" kafedrasida olib borilayotgan ilmiy-tadqiqot ishlariga muvofiq bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi elastiklik va termo-elastiklik nazariyasining chegaraviy masalalarini kuchlanishlarga nisbatan shakllantirish va sonli yechishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

elastiklik nazariyasining tekis masalasini to'g'ridan-to'g'ri kuchlanishlarga nisbatan shakllantirish;

termo-elastiklikning chegaraviy masalalarining kuchlanish va haroratga nisbatan qo'yilishi;

elastiklik va termo-elastiklik nazariyasining tekislik va fazoviy masalalarini kuchlanishlarga nisbatan shakllantirish;

elastik va termo-elastik masalalar uchun chekli-ayirmali tenglamalarni ishlab chiqish;

elastiklik va termo-elastiklik nazariyasining tekislik va fazoviy masalalarini kuchlanishlarga nisbatan sonli yechish.

Tadqiqotning ob'ekti tekis va fazoviy jismlarning mexanik va termomexanik kuchlar ta'sirida deformatsiyalanish jarayonidir.

Tadqiqotning predmeti elastiklik va termo-elastiklik nazariyasining tekis va fazoviy chegaraviy masalalarini kuchlanishlarga nisbatan shakllantirish va sonli yechishdan iborat.

Tadqiqotning usullari deformatsiyalarning birgalikda bo'lish shartiga, mexanika qonunlari doirasidagi Beltrami-Mitchell tenglamalariga, chekli-ayirmali va iteratsion usullar kabi sonli modellashtirish metodlariga, xamda C++ algoritmik tilida dasturlashga asoslangan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

elastiklik va termoelastiklik nazariyasi chegaraviy masalalarining bevosita kuchlanishlarga nisbatan yangicha qo'yilishi taklif etilgan (Eri kuchlanish funksiyalardan foydalanmagan holda);

elastiklik va termoelastiklik nazariyasining tekis va fazoviy masalalari uchun kuchlanishlarga nisbatan sonli modellari yaratilgan, algoritmi ishlab chiqilgan va iteratsiya usuli bilan sonli yechilgan;

to'g'ri to'rtburchakli plastina va parallelepipedlar uchun kuchlanishlarga nisbatan qo'yilgan elastik va termoelastik masalalar turli xil termomexanik yuklanishlarda chegaraviy shartlarda sonli yechildi va ma'lum yechimlar bilan solishtirildi;

kuchlanishlarga nisbatan qo'yilgan elastiklik va termoelastik chegaraviy masalalarning sonli yechimlarining aniqligi ko'chishlarga nisbatan qo'yilgan masalalarga nisbatan yuqori ekanligi ko'rsatilgan;

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

ob'ektlarning (konstruktsiyalar va ular elementlari) mustahkamlik zahiralarini samaraliroq aniqlashga imkon beradigan matematik model yaratilgan;

deformatsiyalanuvchi qattiq jismlarda kuchlanishlarning tarqalishini o'rganishga imkon beradigan dasturiy ta'minot ishlab chiqilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi elastik va termo-elastik masalalar qo'yilishining qat'iyligi, sonli natijalarning aniq yechim va ma'lum yechimlar bilan taqqoslanganligi, shuningdek, hisoblash tajribalarini o'tkazish orqali ta'minlangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati, adabiyotlarda ma'lum bo'lgan masalalar farqli ravishda, elastik va termo-elastik chegaraviy masalalarning aynan kuchlanishlarga nisbatan qo'yilganligi va deformatsiyalanuvchi qattiq jismlarning mustahkamlik zahiralarini samaraliroq va yanada ishonchliroq aniqlashga imkon berishligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati, sonli modellarning kuchlanishlarga nisbatan qurilganligi, va ularni sonli yechish algoritmi va dasturlar majmuasining yaratilganligi, hamda ob'ektlarning mustahkamlik zahiralarini samaraliroq aniqlashda foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Bino va inshootlarning mustahkamlik zaxiralarini to'g'ridan-to'g'ri kuchlanishlarga nisbatan aniqlash usulini ishlab chiqish bo'yicha dissertatsiya ishida olingan natijalar asosida

elastiklik va termo-elastiklik nazariyasining kuchlanishlarga nisbatan tekis va fazoviy masalalarini sonli yechish usullari yordamida qurilish tashkilotlarida binolarni loyihalashda, mustahkamlik va ishonchlilik zaxiralarini aniqlashda foydalanilgan. (Qurilish va uy-joy kommunal xo'jaligi vazirligi 2024 yil 26-iyundagi 14-06/6476-sonli ma'lumotnomasi). Ilmiy natijalarni qo'llash, mehnat unumdorligini 10-12 foizga oshirishga, tannarxni 10-15 foizga kamaytirishga imkon bergan. **Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi.** Mazkur tadqiqot natijalari 9 ta, jumladan 5 ta xalqaro, 4 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o'tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e'lon qilinganligi. Tadqiqot mavzusi bo'yicha 15 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan O'zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 5 ta maqola, jumladan 2 ta xorijiy (barchasi SCOPUS ma'lumotlar bazasida) va 3 ta respublika jurnallarida nashr etilgan, 1 ta EHM uchun dasturiy mahsulotga guvohnoma olingan.

Dissertatsiya tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish, to'rt bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va ilovalardan iborat. Dissertatsiyaning hajmi 91 bet.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati, tadqiqotning respublikada fan va texnologiyalarni rivojlantirishning ustuvor yo'nalishlariga muvofiqligi belgilangan. Dissertatsiya mavzusi bo'yicha xorijiy ilmiy

tadqiqotlarga sharh berilgan va muammoning o'rganilganlik darajasi muhokama qilingan, maqsad va vazifalar shakllantirilgan, tadqiqot ob'ekti va predmeti aniqlangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari taqdim etilgan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarini amaliyotga tatbiq etish, chop etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi haqida ma'lumotlar berilgan.

Dissertatsiyaning **“Elastiklik nazariyasi chegaraviy masalalarining kuchlanishlarga nisbatan qo'yilishi”** nomli birinchi bobi elastiklik nazariyasi masalalarini kuchlanishlarga nisbatan qo'yilishiga bag'ishlangan.

1.1 paragrafda deformatsiyalarning birgalikda bo'lish sharti va uning kuchlanishlarga nisbatan ko'rinishi keltirilgan.

Ma'lumki, deformatsiyalarning birgalikda bo'lish sharti (Sen-Venan sharti) quyidagi ko'rinishga ega:

$$\nabla^2 \varepsilon_{ij} + \theta_{,ij} - \varepsilon_{ik,kj} - \varepsilon_{jk,ki} = 0, \quad \theta = \varepsilon_{kk} \quad (1)$$

yoki yoyilgan holatda 6 ta munosabatdan iborat

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x_2 \partial x_3},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x_1 \partial x_3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x_2 \partial x_3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x_1 \partial x_3},$$

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x_2} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x_1 \partial x_2}.$$

Guk qonunini yordamida

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \sigma \right) \quad (2)$$

Sen-Venan shartini kuchlanishlarga nisbatan quyidagicha yozib olish mumkin

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x_1^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x_2^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial x_2 \partial x_3}, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x_1^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x_1 \partial x_3}, \\ \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x_3} - \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x_1} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \right), \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x_3} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \right), \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x_2} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \right). \end{aligned} \quad (4)$$

1.2 paragrafda Beltrami-Mitchell tenglamalari va Pobedriyaning kuchlanishlarga nisbatan yangi chegaraviy masalasining qo‘yilishi ko‘rsatib o‘tilgan. Odatda, kuchlanishlarga nisbatan qo‘yilgan chegaraviy masala muvozanat tenglamasi:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad x_i \in V, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

Beltrami-Mitchell tenglamasi:

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} S_{,ij} = -(X_{i,j} + X_{j,i}) - \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} X_{k,k}, \quad S = \sigma_{kk}, \quad (6)$$

va quyidagi chegaraviy shartlardan iborat

$$\sigma_{ij} \cdot n_j \Big|_{\Sigma_2} = S_i \quad (7)$$

bu yerda X_i – xajmiy kuchlar, n_j – tashqi normal, Σ_1 -sitr, S_i sirt kuchi.

(5), (6) va (7) tenglamalar sistemasining to‘la bo‘lishini ta’minlash uchun Pobedriya tavsiyasiga asosan muvozanat tenglamasini chegarada qaraymiz

$$\sigma_{ij,j} \Big|_{\Sigma} = -X_i \Big|_{\Sigma}. \quad (8)$$

Pobedriya tomonidan taklif etilgan, kuchlanishlarga nisbatan yangi masala quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\begin{aligned} \Delta \sigma_{ij} + b \sigma_{kk,ij} + c \sigma_{mn,mn} \delta_{ij} - e \Delta \sigma_{kk} \delta_{ij} + \\ + a [\sigma_{ik,kj} + \sigma_{jk,ki}] = -(a+1)(F_{i,j} + F_{j,i} + \frac{1-b-e}{2b-1} F_{k,k} \delta_{ij}), \end{aligned} \quad (9)$$

chegaraviy shartlar quyidagilardan iborat:

$$\sigma_{ij} \cdot n_j \Big|_{\Sigma_1} = \sigma_i, \quad (10)$$

$$\sigma_{ij,j} \Big|_{\Sigma} = -X_i \Big|_{\Sigma}. \quad (11)$$

bu yerda a -, b -, c -, e - lar o'zgarimas koefssientlar.

1.3 paragraf elastiklik nazariyasining tekis va fazoviy masalalarini kuchlanishlarga nisbatan qo'yilishiga bag'ishlangan. Elastiklik nazariyasining tekis masalasini kuchlanishlarga nisbatan A,B,C,D va E kabi bir necha ko'rinishdagi chegaraviy masalalar sifatida qo'yish mumkinligi ko'rsatib o'tilgan. **A masala** quyidagi muvozanat tenglamasidan

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} &= 0,\end{aligned}\tag{12}$$

va deformatsiyaning birgalikda bo'lish shartidan iborat

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y}.\tag{13}$$

Ma'lumki, (13)-tenglamani, muvozanat tenglamasi va Guk qonuni yordamida garmonik tenglama ko'rinishida yozib olish mumkin

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0\tag{14}$$

bu yerda ∇^2 – Laplas operatori.

Odatda, elastiklik nazariyasida **A masalani** yechish, muvozanat tenglamasini qanoatlantiruvchi quyidagi Eri funksiyalarni

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}, \quad \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y},\tag{15}$$

(14)-tenglamaga qo'yish orqali, quyidagi bigarmonik tenglamani yechishga keltirib olinadi

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0.\tag{16}$$

B masala esa yuqoridagi (12) muvozanat tenglamasi va kuchlanishlarga nisbatan yozilgan deformatsiyalarning birgalikda bo'lish sharti yordamida hosil qilinadi:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}.\tag{17}$$

C masala esa (12) muvozanat tenglamalari va Beltrami-Mitchellning quyidagi uchinchi tenglamasida yordamida hosil qilish mumkin:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y} \right) = 0.\tag{18}$$

D masala esa muvozanat tenglamalaridan mos ravishda x va y bo'yicha hosila olishdan hosil bo'lgan tenglamalar va Beltrami-Mitchellning uchinchi tenglamasi (18) dan hosil qilingan, ya'ni:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0, \\
\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0, \\
\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

E masala esa Pobedriyaning yangi tenglamalaridan iborat:

$$\begin{aligned}
d \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + (1-e) \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + (b-e) \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) + 2(b+a) \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0, \\
d \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + (1-e) \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + (b-e) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} \right) + 2(b+a) \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0, \\
(1+a) \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} + (1+a) \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2} + (b+a) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y} \right) &= 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

bu yerda $d = 1 + b + c + 2a - e$ o'zgarmlar.

Yuqoridagi barcha **A, B, C, D, E masalalar** uchun chegaraviy va qo'shimcha chegaraviy shartlarni quyidagi ko'rinishda olamiz:

$$\begin{aligned}
(\sigma_x n_1 + \sigma_{xy} n_2) \Big|_{\Gamma} = S_1, \quad (\sigma_{xy} n_1 + \sigma_y n_2) \Big|_{\Gamma} = S_2 \\
\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \right) \Big|_{\Gamma} = 0.
\end{aligned} \tag{21}$$

Yuqorida keltirilgan **B, C, D, E masalalar** (**A masaladan** tashqari) to'g'ridan-to'g'ri kuchlanishlarga nisbatan yechishga olib kelingan.

Xuddi yuqoridagidek, elastiklik nazariyasining fazoviy chegaraviy masalasini, uchta muvozanat tenglamasi va Beltrami-Mitchellning (6) 2-guruh tenglamalaridan yordamida hosil qilish mumkin, ya'ni

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0,
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} \right) &= 0, \\
\frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} \right) &= 0, \\
\frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} \right) &= 0,
\end{aligned}$$

Chegaraviy shartlar

$$\begin{aligned}
(\sigma_x n_1 + \sigma_{xy} n_2 + \sigma_{xz} n_3) \Big|_{\Sigma_2} &= S_1, \\
(\sigma_{xy} n_1 + \sigma_y n_2 + \sigma_{yz} n_3) \Big|_{\Sigma_2} &= S_2, \\
(\sigma_{xz} n_1 + \sigma_{yz} n_2 + \sigma_z n_3) \Big|_{\Sigma_2} &= S_3,
\end{aligned} \tag{23}$$

qo‘shimcha chegaraviy shartlar esa quyidagilardan iborat:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \Big|_{\Sigma} &= 0, \\
\left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) \Big|_{\Sigma} &= 0, \\
\left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \Big|_{\Sigma} &= 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Dissertatsiyaning **“Kuchlanishlarga nisbatan termo-elastiklik masalalar”** nomli ikkinchi bobi, termo-elastiklik nazariyasining tekis va fazoviy masalalarini kuchlanishlarga nisbatan qo‘yilishiga bag‘ishlangan.

2.1 paragrafda Beltrami-Mitchell tenglamalarining haroratni e‘tibotga olgan holda ko‘rinishi keltirib chiqarilgan

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} S_{,ij} = -(X_{i,j} + X_{j,i}) - \frac{\nu}{1-\nu} X_{k,k} \delta_{ij} - 2\mu\alpha(T_{,ij} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \nabla^2 T). \tag{25}$$

bu yerda α -issiqlik kengayish koeffsienti.

2.2 paragrafda termo-elastiklik nazariyasining tekis masalasini quyidagi yangi ko‘rinishga keltirilgan

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \sigma_x &= -2\mu\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 T \right), \\
\nabla^2 \sigma_y &= -2\mu\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 T \right), \\
\nabla^2 \sigma_{xy} &= -\frac{2\mu\alpha(1+\nu)}{\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}.
\end{aligned} \tag{26}$$

Chegaraviy va qo‘shimcha shartlar quyidagi ko‘rinishga ega

$$(\sigma_x n_1 + \sigma_{xy} n_2) \Big|_{\Gamma} = S_1, \quad (\sigma_{xy} n_1 + \sigma_y n_2) \Big|_{\Gamma} = S_2, \tag{27}$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \right) \Big|_{\Gamma} = 0. \tag{28}$$

2.3 paragrafda termo-elastiklik nazariyasining fazoviy masalasining qo‘yilishi keltirilgan. (25)-tenglamada, xajmiy kuchlar yo‘q deb faraz qilinsa fazoviy masala quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} &= 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} &= 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right),\end{aligned}\quad (29)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} &= 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \\ \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial z^2} &= 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial z^2} &= 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z}, \\ \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial z^2} &= 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z}.\end{aligned}\quad (30)$$

Chegaraviy shartlari esa yuqoridagi (23-24) kabi bo‘ladi.

2.4 paragraf qisman bog‘langan termo-elastiklik chegaraviy masalani qo‘yilishiga bag‘ishlangan. Yuqoridagi (25) tenglamani ikki o‘lchovli holda quyidagicha yozib olamiz

$$\begin{aligned}\nabla^2 \sigma_x &= -2\mu\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 T \right), \\ \nabla^2 \sigma_y &= -2\mu\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 T \right), \\ \nabla^2 \sigma_{xy} &= -\frac{2\mu\alpha(1+\nu)}{\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}.\end{aligned}\quad (31)$$

Issiqlik o‘tkazuvchanlik tenglamasi esa quyidagi ko‘rinishga ega

$$\lambda_0 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} - T\alpha(3\lambda + 2\mu) \frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{11})}{\partial t} = 0. \quad (32)$$

Statik holda (32) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (33)$$

chegaraviy shart va qo‘shimcha chegaraviy shartlar quyidagicha bo‘ladi.

$$\left(\sigma^x n_1 + \sigma^{xy} n_2 \right) \Big|_\Gamma = S_1, \quad \left(\sigma^{xy} n_1 + \sigma^y n_2 \right) \Big|_\Gamma = S_2, \quad (34)$$

$$T \Big|_\Gamma = f,$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) \Big|_\Gamma = 0, \quad \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \right) \Big|_\Gamma = 0. \quad (35)$$

(31), (33) va (34-35) tenglamalar qisman bog‘langan termo-elastiklik chegaraviy masalani tashkil etadi.

Dissertatsiyaning uchinchi bobi “**Kuchlanishlarga nisbatan qo‘yilgan elastiklik va termo-elastiklik masalalarning diskret hollari va ularni sonli yechish usullari**” ga bag‘ishlangan. Ushbu bob oldingi boblarda ko‘rib chiqilgan kuchlanishlar nisbatan qo‘yilgan elastik va termo-elastik chegaraviy masalalar uchun chekli ayirmali tenglamalarni qurishga bag‘ishlangan. Xususan, elastiklik nazariyasining **B**, **C** va **D** tekis chegaraviy masalalariga mos chekli-ayirmali tenglamalar qurilgan. Shuningdek, tekis va fazoviy termo-elastiklik masalalar uchun ham chekli ayirmali tenglamalari tuzilgan.

3.1 paragrafda, **B**, **C** va **D** masalalar to‘g‘ri to‘rtburchak(2a,2b) soxada qaralgan. **D** masala uchun chekli-ayirmali tenglamalarni keltirish bilan cheklanamiz

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{i+1,j}^x - 2\sigma_{i,j}^x + \sigma_{i-1,j}^x}{h_1^2} + \frac{\sigma_{i+1,j+1}^{xy} - \sigma_{i+1,j-1}^{xy} - \sigma_{i-1,j+1}^{xy} + \sigma_{i-1,j-1}^{xy}}{4h_1h_2} &= 0, \\ \frac{\sigma_{i,j+1}^y - 2\sigma_{i,j}^y + \sigma_{i,j-1}^y}{h_2^2} + \frac{\sigma_{i+1,j+1}^{xy} - \sigma_{i-1,j+1}^{xy} - \sigma_{i+1,j-1}^{xy} + \sigma_{i-1,j-1}^{xy}}{4h_1h_2} &= 0, \\ \frac{\sigma_{i+1,j}^{xy} - 2\sigma_{ij}^{xy} + \sigma_{i-1,j}^{xy}}{h_1^2} + \frac{\sigma_{i,j+1}^{xy} - 2\sigma_{ij}^{xy} + \sigma_{i,j-1}^{xy}}{h_2^2} + \\ \frac{1}{1+\nu} \left\{ \frac{\sigma_{i+1,j+1}^x - \sigma_{i-1,j+1}^x - \sigma_{i+1,j-1}^x + \sigma_{i-1,j-1}^x}{4h_1h_2} + \frac{\sigma_{i+1,j+1}^y - \sigma_{i-1,j+1}^y - \sigma_{i+1,j-1}^y + \sigma_{i-1,j-1}^y}{4h_1h_2} \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (36)$$

Chegaraviy shartlar sifatida to‘g‘ri to‘rtburchakni OX o‘qi bo‘yicha cho‘zuvchi S kuch qaralgan, ya’ni

$x = \mp a$: da

$$\begin{aligned} \sigma_{x \ 0j}^{(0)} = S, \quad \sigma_{xy \ 0j}^{(0)} = 0, \\ \sigma_{x \ N_1j}^{(0)} = S, \quad \sigma_{xy \ N_1j}^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (37)$$

$y = \mp b$: da

$$\begin{aligned} \sigma_{y \ i0}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{xy \ i0}^{(0)} = 0, \\ \sigma_{y \ iN_2}^{(0)} = 0, \quad \sigma_{xy \ iN_2}^{(0)} = 0. \end{aligned} \quad (38)$$

Qo‘shimcha chegaraviy shartlar esa quyidagicha berilgan

$x = \mp a$: da

$$\begin{aligned} \sigma_{y \ 0j}^{(0)} = \sigma_{y \ 0,j+1}^{(0)} + h_2 \frac{\sigma_{xy \ 1j}^{(0)} - \sigma_{xy \ 0j}^{(0)}}{h_1}, \\ \sigma_{y \ n_1j}^{(0)} = \sigma_{y \ n_1,j+1}^{(0)} + h_2 \frac{\sigma_{xy \ n_1,j}^{(0)} - \sigma_{xy \ n_1-1,j}^{(0)}}{h_1}. \end{aligned} \quad (39)$$

$y = \mp b$: da

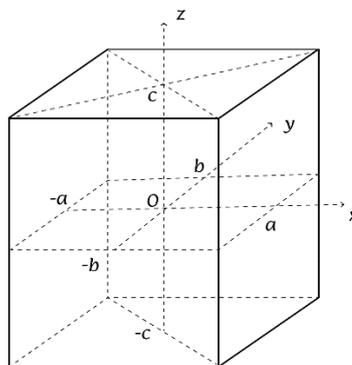
$$\sigma_x^{(0)} = \sigma_x^{(0)} + h_1 \frac{\sigma_{xy}^{(0)} - \sigma_{xy}^{(0)}}{h_2},$$

$$\sigma_x^{(0)} = \sigma_x^{(0)} + h_1 \frac{\sigma_{xy}^{(0)} - \sigma_{xy}^{(0)}}{h_2}.$$
(40)

Chekli-ayirmali tenglamalar $\sigma_{ij}^x, \sigma_{ij}^y$ va σ_{ij}^{xy} ga nisbatan oddiy iteratsiya usulida yechilgan.

Xuddi **D** masaladagidek, **B** va **C** masalalar uchun ham chekli-ayirmali tenglamalar tuzilgan va iteratsiya usuli yordamida sonli yechilgan.

Elastiklik nazariyasining fazoviy masalasi o'lchamlari $(2a, 2b, 2c)$ bo'lgan parallelepipedda qaralgan (1-rasm). Paralallepipedga OZ o'qi bo'ylab S cho'zuvchi kuch qo'yilgan va qolgan tomonlari kuchdan holi bo'lsin. Fazoviy chegaraviy masala (22-24) uchun chekli-ayirmali tenglamalar tuzilgan va $\sigma_{ijk}^x, \sigma_{ijk}^y, \sigma_{ijk}^z$ va $\sigma_{ijk}^{xy}, \sigma_{ijk}^{xz}, \sigma_{ijk}^{yz}$ lar iteratsion usul yordamida topilgan.



1-rasm. Tomonlari uzunliklari $(2a, 2b, 2c)$ bo'lgan parallelepiped

3.2 paragrafda termo-elastiklik nazariyasining tekis (37-41) va fazoviy (42-47) masalalari ham xuddi yuqoridagi masalalar singari chekli-ayirmali tenglamalari tuzilib iteratsiya usuli yordamida sonli yechilgan.

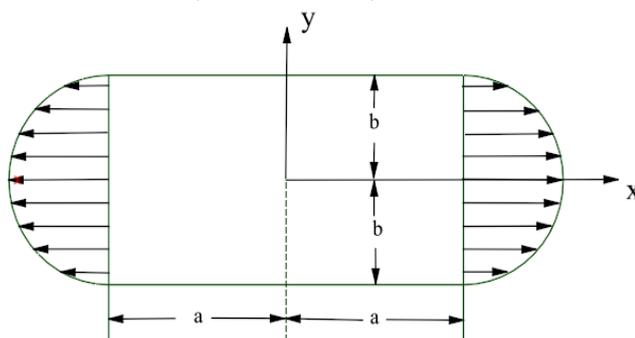
3.3 paragrafda qisman bog'liq termo-elastik masala (31,33-35) chekli-ayirmali tenglamalar tuzilib iteratsiya usul bilan yechilgan.

Dissertatsiyaning to'rtinchi bobi **“Elastiklik va termo-elastiklik masalalarni kuchlanishlarga nisbatan sonli yechish”** ga bag'ishlangan. Ushbu bob avvalgi boblarda kuchlanishlarga nisbatan qo'yilgan elastik va termo-elastik chegaraviy masalalarning sonli yechishga bag'ishlangan.

4.1 paragrafda to'g'ri to'rtburchakni cho'zish masalasi qaralgan. O'lchamlari $(2a, 2b)$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchakli plastinaning OX o'qiga perpendikulyar bo'lgan qarama-qarshi tomonlariga qo'yilgan cho'zuvchi parabolik kuchlar ta'siridagi deformatsiyalanishi masalasi qarab chiqilgan. Qolgan tomonlari kuchdan holi:

$$x = \pm a: \sigma_x = S_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right), \quad \sigma_{xy} = 0,$$
(41)

$$y = \pm b: \sigma_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0. \quad (42)$$



2-rasm. Parabolik kuch ta'sirida to'g'ri to'rtburchakli plastinkaning cho'zilishi

Bu masala birinchi bobda qayd etilgan **B, C, D, E** chegaraviy masalalar yordamida modellashtirilgan. Bunda chegaraviy shartlar (41-42) ko'rinishga ega. **B** masalaga mos keladigan chekli-ayirmali sxema (36-40) tenglamalar bilan aniqlangan. Chekli-ayirmali tenglamalar $\sigma_{ij}^x, \sigma_{ij}^y$ va σ_{ij}^{xy} kuchlanishlarga nisbatan yechib olinib iteratsiya usulida yechilgan.

B, C, D va **E** masalalarga ko'ra hisoblangan σ_x kuchlanishning sonli qiymatlari 1-jadvalda keltirilgan. Olingan sonli qiymatlar Timoshenko-Gudierning ma'lum natijasi, hamda ko'chish va deformatsiyalarga nisbatan yechilgan masalalarning natijalari bilan xam taqqoslangan. Parametrlarning qiymatlari quyidagicha olingan: $\lambda = 0.78, \mu = 0.5, S = 1, a = b = 1, N_1 = N_2 = 10, h = 0.2$.

1-jadval

Plastinaning markazi $x=0$ da σ_x kuchlanish qiymatlarini taqoslash

<i>Masalalar</i>	$y=-1$	$y=-0.8$	$y=-0.6$	$y=-0.4$	$y=-0.2$	$y=0$
<i>Timoshenko-Gudier A</i>	0.3404	0.5166	0.6536	0.7515	0.8102	0.8298
<i>B masala</i>	0.3412	0.3430	0.6098	0.8004	0.9147	0.9528
<i>C masala</i>	0.3371	0.3371	0.5992	0.7865	0.8988	0.9363
<i>D masala</i>	0.3221	0.3257	0.5726	0.7589	0.8589	0.8947
<i>E masala</i>	0.3417	0.3427	0.6198	0.8191	0.9369	0.9760
<i>Ko'chishlarda</i>	0.3202	0.4423	0.5899	0.7235	0.8054	0.8310
<i>Deformatsiyalarda</i>	0.3461	0.3461	0.6153	0.8076	0.9229	0.9614

Tekis taqsimlangan kuch ta'sirida plastinkani siqish masalasi.

To'rtburchakli plastinkaning OX o'qiga perpendikulyar qarama-qarshi tomonlariga qo'yilgan tekis taqsimlangan kuch ta'sirida siqish masalasi qaralgan. Qaralayotgan masala (19) tenglamalar bilan tavsiflanadi. Chegaraviy shartlar quyidagi ko'rinishga ega

$$x = \pm a: \sigma_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad (43)$$

$$y = \pm b: \sigma_y = S_0 = 1, \quad \sigma_{xy} = 0. \quad (44)$$

Qo'shimcha chegaraviy shartlar (21) munosabatlar bilan aniqlanadi. Berilgan o'zgarmlar quyidagi qiymatlarga ega: $\lambda = 0.78, \mu = 0.5, l_1 = l_2 = 1, N_1 = N_2 = 10, S_0 = 1$. Olingan natijalar 2 jadvalda keltirilgan.

2-jadval

σ_y kuchlanish tenzori qiymatlari

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
$y=0$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$y=0.1$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$y=0.2$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$y=0.3$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$y=0.4$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$y=0.5$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

2-jadvalga ko‘ra, σ_y kuchlanishning qiymatlari, to‘rtburchakli plastinkaning chegarasiga qo‘yilgan kuchning qiymatlariga teng ekanligini ko‘rish mumkin, ya’ni $\sigma_y|_{y=0}=1=S_0$, $\sigma_y|_{y=l_2}=1=S_0$, va sterjen uzunligi bo‘ylab ham bir tekis taqsimlanadi, bu esa olingan natijalarning to‘g‘riligini tasdiqlaydi. Ushbu aniqlikka erishish uchun 24 ta iteratsiya kerak bo‘ldi.

Aniq yechim bilan taqqoslash. Faraz qilaylik, quyidagi funksiyalar (19) tenglamalar bilan aniqlanga **C masalaning** to‘rtburchak $0 \leq x \leq l_1$, $0 \leq y \leq l_2$ sohadagi yechimi bo‘lsin

$$\sigma_x = y(y - l_2), \quad \sigma_y = x(x - l_1), \quad \sigma_{xy} = xy(x - l_1)(y - l_2)$$

u holda bu yechimni tenglamalarga qo‘yish orqali tenglamalarning hajmiy kuchlar sifatida qaralgan o‘ng tomonlarini topish mumkin

$$X_1 = -(x^2 - xl_1)(2y - l_2), \quad X_2 = -(2x - l_1)(y^2 - yl_2), \quad X_{12} = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial X_2}{\partial x} \right). \quad (45)$$

(45) ga asoslangan holda, chegaraviy va qo‘shimcha chegaraviy shartlar quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$\begin{aligned} x=0, l_1: \quad & \sigma_x = y(y - l_2), \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_y = 0, \\ y=0, l_2: \quad & \sigma_y = x(x - l_1), \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_x = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Parametrlarning qiymatlari quyidagicha olingan:

$$\lambda = 0.78, \quad \mu = 0.5, \quad l_1 = l_2 = 1, \quad N_1 = N_2 = 10, \quad h = 0.1.$$

3-jadvalda kuchlanish σ_y ning aniq qiymatlari, iteratsiya usuli bilan olingan sonli natijalar bilan taqqoslangan.

3-jadval

$y=0.5$ da σ_y kuchlanish tenzorining natijalarini taqqoslash

<i>Natijalar</i>	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
<i>Aniq yechim</i>	0	0.0900	0.1600	0.2100	0.2400	0.2500
<i>Sonli yechim</i>	0	0.0886	0.1575	0.2067	0.2362	0.2461

Taqqoslash shuni ko‘rsatadiki, taqribiy yechim va aniq yechimning qiymatlari bir-biriga mos keladi. Ushbu aniqlikka erishish uchun 25 ta iteratsiya etarli bo‘ldi.

4.2 paragraf parallelepipedning muvozanati haqidagi masalani sonli yechishga bag‘ishlangan. Koordinatalar sistemasi $l_1 = 2a$, $l_2 = 2b$, $l_3 = 2c$ o‘lchamdagi parallelepipedning markazida bo‘lsin va u OZ o‘qiga perpendikulyar qarama-qarshi yoqlar bo‘ylab qo‘yilgan qubba shaklidagi yuk ta’sirida muvozanatda

bo'lsin (1-rasm). Qolgan yoqlar yuklardan xoli. Bu masala Filonenko-Borodich tomonidan Kastilyano variatsion usuli yordamida quyidagi chegaraviy shartlarda yechilgan.

$$\begin{aligned} x = \pm a: & \text{ da } \sigma_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0. \\ y = \pm b: & \text{ da } \sigma_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0. \\ z = \pm c: & \text{ da } \sigma_z = S, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0. \end{aligned} \quad (47)$$

Bu yerda $S = (1 + \cos(\frac{2\pi x}{a}))(1 + \cos(\frac{2\pi y}{b}))$. Parametrlar quyidagicha olingan:

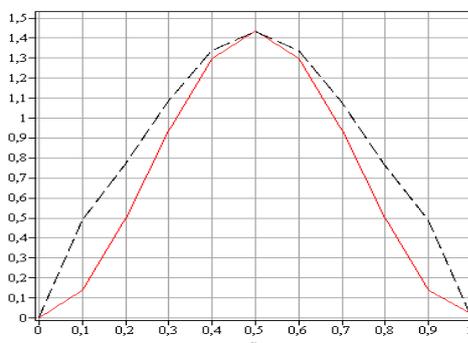
$\lambda = 0.8, \mu = 0.5, a = 0.5, b = 0.5, c = 1, h_1 = h_2 = 0.1, h_3 = 0.2$. 4-jadvalning birinchi qatorida parallelepiped markazidan o'tuvchi $OZ (-c, +c)$ chizig'i bo'ylab kuchlanish qiymatlari ko'rsatilgan va boshqa mualliflarning natijalari bilan taqqoslangan. Jadvaldan ko'rish mumkinki, yoqlarning markazida $z=c$ qo'yilgan S yukining maksimal qiymati 4 ga teng va hisoblangan qiymat ham $\sigma_z = 4.00$ bo'lib chiqdi, va ko'chishlarga nisbatan yechilgan masala bo'yicha esa $\sigma_z = 3.9279$ ga teng. Parallelepipedning markazida kuchlanish qiymati $\sigma_z = 1.4365$ ga, Filonenko-Borodichning ishida esa $\sigma_z = 1.47$ ga, ko'chishlarda esa $\sigma_z = 1.4294$ ga teng. Sonli natijalarni olish uchun $t=14$ iteratsiya kerak bo'ldi.

4-jadval

Parallelepipedda σ_z - kuchlanish qiymatlarini taqqoslash $y=0; x=0$ da

Masalalar	$z=-1$	$z=-0.8$	$z=-0.6$	$z=-0.4$	$z=-0.2$	$z=0$
<i>Beltrami-Mitchel</i>	4.0000	3.2065	2.5657	1.9248	1.6807	1.4365
<i>Ko'chishlarda(Lame)</i>	3.9279	2.7025	2.3333	1.8701	1.5437	1.4294
<i>Pobedriya</i>	4.0000	3.4450	2.7981	2.0179	1.6639	1.3639

3-rasmda parallelepipedning markazida $z=0$ da σ_z kuchlanishning tarqalishini ifodalovchi chiziqlar keltirilgan. Uzluksiz chiziq kuchlanishlarda nisbatan qo'yilgan masala natijalari asosida, punktirli chiziq esa *Lame* tenglamasini yechish natijalari asosida chizilgan.



3-rasm. σ_z kuchlanishning parallelepipedning o'rtasidagi taqsimoti.

Tekis taqsimlangan kuch ta'sirida paralallapepdni siqish masalasi. Parallelepipedning OZ o'qiga perpendikulyar qarama-qarshi tomonlariga qo'yilgan

tekis taqsimlangan kuch ta'sirida siqish ($S=I$) masalasi qaralgan. 5-jadvalda σ_z kuchlanishni taqsimlanishi ko'rsatib o'tilgan

5-jadval

$y=0$ da σ_z kuchlanish tenzorining natijalarini taqqoslash

Natijalar	$x=-1$	$x=-0.8$	$x=-0.6$	$x=-0.4$	$x=-0.2$	$x=0$
$z=1$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$z=0.5$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$z=0$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

4.3 paragraf tekis termo-elastik masalani sonli yechishga bag'ishlangan. Barcha tomonlari kuchlardan holi bo'lgan to'rtburchakli plastina quyidagi temperaturaviy

$T = T_0 \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right)$ maydon ta'siri ostida bo'lsin. Parametrlarning qiymatlari quyidagicha olingan:

$$\lambda = 0.7, \quad \mu = 0.3, \quad a = 1, \quad b = 1, \quad h_1 = h_2 = 0.25 .$$

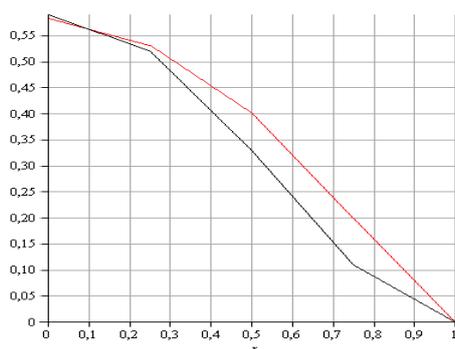
6-jadvalda (31,34,35) chegaraviy masalanig natijalari asosuda σ_x kuchlanishning $y=b$ chiziqdagi (2-rasm) qiymatlari, Meleshko natijalari bilan taqqoslangan.

6-jadval

$y=b$ da σ_x kuchlanish tenzorining natijalarini taqqoslash

Natijalar	$y=b:$	$x=0$	$x=0.25$	$x=0.5$	$x=0.75$	$x=1$
Kuchlanishlarda		0.5835	0.5315	0.4018	0.1988	0.0
Meleshko		0.5912	0.5235	0.3312	0.1198	0.0

4-rasmda esa σ_x kuchlanishni (31,34,35) masala va Meleshkoning natijalar grafik ko'rinishda berilgan.



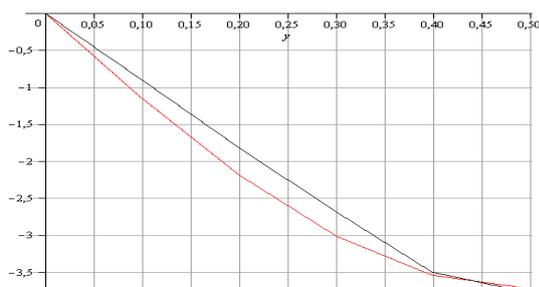
4-rasm. σ_x kuchlanishni $y=b$ chegarada (31-35) masala va Meleshko bilan solishtirilishi

7-jadvalda ko'chishlarga nisbatan qo'yilgan masala yechish orqali olingan σ_x , (31,34,35) masalani kuchlanishlarga nisbatan yechib olingan qiymatlari bilan $x=0$ chiziqda solishtirilgan.

$x=0$ da σ_x kuchlanish tenzorining natijalarini taqqoslash

Qo'yilgan masala	$y=0$	$y=0.1$	$y=0.2$	$y=0.3$	$y=0.4$	$y=0.5$
Kuchlanishga nisbatan	0	-1.1505	-2.1884	-3.0121	-3.5409	-3.7231
Ko'chishlarga nisbatan	0	-0.6088	-1.3149	-2.6817	-3.5037	-3.7789

5-rasmda esa $x=0$ tekislikda σ_x kuchlanishning tarqalishi chiziqlar orqali ko'rsatib o'tilgan.



5-rasm. σ_x kuchlanishning plastinka markazida ($x=0$) (31-35) masala kuchlanish qizilda ko'chish orqali qora rangda tasvirlangan

4.4 paragraf fazoviy termo-elastik masalani sonli yechimlariga bag'ishlangan. (29-30) masalada Parallelepipedning barcha tomonlari erkin holda bo'lib, temperatura maydoni uning ichida ta'sir qilsin ya'ni $T = T_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2b}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{2c}\right)$.

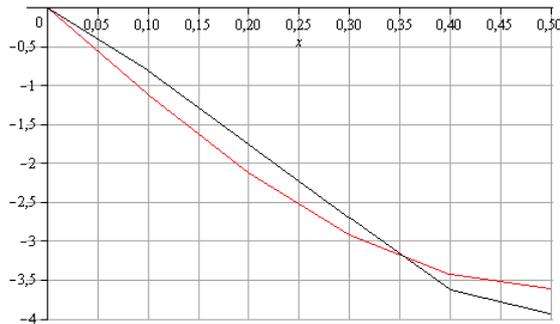
Parametrlarning qiymatlari quyidagicha olingan:
 $\lambda = 1.5$, $\mu = 0.75$, $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $h_1 = h_2 = h_3 = 0.1$, $N_1 = 10$, $N_2 = 10$, $N_3 = 10$.

8-jadvalda (29-30) masala orqali yechilgan σ_z kuchlanishning $z=c$ $x=a$, kesimdagi qiymatlari ko'chish orqali olingan qiymatlar bilan solishtirilgan.

 $x=0.5$ va $z=0.5$ da σ_z kuchlanish natijalarini taqqoslash

Natijalar	$y=0$	$y=0.1$	$y=0.2$	$y=0.3$	$y=0.4$
Kuchlanishlarda	0	-1.1180	-2.1100	-2.9192	-3.4270
Ko'chishlarda	0	-0.8399	-1.6289	-2.4490	-3.3269

6-rasmda esa σ_z kuchlanishning (29-30) masala bo'yicha va ko'chish bo'yicha tarqalishi ko'rsatib o'tilgan.



6-rasm σ_z kuchlanishning plastinka markazida ($x=0.5$ va $z=0.5$) kesimida $0 \leq y \leq 0.5$ (29-30) masala bo'yicha (qizil rangda) va ko'chish bo'yicha (qora rangda) tarqalishi.

XULOSA

Dissertatsiya ishi elastiklik va termo-elastiklik nazariyasining tekis va fazoviy chegaraviy masalalarini kuchlanishlarga nisbatan qo'yishga va sonli yechishga bag'ishlangan. Dissertatsiya ishida quyidagi ilmiy natijalar olingan:

1. Beltrami-Mitchell tenglamalari asosida, elastiklik nazariyasining yangi tekis masalasi qo'yilgan (Eri funksiyasidan foydalanmagan holda);
2. To'g'ri to'rtburchak soxa uchun muvozanat tenglamalari asosida qo'shimcha (yetishmayotgan) chegaraviy shartlarni olish usuli ko'rsatilgan;
3. Kuchlanishlarga nisbatan yangi termo-elastiklik tenglamalari taklif qilingan;
4. Fazoviy elastiklik va termo-elastiklik chegaraviy masalalar kuchlanishlarga nisbatan qo'yilgan;
5. Elastiklik va termo-elastiklik nazariyasining tekis va fazoviy masalalari chekli ayirmali tenglamalar tuzilgan va iteratsiya usuli yordamida kuchlanishlarga nisbatan sonli yechilgan xamda ma'vjud yechimlar bilan taqqoslangan;
6. C++ algoritmik tilida dasturiy ta'minot ishlab chiqilgan va intellektual mulk agentligida ro'yxatdan o'tkazilgan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.T/FM.61.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ
УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МЕХАНИКИ И
СЕЙСМОСТОЙКОСТИ СООРУЖЕНИЙ ИМЕНИ М.Т.УРАЗБАЕВА
АКАДЕМИИ НАУК РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН**

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

ТИЛОВОВ ОТАЖОН УКТАМОВИЧ

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ УПРУГИХ И ТЕРМОУПРУГИХ КРАЕВЫХ
ЗАДАЧ В НАПРЯЖЕНИЯХ**

01.02.04-Механика деформируемого твердого тела

**Диссертация доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам
АВТОРЕФЕРАТ**

Ташкент-2024

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за № B2023.4.PhD/FM962.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека. Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский) размещен на веб-странице Научного совета (<https://instmech.academy.uz>) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель: **Халджигитов Абдували Абдисамадович**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Хусанов Бахтиёр Эргашбаевич**
доктор физико-математических наук, с.н.с

Сафаров Исмоил Иброхимович
доктор физико-математических наук, профессор

Ведущая организация: **Ташкентский государственный транспортный университет**

Защита диссертации состоится «15» января 2024 года в 16.00 часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.T/FM.61. при Институте механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т.Уразбаева Академии наук Республики Узбекистан (Адрес: 100047, г.Ташкент, Дурмон йули-40, зал заседаний–320, Тел.: (+99871) 262-71-52, факс: (+99871) 262-71-32, e-mail: instmech@academy.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Институте механики и сейсмостойкости сооружений имени М.Т.Уразбаева Академии наук Республики Узбекистан (регистрационный номер №24). (Адрес: 100047, г. Ташкент, ул.Дурмон йули-40. зал заседаний – 320, Тел.: (+99871) 262-71-52, e-mail: instmech@academy.uz.).

Автореферат диссертации разослан «26» декабря 2024 года.
(реестр протокола рассылки № 24 от «24» декабря 2024 года)

М.Мирсаидов

Председатель научного совета по присуждению ученых степеней, д.т.н., профессор, академик

М.К.Усаров

Ученый секретарь научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

Р.А.Абиров

Председатель научного семинара при научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., с.н.с

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и необходимость темы диссертации. Определение запасов прочности различных конструкций и их элементов играет важную роль в исследованиях, проводимых в области науки и современных технологий в мире. Определение запасов устойчивости обычно применяют для изучения распределения напряжений в конструкциях из деформируемых твердых тел и определения их опасных максимальных значений. В связи с этим в глобальном масштабе определение запасов прочности различных объектов и их частей базируется на численном решении граничных задач относительно эмпирических формул или векторов перемещений на основе экспериментов и расчете с их помощью необходимых напряжений. При численном расчете напряжений перемещениями закономерно вносятся определенные погрешности аппроксимации, что оказывает большое влияние на точность запасов прочности.

В мире для определения резервов прочности различных объектов и их частей широко исследуется построение математических моделей, основанных на напряжениях и деформациях, помимо обычных функций перемещения. В частности, в последнее время особое внимание учёных получили модели, основанные на напряжении, благодаря своей эффективности. По этой причине научные исследования, направленные на определение напряжений путем введения функции напряжений, проводятся в основном при постановке двумерных и трехмерных краевых задач механики деформируемого твердого тела относительно напряжений. В этом направлении вопрос более точного и эффективного определения запасов конструктивной прочности строительных конструкций является одной из актуальных задач механики деформируемого твердого тела на международном уровне. Частично эти проблемы можно решить, используя методы, предложенные в данном исследовании.

В нашей республике особое внимание уделяется развитию математики, прикладной математики, математического моделирования и численного моделирования в рамках фундаментальных наук и информационных технологий. В частности, значительные результаты достигнуты в математическом и численном моделировании линейных и нелинейных процессов деформирования, а также в совершенствовании метода конечных разностей, прозрачных и нераскрывающихся схем, методов последовательных приближений. Основной задачей фундаментальных исследований определено проведение научных исследований на международном уровне по важным направлениям «Математика-физика, прикладная математика и математическое моделирование»¹. Актуальны научные исследования в области математического и численного

¹ Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП-4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 07 мая 2020 года.

моделирования процесса деформирования твердых тел в рамках обеспечения реализации данного решения. Построение математических и численных моделей на основе деформаций и эффективное программное обеспечение важно для обеспечения исполнения решений.

В Постановлении Президента Республики Узбекистан от 30 мая 2022 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы сейсмической безопасности Республики Узбекистан» №ПФ-144 приоритетные направления обеспечения сейсмостойкости зданий и сооружений¹ Важно построить современные математические и численные модели, основанные на стрессах при принятии решений, создать эффективные численные решения и программное обеспечение для них. важно. В стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы также поставлена задача дальнейшего развития научных исследований по решению проблем сейсмостойкости подземных сооружений. При реализации этих задач важен расчет запасов прочности зданий и сооружений с высокой точностью.

Соответствие исследований приоритетам развития науки и техники республики. Диссертация выполнена в рамках IV приоритетного направления развития науки и технологий Республики Узбекистан “Математика, механика и информатика”.

Уровень изученности проблемы. Известно, что в механике деформируемого твердого тела статическая краевая задача состоит из уравнения равновесия, закона Гука, соотношения Коши и соответствующих граничных условий и обычно сводится к уравнению Ламе относительно компонентов перемещения. Необходимые напряжения рассчитываются по закону Гука через перемещения.

Обычно при численном решении краевых задач широко используются метод конечных разностей, метод конечных элементов, метод граничных элементов и другие методы. Эти методы и различные модели О. Зенкевич, Б. Победря, В. Кабулов, Т. Буриев, М. Мирсаидов, К. Султанов, М. Арипов, И. Н. Молчанов, Б. Курманбоев, Мирзаев, А. Халджигитов, Б. Рассмотрены в произведения Хусанова, А. Абирова и других.

Формулировка краевой задачи теории упругости непосредственно относительно тензора напряжений является актуальной задачей механики деформируемого твердого тела. Впервые вопросы формулировки краевых задач относительно напряжений рассмотрены в работах Бельтрами (1886) и Мичелла (1900) в рамках условий неразрывности деформаций и состоит из шести дифференциальных уравнений. Известно, что плоские задачи в напряжениях обычно, на основе условия совместности деформаций $\varepsilon_{x,y} + \varepsilon_{y,x} = 2\varepsilon_{xy,xy}$, сводится к решению бигармонического уравнения относительно функции напряжений Эри. Известны также пространственные функции напряжений Максвелла и Морера, введенные аналогично функции Эри. Филоненко-Бородичем пространственная задача в напряжениях, решена

¹ Указ Президента Республики Узбекистан от 30 мая 2022 года № ПФ-144 «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы сейсмической безопасности Республики Узбекистан»

на основе вариационного метода разложением тензора напряжений в ряд тригонометрических функций. Динамические краевые задачи относительно напряжений рассмотрены в работах Коновалова. В работах Бородачева показано, что из шести уравнений Бельтрами Мичелла, только три являются независимыми. Новая постановка краевой задачи в напряжениях предложена в работах Победри, в частном случае из которой следуют уравнения Бельтрами Мичелла. Несмотря на достигнутые успехи, численное решение краевых задач непосредственно относительно напряжений остаются открытым. Данная работа посвящена формулировке и численному решению краевых задач теории упругости и термоупругости в напряжениях.

Связь диссертационного исследования с научными планами высшего учебного заведения, в котором выполнена диссертация. по Диссертационная работа велась в рамках научных исследования кафедры “Механики и математического моделирования” Национального университета Узбекистана.

Целью исследований является формулировка и численное решение краевых задач теории упругости и термоупругости относительно напряжений.

Задачи исследования:

формулировка плоской задачи теории упругости непосредственно относительно напряжений;

построение краевых задач термоупругости непосредственно относительно напряжений и температуры;

постановка плоских и пространственных задач теории упругости и термоупругости в напряжениях;

разработка конечно-разностных уравнений для упругих и термоупругих задач;

численное решение плоских и пространственных задач теории упругости и термоупругости в напряжениях.

Объектом исследования является процесс деформированные плоских и пространственных тел под действием механических и термомеханических сил.

Предметом исследований является формулировка и численное плоских и пространственных краевых задач теории упругости и термоупругости в напряжениях.

Методы исследования основаны на условия совместности деформаций, уравнения Бельтрами-Мичелла в рамках законов механики сплошной среды, и методам численного моделирования, как конечно-разностный и итерационный методы, а также программированию на алгоритмическом языке C++.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

предложены новые постановки краевых задач теории упругости и термоупругости непосредственно относительно напряжений (без использования потенциальных функций типа Эри);

разработаны численные модели для плоских и пространственных задач теории упругости и термоупругости относительно напряжений и решены методом последовательных приближений;

разработаны методики, алгоритмы и программы расчета напряженного состояния упругих и термоупругих тел в форме прямоугольной пластины и параллелепипеда;

численно решены упругие и термоупругие задачи в напряжениях для прямоугольной пластины и параллелепипеда при различных термомеханических нагрузках и сравнены с известными результатами;

показано что численные результаты упругих и термоупругих задач в напряжениях являются более точными по сравнению с аналогичными задачами сформулированных относительно перемещений;

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

создана математическая модель, позволяющая эффективно определять запасы прочности объектов (конструкций и их элементов);

разработаны программы, позволяющие изучать распределение напряжений в телах.

Достоверность результатов исследований строгость упругих и термоупругих задач, сравнение численных результатов с точными решениями и известными решениями, а также вычислительными экспериментами.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования объясняется тем, что в отличие от методов, известных в научной и учебной литературе, математические модели упругих и термоупругих задач созданы применительно к напряжениям и позволяют более эффективно и достоверно определять силовые резервы организма.

Практическая значимость результатов исследований объясняется тем, что они могут быть использованы для построения численных моделей, создания комплекса алгоритмов и программ для их численного решения, а также для более эффективного определения запасов прочности объектов.

Внедрение результатов исследований. На основе результатов, полученных в диссертационной работе по разработке метода определения запасов прочности зданий и сооружений по отношению к прямым напряжениям:

Его используют при проектировании зданий в строительных организациях, определении запасов прочности и надежности с помощью численных методов решения плоских и пространственных задач теории упругости и термоупругости. (Информация Минцифры от 21.02.2024 № 33-8/7839). Применение научных результатов позволило повысить производительность труда на 10-12% и снизить затраты на 10-15%.

Утверждение результатов исследования. Результаты исследований обсуждались на 9 международных и республиканских научных конференциях, в том числе 5 международных и 4 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме исследования опубликовано 15 научных работ, в том числе 5 статей в научных изданиях, в том числе 2 зарубежных (все в базе данных SCOPUS) и 3 опубликованы в республиканских журналах, получен сертификат на программный продукт на 1 ЭВМ.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Объем диссертации составляет 91 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ.

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики. Приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и обсуждена степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, определены объект и предмет исследования, научная новизна и практические результаты исследования. Представлены и раскрыты теоретическая и практическая значимость полученных результатов, сведения о внедрении результатов исследования, опубликованных работах и структуре диссертации.

Первая глава диссертации **“Краевые задачи теории упругости в напряжениях”** посвящена формулировке краевых задач теории упругости непосредственно относительно напряжений.

В параграфе 1.1 рассмотрены условия совместности деформаций и их выражение относительно напряжений. Известно, что условие совместности деформаций (условия Сен-Венана) имеют вид:

$$\nabla^2 \varepsilon_{ij} + \theta_{,ij} - \varepsilon_{ik,kj} - \varepsilon_{jk,ki} = 0, \quad \theta = \varepsilon_{kk} \quad (1)$$

или в развернутом виде состоит из 6 соотношений т.е

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x_1 \partial x_2},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x_2^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial x_2 \partial x_3},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x_1^2} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xz}}{\partial x_1 \partial x_3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x_2} + \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x_1} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x_1 \partial x_3}, \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial x_3} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x_1} + \frac{\partial \varepsilon_{xz}}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x_1 \partial x_2}.\end{aligned}$$

которые с помощью закона Гука

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2\mu} (\sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} \delta_{ij} \sigma) \quad (2)$$

может быть записано относительно напряжений в следующем виде:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x_1^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x_1 \partial x_2}, \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x_2^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_2^2} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial x_2 \partial x_3}, \\ \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x_1^2} - \frac{\nu}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \sigma}{\partial x_1^2} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x_1 \partial x_3},\end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x_3} - \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x_1} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3} \left(\sigma_x - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \right), \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x_3} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x_1} - \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x_2} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial x_1} \left(\sigma_y - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \right), \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x_2} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x_3} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \left(\sigma_z - \frac{\nu}{1+\nu} \sigma \right).\end{aligned} \quad (4)$$

В параграфе 1.2 приведены уравнения Бельтрами-Митчелла и сформулирована новая задача в напряжениях предложенная Б.Е. Победрей. Обычно краевая задачи теории в напряжениях состоит из уравнение равновесия:

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0, \quad x_i \in V, \quad i = 1, 2, 3 \quad (5)$$

уравнение Бельтрами-Митчелла:

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} S_{,ij} = -(X_{i,j} + X_{j,i}) - \frac{\nu}{1-\nu} \delta_{ij} X_{k,k}, \quad S = \sigma_{kk}, \quad (6)$$

и граничные условия

$$\sigma_{ij} n_j \Big|_{\Sigma_1} = S_i \quad (7)$$

где X_i – объемные силы, n_j – внешняя нормаль к поверхности Σ_2 , S_i – поверхностная нагрузка.

Для обеспечения замкнутости краевой задачи (5-7) согласно Б.Е.Победре рассмотрим уравнения равновесия на границе заданной области т.е.

$$\sigma_{ij,j}|_{\Sigma} = -X_i|_{\Sigma}. \quad (8)$$

Уравнения (5-8) представляют собой краевую задачу теории упругости в напряжениях.

Новая краевая задача в напряжениях предложенная Б.Е.Победрей имеет вид

$$\Delta\sigma_{ij} + b\sigma_{kk,ij} + c\sigma_{mn,mm}\delta_{ij} - e\Delta\sigma_{kk}\delta_{ij} + a[\sigma_{ik,kj} + \sigma_{jk,ki}] = -(a+1)(F_{i,j} + F_{j,i} + \frac{1-b-e}{2b-1}F_{k,k}\delta_{ij}), \quad (9)$$

со следующими граничными и дополнительные условиями

$$\sigma_{ij}n_j|_{\Sigma_1} = \sigma_i, \quad (10)$$

$$\sigma_{ij,j}|_{\Sigma} = -X_i|_{\Sigma}. \quad (11)$$

где a, b, c, e – коэффициенты.

Параграф 1.3 посвящен формулировке плоских и пространственных задач теории упругости относительно напряжений. Показано, что плоские задачи теории упругости в напряжениях могут быть сформулированы в нескольких вариантах, как **А**, **Б**, **С**, **Д** и **Е**. Плоская задача **А** состоит из уравнения равновесия

$$\begin{aligned} \frac{\partial\sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_y}{\partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (12)$$

и из условия совместности деформаций (условия Сен-Венана).

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2} = 2\frac{\partial^2\varepsilon_{xy}}{\partial x\partial y}. \quad (13)$$

Соотношение (13) можно записать следующим образом, используя уравнение равновесия и уравнение Сен-Венана

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (14)$$

где ∇^2 – оператор Лапласа.

Обычно, решение плоской задачи теории упругости с введением функции напряжений Эри удовлетворяющих уравнений равновесия

$$\sigma_x = \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}, \sigma_y = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}, \sigma_{xy} = -\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y}, \quad (15)$$

и, подставляя ее в (14) сводится к бигармоническому уравнению

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0 \quad (16)$$

Задача Б может быть сформулирована с помощью уравнения равновесия (12) и условия совместности деформаций, записанного относительно напряжений:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} = 2 \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (17)$$

Задача С, состоит из уравнений равновесия (12) и третьего уравнения Бельтрами-Мичелла:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y} \right) = 0. \quad (18)$$

Задача Д состоит из продифференцированных уравнений равновесий по x и y соответственно, и третьего уравнения Бельтрами-Митчелла (18), а именно

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0, \\ \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y} \right) = 0.$$

Задача Е состоит из уравнений Победри:

$$\begin{aligned} d \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + (1-e) \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + (b-e) \left(\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) + 2(b+a) \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0, \\ d \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + (1-e) \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + (b-e) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} \right) + 2(b+a) \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x \partial y} &= 0, \quad (20) \\ (1+a) \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} + (1+a) \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2} + (b+a) \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y} \right) &= 0. \end{aligned}$$

где $d = 1 + b + c + 2a - e$.

Граничные и дополнительные условия для краевых задач **В**, **С**, **Д** и **Е** имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} (\sigma_x n_1 + \sigma_{xy} n_2) \Big|_{\Gamma} &= S_1, \quad (\sigma_{xy} n_1 + \sigma_y n_2) \Big|_{\Gamma} = S_2 \\ \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) \Big|_{\Gamma} &= 0, \quad \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \right) \Big|_{\Gamma} = 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Вышеуказанные задачи, кроме задачи **А**, могут быть решены непосредственно относительно напряжений.

Что касается пространственной краевой задачи теории упругости в напряжениях, то она состоит из трех уравнений равновесия и второй группы уравнений Бельтрами-Мичелла (6), т.е.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} &= 0, \\
\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial y} \right) &= 0, \\
\frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x \partial z} \right) &= 0, \\
\frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial z^2} + \frac{1}{1+\nu} \left(\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y \partial z} \right) &= 0
\end{aligned} \tag{22}$$

и граничные условия

$$\begin{aligned}
(\sigma_x n_1 + \sigma_{xy} n_2 + \sigma_{xz} n_3) \Big|_{\Sigma_2} &= S_1, \\
(\sigma_{xy} n_1 + \sigma_y n_2 + \sigma_{yz} n_3) \Big|_{\Sigma_2} &= S_2, \\
(\sigma_{xz} n_1 + \sigma_{yz} n_2 + \sigma_z n_3) \Big|_{\Sigma_2} &= S_3,
\end{aligned} \tag{23}$$

дополнительные граничные условия таковы:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} \right) \Big|_{\Sigma} &= 0, \\
\left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} \right) \Big|_{\Sigma} &= 0, \\
\left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} \right) \Big|_{\Sigma} &= 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Вторая глава диссертации “**Термоупругие задачи термоупругости в напряжениях**” посвящена постановке плоских и пространственных задач термоупругости относительно напряжений.

В параграфе 2.1 выписано уравнение Бельтрами-Мичелла с учетом температуры

$$\nabla^2 \sigma_{ij} + \frac{1}{1+\nu} S_{,ij} = -(X_{i,j} + X_{j,i}) - \frac{\nu}{1-\nu} X_{k,k} \delta_{ij} - 2\mu\alpha (T_{,ij} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \delta_{ij} \nabla^2 T) \tag{25}$$

где α - коэффициент теплового расширения.

В параграфе 2.2 сформулирована плоская задача термоупругости в новой форме

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \sigma_x &= -2\mu\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 T \right), \\
\nabla^2 \sigma_y &= -2\mu\alpha \left(\left(1 + \frac{1}{\nu}\right) \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu} \nabla^2 T \right), \\
\nabla^2 \sigma_{xy} &= -\frac{2\mu\alpha(1+\nu)}{\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y},
\end{aligned} \tag{26}$$

с граничными и дополнительными граничными условиями:

$$(\sigma_x n_1 + \sigma_{xy} n_2) \Big|_{\Gamma} = S_1, \quad (\sigma_{xy} n_1 + \sigma_y n_2) \Big|_{\Gamma} = S_2, \tag{27}$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} \right) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} \right) \Big|_{\Gamma} = 0. \tag{28}$$

В параграфе 2.3 рассмотрена постановка пространственной задачи термоупругости. При отсутствии объемных сил уравнения (25) имеет следующий вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2} &= 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right), \\
\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2} &= 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right),
\end{aligned} \tag{29}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} &= 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right), \\
\frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xy}}{\partial z^2} &= 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}, \\
\frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{xz}}{\partial z^2} &= 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z}, \\
\frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_{yz}}{\partial z^2} &= 2\mu\alpha \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z},
\end{aligned} \tag{30}$$

граничные условия такие же, как указано выше (23-24).

Параграф 2.4 посвящен формулировке частично-связанной задачи термоупругости. Уравнение (25), в случае плоской задачи термоупругости имеет вид

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \sigma_x &= -2\mu\alpha\left(\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\nabla^2 T\right), \\
\nabla^2 \sigma_y &= -2\mu\alpha\left(\left(1 + \frac{1}{\nu}\right)\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{1-\nu}\nabla^2 T\right), \\
\nabla^2 \sigma_{xy} &= -\frac{2\mu\alpha(1+\nu)}{\nu}\frac{\partial^2 T}{\partial x\partial y},
\end{aligned} \tag{31}$$

Рассмотрим уравнение теплопроводности

$$\lambda_0\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) - c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} - T\alpha(3\lambda + 2\mu)\frac{\partial(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22})}{\partial t} = 0 \tag{32}$$

которое, в случае статических задач принимает следующий вид

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \tag{33}$$

Граничные условия и дополнительные граничные условия имеют вид

$$(\sigma^x n_1 + \sigma^{xy} n_2)\Big|_\Gamma = S_1, \quad (\sigma^{xy} n_1 + \sigma^y n_2)\Big|_\Gamma = S_2, \tag{34}$$

$$T\Big|_\Gamma = f,$$

$$\left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y}\right)\Big|_\Gamma = 0, \quad \left(\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}\right)\Big|_\Gamma = 0. \tag{35}$$

Уравнения (31), (33) и (34-35) представляют собой постановку частично связанной задачи термоупругости.

Третья глава диссертации “**Дискретные аналоги упругих и термоупругих задач в напряжениях и методы их решения**” посвящена построению конечно-разностных уравнений относительно напряжений упругих и термоупругих краевых задач, рассмотренных в предыдущих главах. Построены конечно-разностные уравнения, соответствующие плоским задачам **В**, **С** и **Д**. Также построены конечно-разностные уравнения для плоских и пространственных задач термоупругости.

В параграфе 3.1 плоские задачи **В**, **С** и **Д** рассмотрены в прямоугольной области (2a, 2b). Ограничимся приведением конечно-разностных для задачи **Д**

$$\begin{aligned}
& \frac{\sigma_{i+1,j}^x - 2\sigma_{i,j}^x + \sigma_{i-1,j}^x}{h_1^2} + \frac{\sigma_{i+1,j+1}^{xy} - \sigma_{i+1,j-1}^{xy} - \sigma_{i-1,j+1}^{xy} + \sigma_{i-1,j-1}^{xy}}{4h_1h_2} = 0, \\
& \frac{\sigma_{i,j+1}^y - 2\sigma_{i,j}^y + \sigma_{i,j-1}^y}{h_2^2} + \frac{\sigma_{i+1,j+1}^{xy} - \sigma_{i-1,j+1}^{xy} - \sigma_{i+1,j-1}^{xy} + \sigma_{i-1,j-1}^{xy}}{4h_1h_2} = 0, \\
& \frac{\sigma_{i+1,j}^{xy} - 2\sigma_{ij}^{xy} + \sigma_{i-1,j}^{xy}}{h_1^2} + \frac{\sigma_{i,j+1}^{xy} - 2\sigma_{ij}^{xy} + \sigma_{i,j-1}^{xy}}{h_2^2} + \\
& \frac{1}{1+\nu} \left\{ \frac{\sigma_{i+1,j+1}^x - \sigma_{i-1,j+1}^x - \sigma_{i+1,j-1}^x + \sigma_{i-1,j-1}^x}{4h_1h_2} + \frac{\sigma_{i+1,j+1}^y - \sigma_{i-1,j+1}^y - \sigma_{i+1,j-1}^y + \sigma_{i-1,j-1}^y}{4h_1h_2} \right\} = 0
\end{aligned} \tag{36}$$

В качестве граничных условий рассмотрена сила S растягивающая пластину по оси OX т.е.

$$\begin{aligned}
\text{при } x = \bar{\tau}a: \quad & \sigma_x^{(0)} 0j = S, \quad \sigma_{xy}^{(0)} 0j = 0, \\
& \sigma_x^{(0)} N_1j = S, \quad \sigma_{xy}^{(0)} N_1j = 0
\end{aligned} \tag{37}$$

$$\begin{aligned}
\text{при } y = \bar{\tau}b: \quad & \sigma_y^{(0)} i0 = 0, \quad \sigma_{xy}^{(0)} i0 = 0, \\
& \sigma_y^{(0)} iN_2 = 0, \quad \sigma_{xy}^{(0)} iN_2 = 0
\end{aligned} \tag{38}$$

дополнительные граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}
\text{при } x = \bar{\tau}a: \quad & \sigma_y^{(0)} 0j = \sigma_y^{(0)} 0,j+1 + h_2 \frac{\sigma_{xy}^{(0)} 1j - \sigma_{xy}^{(0)} 0j}{h_1}, \\
& \sigma_y^{(0)} n_1j = \sigma_y^{(0)} n_1,j+1 + h_2 \frac{\sigma_{xy}^{(0)} n_1,j - \sigma_{xy}^{(0)} n_1-1,j}{h_1}
\end{aligned} \tag{39}$$

$$\begin{aligned}
\text{при } y = \bar{\tau}b: \quad & \sigma_x^{(0)} i0 = \sigma_x^{(0)} i+1,0 + h_1 \frac{\sigma_{xy}^{(0)} i1 - \sigma_{xy}^{(0)} i0}{h_2}, \\
& \sigma_x^{(0)} in_2 = \sigma_x^{(0)} i+1,n_2 + h_1 \frac{\sigma_{xy}^{(0)} in_2 - \sigma_{xy}^{(0)} i,n_2-1}{h_2}
\end{aligned} \tag{40}$$

Конечно-разностные уравнения решаются относительно $\sigma_{ij}^x, \sigma_{ij}^y$ и σ_{ij}^{xy} простым итерационным методом.

Задачи **B** и **C**, аналогично **D**, так же решены конечно-разностным итерационным методом с соответствующими граничными и дополнительными условиями.

Рассмотрим пространственную задачу теории упругости в параллелепипеде с длиной ребер $(2a, 2b, 2c)$ (Рис. 1.). Пусть параллелепипед растягивается по оси OZ . Остальные грани свободны от нагрузок. Для пространственной задачи (22-24) построены конечно-разностные уравнения, и

решены относительно $\sigma_{ijk}^x, \sigma_{ijk}^y, \sigma_{ijk}^z$ и $\sigma_{ijk}^{xy}, \sigma_{ijk}^{xz}, \sigma_{ijk}^{yz}$ итерационным методом.

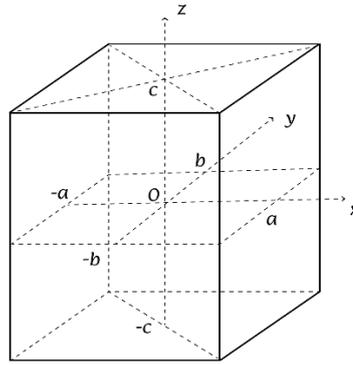


Рисунок 2. Параллелепипед с длиной ребер $(2a, 2b, 2c)$.

В параграфе 3.2 для плоских (37-41) и пространственных (42-47) задач термоупругости построены конечно-разностные уравнения, решаемые итерационным методом.

В параграфе 3.3 для частично-связанной задачи термоупругости (31,33-35) построены конечно-разностные уравнения, решаемые итерационным методом.

Четвертая глава диссертации **“Численные решения упругих и термоупругих задач в напряжениях”** посвящена численному решению упругих и термоупругих краевых задач в напряжениях, сформулированных в предыдущих главах.

В параграфе 4.1 рассматривается задача о растяжении прямоугольной пластины размера $(2a, 2b)$ под действием параболических сил, приложенных по оси Ox (Рис.2). Остальные стороны свободны:

$$x = \pm a: \sigma_x = S_0 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right), \quad \sigma_{xy} = 0, \quad (41)$$

$$y = \pm b: \sigma_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0. \quad (42)$$

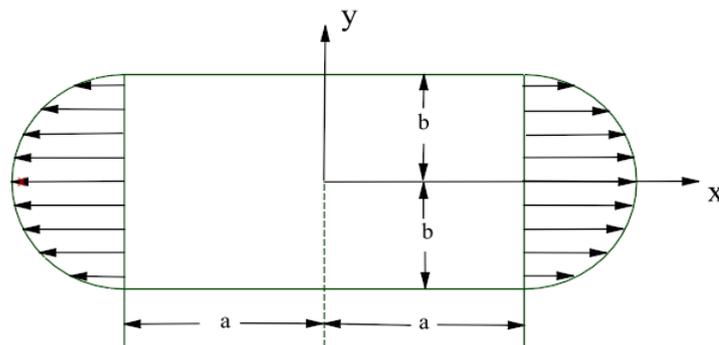


Рисунок 2. Растяжение прямоугольной пластины под действием параболической силы.

В предыдущих главах были сформулированы плоские краевые задачи **В, С, D, E**. Для того чтобы решить упомянутую задачу, необходимо учитывать граничные условия (4.1-4.2) в рассматриваемых задачах **В, С, D** и **E**. Соответствующие этой задаче разностные уравнения приведены в параграфе

3.1. Конечно-разностные уравнения разрешены относительно $\sigma_{ij}^x, \sigma_{ij}^y$ и σ_{ij}^{xy} и решены итерационным методом.

Значения σ_{11} полученные по решению задач **В, С, D** и **Е**, приведены в таблице 1. Численные результаты задач **В, С, D** и **Е**, сравнены с результатами Тимошенко-Гудьера, а также с результатами этой же задачи сформулированных относительно перемещений и деформаций. Исходные данные имели следующие значения: $\lambda = 0.78, \mu = 0.5, S = 1, a = b = 1, N_1 = N_2 = 10, h = 0.2$.

Таблица 1

Сравнение значений напряжения σ_{11} / S при $x=0$

Результаты	$y=-1$	$y=-0.8$	$y=-0.6$	$y=-0.4$	$y=-0.2$	$y=0$
Тимошенко-Гудье	0.3404	0.5166	0.6536	0.7515	0.8102	0.8298
Задача В	0.3412	0.3430	0.6098	0.8004	0.9147	0.9528
Задача С	0.3371	0.3371	0.5992	0.7865	0.8988	0.9363
Задача D	0.3221	0.3257	0.5726	0.8589	0.8589	0.8947
Задача Е	0.3417	0.3427	0.6198	0.8191	0.9369	0.9760
в перемещениях	0.3202	0.4423	0.5899	0.7235	0.8054	0.8310
в деформациях	0.3461	0.3461	0.6153	0.8076	0.9229	0.9614

Задача о сжатии пластины под действием равномерно распределенной силы. Рассмотрена задача о сжатии пластины под действием равномерно распределенной нагрузки приложенной оси OX . Рассматриваемая задача описывается уравнениями (19). Граничные условия следующие

$$x = \pm a: \sigma_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad (43)$$

$$y = \pm b: \sigma_y = S_0, \quad \sigma_{xy} = 0. \quad (44)$$

Дополнительные граничные условия определяются соотношениями (21). Исходные данные: $\lambda = 0.78, \mu = 0.5, l_1 = l_2 = 1, N_1 = N_2 = 10, S_0 = 1$. Полученные результаты представлены в таблице 2.

Таблица 2

Значения тензора напряжений σ_y

	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
$y=0$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$y=0.1$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$y=0.2$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$y=0.3$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$y=0.4$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000
$y=0.5$	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000

По данным таблицы 2 видно, что значения напряжения σ_y равны значениям силы, приложенной к границе прямоугольной пластины, то есть $\sigma_y|_{y=0} = 1 = S_0, \sigma_y|_{y=l_2} = 1 = S_0$, также распределена равномерно по длине пластины, что подтверждает справедливость полученных результатов. Для достижения такой точности потребовалось 24 итераций.

Сравнение с точным решением. Предположим, что следующие функции являются решениями задачи С (18) в прямоугольной области $0 \leq x \leq l_1, 0 \leq y \leq l_2$

$$\sigma_x = y(y - l_2), \quad \sigma_y = x(x - l_1), \quad \sigma_{xy} = xy(x - l_1)(y - l_2)$$

Подставляя эти функции в уравнения равновесия могут быть найдены правые части рассматриваемые объемные силы т.е

$$X_1 = -(x^2 - xl_1)(2y - l_2), \quad X_2 = -(2x - l_1)(y^2 - yl_2), \quad X_{12} = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial X_1}{\partial y} + \frac{\partial X_2}{\partial x} \right), \quad (45)$$

При этом граничные и дополнительные граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned} x=0, l_1: \quad \sigma_x = y(y - l_2), \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_y = 0, \\ y=0, l_2: \quad \sigma_y = x(x - l_1), \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_x = 0. \end{aligned} \quad (46)$$

Значения параметров определены следующим образом:

$$\lambda = 0.78, \quad \mu = 0.5, \quad l_1 = l_2 = 1, \quad N_1 = N_2 = 10, \quad h = 0.1.$$

В таблице 3, точное решение сравнено с приближенным значениями напряжений σ_y полученными по итерационным методом.

Таблица 3

Сравнение значения напряжений σ_y при $y=0,5$

Решение	$x=0$	$x=0.1$	$x=0.2$	$x=0.3$	$x=0.4$	$x=0.5$
Точное решение	0	0.0900	0.1600	0.2100	0.2400	0.2500
Приближенное	0	0.0886	0.1575	0.2067	0.2362	0.2461

Сравнение показывает, что значения приближенного решения и точного решения согласуются друг с другом. Для достижения такой точности требуется 25 итераций.

В параграфе 4.2 речь идет о численном решении задачи о равновесии параллелепипеда. Пусть система координат находится в центре параллелепипеда размера $l_1 = 2a, l_2 = 2b, l_3 = 2c$ и находится в равновесии под действием куполообразной нагрузки, приложенной вдоль противоположных граней, перпендикулярных оси OZ (рис. 1). Другие стороны свободны. Эту задачу рассматривал Филоненко-Бородич с помощью вариационного метода, основанного на функционале Кастильяно. Граничные условия, следующие:

$$\begin{aligned} \text{при } x = \pm a: \quad & \sigma_x = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{xz} = 0 \\ \text{при } y = \pm b: \quad & \sigma_y = 0, \quad \sigma_{xy} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0 \\ \text{при } z = \pm c: \quad & \sigma_z = S, \quad \sigma_{xz} = 0, \quad \sigma_{yz} = 0 \end{aligned} \quad (47)$$

Здесь $S = (1 + \cos(\frac{2\pi x}{a}))(1 + \cos(\frac{2\pi y}{b}))$. Значения параметров следующие:

$\lambda = 0.8, \mu = 0.5, a = 0.5, b = 0.5, c = 1, h_1 = h_2 = 0.1, h_3 = 0.2$. В первой строке таблицы 4 показаны значения напряжений вдоль линии $OZ(-c, +c)$,

проходящей через центр параллелепипеда, и сопоставлены с результатами других авторов. Из таблицы видно, что максимальное значение нагрузки S , приложенной в центре грани, равно 4 при $z=c$, расчетное значение также равно $\sigma_z = 4.00$, а значение, полученное в перемещениях, равно $\sigma_z = 3.9279$. Величина напряжений в центре параллелепипеда равна $\sigma_z = 1.4365$, в работе Филоненко-Бородича $\sigma_z = 1.47$, а в перемещениях $\sigma_z = 1.4294$. Для получения численных результатов потребовалось $t=14$ итераций.

Таблица 4

Сравнение значения напряжений σ_z при $y=0; x=0$

Задачи	$z=-1$	$z=-0.8$	$z=-0.6$	$z=-0.4$	$z=-0.2$	$z=0$
Бельтрами-Мичелл	4.0000	3.2065	2.5657	1.9248	1.6807	1.4365
В перемещениях	3.9279	2.7025	2.3333	1.8701	1.5437	1.4294
Победря	4.0000	3.4450	2.7981	2.0179	1.6639	1.3639

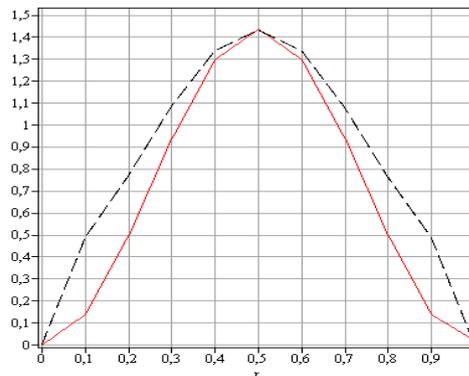


Рисунок.3 Распределение напряжений σ_z между параллелепипедом

Сплошная линия результаты, полученные в напряжениях, сплошная линия напряжения, полученные перемещениями.

Задача о сжатии параллелепипеда под действием равномерно распределенной нагрузки. Рассмотрена задача о сжатии ($S=1$) под действием равномерно распределенной силы, приложенной на противоположных сторонах, перпендикулярных оси OZ параллелепипеда. В таблице 5 показано распределение напряжения σ_z .

Таблице 5

Сравнение результатов тензора напряжений σ_z при $y=0$

Результаты	$x=-1$	$x=-0.8$	$x=-0.6$	$x=-0.4$	$x=-0.2$	$x=0$
$z=1$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$z=0.5$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
$z=0$	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

В параграфе 4.3 речь идет о численном решении плоской задачи теории термоупругости. Пусть все стороны прямоугольника свободны и внутри него действует температурное поле, т.е. $T = T_0 \cos\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2b}\right)$. Значения параметров получают следующим образом:

$\lambda=0.7$, $\mu=0.3$, $a=1$, $b=1$, $h_1=h_2=0.25$. В таблице 6 показаны напряжения σ_x на линии $y=b$ в сравнении с результатами задачи (31-35) и работы Мелешко.

Таблице 6

Сравнение результатов тензора напряжений σ_x при $y=b$

Задачи	$x=0$	$x=0.25$	$x=0.5$	$x=0.75$	$x=1$
В напряжениях	0.5835	0.5315	0.4018	0.1988	0.0
Мелешко	0.59	0.52	0.33	0.11	0.0

На рисунке 4 показано напряжение σ_x для краевой задачи (31-35) и сравнены с результатами работы Мелешко в графическом виде.

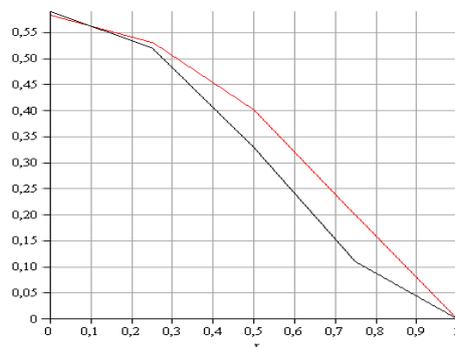


Рисунок 4. Сравнение напряжения σ_x на границе $y=b$ с задачей (31-35) и Мелешко

В таблице 7 сравниваем напряжения σ_x , полученные смещениями в той же задаче, что и в задаче (31-35) на линии $x=0$.

Таблица 7

Сравнение результатов тензора напряжений σ_x при $x=0$

Задачи	$y=0$	$y=0.1$	$y=0.2$	$y=0.3$	$y=0.4$	$y=0.5$
В напряжениях	0	-1.1505	-2.1884	-3.0121	-3.5409	-3.7231
В перемещениях	0	-0.608	-1.314	-2.681	-3.503	-3.778

На рис. 5 показано распределение напряжения σ_x в плоскости $x=0$.

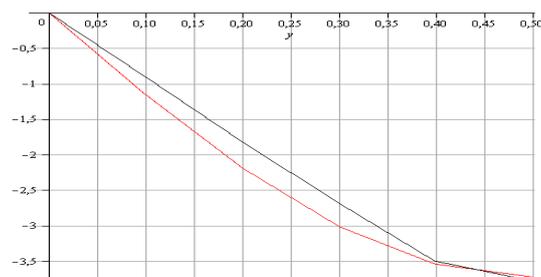


Рисунок 5. Напряжение σ_x в центре пластины ($x=0$) (31-35) Проблема показана черным, перемещениях напряжения - красным.

В параграфе 4.4 речь идет о численном решении пространственной задачи теории термоупругости. В задаче (29-30) все стороны параллелепипеда свободны и тело находится в поле температуры $T = T_0 \sin\left(\frac{\pi x}{2a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{2b}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{2c}\right)$

. Значения параметров получаются следующим образом: $\lambda = 1.5$, $\mu = 0.75$, $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $h_1 = h_2 = h_3 = 0.1$, $N_1 = 10$, $N_2 = 10$, $N_3 = 10$,

. В таблице 8 приедены значения напряжения σ_z , полученные по решению задачи (29-30) при $z=c$ $x=a$, сравниваются с результатами задачи в перемещениях.

Таблица 8

Сравнение значений напряжения σ_z при $x=0,5$ и $z=0,5$

Задачи	$y=0$	$y=0.1$	$y=0.2$	$y=0.3$	$y=0.4$	$y=0.5$
В напряжениях	0	-1.118	-2.11	-2.91	-3.427	-3.618
В перемещениях	0	-0.839	-1.62	-2.449	-3.326	-3.62

На рисунке 6 показано распределение напряжений σ_z (29-30) и перемещений.

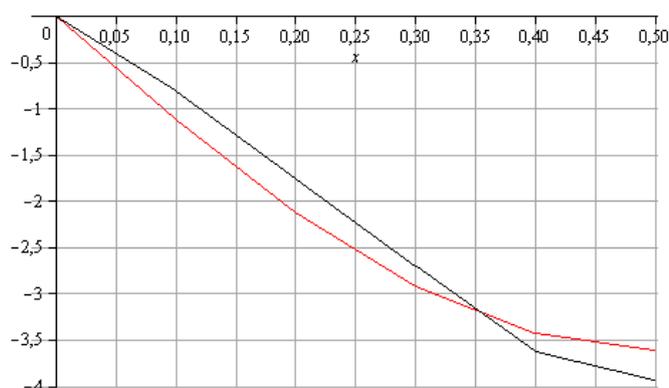


Рисунок 6. Распределение напряжения σ_z в центре пластины ($x=0,5$ и $z=0,5$) в сечении $0 \leq y \leq 0,5$ (красное – задача в напряжениях) и (черное- в перемещениях).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена формулировке и численному решению плоских и пространственных краевых задач теории упругости и термоупругости в напряжениях. В диссертационной работе получены следующие научные результаты:

1. В рамках уравнений Бельтрами-Мичелла сформулированы новые плоские задачи в посредственно относительно напряжений(без использования функции напряжений Эри);

2. Разработана методика определения недостающих граничных условий на основе уравнений равновесия для прямоугольных областей;
3. Предложены новые уравнения термоупругости относительно напряжений и температуры;
4. Сформулированы пространственные краевые задачи теории упругости и термоупругости в напряжениях;
5. Построены конечно-разностные итерационные уравнения и решены плоские и пространственные задачи теории упругости и термоупругости в напряжениях и сравнены с известными решениями;
6. Разработано программное обеспечение на алгоритмическом языке C++ и зарегистрировано в агентстве интеллектуальной собственности.

**SCIENTIFIC COUNCIL DSc. 02/30.12.2019.T/FM.61.01 AWARDED THE
SCIENTIFIC DEGREE AT THE INSTITUTE OF MECHANICS AND
SEISMIC STABILITY OF STRUCTURES NAMED AFTER
M.T.URAZBAEV, UZBEKISTAN ACADEMY OF SCIENCES**

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

TILOVOV OTAJON UKTAMOVICH

**NUMERICAL SOLUTION OF ELASTIC AND THERMOELASTIC
BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN STRESSES**

01.02.04-Mechanics of deformable rigid body

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

Tashkent-2024

The theme of dissertation of Doctor of Philosophy (PhD) in physical and mathematical sciences was registered at the Higher Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under № B2023.4.PhD/FM962.

Dissertation has been prepared at the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english) on the website (<https://instmech.academy.uz>) and the “ZiyoNet” Information and educational portal (www.ziynet.uz).

Scientific supervisor: **Khaldjigitov Abduvali Abdisamatovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Official opponents: **Khusanov Bakhtiyor Ergashbaevich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Safarov Ismoil Ibrokhimovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Leading organization: **Tashkent state transport university**

Defense will take place «15» January 2024 at 4.00 pm at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.T/FM.61.01 at Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T.Urazbaev, Uzbekistan Academy of Sciences. (Address: 100047.Tashkent, st. Durmon yuli-40, Conference hall -320. Ph.:(+99871)-262-71-52, fax:(+99871) 262-71-32, e-mail: instmech@academy.uz).

The thesis is available in the Center Information Resource of Institute of Mechanics and Seismic Stability of Structures named after M.T.Urazbaev, Uzbekistan Academy of Sciences. (is registered № 24) (Address: 100047, Tashkent st. Durmon yuli-40, department of Center Information Resource. Ph.: (+99871) 262-71-52, e-mail:instmech@academy.uz).

Abstract of dissertation sent out on «26» December 2024 year
(mailing report №. 24 on “24” December 2024 year)

M.Mirsaidov
Chairman of the Scientific Council for Awarding Academic Degrees, Doctor of Technical Sciences, Professor, Academician

M.K.Usarov
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S. Professor

R.A.Abirov
Chairman of scientific seminar under scientific council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research is to formulate and numerically solve boundary value problems of the theory of elasticity and thermoelasticity with respect to stresses.

The object of the research is the process of deformation of flat and spatial bodies under the influence of mechanical and thermomechanical forces.

Scientific novelty of research is as follows:

new formulations of boundary value problems of the theory of elasticity and thermoelasticity directly with respect to stresses (without using potential functions of the Airy type) are proposed;

numerical models for plane and spatial problems of the theory of elasticity and thermoelasticity with respect to stresses are developed and solved by the method of successive approximations;

methods, algorithms and programs for calculating the stress state of elastic and thermoelastic bodies in the form of a rectangular plate and parallelepiped are developed;

elastic and thermoelastic problems in stresses for a rectangular plate and parallelepiped are numerically solved under various thermomechanical loads and compared with known results;

it is shown that the numerical results of elastic and thermoelastic problems in stresses are more accurate in comparison with similar problems formulated with respect to displacements;

Implementation of the research results. Mathematical and numerical models based on stress for determining the safety margins and reliability of deformable bodies and structures are applied in practice across various domains:

These solutions are used in building design within construction organizations, determining strength and reliability reserves using numerical methods to solve plane and spatial problems of elasticity and thermoelasticity theory. (Ministry of construction and housing communal economy 26.06.2024 No. 14-06/6476). The application of scientific results has led to a 10-12% increase in labor productivity and a 10-15% reduction in costs.

The structure and volume of the thesis: The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion, a list of used literature and applications. The volume of the thesis is 91 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS
I-bo'lim (1 часть; part 1)

1. Khaldjigitov A.A., Djumayozov U.Z., Tilovov O.O. A new approach to numerical simulation of boundary value problems of the theory of elasticity in stresses and strains. // EUREKA: Physics and Engineering» №2 pp 107-120. DOI: 10.21303/2461-4262.2023.002735. (3, Scopus IF 0.253).
2. Khaldjigitov A.A., Djumayozov U.Z., Tilovov O.O. Numerical solution of problem of equilibrium of parallelepiped in stresses. E3S Web of Conferences 401, 02019. (2023) <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202340102019> (3, Scopus IF=0.182).
3. Халджигитов А.А., Тиловов О.У. Численное решение плоской задачи теории упругости в напряжениях. Узбекский журнал Проблемы механики. 2022, №2, 12-19 ст. (01.00.00, №4).
4. Халджигитов А.А., Тиловов О.У. Численное решение частично-связанной задачи термоупругости в напряжениях. Узбекский журнал Проблемы механики. 2023. №3, 35-41 ст. (01.00.00, №4).
5. Халджигитов А.А., Тиловов О.У. Джумаёзов У.З., Гуломова В.Д. Численное решение плоской задачи термоупругости в напряжениях. // Проблемы вычислительной и прикладной математики. -2023. - №6(53). 94-103 ст. (01.00.00, №9).

II-bo'lim (2 часть; part 2)

1. Тиловов О.У. Численное решение двумерной задачи в напряжениях “Инновация -2022” XXVI Ҳалқаро илмий-амалий анжумани. Илмий мақолалалар тўплами. 2022. 279 ст.
2. Тиловов О.У., Пирматов А.У., Журакулов Н.И. Численное решение задачи о диске в напряжениях. “Инновация -2023” XXVII Ҳалқаро илмий-амалий анжумани. Илмий мақолалалар тўплами. 289-291. 2023.
3. Tilovov O, Xudoyberdiyev J. Ikki o'lchovli termo-elastik masalalarni kuchlanishlarda sonli yechish. Abstracts of the ii republican scientific and practical conference of young scientists' mathematics, mechanics and intellectual technologies. Toshkent 2023.251 ст.
4. Халджигитов А.А., Тиловов О.У. Численное решение частично-связанной задачи термоупругости в напряжениях. Международная научно-практическая конференция «Рахматулинские чтения»: Тезисы докладов. Ташкент, 26–27 мая 2023 года.172 ст.
5. Халджигитов А.А., Тиловов О.У. Термо-эластик масалани кучланишларда сонли ечиш. Математик моделлаштириш ва ахборот технологияларининг долзарб масалалари халқаро илмий-амалий анжуман. Тезислар тўплами. 2023. 325-328 ст.
6. Халджигитов А.А., Тиловов О.У., Саломов Н.О. О численном решении плоских задач теории упругости в напряжениях. XIII Всероссийский

- съезд по фундаментальным проблемам теоретической и прикладной механики, Санкт-Петербург. 2023.
7. Тилолов О.У. Двумерные задачи теории упругости в напряжениях. “Raqamli texnologiyalar va sun’iy intellektni rivojlantirishning zamonaviy holati va istiqbollari” Respublika ilmiy-amaliy anjumani. 505-508. 2022 yil
 8. Тилолов О.У. Краевая задача о растяжении стержня в напряжениях. Замонавий ахборот, коммуникация технологиялари ва ат-таълим татбиқи муоммолари мавзусидаги республика илмий амалий анжумани. 2022. 115-117 ст.
 9. Халджигитов А.А., Джумаёзов У.З., Тилолов О.У. Сравнение численных решений модельных уравнений относительно напряжений, деформаций и перемещений. Современное состояние и перспективы применения цифровых технологий и искусственного интеллекта в управлении: сборник докладов республиканской нацнотехнической конференции. 2022.362-370 ст.
 10. Тилолов О.У., Халджигитов А.А. Программный комплекс для численного решения линейных краевых задач теории упругости в напряжениях. O‘zbekiston Respublikasi adliya vazirligi huzuridagi intellektual mulk agentligi №DGU 25120. 2023 3671.

