

**BUXORO MUHANDISLIK-TEXNOLOGIYA INSTITUTI**  
**HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI**  
**PhD.03/27.02.2021.FM.101.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH ASOSIDA**  
**TUZILGAN BIR MARTALIK ILMIY KENGASH**

---

**TOSHKENT KIMYO-TEXNOLOGIYA INSTITUTI**

**NAMOZOV JASUR SHOQULOVICH**

**UCH QATLAMLI QOVUSHOQ-ELASTIK PLASTINKALARNING ERKIN  
VA MAJBURIY TEBRANISH XUSUSIYATLARI**

**01.02.04 – Deformatsiyalanuvchan qattiq jism mexanikasi**

**Texnika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi**  
**AVTOREFERATI**

UDK: 539.3

**Texnika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi  
avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по  
техническим наукам**

**Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on  
Technical Sciences**

**Namozov Jasur Shoqulovich**

Uch qatlamli qovushoq-elastik plastinkalarning erkin va majburiy tebranish  
xususiyatlari..... 3

**Намозов Жасур Шокулович**

Особенности свободных и вынужденных колебаний трехслойных  
вязкоупругих пластинок ..... 21

**Namozov Jasur Shoqulovich**

Features of free and forced vibrations of three-layer viscoelastic plates..... 39

**E'lon qilingan ishlar ro'yxati**

Список опубликованных работ  
List of published works ..... 43

**BUXORO MUHANDISLIK-TEXNOLOGIYA INSTITUTI**  
**HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI**  
**PhD.03/27.02.2021.FM.101.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH ASOSIDA**  
**TUZILGAN BIR MARTALIK ILMIY KENGASH**

---

**TOSHKENT KIMYO-TEXNOLOGIYA INSTITUTI**

**NAMOZOV JASUR SHOQULOVICH**

**UCH QATLAMLI QOVUSHOQ-ELASTIK PLASTINKALARNING ERKIN  
VA MAJBURIY TEBRANISH XUSUSIYATLARI**

**01.02.04 – Deformatsiyalanuvchan qattiq jism mexanikasi**

**Texnika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi**  
**AVTOREFERATI**

**Texnika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiya mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2024.2.PHD/T4561 raqam bilan ro'yxatga olingan.**

Dissertatsiya Toshkent kimyo-texnologiya institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume) Ilmiy kengashning veb-sahifasida ([www.bmti.uz](http://www.bmti.uz)) va "Ziyonet" Axborot ta'lim portalida ([www.ziyonet.uz](http://www.ziyonet.uz)) joylashtirilgan.

**Ilmiy rahbar:**

**Usmonov Botir Shukurillayevich**  
texnika fanlari doktori, professor

**Rasmiy opponentlar:**

**Mardonov Botir Mardonovich**  
fizika-matematika fanlari doktori, professor

**Raxmonov Baxodir Sobirovich**  
texnika fanlari doktori, professor

**Yetakchi tashkilot:**

**Toshkent irrigatsiya va qishloq xo'jaligini  
mexanizatsiyalash muhandislari instituti Milliy  
tadqiqot universiteti**

Dissertatsiya himoyasi Buxoro muhandislik-texnologiya instituti huzuridagi PhD.03/27.02.2021.FM.101.02 raqamli Ilmiy kengash asosida bir martalik Ilmiy kengashning 2025-yil 10 yanvar soat 11<sup>00</sup> dagi majlisida bo'lib o'tadi (Manzil: 100118, Buxoro shahar, Qayum Murtazoyev ko'chasi 15 uy. Tel.: (+99865) 223-78-84; faks: (+99865) 223-78-84, e-mail: [bmti\\_info@edu.uz](mailto:bmti_info@edu.uz)).

Dissertatsiya bilan Buxoro muhandislik-texnologiya institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (№ 337 raqam bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100118, Buxoro shahar, Qayum Murtazoyev ko'chasi 15 uy. Tel.: (+99865) 223-78-84).

Dissertatsiya avtoreferati 2024 yil 26 dekabr kuni tarqatildi.

(2024 yil 23 noyabrdagi № 1 raqamli reyestr bayonnomasi).



**M.X. Teshayev**

Ilmiy darajalar beruvchi bir martalik Ilmiy kengash raisi, fizika-matematika fanlari doktori (DSc).

**Z.I. Boltayev**

Ilmiy darajalar beruvchi bir martalik Ilmiy kotibi, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor.

**M.Z. Sharipov**

Ilmiy darajalar beruvchi bir martalik Ilmiy kengash qoshidagi bir martalik Ilmiy seminar raisi, fizika-matematika fanlari doktori (DSc), professor.

## KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

**Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati.** Jahonda texnika va harakatlanuvchi transportlarda uchraydigan juda ko‘plab konstruksiya elementlarida ko‘p qatlamli plastinka va qobiqlarni qo‘llash yetakchi o‘rinlardan birini egallamoqda. Dunyo miqyosida uch qatlamli plastinkalar boshqa detallar bilan o‘zaro ta’sirlashganda ularning dinamik holatini tadqiq etishni va uch qatlamli plastinkalardan foydalanishni amaliyotga joriy etishni taqozo etadi. Shu jihatdan, uch qatlamli plastinkasimon konstruksiyalarning asos bilan o‘zaro ta’sirda bo‘lgan holda xususiy va majburiy tebranish masalalarini o‘rganish va harakatlanuvchi transportlarda foydalanish muhim ahamiyatga ega hisoblanadi. Bu borada ko‘pgina xorijiy davlatlarda, jumladan, AQSh, Kanada, Rossiya va boshqa davlatlarda harakatlanuvchi transportdagi vibratsiya va shovqinga qarshi kurashish muammosini yechish uchun uch qatlamli plastinkalardan foydalanish samarali ekanligiga alohida e’tibor qaratilmoqda.

Jahonda kema, samolyot va harakatlanuvchi transport vositalarining ko‘p qismlari ikki va uch qatlamli konstruksiyalardan tashkil topgan bo‘lib, bu konstruksiyalarning tashqi kuchlar ta’siridagi dinamik holatini baholashga yo‘naltirilgan ilmiy tadqiqot ishlari olib borilmoqda. Bu borada, konstruksiyalar, asosan, uch qatlamli plastinka sifatida modellashtirilgan bo‘lib, uch qatlamli plastinka to‘ldiruvchisining bikrligini hisobga olish bilan va ularning qovushoqlik xususiyatlarini hisobga olib, dinamik holatini xarakterlovchi parametrlar (tebranishlar chastotasi hamda formasi)ni aniqlash usullarini ishlab chiqish zarur. Shu bilan birga, uch qatlamli plastinkalarda hosil bo‘ladigan dinamik zo‘riqishlar va deformatsiyalarni kamaytirish usullarini takomillashtirishga alohida e’tibor berilmoqda.

Respublikamizda uch qatlamli plastinkalarda hosil bo‘ladigan salbiy holatlarni kamaytirishga va plastinka qatlamlari bilan o‘zaro ta’sirlashuvchi qatlam bikirligini tanlash hisobida konstruksiyaning mustahkamligini oshirish yuzasidan keng qamrovli chora-tadbirlar amalga oshirilib, muayyan natijalarga erishilmoqda. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 29-oktyabrdagi “Ilm-fanni 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi Farmonida, jumladan, “...ilmiy-innovatsion salohiyatdan keng foydalanish, istiqbolda ilm-fanni muntazam isloh qilib borishning ustuvor yo‘nalishlarini belgilash, zamonaviy bilimga ega va mustaqil fikrlaydigan yuqori malakali kadrlar tayyorlash...”<sup>1</sup> vazifalari belgilab berilgan. Ushbu vazifalarni amalga oshirishda, jumladan, deformatsiyalanuvchi muhit bilan o‘zaro ta’sirda bo‘lgan uch qatlamli plastinkalarning tebranishlari masalalarida rezonans sohasidagi titrashlarni bartaraf etish muhim ahamiyat kasb etmoqda.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 30-iyuldagi PQ-4794-sonli “O‘zbekiston Respublikasi aholisi va hududining seysmik xavfsizligini ta’minlash tizimini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” Qarori, “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” PQ-4708-sonli 2020-yil 7-maydagi Prezident Qarori hamda

---

<sup>1</sup> O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 29-oktyabrdagi PF-6097-son “Ilm-fanni 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi Farmoni

mazkur faoliyatlarga tegishli boshqa me'yoriy-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishga ushbu dissertatsiya ishi muayyan darajada xizmat qiladi.

**Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga mosligi.** Mazkur tadqiqot respublika fan va innovatsion texnologiyalar rivojlanishining IV. "Matematika, mexanika, inshootlar seysmodinamikasi va informatika" ustuvor yo'nalishi doirasida bajarilgan.

**Muammoning o'rganilganlik darajasi.** Respublikada uch qatlamli plastinkalarning erkin va majburiy tebranishlari muammosi bilan bog'liq nazariy hamda amaliy ilmiy tadqiqot ishlari X.A.Raxmatulin, M.T.O'razboyev, T.Sh.Shirinkulov, V.K.Kabulov, T.R.Rashidov, Y.N.Muborakov, B.M.Mardonov, K.S.Sultonov, Sh.M.Mamatqulov, M.M.Mirsaidov, F.B.Badalov, G.X.Xojmetov, I.Mirzayev, T.M.Mavlonov, A.Abdusattorov, I.I.Safarov, M.X.Teshaev, Sh.S.Yuldashev, Z.I.Boltayev B.S.Raxmonov va boshqa olimlar tomonidan olib borilgan va ko'zlangan natijalarga erishilgan.

Bu muammo bo'yicha xorijiy mamlakatlarning taniqli olimlari A.A.Ilyushin, B.E.Pobedrya, V.V. Bolotin, I.E.Troyanovskiy, R.Mitra, Uayt, I.D.Grudev, A.G.Gorshkov, A.S.Volmir, F.G.Abdulla-Zade, V.I.Jeltkov, Chan Txan Xay, A.V.Lenskiy, Yu.N. Novichkov, A.N.Laputin, A.N.Antonov, Y.A.Lugovaya, Li Xiaowei, J.A.Nicholas, G.Vanneuville, M.Bourges, J.M.Garcier, M.Guillot, G.Poumarat va boshqalar shug'ullangan. Ular deformatsiyalanuvchi muhit bilan aloqada bo'lgan uch qatlamli plastinkada turg'un va turg'un bo'lmagan yuklanish masalalarini materiallarning reologik xususiyatlarini hisobga olib kuchlanish-deformatsiya holatini o'rganish usullarini rivojlantirishgan.

Shu bilan birga, V.V.Bolotin, Y.N.Novichkov "Механика многослойных конструкций" deb nomlangan asarida ko'p qatlamli plastinkaning deformatsiyalanuvchi muhit bilan o'zaro ta'sirda bo'lmagan va qovushoqligi hisobga olinmagan holda statika va dinamika masalalarini o'rgangan. A.G.Gorshkov, E.I.Starovoytov, A.V.Yarovaya "Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций" nomli kitoblarida keltirilgan.

Ko'p qatlamli plastinkaning xususiy va majburiy tebranishlari masalalarini yechishda maxsus funksiyalar yordamida asimptotik yechimlar olingan. Ular tomonidan olingan chastotalar haqiqiy sonlar bo'lib, hisoblashlarda, asosan, asimptotik formulalardan foydalangan.

Dissertatsiya ishida deformatsiyalanuvchi muhit bilan o'zaro ta'sirda bo'lgan uch qatlamli plastinkalarning harakat tenglamalari materialning qovushoqlik xususiyatlarini hisobga olib chiqarilgan hamda turli chegaraviy shartlar qo'yilganda masalalar yechish uchun algoritm va dastur yaratish bo'yicha izlanishlar olib borilgan.

**Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta'lim muassasasining ilmiy tadqiqot ishlari rejalari bilan bog'liqligi.** Dissertatsiya tadqiqoti Toshkent kimyo-texnologiya inistituti ilmiy tadqiqot ishlari rejasining 2017-2025-yillarga mo'ljallangan M.01.2017-raqamli "Fizik jarayonlarni matematik modellashtirish» mavzusidagi ilmiy tadqiqot yo'nalishi doirasida bajarilgan.

**Tadqiqotning maqsadi** uch qatlamli plastinkaning qovushoq-elastik xususiyatlarini hisobga olib, uning erkin va majburiy tebranishlari masalalarini o'rganish (kompleks chastota va tebranish formasini aniqlash, ko'chish amplituda – chastotasini orasidagi bog'lanishni qurish) uchun metodika va algoritm ishlab chiqish hamda sonli natijalar olib, uni tahlil qilishdan iborat.

**Tadqiqotning vazifalari:**

uch qatlamli plastinkaning erkin va majburiy tebranish masalalarini materiallarning qovushoq-elastiklik xususiyatlarini hisobga olgan holda matematik qo'yilishi, yechish metodikasi va algoritmini ishlab chiqish;

deformatsiyalanuvchi muhit bilan o'zaro ta'sirda bo'lgan uch qatlamli plastinkaning erkin tebranish masalalarini materiallarning qovushoq-elastiklik xususiyatlarini hisobga olgan holda matematik qo'yilishi, yechish metodikasi va algoritmini ishlab chiqish;

uch qatlamli to'ldiruvchili plastinkaning erkin tebranishlarida kompleks chastotalarni aniqlash va ularning to'ldiruvchi bikirligiga bog'liq o'zgarishiga baho berish;

uch qatlamli qovushoq-elastik plastinkalarning majburiy turg'un tebranishlarda ko'chishlar va kuchlanishlar amplitudalari va chastotalari orasidagi bog'lanishni to'ldiruvchi bikrligining o'zgarishiga bog'liqligini tadqiq qilish va mavjud tajriba natijalari bilan solishtirish.

**Tadqiqotning ob'yekti** sifatida qovushoq-elastik xususiyatlarga ega bo'lgan uch qatlamli to'ldiruvchili plastinka olingan.

**Tadqiqotning predmeti** qovushoq-elastik uch qatlamli to'ldiruvchili plastinkaning erkin va majburiy tebranishlarini o'rganish uchun ishlab chiqilgan metodika va algoritmlar tashkil etadi.

**Tadqiqotning usullari.** Tadqiqot jarayonida qo'yilgan masalalarni yechish uchun o'zgaruvchilarni ajratish, chekli elementlar usuli, Gauss va Myuller usullaridan hamda maxsus funksiyalardan foydalanilgan.

**Tadqiqotning ilmiy yangiligi** quyidagilardan iborat:

ilk bora uch qatlamli plastinkalarning xos va majburiy tebranishlari masalalari materiallarning qovushoq-elastiklik xususiyatlarini hisobga olgan holda matematik qo'yilishi Gamilton–Ostrogradskiyning variatsion prinsipidan, yechish metodikasi va algoritmi esa chekli elementlar usuli asosida ishlab chiqilgan;

uch qatlamli qovushoq-elastik plastinkaning majburiy turg'un tebranishlaridagi ko'chishlar va kuchlanishlar amplitudalari, chastotalari orasidagi bog'lanish bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamalar sistemasini yechish orqali muhim bo'lgan amplituda-chastota xarakteristikalari topilgan;

uch qatlamli to'ldiruvchili plastinkaning xos tebranishlari klassik nazariyasiga asoslanib, kompleks chastotalar topilgan, ularning to'ldiruvchi bikrligiga va qalinligiga bog'liqligini ifodalovchi dispersion munosabatlar orqali tebranishlar formalari qurilgan;

asos inersiyasining oshishi ko'chish amplitudasining oshishiga va tebranishlar davrining kamayishiga olib kelishi hamda asosning massasi 1000 dan 1500 ga o'zgarishi ko'chishning 26 % ga oshishiga olib kelishi aniqlangan.

**Tadqiqotning amaliy natijalari** quyidagilardan iborat:

Ishlab chiqilgan metodika uch qatlamli qovushoq-elastik plastinkalardan

tashkil topgan qurilmalarning parametrlarini tanlash hisobiga yangi avlodini yaratishga, shuningdek, turli mashinasozlik mexanizmlarining mustahkamligini ta'minlashga xizmat qiladi.

**Tadqiqot natijalarining ishonchliligi** chegaraviy masalaning korrekt qo'yilishi, keltirib chiqarilgan matematik ifodalarning qat'iyligi, asoslangan yechish usullaridan foydalanish va yechimlarning aniqligini baholash hamda boshqa matematik qo'yilgan masalalarning yechimlari bilan taqqoslashlar orqali izohlanadi.

**Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati.**

Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati deformatsiyalanuvchan qovushoq-elastik uch qatlamli to'ldiruvchili plastinkaning erkin va majburiy tebranishlarini tadqiq qilishda ishlab chiqilgan metodika va algoritmi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati ishlab chiqilgan metodika, algoritmi va dastur radio- elektron qurilmalarida rezonans hodisalarini bartaraf etish uchun parametrlarning optimal qiymatlarini topishga xizmat qiladi.

**Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi.** Uch qatlamli to'ldiruvchili plastinkaning tebranishlari masalalari materialning qovushoq-elastiklik xususiyatlarini hisobga olgan holda matematik modellashtirish, nazariyasini rivojlantirish uchun ishlab chiqilgan hisoblash usuli, algoritmi va dasturi bo'yicha olingan natijalar asosida:

Garmonik kuch ta'sirida hosil bo'ladigan dinamik kuchlanish-deformatsiya holatini o'rganishning nazariy-tajribaviy formulasidan Buxoro muhandislik-texnologiya instituti Davlat ilmiy texnika dasturlari doirasida 2012-2016-yillarda F-4-14 raqamli "Suyuqlik oquvchi yer osti egri chiziqli quvurning tashqi kuchlar ta'siridagi kuchlanish-deformatsiyalar holatini tadqiq qilish nazariyasini rivojlantirish va hisoblash usullarini ishlab chiqish" mavzusidagi fundamental loyihada foydalanilgan (Buxoro muhandislik-texnologiya institutining 2024-yil 21-maydagi 1-2-1857-sonli ma'lumotnomasi). Natijada bu yuklanish ostida ishlovchi bir jinsli yoki bir jinsli bo'lmagan sistemalarda hosil bo'ladigan kuchlanish-deformatsiya holatini baholash imkonini bergan;

uch qatlamli qovushoq-elastik konstruksiyalarning o'zaro ta'sirini hisobga olish bilan bog'liq masalalarni yechishda ishlab chiqilgan metodikadan Toshkent kimyo-texnologiya instituti Davlat ilmiy texnika dasturi doirasida 2016-2020-yillarda bajarilgan OT-F4-01 "Qovushoq suyuqlik oquvchi ko'p qatlamli kompozit quvurlar egri chiziqli bo'laklarining harorat va dinamik yuklanishlar ta'sirida chiziqli bo'lmagan dinamik kuchlanish-deformatsiya holatini o'rganish usullarini ishlab chiqish va nazariyasini rivojlantirish" mavzusidagi fundamental loyihada foydalanilgan (Toshkent kimyo-texnologiya institutining 2024-yil 29-maydagi 1/01-1544-sonli ma'lumotnomasi). Natijada topilgan analitik yechim va dissertatsiyada ishlab chiqilgan metodikadan foydalanish orqali olingan yechimlar orasidagi farq 15 % dan oshmasligi aniqlangan;

kompozit materiallardan yasalgan konstruksiyalarning deformatsiyasini, chidamliligi, tebranishi va dinamik ishonchliligini hisoblashda dissertatsiyada taqdim qilingan hisoblash usullaridan "Toshkent mexanika zavodi" AJda foydalanilgan (O'zbekiston Respublikasi transport vazirligi huzuridagi "O'ZAVIATSIYA" Fuqaro aviatsiyasi agentligining 2024-yil 16-avgustdagi 01-39/16-2955-sonli ma'lumotnomasi). Natijada kompozit materiallardan tuzilgan

konstruksiyalarda hosil bo'ladigan deformatsiyasini zamonaviy shaxsiy kompyuterlarda flatterni konstruksiyalarning kuchlanish-deformatsiyalangan holatini tahlil qilish imkonini bergan.

**Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi.** Mazkur tadqiqot natijalari bo'yicha 6 ta xalqaro va 3 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida ma'ruza qilingan va muhokamadan o'tkazilgan.

**Tadqiqot natijalarining e'lon qilinishi.** Dissertatsiya mavzusi bo'yicha jami 18 ta ilmiy maqola chop etilgan, shulardan O'zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining falsafa doktori (PhD) dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 4 ta maqola, jumladan, 2 tasi respublika va 2 tasi xorijiy nashrlarda chop qilingan.

**Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi.** Dissertatsiya kirish, to'rtta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Dissertatsiya hajmi 105 betni tashkil etgan.

## DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

**Kirish** qismida o'tkazilgan tadqiqotlarning dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning maqsadi va vazifalari shakllantirilgan, obykti va predmeti tavsiflangan, respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga mosligi ko'rsatilgan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning ishonchliligi asoslangan hamda ilmiy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarini amaliyotga joriy qilish, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo'yicha ma'lumotlar keltirilgan.

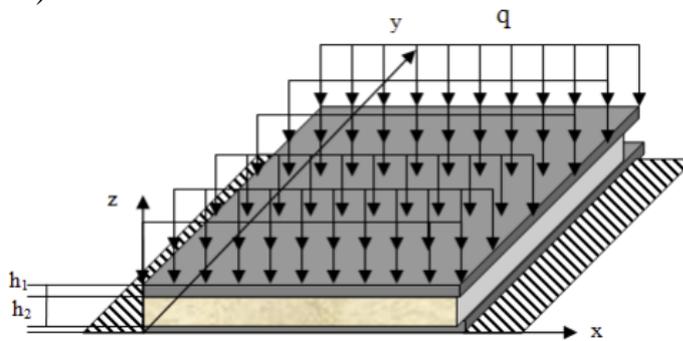
Dissertatsiyaning **“Uch qatlamli dissipativ bir jinsli bo'lmagan plastinkalarning erkin va majburiy tebranishlarini o'rganishga bag'ishlangan adabiyotlar tahlili”** deb nomlangan birinchi bobida, uch qatlamli qovushoq-elastik plastinkalarning erkin va majburiy tebranishlarini o'rganishga bag'ishlangan adabiyotlar tahlili keltirilgan. Uch qatlamli plastinka tebranishlari materiallarning qovushoqlik xususiyatlarini hisobga olib to'liq o'rganilmaganligi adabiyotlar tahlili asosida xulosa qilingan. Qatlamli dissipativ bir jinsli bo'lmagan plastinkalarning erkin va majburiy tebranishlarini ifodalovchi dinamika tenglamalarini keltirib chiqarishda turlicha yondashuvlar mavjudligi ko'rsatib o'tilgan. Bu yondashuvlarni o'rganish muhimligi ham adabiyotlar tahlilidan xulosa qilingan. Ko'p qatlamli plastinkalarni yoki konstruksiyalarni hisoblash uchun qo'llanilayotgan usullar va masalalar, asosan, izotrop plastinka va deformatsiyalanuvchan to'ldiruvchi bilan to'liq kontaktda bo'lgan holati uchun o'rganilgan. Tahlil natijalari shuni ko'rsatadiki, garmonik yuklanishlar konstruksiyalarga ta'sir qilganda rezonans hodisasi hosil qiladi, uni faqat dissipativ bir jinsli bo'lmagan jismlar mexanikasi usullari bilan o'rganish maqsadga muvofiq ekanligi ko'rsatilgan. Bir qator hollarda, tayanch bilan bog'lanishdagi ko'p qatlamli konstruksiyalar garmonik yuklanishlar ta'sirlarida, ularda hosil bo'ladigan rezonans holatlarini hisoblashda muhitning qovushoq-elastik va tayanch inersiyasini hisobga olmaslik katta xatoliklarga olib kelishi mumkinligi ko'rsatib berilgan.

Dissertatsiyaning **“Qovushoq-elastik uch qatlamli plastinkalarni tebranish masalasining qo'yilishi, yechish metodikasi va algoritmi”** deb nomlangan ikkinchi bobida deformatsiyalanuvchan yarim tekislikka o'rnatilgan uch qatlamli

plastinkalarning erkin va majburiy tebranish masalasining qo‘yilishi, yechish metodikasi va algoritmi keltirilgan. Ko‘p qatlamli qovushoq-elastik plastinkalarning harakat differensial tenglamasini olish uchun Gamilton–Ostrogradskiyning variatsion prinsipidan foydalaniladi.

$$\delta I = 0, I = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi - U) dt. \quad (1)$$

Bu yerda  $T$  – mexanik sistemaning kinetik energiyasi;  $U$  – deformatsiyaning potensial energiyasi;  $\Pi$  – tashqi kuchlar potentsiali. Agar to‘ldiruvchini bikirligi tashqi qatlam bikirligi bilan bir xil tartibda bo‘lsa yoki plastinka o‘lchamlari qalinligiga nisbati katta bo‘lsa, u holda hisoblashlarda uch qatlamli plastinkalar uchun to‘g‘ri chiziqli normal gipotezasini qo‘llash o‘rinli bo‘ladi. Bu holda hisoblashlar bir qatlamli plastinkanikidek bo‘ladi. Farqi ikkinchi bir nechta bikirlik ishtirok etadi (1-rasm).



**1-rasm. Uch qatlamli plastinkalarning konstruktsiya hisob sxemasi**

Uch qatlamli strukturaning deformatsiya modelini qurish uchun kinematik yondashuvdan foydalaniladi. Buning asosida ko‘chishlarni qalinlik bo‘yicha bir xil bo‘lish gipotezasi yotadi (1-rasm). Bu uch o‘lchovli masalani deformatsiyalanuvchi qattiq jism mexanikasining ikki o‘lchovli masalasiga olib keladi. Plitalar va qobiqlar uchun  $z$  koordinatasi bo‘ylab o‘lchov qiymati boshqa ikki o‘lchovdan juda kichik bo‘ladi. Ushbu holatda  $x$ ,  $y$  va  $z$  o‘qi bo‘ylab ko‘chishlarni argumentga nisbatan darajali qator ko‘rinishida tasavvur qilishimiz mumkin. Ko‘p qatlamli plastinkalarning kinetik va potensial energiyalari quyidagicha olingan:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \rho_{(k)} h_{(k)} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{G}_1^{(k)}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{G}_2^{(k)}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega + \quad (2)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\Omega} \rho_{[k]} h_{[k]} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \mathcal{G}_1^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{G}_1^{(k+1)}}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \mathcal{G}_2^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{G}_2^{(k+1)}}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial w^{(k+1)}}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega.$$

Bu yerda  $\rho_{(k)}$  va  $\rho_{[k]}$  – qattiq va yumshoq qatlamlarning zichliklari,  $h_{(k)}$  va  $h_{[k]}$  – qattiq va yumshoq qatlamlarning qalinliklari, qattiq va yumshoq qatlamlarning ko‘chish vektor komponentlari  $(\mathcal{G}_1^{(k)}, \mathcal{G}_2^{(k)}, w^{(k)})$   $(\mathcal{G}_1^{(k+1)}, \mathcal{G}_2^{(k+1)}, w^{(k+1)})$ . Mexanik sistema deformatsiyasining potensial energiyasi va tashqi kuchlar potentsiali quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ N_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} - \sum_{\nu=1}^2 S_{\alpha\beta}^{(\nu)} \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \sum_{\nu=1}^2 Q_{\alpha 3}^{(\nu)} \varphi_{\alpha}^{(\nu)} \right] d\Omega;$$

$$\begin{aligned} \Pi = & - \int_{\Omega} \left[ q_{\alpha} \mathcal{G}_{\alpha} + q_3 w + \sum_{\nu=1}^2 m_{\alpha}^{(\nu)} \varphi_{\alpha}^{(\nu)} \right] d\Omega - \\ & - \int_{\Omega} \left[ \bar{N}_{\alpha} \mathcal{G}_{\alpha} + \bar{N}_l \mathcal{G}_l - \bar{Q} w - \bar{M}_n \frac{\partial w}{\partial n} + \bar{M}_l \frac{\partial w}{\partial l} \right] d\Gamma, \end{aligned} \quad (3)$$

Bu yerda  $\alpha$  va  $\beta$  parametrlar bo'yicha yig'indi hosil qilinadi (1 dan 2 gacha). Bu energiyalar (2) va (3) dan foydalanib (1) ning variatsiyasini nolga tenglashtirib, ko'p qatlamli, xususiy holda ikki qatlamli plastinkalarning tebranish tenglamasini olamiz. Kuchlanish va deformatsiya orasidagi munosabatni ifodalovchi irsiy Bolsman-Volter integral bog'lanishi quyidagicha tasvirlanadi:

$$\sigma_{ij} = \tilde{\lambda} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\tilde{\mu} \varepsilon_{ij} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (4)$$

Bu yerda elastiklik modullari  $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$  – operator ko'rinishidagi kattaliklar

$$\tilde{\lambda}_j \varphi(t) = \frac{\nu_j}{(1 + \nu_j)(1 - 2\nu_j)} \tilde{E}_j \varphi(t); \quad \tilde{\mu}_j \varphi(t) = \frac{\nu_j}{2(1 + \nu_j)} \tilde{E}_j \varphi(t),$$

bunda  $\tilde{E}$  – operator ko'rinishdagi elastiklik moduli bo'lib, quyidagi integral munosabatni ifodalaydi:

$$\tilde{E} \varphi(t) = E_{01} \left[ \varphi(t) - \int_0^t R_E(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \right] \quad (5)$$

$\varphi(t)$  – vaqtning ixtiyoriy funksiyasi;  $R_E(t - \tau)$  – relaksatsiya yadrosi;  $E_{01}$  – oniy elastiklik moduli;  $\delta_{ij}$  – Kroneker simvoli:  $i = j$  bo'lsa 1-ga,  $i \neq j$  bo'lsa 0-ga teng. Yuqorida keltirilgan (6) integral had kichik hisoblanadi, shuning uchun  $\varphi(t)$  funksiya uchun  $\varphi(t) = \psi(t) e^{-i\omega_R t}$  o'rinni bo'ladi. Bu kichik chiziqli tebranishlarga mos keladi. Bu yerda  $\psi(t)$  – vaqtning sekin o'zgaruvchi funksiyasi,  $\omega_R$  – haqiqiy kattalik. U holda (5)-ni quyidagi ifoda bilan taqriban almashtirish mumkin:

$$\bar{E} \varphi = E \left[ 1 - \Gamma^C(\omega_R) - i\Gamma^S(\omega_R) \right] \varphi,$$

bunda  $\Gamma^C(\omega_R) = \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau$ ,  $\Gamma^S(\omega_R) = \int_0^{\infty} R(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau$  – mos ravishda material Fure yadro relaksatsiyasining kosinus va sinus obrazlari. Izotrop materiallar uchun Puasson koeffitsiyenti o'zgarimas deb olinadi.

Doiraviy uch qatlamli plastinkalarning harakat integro-differensial tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishda olingan:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0, \\ \tilde{L}_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0, \\ \tilde{L}_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - M_0 \ddot{w} &= -q. \end{aligned} \quad (6)$$

Bu yerda  $u(r, t), \psi(r, t), w(r, t)$  – mos ravishda to'ldiruvchining radial ko'chishi, nisbiy siljish, plastinkalar salqiligi;  $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_0^2$ ,  $\rho_k$  – qatlamning (k-chi) zichligi; koeffitsiyentlar  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  va  $\tilde{L}_2, \tilde{L}_3$  – integro-differensial operatorlar bo'lib, ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$a_1 = \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), a_3 = h_1(c + 0.5h_1) K_1^+ - h_2(c + 0.5h_2) K_2^+,$$

$$a_4 = c^2 \left( h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right), a_5 = c \left[ h_1 (c + 0.5 h_1) K_1^+ + h_2 (c + 0.5 h_2) K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right],$$

$$a_6 = h_1 \left( c^2 + c h_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left( c^2 + c h_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+,$$

$$\tilde{L}_2(g) \equiv \left[ \frac{1}{r} (r g)_{,r} \right]_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2}, \quad \tilde{L}_3(g) \equiv [r \tilde{L}_2(g)]_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.$$

Agar uch qatlamli plastinka Vinkler asosiga o'rnatilgan bo'lsa, u holda (6) tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\begin{aligned} \tilde{L}_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0, \\ \tilde{L}_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0, \\ \tilde{L}_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - M_0 \ddot{w} - k_0 w &= -q. \end{aligned} \quad (7)$$

Bu olingan tenglamalar (6) va (7) ni yechish uchun shartlar qo'yish kerak bo'ladi. Masalan,  $r=1$  bo'lganda

$$\begin{aligned} T_r &= T_{r0}, \quad H_r = H_r^0, \quad M_r = M_r^0, \\ M_{r,r} + \frac{1}{r} (M_r - M_\varphi) &= Q^0 \end{aligned} \quad (8)$$

shartlar qo'yiladi. Bu yerda  $T_r, M_\alpha, H_\alpha$  lar umumlashgan zo'riqishlar uchta  $u(r,t), \psi(r,t), w(r,t)$  – funksiyalar orqali ifodalanadi

$$\begin{aligned} T_r &= \sum_{k=1}^3 h_k (K_k^+ u_{,r} + \frac{u}{r} K_k^-) + c (K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) \psi_{,r} + \\ &+ c (K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \frac{\psi}{r} - \left[ K_1^+ h_1 (c + \frac{h_1}{2}) - K_2^+ h_2 (c + \frac{h_2}{2}) \right] w_{,rr} - \\ &- \left[ K_1^- h_1 (c + \frac{h_1}{2}) - K_2^- h_2 (c + \frac{h_2}{2}) \right] w_{,rr} / r. \end{aligned} \quad (9)$$

Xuddi shunday  $T_r$  dan foydalanib,  $T_\varphi$  ni topish mumkin, buning uchun  $K_k^+$  va  $K_k^-$  o'rinlari almashtiriladi

$$\begin{aligned} T_\varphi &= \sum_{k=1}^3 h_k (K_k^- u_{,r} + \frac{u}{r} K_k^+) + c (K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \psi_{,r} + \\ &+ c (K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) \frac{\psi}{r} - \left[ K_1^- h_1 (c + \frac{h_1}{2}) - K_2^- h_2 (c + \frac{h_2}{2}) \right] w_{,rr} - \\ &- \left[ K_1^+ h_1 (c + \frac{h_1}{2}) - K_2^+ h_2 (c + \frac{h_2}{2}) \right] w_{,rr} / r. \end{aligned} \quad (10)$$

Yuqorida keltirilgan formulalarga o'xshash  $M_\alpha, H_\alpha$  umumlashgan momentlar topiladi. To'g'ri to'rtburchakli plastinkalar va to'ldiruvchining bo'yi va eni mos ravishda  $a, b$  bo'lsin. Plastinkalar bilan to'ldiruvchi orasida kuchlanishlar va ko'chishlarning uzluksizlik sharti qo'yiladi. Plastinkalarning chekkalariga quyidagi shartlar qo'yilgan:

$$\begin{aligned} w_1(x, y, t) \Big|_{x=0} = 0, \quad w_1(x, y, t) \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0, \\ \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(x, y, t) \Big|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}(x, y, t) \Big|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

$$w_2(x, y, t)|_{x=0} = 0, \quad w_2(x, y, t)|_{y=\pm\frac{b}{2}} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(x, y, t)|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}(x, y, t)|_{y=\pm\frac{b}{2}} = 0.$$

Faraz qilamiz, plastinkaning o‘rta qatlami polimer material bo‘lsin. U holda qatlamdagi normal kuchlanish quyidagicha aniqlanadi:  $\sigma_{33} = Ke$ ,  $e$  – nisbiy hajmiy kengayish. To‘ldiruvchi tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$a^2 \left( \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} \right) - 12\tilde{c}e = \frac{12\tilde{c}}{h}(w_1 - w_2).$$

Bunda  $\tilde{c}[f(t)] = c \left( f(t) - \int_0^t R_c(t-\tau)f(\tau)d\tau \right)$ ,  $c = \frac{G_0 a^2}{Kh^2}$ ,  $G_0$  – oniy siljish moduli,

$R_c(t-\tau)$  – relaksatsiya yadrosi.

Plastinkaning tenglamalari quyidagi ko‘rinishda olingan:

$$\begin{aligned} \tilde{D} \left( \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} \right) + \rho h_0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} &= q(t) - Ke(x, y, t), \\ \tilde{D} \left( \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} \right) + \rho h_0 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} &= Ke(x, y, t), \\ a^2 \left( \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} \right) - 12\bar{c}e &= \frac{12\bar{c}}{h}(w_1 - w_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Bunda

$$D[f(t)] = D_0 \left( f(t) - \int_0^t R_D(t-\tau)f(\tau)d\tau \right), \quad D_0 = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu^2)}, \quad K = \frac{E_0}{3(1-2\nu)} -$$

$R_D(t-\tau), R_K(t-\tau)$  – relaksatsiya yadrolari,  $f(t)$  – vaqtning ixtiyoriy funksiyasi. Uch qatlamli qovushoq-elastik plastinkalarning erkin va majburiy tebranish masalalari ko‘riladi.

Erkin tebranish masalasi ko‘rilganda xosmas integral (12) quyi chegarasi noldan boshlanadi.

Majburiy turg‘un tebranish masalasi yechilganda integralning quyi chegarasi  $-\infty$  dan boshlanadi.

Agar turg‘un bo‘lmagan jarayon o‘rganilsa, integralning quyi chegarasi noldan boshlanadi. Integro-differensial tenglamalar sistemasining yechimini quyidagi ko‘rinishda izlaymiz:

$$\begin{aligned} w_1(x, y, t) &= w_1^*(x, y) e^{-ipt}, \\ w_2(x, y, t) &= w_2^*(x, y) e^{-ipt}, \\ e(x, y, t) &= e^*(x, y) e^{-ipt}. \end{aligned} \quad (13)$$

Bu yerda  $w_1^*(x, y), w_2^*(x, y), e^*(x, y)$  – ko‘chish amplitudasi bo‘lib, kompleks kattalik. Agar (13)ni (12)ga qo‘ysak, ba’zi shakl almashtirishlardan so‘ng (12) tenglama quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\begin{aligned} \bar{D} \left( \frac{\partial^4 w_1^*}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1^*}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1^*}{\partial y^4} \right) - p^2 \rho h_0 w_1^* &= A - Ke^*(x, y), \\ \bar{D} \left( \frac{\partial^4 w_2^*}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_2^*}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_2^*}{\partial y^4} \right) - p^2 \rho h_0 w_2^* &= Ke^*, \\ a^2 \left( \frac{\partial^2 e^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e^*}{\partial y^2} \right) - 12\bar{c}e^* &= \frac{12\bar{c}}{h}(w_1^* - w_2^*). \end{aligned} \quad (14)$$

Bunda  $\bar{D} = D_0(1 - \Gamma_D^c - i\Gamma_D^c)$ ,  $K = K_0(1 - \Gamma_K^c - i\Gamma_K^c)$ .

Agar (14) kompleks koeffitsiyentli differensial tenglamalar sistemasining birinchi ikkita tenglamasini qo'shsak va ayirsak, quyidagi ko'rinishda differensial tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{aligned} \bar{D}\Delta\Delta(w_1^* + w_2^*) - p^2\rho h_0(w_1^* + w_2^*) &= A, \\ \bar{D}\Delta\Delta(w_1^* - w_2^*) - p^2\rho h_0(w_1^* - w_2^*) &= A - 2Ke^*. \end{aligned} \quad (15)$$

Quyidagicha o'zgaruvchilarni almashtirish orqali:

$$u_1 = w_1^*(x, y) + w_2^*(x, y), u_2 = w_1^*(x, y) - w_2^*(x, y) \quad (16)$$

U holda (15) tenglama quyidagi ko'rinishni egallaydi:

$$\begin{aligned} \bar{D}\left(\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial y^4}\right) - p^2\rho h_0 u_1 &= A, \\ \bar{D}\left(\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 u_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial y^4}\right) - p^2\rho h_0 u_2 &= A - 2Ke^*, \\ a^2\left(\frac{\partial^2 e^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e^*}{\partial y^2}\right) - 12\bar{c}e^* &= \frac{12\bar{c}}{h}u_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Bu (17) tenglamalar sistemasidagi ikkinchi va uchinchi tenglamalar birgalikda yechiladi. Birinchi tenglamaning yechimini quyidagi ko'rinishda izlaymiz:  $u_1 = u_1^{(1)} + u_1^{(0)}$ ,  $u_1^{(1)}$  – bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi,  $u_1^{(0)}$  – bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning xususiy yechimi.

Bu birinchi tenglamani yechish uchun  $x = a\eta_1, y = \frac{b}{2}\eta_2$  o'zgaruvchilarni almashtiramiz. Bir jinsli tenglamaning yechimini quyidagi ko'rinishda izlaymiz:

$$u_1^{(1)}(\eta_1, \eta_2) = \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}(\eta_2) \sin(\pi m \eta_1), \quad (18)$$

Oxirgi olingan (18) yechimni (17)ning birinchi tenglamasiga qo'ysak, quyidagi bir jinsli kompleks koeffitsiyentli to'rtinchi tartibli oddiy differensial tenglamani olamiz:

$$U_{1m}^{IV} - \frac{\pi^2 m^2 b^2}{2a^2} U_{1m}^{II} + \left(\frac{\pi^4 m^4 b^4}{16a^4} - \frac{p^2 \rho h_0 b^4}{16\bar{D}}\right) U_{1m} = 0. \quad (19)$$

Oddiy (19) differensial tenglamaning yechimi tebranishlar nazariyasi fanida juda yaxshi ishlab chiqilgan Krilov funksiyalari orqali ifoda qilinadi. Bir jinsli bo'lmagan tenglamaning xususiy yechimini ham umumiy holda o'zgarmaslarni variatsiyalash usuli bilan topish mumkin. Yuqorida keltirilgan (17) tenglamalar sistemasidagi ikkinchi va uchinchi tenglamalar birgalikda yechilishi kerak. Bu tenglamalar uchun ham  $x = a\eta_1, y = (b/2)\eta_2$  almashtirish bajaramiz

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 e^*}{\partial \eta_2^6} + \frac{3b^2}{4a^2} \frac{\partial^6 e^*}{\partial \eta_1^2 \partial \eta_2^4} - \frac{3\bar{c}b^2}{a^2} \frac{\partial^4 e^*}{\partial \eta_2^4} + \frac{3b^4}{16a^4} \frac{\partial^6 e^*}{\partial \eta_1^4 \partial \eta_2^2} - \frac{3\bar{c}b^4}{2a^4} \frac{\partial^4 e^*}{\partial \eta_1^2 \partial \eta_2^2} - \\ - \frac{\rho h_0 p^2 b^4}{16\bar{D}} \frac{\partial^2 e^*}{\partial \eta_2^2} + \frac{b^6}{64a^6} \frac{\partial^6 e^*}{\partial \eta_1^6} - \frac{3\bar{c}b^6}{16a^6} \frac{\partial^4 e^*}{\partial \eta_1^4} - \frac{\rho h_0 p^2 b^6}{64a^2 \bar{D}} \frac{\partial^2 e^*}{\partial \eta_1^2} - \\ - \left(\frac{24\bar{c}K}{\bar{D}ha^2} - \frac{12\bar{c}\rho h_0 p^2}{\bar{D}a^2}\right) \frac{b^6}{64} e^* = -\frac{3\bar{c}Ab^6}{16a^2 h}. \end{aligned} \quad (20)$$

Oxirgi (20) tenglamaning yechimini  $e^* = e_1^* + e_2^*$  yig'indi ko'rinishida izlaymiz,  $e_1^*$  – bir jinsli tenglamaning yechimi,  $e_2^*$  – bir jinsli bo'lmagan

tenglamaning xususiy yechimi. Bir jinsli tenglamaning yechimini quyidagi ko‘rinishda qidiramiz:

$$e_1^*(\eta_1, \eta_2) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(\eta_2) \sin(\pi m \eta_1) \quad (21)$$

Agar (21) yechimni (20) tenglamaga qo‘ysak, u holda to‘rtinchi tartibli kompleks koeffitsiyentli differensial tenglamani olamiz

$$Y_{1m}^{IV} - \left(\frac{3\pi^2 m^2}{4} + 3\bar{c}\right) Y_{1m}^{IV} + \left(\frac{3\pi^4 m^4}{16} + \frac{3\bar{c}\pi^2 m^2}{2} - \frac{p^2 \rho h_0 b^4}{16D}\right) Y_m'' - \left(\frac{\pi^6 m^6}{64} + \frac{3\bar{c}\pi^4 m^4}{16} - \frac{p^2 \rho h_0 b^4 \pi^2 m^2}{16D} + \frac{3\bar{c}Kb^4}{8Dh} - \frac{3\bar{c}p^2 \rho h_0 b^4}{16D}\right) Y_m = 0. \quad (22)$$

Bu (22) oddiy differensial tenglamaning yechimini ham tebranishlar nazariyasi fanida juda yaxshi ishlab chiqilgan Krilov funksiyalari orqali ifoda qilinadi. Bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimi ham umumiy holda o‘zgarmlarni variatsiyalash usuli bilan topish mumkin.

Doiraviy yuzali qovushoq-elastik uch qatlamli plastinkalarning tebranish masalasini yechish usullari haqida. Yuqorida keltirilgan (8) va (9) tenglamalar, o‘zgaruvchilarni ajratish usuli va muzlatish usullarini qo‘llab Bessel yoki Gelmgols tenglamalari olingan. Ularning yechimlari Bessel va Neyman yoki Xankel funksiyalari orqali ifodalanadi.

$u(r, t), \psi(r, t), w(r, t)$  noma‘lum kattaliklarni topish uchun quyidagi ko‘rinishda olingan:

$$w(r, t) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m T_m(t), \psi(r, t) = b_2 \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m T_m(t), u(r, t) = b_1 \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m T_m(t), \quad (23)$$

$$\varphi_m(r, t) = \frac{\lambda_m}{d_m} \left\{ J_1(\lambda_m r_1) r - J_1(\lambda_m r) + \frac{J_0(\lambda_m r_1)}{I_0(\lambda_m r_1)} [I_1(\lambda_m r_1) r - J_1(\lambda_m r)] \right\},$$

$$b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}.$$

Vaqt bo‘yicha noma‘lum bo‘lgan funksiya o‘zgaruvchilarni ajratish usuli bilan topiladi

$$T_m(t) = A_m \cos(\omega_m t) + B_m \sin(\omega_m t) + \frac{q_m}{\omega_m^2} [1 - \cos(\omega_m t)]. \quad (24)$$

Yuqorida keltirilgan (23) va (24) tenglamalar yordamida uch qatlamli plastinka nuqtalaridagi ko‘chishlar va zo‘riqishlar topiladi.

Uch qatlamli qovushoq-elastik plastinkalarning tebranishini o‘rganishda chekli elementlar usulining o‘rni katta hisoblanadi. Zamonaviy dasturlash usullari aynan shu metodga asoslanadi. Chekli elementlar usuli qo‘llanganda asosiy dinamik tenglama mumkin bo‘lgan ko‘chish yoki variatsion prinsip asosida tenglamalar olinadi. Elastik jism uchun Lagranjning variatsion prinsipidan olingan tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\int_{S_\sigma} R_n \delta u_n dS + \int_V \rho (F - \ddot{u}_n) \delta u_n dV = \int_{S_\sigma} \sigma_{nj} \delta \varepsilon_{nj} dV. \quad (25)$$

Chekli elementlar qo‘llanganda uch qatlamli plastinkalarning tebranish tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$[M] \{\ddot{\delta}\} + [C] \{\dot{\delta}\} + [K] \{\delta\} + \{R\} = 0, \quad (26)$$

bu yerda  $[M]$  – sistemaning massalar matritsasi,  $[C]$  – mexanik sistemaning

dempferlash matritsasi,  $[K]$  – mexanik sistemaning bikrluk matritsasi,  $\{\ddot{\delta}\}, \{\dot{\delta}\}, \{\delta\}$  – mos ravishda tezlanish, tezlik va ko‘chish vektorlari. Bu tenglama MATLAB dasturiy ta’minoti asosida yechiladi. Hisoblashlarda Rjanitsin-Koltunovning uch parametrlilik kuchsiz singulyar yadrosidan va Rabotnovning kasr eksponensial yadrosidan foydalanildi. Shunday qilib, ikkinchi bobda masalalarning qo‘yilishi va yechish metodikasi va algoritmi keltirildi.

Dissertatsiyaning “**Uch qatlamli qovushoq-elastik plastinkalarning erkin tebranishlari**” deb nomlangan uchinchi bobida uch qatlamli qovushoq-elastik plastinkalarning erkin tebranish masalasi to‘g‘ri to‘rtburchak, doiraviy, ellips shakldagi uch qatlamli plastinkalarning erkin tebranish masalasi yechilgan. Bu bobda olingan uch qatlamli plastinkalarning asosiy integro-differensial tenglamalari ikkinchi bobda keltirilgan

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K_0]\{\delta\} - \int_0^t [\Gamma(t-\tau)]\{\delta(\tau)\}d\tau = 0, \quad (27)$$

bu yerda  $[K_0]$  – oniy elastiklik modul matritsasi,  $[\Gamma(t-\tau)]$  – elementlarning relaksatsiya yadrosi matritsasi. Uch qatlamli plastinkalarning erkin tebranish masalasi yechilganda (27) integro-differensial tenglamadagi integral hadning qiymati kichikligini e’tiborga olib muzlatish (Filatov va Sunchaliyev tomonidan ishlab chiqilgan) usulini qo‘llab, yechimini erkin tebranishlar masalasi uchun quyidagi ko‘rinishda izlaymiz:

$$\{\delta(t)\} = \{\delta_0\}e^{-i\omega t},$$

u holda quyidagicha bir jinsli kompleks koeffitsiyentli algebraik tenglamalar sistemasini olamiz:

$$([K_0\Gamma(\omega_R)] - \omega^2[M])\{\delta\} = 0. \quad (28)$$

bunda  $\{\delta\}$  – ko‘chish amplitudasi.

Bu bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasi trivial bo‘lmagan yechimga ega bo‘lishi uchun uning asosiy aniqlovchisi nolga teng bo‘lishi kerak:

$$[K_0\Gamma(\omega_R)] - \omega^2[M] = 0, \quad (29)$$

bunda  $\omega = \omega_R + i\omega_I$  – tebranishlar chastotasi bo‘lib, uni topish talab etiladi.

Uch qatlamli qovushoq-elastik to‘rtburchakli turli xil o‘lchamdagi va qalinlikdagi plastinkalarning asosiy chastotasini topish bilan shug‘ullanamiz. Tashqi qatlam plastinkalarning parametrlari quyidagicha:

$$E_x = 50 \text{ GPa}, E_y = 50 \text{ GPa}, G_{xy} = 21 \text{ GPa}, G_{xz} = G_{yz} = 4 \text{ GPa}, \nu_{xy} = \nu_{yx} = 0.30, \rho = 1500 \text{ kg/m}^3$$

To‘ldiruvchining fizik-mexanik xususiyatlari:

$$G_{xz} = 400 \text{ MPa}, G_{yz} = 220 \text{ MPa}, \rho = 83 \text{ kg/m}^3.$$

Plastinkaning o‘lchamlari:  $b=1\text{m}$ ,  $a=0.5; 1; 2\text{m}$ . Tashqi qatlam qalinligi  $h=0.001$  va  $0.002$ , to‘ldiruvchining qalinligi  $0.01, 0.05, 0.1\text{m}$ . Relaksatsiya yadrosi  $R_k(t) = A_k e^{-\beta_k t} / t^{1-\alpha_k}$  ning parametrlari

$A = 0,048$ ,  $\beta = 0,05$  va  $\alpha = 0,1$ . Olingan sonli natijalar 1 va 2-jadvallarda keltirilgan.

**1-jadval.**

**Asosiy chastotaning haqiqiy qismini to'ldiruvchi qalinligiga bog'liq o'zgarishi**

$h_0, m$	$h_z(a=1, b=2)$					
	0.01m	0.05m	0.1m	0.01m	0.05m	0.1m
0.002	35,40323	115,8264	176,7201	29,7564	87,9423	146,0646
0.004	41,46511	150,1305	251,4235	32,8465	114,3162	178,0835

**2-jadval.**

**Asosiy chastotaning mavhum qismini to'ldiruvchi qalinligiga bog'liq o'zgarishi**

$h_0, m$	$h_z(a=1, b=2)$					
	0.01m	0.05m	0.1m	0.01m	0.05m	0.1m
0.002	0.1525	1.8275	1.9332	0.1246	0.7719	1.4606
0.004	0.5416	2.5025	3.5452	0.4313	2.1041	3.1708

Bu olingan natijalar MATLAB dasturiy ta'minoti asosida olingan. Bunday natijalar ABAQUS dasturiy ta'minoti orqali ham olindi. Natijalar 3-jadvalda keltirilgan.

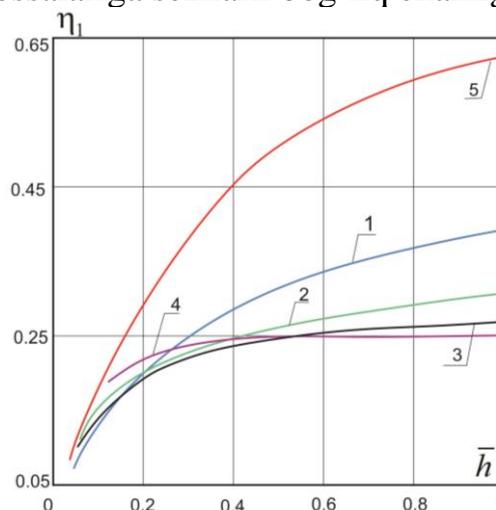
**3-jadval.**

**Asosiy chastotaning to'ldiruvchi qalinligiga bog'liq o'zgarishi**

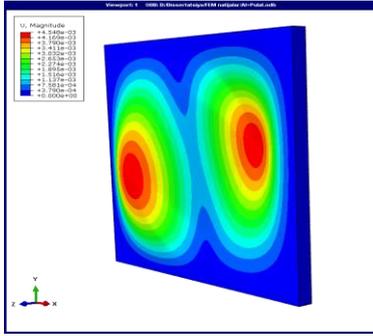
$h_0, m$	$h_z(a=1, b=2)$					
	0.01m	0.05m	0.1m	0.01m	0.05m	0.1m
0.002	34,2917	113,2782	174,5472	27,5475	85,1527	144,9264
0.004	39,2854	147,2374	191,4123	30,7473	112,9231	176,1083

Ko'rinib turibdiki, ikki dasturiy ta'minot asosida olingan chastotalarning haqiqiy qismlari orasidagi farq 15 % bilan ustma-ust tushar ekan. Bu ABAQUS dasturiy ta'minotini sonli yechish usuliga asoslanganligi bilan izohlanadi. So'nish koeffitsiyentining o'rta yumshoq qatlam qalinligiga bog'liq o'zgarishi (simetirichnaya forma kolebaniya) 2-rasmda keltirilgan (uglerodli plastinka HMS/DX-209).

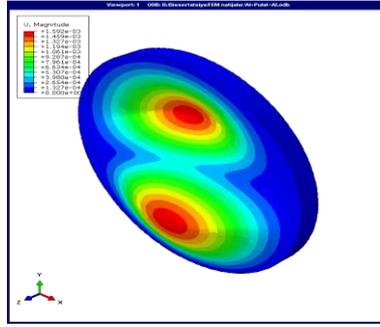
Shunday qilib, uchinchi bobda to'g'ri to'rtburchakli, doiraviy va elliptik shaklda bo'lgan uch qatlamli plastinkalarning tebranish masalasi analitik va sonli yechildi. Natijalar 2,3,4 va 5-rasmlarda keltirilgan. Xos tebranishlar chastotasi va formasi o'rta qatlamning xossalariga sezilarli bog'liq ekanligi topildi.



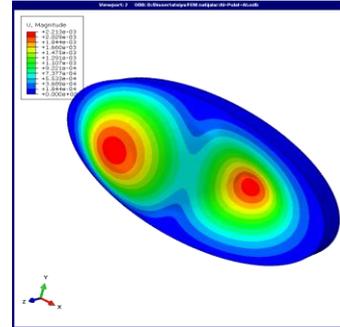
**2-rasm. So'nish koeffitsiyentini o'rta yumshoq qatlam qalinligiga bog'liq o'zgarishi (simetirichnaya forma kolebaniya) (1.  $E_1=0.01$ , 2.  $E_1=0.005$ , 3.  $E_1=0.001$ , 4.  $E_1=10^{-4}$ , 5.  $E_1=0.1$ )**



3-rasm. To'rtburchak plastinkaning 2-tebranish formasi



4-rasm. Doira plastinkaning 2-tebranish formasi



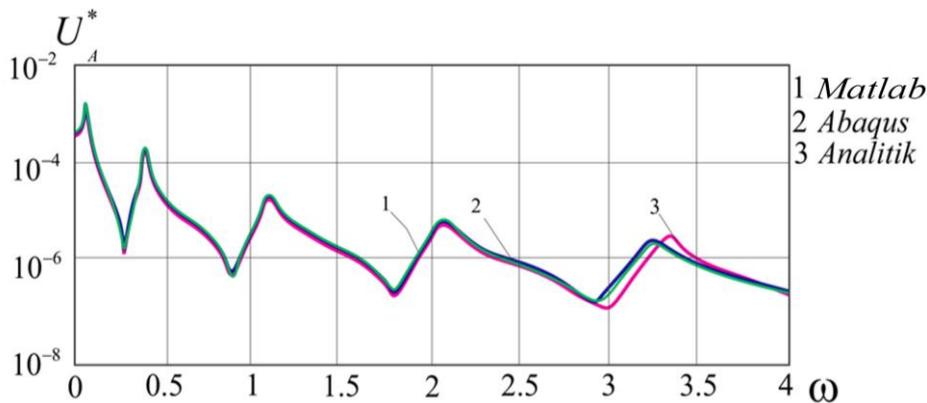
5-rasm. Ellips plastinkaning 2-tebranish formasi

“Uch qatlamli qovushoq-elastik plastinkalarning majburiy tebranishlari” deb nomlangan to'rtinchi bobda uch qatlamli qovushoq-elastik plastinkaning majburiy tebranishlari analitik va sonli yechilgan. Natijalar olinib, tahlil qilingan. Ikkinchi bobda uch qatlamli yengil to'ldiruvchili plastinkaning dinamik kuch ta'siridagi kuchlanish-deformatsiya holatini topish uchun qo'yilgan masalaning sonli natijalarini olishni ko'rib chiqamiz. Buning uchun ikkinchi bobda olingan tenglamalar va ularni yechish algoritmidan foydalanilgan. To'g'ri to'rtburchakli uch qatlamli plastinkalarning tashqi davriy kuch ta'siridagi salqiligi quyidagicha bo'ladi:

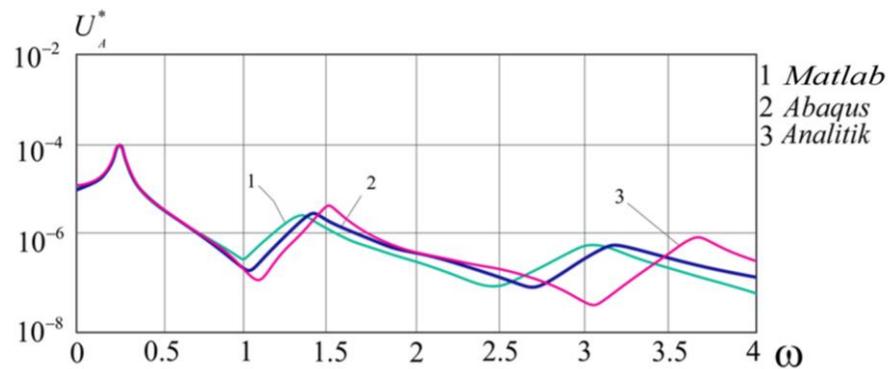
$$\begin{aligned}
 w_1(\eta_1, \eta_2, t) = & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (c_{1m}^{(1)} ch(\lambda_m^{(1)} \eta_2) + c_{2m}^{(1)} ch(\alpha_m^{(1)} \eta_2) \sin(\beta_m^{(1)} \eta_2)) \sin(\pi m \eta_1) e^{i\omega t} + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{4A}{\pi m p^2 \rho h_0} + \left( \frac{4A}{\pi m (2K - p^2 \rho h_0)} \frac{h(\pi^2 m^2 + 12\bar{c})}{12\bar{c}} \right) \right) \sin(\pi m \eta_1) e^{i\omega t} + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 h}{3\bar{c} b^2} (c_{1m}^{(2)} (\lambda_m^{(2)})^2 ch(\lambda_m^{(2)} \eta_2) + c_{2m}^{(2)} \alpha_m^2 ch(\alpha_m \eta_2) \cos(\beta_m \eta_2)) \sin(\pi m \eta_1) e^{i\omega t} - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (c_{2m}^{(2)} (\beta_m^2) ch(\alpha_m \eta_2) \cos(\beta_m \eta_2) - c_{3m}^2 \alpha_m \beta_m sh(\alpha_m \eta_2) \sin(\beta_m \eta_2)) \sin(\pi m \eta_1) e^{i\omega t} - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left( c_{3m}^2 (\beta_m^2) sh(\alpha_m \eta_2) \sin(\beta_m \eta_2) - 2c_{3m}^2 \alpha_m \beta_m ch(\alpha_m \eta_2) \cos(\beta_m \eta_2) - \right. \\
 & \left. - 2c_{2m}^{(2)} \alpha_m \beta_m sh(\alpha_m \eta_2) \sin(\beta_m \eta_2) \right) \sin(\pi m \eta_1) e^{i\omega t}
 \end{aligned}$$

Sonli natijalar olish uchun quyidagi kattaliklar qabul qilingan:  
 tashqi plastinka va to'ldiruvchi  $h=h_0=1$ ,  $K=24 \times 10^3 \text{ kg/sm}^2$ ,  $b=a=10 \text{ sm}$ ,  
 $E_0=2.1 \times 10^6 \text{ kg/sm}^2$ ,  $\nu_0=0.3$ ;  $G=10 \kappa z / \text{cm}^2$ ,  $\kappa=1.62$ ;

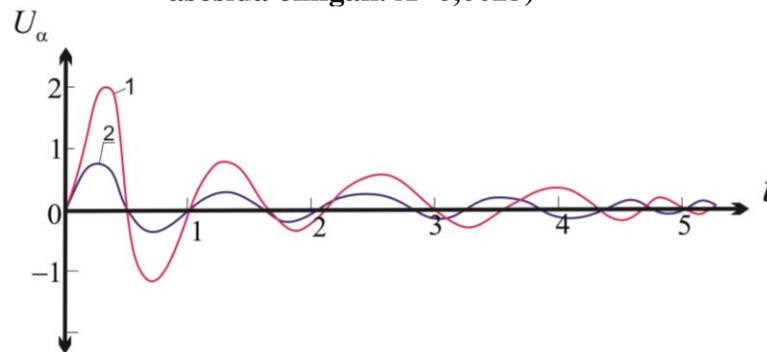
$$\rho = 1.2 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3, \quad p = 500 \text{ cm}^{-1} \quad A = 0,048; \quad \beta = 0,05; \quad \alpha = 0,10.$$



6-rasm. Ko'chish amplitudasining chastotaga bog'liq o'zgarishi (uch xil model asosida olingan (A=0.001))



**7-rasm. Ko'chish amplitudasining chastotaga bog'liq o'zgarishi (uch xil model asosida olingan. A=0,0025)**



**8-rasm. Ko'chish amplitudasining vaqt bo'yicha o'zgarishi  
1. A=0,001 2. A=0,01**

Asos inersiyasining oshishi ko'chish amplitudasining oshishiga va tebranishlar davrining kamayishiga olib kelar ekan. Asosning massasi 400 dan 900 ga oshishi ko'chish amplitudasining 48 % oshishiga olib kelar ekan, asosning massasi 1000 dan 1500 ga oshishi esa ko'chishni 26 % oshirishga olib kelar ekan. Bundan asos inersiyasi plastinka ko'chishiga chiziqli bo'lmagan funksiya orqali bog'liqligi topildi.

## UMUMIY XULOSALAR

1. Mumkin bo'lgan ko'chish prinsipidan foydalanib, erkin tebranishlarni ifodalovchi chiziqli xususiy hosilali integro-differensial tenglamalar sistemasi olindi. Ularni qanoatlantiruvchi chegaraviy va boshlang'ich shartlar keltirildi. Masalaning matematik qo'yilishi, yechish metodikasi va algoritmi ishlab chiqildi. Uch qatlamli va ko'p qatlamli plastinka erkin tebranish masalalarini yechishda qovushoqlikni hisobga olib o'rganish algoritmi MATLAB dasturiy ta'minoti asosida ishlab chiqildi. Ko'p qatlamli plastinka tebranishlari masalasini yechish metodikasi va (ChEU) algoritmi ishlab chiqildi va sonli natijalar olindi.

2. Ishlab chiqilgan algoritmning to'g'riligi xususiy masalalar yechish va ma'lum bo'lgan natijalar bilan solishtirishlar orqali isbotlandi. Farqning dinamik jarayon uchun ham o'rinli bo'lishi, ya'ni farq 3-5 % dan oshmasligi topildi.

3. Tebranishlar chastotasi mavhum kattalikka teng bo'lishi, aperiodik harakatlarni yuzaga keltiradi. Kichik chastotalarga mos keluvchi ko'chish amplitudalari (maksimal ko'chish amplitudasi) tashqi dissipatsiya hisobidan so'ndirishga olib kelinishi mumkin. Katta chastotalarga mos keluvchi rezonans amplitudalarning esa ichki qovushoqlik hisobidan so'nishining samarali bo'lishi asoslab berildi.

4. Birinchi marta uch qatlamli yumshoq to'ldiruvchili plastinka tebranishlari masalasini analitik yechish usuli tebranishlar nazariyasi va matematik-fizika tenglamalari usullaridan foydalanib ishlab chiqildi.

5. To'g'ri to'rtburchakli va doiraviy ko'ndalang kesimli qovushoq elastik uch qatlamli plastinkaning tebranishlarini o'rganishning analitik va sonli yechish metodikasi va algoritmi yaratildi. Sonli yechish zamonaviy dasturiy ta'minotlar asosida amalga oshirildi.

6. Asos inersiyasining oshishi ko'chish amplitudasining oshishiga va tebranishlar davrining kamayishiga olib kelishi aniqlandi. Asosning massasi 400 dan 900 ga oshishi ko'chish amplitudasining 48 % oshishiga olib kelar ekan, asosning massasi 1000 dan 1500 ga oshishi esa ko'chishni 26 % oshirishga olib kelar ekan. Bundan asos inersiyasi plastinka ko'chishiga chiziqli bo'lmagan funktsiya orqali bog'liqligi topildi.

**РАЗОВЫЙ НАУЧНЫЙ СОВЕТ, СОЗДАННЫЙ НА ОСНОВЕ  
НАУЧНОГО СОВЕТА ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ  
PhD.03/27.02.2021.FM.101.02 ПРИ БУХАРСКОМ  
ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОМ ИНСТИТУТЕ**

---

**ТАШКЕНТСКИЙ ХИМИКО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ**

**НАМОЗОВ ЖАСУР ШОКУЛОВИЧ**

**ОСОБЕННОСТИ СВОБОДНЫХ И ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ  
ТРЕХСЛОЙНЫХ ВЯЗКОУПРУГИХ ПЛАСТИНОК**

**01.02.04 - Механика деформируемого твердого тела**

**АВТОРЕФЕРАТ**  
диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по техническим наукам

**Бухара - 2024**

**Тема диссертации доктора философии (PhD) по техническим наукам зарегистрирован в Высшей Аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за номером B2024.2.PhD/T4561**

Диссертация выполнена в Ташкентском химико-технологическом институте.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекском, русском, английском (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета ([www.tkti.uz](http://www.tkti.uz)) и на Информационно-образовательном портале "ZiyoNet" ([www.ziynet.uz](http://www.ziynet.uz)).

<b>Научный руководитель:</b>	<b>Усмонов Ботир Шукуриллаевич</b> доктор технических наук (DSc), профессор
<b>Официальные оппоненты:</b>	<b>Мардонов Ботир Мардонович</b> доктор физико-математических наук, профессор <b>Рахмонов Баходир Собирович</b> доктор технических наук (DSc)
<b>Ведущая организация:</b>	<b>Национальный исследовательский университет «Ташкентский институт инженеров ирригации и механизации сельского хозяйства»</b>

Защита диссертации состоится 10 января 2025 г. в 11<sup>00</sup> часов на заседании разового Научного совета на основе Научного совета Phd.03/27.02.2021.FM.101.02 при Бухарском инженерно-технологическом институте (Адрес: 100118, г.Бухара, ул. Каюма Муртазаева 15. Тел.: (+998-65) 223-78-84; факс: (+998-65) 223-79-72, e-mail: [bmti\\_info@edu.uz](mailto:bmti_info@edu.uz)).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Бухарского инженерно-технологического института (зарегистрирована за № 337). (Адрес: 100118, г.Бухара, ул. Каюма Муртазаева 15. Тел.: (+99865) 223-78-84;).

Автореферат диссертации разослан 26 декабря 2024 года.

(протокол рассылки № 1 от 23 ноября 2024 г.)



**М.Х. Тешаев.**

Председатель разового Научного совета по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук (DSc)

**З.И. Болтаев**

Ученый секретарь разового Научного совета по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук (DSc), профессор

**М.З. Шарипов**

Председатель разового Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук (DSc), профессор

## **ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации на степень доктора философии).**

Актуальность и востребованность темы диссертации. В мире техники и движущихся транспортных средств применение множественных конструктивных элементов многослойных пластинок и оболочек занимает приоритетное место. Во всем мире большое внимание уделяется исследованию динамического состояния трехслойных композитных пластин под действием внешних сил и поиску их оптимального состава (по прочности и массе). В связи с этим актуально изучение особенностей собственных и вынужденных колебаний трехслойных пластинчатых конструкций при взаимодействии с основанием и их использование в движущихся транспортных средствах. В связи с этим во многих зарубежных странах, в том числе в США, Канаде, России и других странах, особое внимание уделяется тому, что использование трехслойных пластин эффективно при решении проблемы борьбы с вибрацией и шумом в движущихся транспортных средствах.

В мире многие части кораблей, самолетов и движущихся транспортных средств выполнены из двух и трехслойных конструкций, и проводятся научные исследования по оценке динамического состояния этих конструкций под воздействием внешних сил. В связи с этим конструкции в основном моделируются как трехслойная пластина, и необходима разработка методов определения параметров (частоты и формы колебаний), характеризующих динамическое состояние, с учетом жесткости заполнителя и их вязкостные свойства. При этом особое внимание уделяется совершенствованию методов снижения динамических напряжений и деформаций, возникающих в трехслойных пластинах.

В нашей Республике осуществляются комплексные меры по снижению негативных явлений, возникающих в трехслойных пластинах, и повышению прочности конструкции за счет подбора толщины слоя, взаимодействующего с пластинчатыми слоями, и достигнуты определенные результаты. В Указе Президента Республики Узбекистан “Об утверждении Концепции развития науки до 2030 года” от 29 октября 2020 года определен ряд важных задач, в том числе, были определены конкретные задачи «...широкое использование научно-инновационного потенциала, определение приоритетных направлений систематического реформирования науки в перспективе, подготовка самостоятельно мыслящих высококвалифицированных кадров с современными знаниями...»<sup>2</sup>. При реализации этих задач, в том числе вопросов вибраций трехслойных пластин, взаимодействующих с деформируемой средой, большое значение имеет устранение вибраций в резонансной зоне.

Данное диссертационное исследование призвано способствовать выполнению Постановления Президента Республики Узбекистан от 30 июля 2020 года № ПУ-4794 «О комплексных мерах по дальнейшему укреплению системы сейсмической безопасности для населения и территорий Республики Узбекистан», Президентского постановления от 7 мая 2020 года № ПУ-4708 «О мерах по улучшению качества образования в области математики и

---

<sup>2</sup> Указ Президента Республики Узбекистан № ПФ-6097 "Об утверждении Концепции развития науки до 2030 года" от 29 октября 2020 года

развитию научных исследований в области математики», а также выполнению задач, предусмотренных в других регулирующих документах, относящихся к указанным мероприятиям.

**Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики.** Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

**Степень изученности проблемы.** Исследования по теоретическим и практическим аспектам проблемы свободных и вынужденных колебаний трехслойных пластинок в Республике проводились Х.А. Рахматулиным, М.Т. Уразбоевым, Т.Ш. Ширинкуловым, В.К. Кабуловым, Т.Р. Рашидовым, Я.Н. Мубораковым, В.М. Мардоновым, К.С. Султоновым, Ш.М. Маматкуловым, М.М. Мирсаидовым, Ф.Б. Бадаловым, Г.Х. Хожметовым, И. Мирзаев, Т.М. Мавлоновым, А. Абдусатторовым, И.И. Сафаровым, М.Х. Тешаевым, Ш.С. Юлдашевым, З.И. Болтаевым, Б.С. Рахмоновым и другими учеными, что привело к достижению значимых результатов.

Эта проблема была изучена также известными зарубежными учёными, такими как А.А. Ильюшин, Б.Е. Победря, А.Н. Гузь, И.Е. Трояновский, Р. Митра, В.В. Болотин, И.Д. Грудев, А.Г. Горшков, А.С. Вольмир, Ф.Г. Абдула-Заде, В.И. Желтков, Чан Тхань Хай, А.С. Ленский, Ю.Н. Новичков, А.Н. Лапутин, А.Н. Антонов, Я.А. Луговая, Li Xiaowei, J.A.Nicholas, G.Vanneuville, M.Bourges, J.M.Garcier, M.Guillot, G.Poumarat и другие. Они занимались исследованиями устойчивости и неустойчивости нагрузки на трёхслойных пластинах, взаимодействующих с деформирующейся средой, и разработали методы изучения укрепленного состояния деформации на основе реологических свойств материалов.

В.В. Болотин и Ю.Н. Новичков в своей работе "Механика многослойных конструкций" исследовали статические и динамические проблемы многослойных пластинок, не учитывая влияние деформирующейся среды и связующих элементов.

А.Г.Горшков, Э.И.Старовойтов, А.В. Яровая также внесли значительный вклад в исследования и опубликовали результаты в книге "Механика слоистых вязкоупругопластических элементов конструкций".

Проблемы свободных и вынужденных колебаний многослойных пластинок решены с использованием специальных функций для получения асимптотических решений. Полученные ими частоты являются вещественными числами и вычисляются в основном на основе асимптотических формул.

Рекомендуемая диссертационная работа направлена на устранение вышеупомянутых и недостатков в решении указанных проблем.

В диссертации были выведены уравнения движения трёхслойных пластин, взаимодействующих с деформируемой средой, с учетом вязких свойств материала. Также были проведены исследования по разработке алгоритмов и программ для решения задач при различных граничных условиях.

**Связь темы диссертации с исследовательскими планами высшего учебного заведения, в котором выполнялась диссертация** Диссертационное исследование было проведено в рамках научно-исследовательской работы по стратегии научных исследований Ташкентского химико-технологического института на период с 2017 по 2025 годы, утвержденной под номером М.01.2017, в рамках направления научных исследований “Математическое моделирование физических процессов”.

**Цель исследования** разработка методики и алгоритм исследования задачи свободных и вынужденных колебаний трехслойной пластины с учетом ее вязкоупругих свойств (определение комплексной частоты и формы колебаний, построение зависимости амплитуды перемещений и частоты) а также получение численных результатов и их анализ.

**Задачи исследования:**

разработка математической постановки, методики и алгоритма решения задач свободных и вынужденных колебаний трехслойной пластины с учетом вязкоупругих свойств материалов;

разработка математической постановки, методики и алгоритма решения задач свободных колебаний трехслойной пластины, взаимодействующей с деформируемой средой, с учетом вязкоупругих свойств материалов;

определение комплексных частот свободных колебаний трехслойной пластины и оценка их изменения в зависимости от жёсткости заполнителя;

изучить зависимость амплитуд перемещений и напряжений от частоты при установившихся вынужденных колебаниях трехслойных вязкоупругих пластин в зависимости от изменения жёсткости заполнителя и сравнить с существующими экспериментальными результатами.

В качестве **объекта исследования** принята вязкоупругая трехслойная пластина с заполнителем.

**Предметом исследования** являются разработанные методика и алгоритмы исследования свободных и вынужденных колебаний вязкоупругой трехслойной заполнительной пластины.

**Методы исследования.** Для решения поставленных в процессе исследования задач использовались методы разделения переменных, конечных элементов, методы Гаусса и Мюллера и специальные функции.

**Научная новизна исследования** состоит в следующем:

поставлены задачи о свободных и вынужденных колебаниях трехслойных пластин на основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского с учетом вязкоупругих свойств материалов, а также разработаны методика и алгоритм решения задачи;

найжены амплитудно-частотные характеристики перемещений и напряжений вынужденных установившихся колебаний трехслойной вязкоупругой пластины путем решения системы неоднородных линейных дифференциальных уравнений;

на основе классической теории свободных колебаний трехслойной пластины получено частотное уравнение для определения комплексных частот и их аналитического выражения в зависимости от жёсткости и толщины заполнителя;

установлено, что увеличение инерции основания приводит к

увеличению амплитуды смещения и уменьшению периода колебаний, а изменение массы основания с 1000 до 1500 приводит к увеличению смещения на 26%.

**Практические результаты исследования** заключаются в следующем:

Разработана методика определения резонансных частот и коэффициентов декремента демпфирования, возникающих при колебаниях вязкоупругой трехслойной пластины-заполнителя, а также учета влияния жесткости заполнителя на явление резонанса. Разработанные методика и программа позволяют оценить долговечность конструкций.

**Достоверность результатов исследования** обоснована корректной постановкой краевых задач, строгостью приведенных математических выражений, систематическим использованием обоснованных методов решения, сопоставлением полученных результатов с решениями других исследователей и совпадением с их результатами, а также их практическим внедрением.

**Научная и практическая значимость результатов исследований.**

Научная значимость результатов исследования определяется разработанными методикой и алгоритмом исследования свободных и вынужденных колебаний деформируемой вязкоупругой трехслойной заполнительной пластины.

Практическая значимость результатов исследования заключается в том, что разработанные методика, алгоритм и программа служат поиску оптимальных значений параметров для устранения резонансных явлений радиоэлектронных устройств.

**Внедрение результатов исследования.** На основе полученных результатов математического моделирования с учетом вязкоупругих свойств материала, развитие теории, разработка методика расчета, алгоритм и программы решения задач вибрации трехслойной пластины с заполнителем:

теоретико-экспериментальные формулы для исследования динамических напряженно-деформированных состояний, возникающих под воздействием гармонической силы, были использованы в рамках фундаментального проекта «Развитие теории и разработка расчетных методов для исследования напряженно-деформированных состояний внешних воздействий на горизонтальные криволинейные трубопроводы с жидким потоком» с номером F-4-14, реализованного в период с 2012 по 2016 годы в рамках государственных научно-технических программ Бухарского инженерно-технологического института (справка Бухарского инженерно-технологического института № 1-2-1857 от 21 мая 2024 года). В результате были получены методы оценки напряженно-деформированных состояний в однотипных и разнотипных системах, работающих под нагрузкой;

методика, разработанная для решения задач, связанных с учетом взаимодействия трехслойных вязко-упругих конструкций, была использована в рамках фундаментального проекта OT-F4-01 «Разработка методов и развитие теории исследования нелинейных динамических напряженно-деформированных состояний изогнутых участков многослойных композитных труб с жидким потоком под воздействием температурных и динамических нагрузок», выполненного в период с 2016 по 2020 годы в рамках

Государственной научно-технической программы Ташкентского химико-технологического института (справка Ташкентского химико-технологического института № 1/01-1544 от 29 мая 2024 года). В результате было установлено, что разница между аналитическим решением и решениями, полученными с использованием методики, разработанной в диссертации, не превышает 15%

Методы расчета деформаций, прочности, колебаний и динамической надежности конструкций, изготовленных из композитных материалов, представленные в диссертации, были использованы на АО «Ташкентский механический завод» (справка Агентства гражданской авиации «Узавиация» Министерства транспорта Республики Узбекистан № 01-39/16-2955 от 16 августа 2024 года). В результате использование современных персональных компьютеров для анализа напряженно-деформированного состояния конструкций из композитных материалов позволило провести анализ их деформаций.

**Апробация результатов исследования.** Результаты данного исследования были обсуждены и одобрены на международных, республиканских конференциях, в том числе на 6 международных и 2 республиканских научно-практических конференциях.

**Опубликованность результатов исследования.** Всего по теме диссертации опубликовано 18 научных работ, в том числе 6 статей в научных изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан к публикации основных научных результатов диссертаций доктора философии (PhD), из которых 2 в республиканском и 4 статей в международных журналах.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Общий объем диссертации составляет 105 страниц.

## **ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ**

Во **введении** диссертации обоснованы актуальность и необходимость диссертационного исследования, сформулированы цель и задачи исследования, его объект и предмет. Продемонстрировано соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан, изложены научная новизна и практические результаты исследования. Кроме того, обоснована достоверность полученных результатов, освещена их научная и практическая значимость. Приведены сведения о внедренности результатов исследования на практике, апробации работы, опубликованных работах, структуре и объеме диссертации.

Первая глава диссертации «**Обзор литературы по изучению свободных и вынужденных колебаний трехслойных диссипативно- неоднородных пластин**» состоит из трех параграфов и представляет собой краткий обзор литературы по изучению свободных и вынужденных колебаний трехслойной вязкоупругой пластины. На основании обзор литературы сделан вывод, что колебания трехслойной пластины с учетом вязкостных характеристик материалов изучены недостаточно. Показано, что существуют различные подходы к выводу уравнений динамики, представляющих свободные и

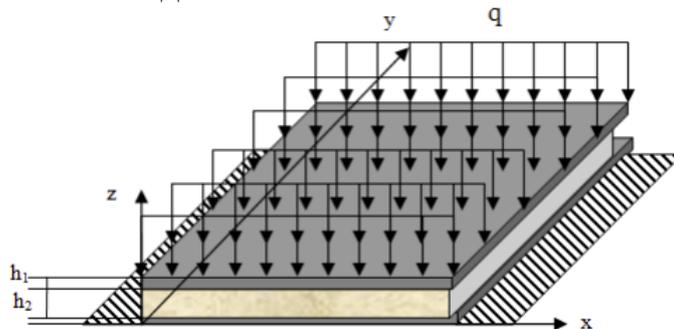
вынужденные колебания слоистой диссипативно- неоднородной пластины. Важность изучения этих подходов также проистекает из обзора литературы. Методы и задачи расчета многослойных пластин или конструкций изучаются, в основном, для случая изотропной пластины и деформируемого заполнителя в полном контакте. Результаты анализа показывают, что гармонические нагрузки при воздействии на конструкции создают резонансное явление, исследование которого целесообразно проводить только методами механики диссипативных неоднородных тел. В ряде случаев показано, что многослойные конструкции в связях с опорой могут иметь большие погрешности при воздействии гармонических нагрузок, при расчете образующихся в них резонансных состояний, не учитывающих вязкоупругость среды и инерцию опоры.

Во второй главе диссертации “**Методика и алгоритм решения задачи о колебаниях вязкоупругих трехслойных пластин**” представлены методика и алгоритм решения задачи о свободных и вынужденных колебаниях трехслойных пластин, установленных в деформируемой полуплоскости.

На основе вариационного принципа Гамильтона-Остроградского получено дифференциальное уравнение движения многослойных вязкоупругих пластин

$$\delta I = 0, I = \int_{t_1}^{t_2} (T - \Pi - U) dt, \quad (1)$$

где **T**- кинетическая энергия механической системы; **U**- потенциальная энергия деформации; **Π** - потенциал внешних сил. Если толщина заполнителя находится в том же порядке, что и толщина внешнего слоя, или отношение размеров пластинки к толщине велико, то при расчетах целесообразно применить гипотезу линейной нормали для трехслойной пластинки. Расчет в этом случае будет такой же, как у однослойной пластины. Разница будет заключаться в участии более одной или нескольких жесткостей (Рис.1).



**Рис.1. Схема расчета конструкции трехслойной пластинки**

Для построения модели деформирования трехслойной конструкции использован кинематический подход. Исходя из этого, используется предположение о равномерном распределении сдвига по толщине (Рис.1). Это подводит трехмерную задачу к двумерной задаче механики деформируемого твердого тела. Для пластин и оболочек значение размера по координате z значительно меньше двух других размеров. Используя эту ситуацию, мы можем визуализировать смещения по осям x, y и z как градуированный массив по отношению к аргументу. Кинетическая и потенциальная энергии многослойной пластины были получены следующим образом:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{\Omega} \rho_{(k)} h_{(k)} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{G}_1^{(k)}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial \mathcal{G}_2^{(k)}}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega + \quad (2)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\Omega} \rho_{[k]} h_{[k]} \left[ \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \mathcal{G}_1^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{G}_1^{(k+1)}}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial \mathcal{G}_2^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial \mathcal{G}_2^{(k+1)}}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{4} \left( \frac{\partial w^{(k)}}{\partial t} + \frac{\partial w^{(k+1)}}{\partial t} \right)^2 \right] d\Omega,$$

где  $\rho_{(k)}$  и  $\rho_{[k]}$  - плотности твердого и мягкого слоев,  $h_{(k)}$  и  $h_{[k]}$  - толщины твердого и мягкого слоев, компоненты вектора смещения твердых и мягких слоев ( $\mathcal{G}_1^{(k)}$ ,  $\mathcal{G}_2^{(k)}$ ,  $w^{(k)}$ ) и ( $\mathcal{G}_1^{(k+1)}$ ,  $\mathcal{G}_2^{(k+1)}$ ,  $w^{(k+1)}$ ). Потенциальная энергия деформации механической системы и потенциальная энергия внешних сил определяются следующим образом:

$$U = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left[ N_{\alpha\beta} e_{\alpha\beta} + M_{\alpha\beta} \frac{\partial^2 w}{\partial x_{\alpha} \partial x_{\beta}} - \sum_{\nu=1}^2 S_{\alpha\beta}^{(\nu)} \frac{\partial \varphi_{\alpha}}{\partial x_{\beta}} + \sum_{\nu=1}^2 Q_{\alpha 3}^{(\nu)} \varphi_{\alpha}^{(\nu)} \right] d\Omega;$$

$$\Pi = - \int_{\Omega} \left[ q_{\alpha} \mathcal{G}_{\alpha} + q_3 w + \sum_{\nu=1}^2 m_{\alpha}^{(\nu)} \varphi_{\alpha}^{(\nu)} \right] d\Omega - \quad (3)$$

$$- \int_{\Omega} \left[ \bar{N}_{\alpha} \mathcal{G}_{\alpha} + \bar{N}_l \mathcal{G}_l - \bar{Q} w - \bar{M}_n \frac{\partial w}{\partial n} + \bar{M}_l \frac{\partial w}{\partial l} \right] d\Gamma,$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  суммируются по параметрам (от 1 до 2). Используя эти энергии (2) и (3), приравниваем вариацию (1) к нулю и получаем уравнения колебаний многослойных, в частности, двухслойных пластин. Наследственное интегральное соотношение Больцмана-Вольтерра, которое представляет связь между напряжением и деформацией, описывается следующим образом

$$\sigma_{ij} = \tilde{\lambda} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\tilde{\mu} \varepsilon_{ij} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (4)$$

где:  $\tilde{\lambda}, \tilde{\mu}$  - упругие модули в виде оператора

$$\tilde{\lambda}_j \varphi(t) = \frac{\nu_j}{(1 + \nu_j)(1 - 2\nu_j)} \tilde{E}_j \varphi(t); \quad \tilde{\mu}_j \varphi(t) = \frac{\nu_j}{2(1 + \nu_j)} \tilde{E}_j \varphi(t)$$

где:  $\tilde{E}$  - оператор -это модуль упругости, представляющий следующее интегральное отношение:

$$\tilde{E} \varphi(t) = E_{01} \left[ \varphi(t) - \int_0^t R_E(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \right]; \quad (5)$$

$\varphi(t)$  - произвольная функция времени;  $R_E(t - \tau)$  - ядро релаксации;  $E_{01}$  - мгновенный модуль упругости;  $\delta_{ij}$  - символ Кронекера: если  $i = j$ , то равен 1, если  $i \neq j$ , то равен 0. Интегральное выражение (6), представленное выше, является малым, поэтому для функции  $\varphi(t)$  уместно, что  $\varphi(t) = \psi(t) e^{-i\omega_R t}$ . Это соответствует небольшим линейным колебаниям, где  $\psi(t)$  - функция медленной переменной времени,  $\omega_R$  - действительная величина. Тогда выражение (5) можно приближенно заменить следующим выражением

$$\bar{E} \varphi = E \left[ 1 - \Gamma^C(\omega_R) - i\Gamma^S(\omega_R) \right] \varphi,$$

где  $\Gamma^C(\omega_R) = \int_0^{\infty} R(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau$ ,  $\Gamma^S(\omega_R) = \int_0^{\infty} R(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau$  косинус и синус образы

ядра релаксации Фурье материала. Для изотропных материалов коэффициент Пуассона предполагается постоянным.

Система интегро-дифференциальных уравнений движения круглой трехслойной пластины получается в следующем виде

$$\begin{aligned}\tilde{L}_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0, \\ \tilde{L}_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0, \\ \tilde{L}_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - M_0 \ddot{w} &= -q,\end{aligned}\quad (6)$$

где  $u(r,t), \psi(r,t), w(r,t)$  – радиальное смещение заполнителя, относительное смещение, изгиб пластинки, соответственно,  $M_0 = (\rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 + \rho_3 h_3) r_0^2$ ,  $\rho_k$  – плотность слоя;  $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$  коэффициенты,  $\tilde{L}_2, \tilde{L}_3$  – интегродифференциальные операторы, которые имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}a_1 &= \sum_{k=1}^3 h_k K_k^+, a_2 = c(h_1 K_1^+ - h_2 K_2^+), a_3 = h_1(c + 0.5h_1)K_1^+ - h_2(c + 0.5h_2)K_2^+, \\ a_4 &= c^2 \left( h_1 K_1^+ + h_2 K_2^+ + \frac{2}{3} c K_3^+ \right), a_5 = c \left[ h_1(c + 0.5h_1)K_1^+ + h_2(c + 0.5h_2)K_2^+ + \frac{2}{3} c^2 K_3^+ \right], \\ a_6 &= h_1 \left( c^2 + ch_1 + \frac{1}{3} h_1^2 \right) K_1^+ + h_2 \left( c^2 + ch_2 + \frac{1}{3} h_2^2 \right) K_2^+ + \frac{2}{3} c^3 K_3^+, \\ \tilde{L}_2(g) &\equiv \left[ \frac{1}{r} (rg)_{,r} \right]_{,r} \equiv g_{,rr} + \frac{g_{,r}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2}, \quad \tilde{L}_3(g) \equiv [r \tilde{L}_2(g)]_{,r} \equiv g_{,rrr} + \frac{2g_{,rr}}{r} - \frac{g_{,r}}{r^2} + \frac{g}{r^3}.\end{aligned}$$

Если трехслойная пластина установлена на основе Винклера, то система уравнений (6) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\tilde{L}_2(a_1 u + a_2 \psi - a_3 w_{,r}) &= 0, \\ \tilde{L}_2(a_2 u + a_4 \psi - a_5 w_{,r}) &= 0, \\ \tilde{L}_3(a_3 u + a_5 \psi - a_6 w_{,r}) - M_0 \ddot{w} - k_0 w &= -q.\end{aligned}\quad (7)$$

Для решения этих уравнений (6) и (7) необходимо задать условия. Например, когда  $r=1$

$$T_r = T_{r0}, H_r = H_r^0, M_r = M_r^0, M_{r,r} + \frac{1}{r}(M_r - M_\phi) = Q^0, \quad (8)$$

Здесь получим выражение обобщенных усилий  $T_r, M_\alpha, H_\alpha$  через три неизвестные функции  $u(r,t), \psi(r,t), w(r,t)$  –

$$\begin{aligned}T_r &= \sum_{k=1}^3 h_k (K_k^+ u_{,r} + \frac{u}{r} K_k^-) + c(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) \psi_{,r} + \\ &+ c(K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \frac{\psi}{r} - \left[ K_1^+ h_1 (c + \frac{h_1}{2}) - K_2^+ h_2 (c + \frac{h_2}{2}) \right] w_{,rr} - \\ &- \left[ K_1^- h_1 (c + \frac{h_1}{2}) - K_2^- h_2 (c + \frac{h_2}{2}) \right] w_{,rr} / r.\end{aligned}\quad (9)$$

Выражения для  $T_\phi$  можно получить из  $T_r$ , поменяв местами  $K_k^+$  и  $K_k^-$ , так как

$$\begin{aligned}
T_\varphi = & \sum_{k=1}^3 h_k (K_k^- u_{,r} + \frac{u}{r} K_k^+) + c(K_1^- h_1 - K_2^- h_2) \psi_{,r} + \\
& + c(K_1^+ h_1 - K_2^+ h_2) \frac{\psi}{r} - \left[ K_1^- h_1 (c + \frac{h_1}{2}) - K_2^- h_2 (c + \frac{h_2}{2}) \right] w_{,rr} - \\
& - \left[ K_1^+ h_1 (c + \frac{h_1}{2}) - K_2^+ h_2 (c + \frac{h_2}{2}) \right] w_{,rr} / r.
\end{aligned} \tag{10}$$

По приведенным выше формулам также можно найти обобщенные моменты  $M_\alpha, H_\alpha$ . Если высота и ширина прямоугольных пластин и заполнителя равны  $a, b$ , соответственно, то предполагается непрерывность напряжений и перемещений между пластинами и заполнителем. На края пластинки налагаются следующие условия

$$\begin{aligned}
w_1(x, y, t)|_{x=0} = 0, \quad w_1(x, y, t)|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0, \\
\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2}(x, y, t)|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2}(x, y, t)|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0, \\
w_2(x, y, t)|_{x=a} = 0, \quad w_2(x, y, t)|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0, \\
\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2}(x, y, t)|_{x=a} = 0, \quad \frac{\partial^2 w_2}{\partial y^2}(x, y, t)|_{y=\pm \frac{b}{2}} = 0.
\end{aligned} \tag{11}$$

Пусть срединный слой пластин будет полимерным материалом, похожим на резину. Тогда нормальное напряжение в слое определяется следующим образом:  $\sigma_{33} = Ke, e$  – относительное объемное расширение.

Уравнение заполнителя следующее

$$a^2 \left( \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} \right) - 12\tilde{c}e = \frac{12\tilde{c}}{h}(w_1 - w_2),$$

где  $\tilde{c}[f(t)] = c \left( f(t) - \int_0^t R_c(t-\tau) f(\tau) d\tau \right)$ ,  $c = \frac{G_0 a^2}{Kh^2}$ ,  $G_0$  – мгновенный модуль сдвига,

$R_c(t-\tau)$  – ядро релаксации.

Уравнения пластины получаются в следующем виде

$$\begin{aligned}
\tilde{D} \left( \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1}{\partial y^4} \right) + \rho h_0 \frac{\partial^2 w_1}{\partial t^2} = q(t) - Ke(x, y, t), \\
\tilde{D} \left( \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_2}{\partial y^4} \right) + \rho h_0 \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} = Ke(x, y, t), \\
a^2 \left( \frac{\partial^2 e}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e}{\partial y^2} \right) - 12\bar{c}e = \frac{12\bar{c}}{h}(w_1 - w_2),
\end{aligned} \tag{12}$$

где

$$D[f(t)] = D_0 \left( f(t) - \int_0^t R_D(t-\tau) f(\tau) d\tau \right), \quad D_0 = \frac{E_0 h^3}{12(1-\nu^2)},$$

Здесь  $R_D(t-\tau), R_K(t-\tau)$  – ядра релаксации,  $f(t)$  является произвольной функцией времени. Рассмотрены задачи свободной и вынужденной вибрации трехслойных вязкоупругих пластин.

При рассмотрении задачи о свободном колебании нижняя граница интеграла (12) начинается с нуля. Нижний предел интеграла начинается с  $-\infty$

при рассмотрении задачи о вынужденных стационарных колебаниях. Если изучается нестационарный процесс, нижний предел интеграла начинается с нуля. Решение системы интегро-дифференциальных уравнений ищем в следующем виде

$$\begin{aligned} w_1(x, y, t) &= w_1^*(x, y) e^{-ipt}, \\ w_2(x, y, t) &= w_2^*(x, y) e^{-ipt}, \\ e(x, y, t) &= e_2^*(x, y) e^{-ipt}, \end{aligned} \quad (13)$$

где  $w_1^*(x, y), w_2^*(x, y), e_2^*(x, y)$  – амплитуда смещения, комплексная величина. Если подставить (13) в (12), то после некоторых подстановок форма будет иметь вид

$$\begin{aligned} \bar{D} \left( \frac{\partial^4 w_1^*}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_1^*}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_1^*}{\partial y^4} \right) - p^2 \rho h_0 w_1^* &= A - Ke^*(x, y), \\ \bar{D} \left( \frac{\partial^4 w_2^*}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w_2^*}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_2^*}{\partial y^4} \right) - p^2 \rho h_0 w_2^* &= Ke^*, \\ a^2 \left( \frac{\partial^2 e^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e^*}{\partial y^2} \right) - 12 \bar{c} e^* &= \frac{12 \bar{c}}{h} (w_1^* - w_2^*), \end{aligned} \quad (14)$$

Если сложить и вычесть первые два из системы дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами (14), то получим систему дифференциальных уравнений в следующем виде

$$\begin{aligned} \bar{D} \Delta \Delta (w_1^* + w_2^*) - p^2 \rho h_0 (w_1^* + w_2^*) &= A, \\ \bar{D} \Delta \Delta (w_1^* - w_2^*) - p^2 \rho h_0 (w_1^* - w_2^*) &= A - 2Ke^*. \end{aligned} \quad (15)$$

Если сделаем замены переменных следующим образом

$$u_1 = w_1^*(x, y) + w_2^*(x, y), \quad u_2 = w_1^*(x, y) - w_2^*(x, y), \quad (16)$$

то уравнение (15) будет иметь следующий вид

$$\begin{aligned} \bar{D} \left( \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_1}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_1}{\partial y^4} \right) - p^2 \rho h_0 u_1 &= A, \\ \bar{D} \left( \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_2}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_2}{\partial y^4} \right) - p^2 \rho h_0 u_2 &= A - 2Ke^*, \\ a^2 \left( \frac{\partial^2 e^*}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e^*}{\partial y^2} \right) - 12 \bar{c} e^* &= \frac{12 \bar{c}}{h} u_2. \end{aligned} \quad (17)$$

Второе и третье уравнения в этой системе уравнений (17) решаются совместно. Ищем решение первого уравнения в следующем виде:  $u_1 = u_1^{(1)} + u_1^{(0)}$ , где  $u_1^{(1)}$  – общее решение однородного дифференциального уравнения,  $u_1^{(0)}$  – частное решение неоднородного дифференциального уравнения.

Заменим переменные  $x = a\eta_1, y = \frac{b}{2}\eta_2$ , чтобы решить это первое уравнение. Ищем решение однородного уравнения в следующем виде

$$u_1^{(1)}(\eta_1, \eta_2) = \sum_{m=1}^{\infty} U_{1m}(\eta_2) e^{-im\eta_1}. \quad (18)$$

Подставив решение последнего полученного уравнения (18) в первое уравнение системы уравнений (17), получим обыкновенное дифференциальное уравнение четвертого порядка с комплексными

коэффициентами

$$U_{1m}^{IV} - \frac{\pi^2 m^2 b^2}{2a^2} U_{1m}^{II} + \left( \frac{\pi^4 m^4 b^4}{16a^4} - \frac{p^2 \rho h_0 b^4}{16\bar{D}} \right) U_{1m} = 0. \quad (19)$$

Решение дифференциального уравнения (19) выражается через хорошо изученные функции Крылова в теории колебаний. Частное решение неоднородного уравнения также решается методом вариации переменных в общем случае. Второе и третье уравнения системы уравнений (17) необходимо решать совместно. Здесь также выполняем замену  $x = a\eta_1, y = (b/2)\eta_2$  для этих уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^6 e^*}{\partial \eta_2^6} + \frac{3b^2}{4a^2} \frac{\partial^6 e^*}{\partial \eta_1^2 \partial \eta_2^4} - \frac{3\bar{c}b^2}{a^2} \frac{\partial^4 e^*}{\partial \eta_2^4} + \frac{3b^4}{16a^4} \frac{\partial^6 e^*}{\partial \eta_1^4 \partial \eta_2^2} - \frac{3\bar{c}b^4}{2a^4} \frac{\partial^4 e^*}{\partial \eta_1^2 \partial \eta_2^2} - \\ & - \frac{\rho h_0 p^2 b^4}{16\bar{D}} \frac{\partial^2 e^*}{\partial \eta_2^2} + \frac{b^6}{64a^6} \frac{\partial^6 e^*}{\partial \eta_1^6} - \frac{3\bar{c}b^6}{16a^6} \frac{\partial^4 e^*}{\partial \eta_1^4} - \frac{\rho h_0 p^2 b^6}{64a^2 \bar{D}} \frac{\partial^2 e^*}{\partial \eta_1^2} - \\ & - \left( \frac{24\bar{c}K}{\bar{D}ha^2} - \frac{12\bar{c}\rho h_0 p^2}{\bar{D}a^2} \right) \frac{b^6}{64} e^* = - \frac{3\bar{c}Ab^6}{16a^2 h}. \end{aligned} \quad (20)$$

Решение последнего уравнения (20) ищем в виде суммы  $e^* = e_1^* + e_2^*$ , где  $e_1^*$  - решение однородного уравнения,  $e_2^*$  - частное решение неоднородного уравнения. Ищем решение однородного уравнения в следующем виде

$$e_1^*(\eta_1, \eta_2) = \sum_{m=1}^{\infty} Y_m(\eta_2) e^{-i\pi m \eta_1}. \quad (21)$$

Если подставить (21) в (20), то получим дифференциальное уравнение с комплексными коэффициентами четвертого порядка

$$\begin{aligned} & Y_{1m}^{IV} - \left( \frac{3\pi^2 m^2}{4} + 3\bar{c} \right) Y_{1m}^{IV} + \left( \frac{3\pi^4 m^4}{16} + \frac{3\bar{c}\pi^2 m^2}{2} - \frac{p^2 \rho h_0 b^4}{16\bar{D}} \right) Y_m^{II} - \\ & - \left( \frac{\pi^6 m^6}{64} + \frac{3\bar{c}\pi^4 m^4}{16} - \frac{p^2 \rho h_0 b^4 \pi^2 m^2}{16\bar{D}} + \frac{3\bar{c}Kb^4}{8\bar{D}h} - \frac{3\bar{c}p^2 \rho h_0 b^4}{16\bar{D}} \right) Y_m = 0. \end{aligned} \quad (22)$$

Решение этого обыкновенного дифференциального уравнения (22) также выражается функциями Крылова, которые очень хорошо изучено в теории колебаний. Частное решение неоднородного уравнения также решается методом вариации переменных в общем случае.

Теперь о методах решения задачи о вибрациях вязкоупругой трехслойной пластины с круглой поверхностью. Приведенные выше уравнения (8) и (9), уравнения Бесселя или Гельмгольца получены методом разделения переменных и методами замораживания. Их решения представлены функциями Бесселя и Неймана или Ханкеля.

$u(r, t), \psi(r, t), w(r, t)$  принимается в следующей форме для поиска неизвестных величин

$$\begin{aligned} & w(r, t) = \sum_{m=0}^{\infty} v_m T_m(t), \quad \psi(r, t) = b_2 \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m T_m(t), \quad u(r, t) = b_1 \sum_{m=0}^{\infty} \varphi_m T_m(t), \\ & \varphi_m(r, t) = \frac{\lambda_m}{d_m} \left\{ J_1(\lambda_m r_1) r - J_1(\lambda_m r) + \frac{J_0(\lambda_m r_1)}{I_0(\lambda_m r_1)} [I_1(\lambda_m r_1) r - J_1(\lambda_m r)] \right\}, \quad (23) \\ & b_1 = \frac{a_3 a_4 - a_2 a_5}{a_1 a_4 - a_2^2}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_5 - a_2 a_3}{a_1 a_4 - a_2^2}. \end{aligned}$$

Неизвестная функция по времени находится методом разделения переменных

$$T_m(t) = A_m \cos(\omega_m t) + B_m \sin(\omega_m t) + \frac{q_m}{\omega_m^2} [1 - \cos(\omega_m t)] \quad (24)$$

С помощью приведенных выше уравнений (23) и (24) находятся перемещения и напряжения в точках трехслойной пластины.

Роль метода конечных элементов важна при исследовании колебаний трехслойной вязкоупругой пластины. На этот метод основаны современные методы программирования. При использовании метода конечных элементов основные динамические уравнения выводятся на основе принципа возможных перемещений или вариационного принципа. Уравнения, полученное с помощью вариационного принципа Лагранжа, для упругого тела, имеют следующий вид.

$$\int_{S_\sigma} R_n \delta u_n dS + \int_V \rho (F - \ddot{u}_n) \delta u_n dV = \int_{S_\sigma} \sigma_{nj} \delta \varepsilon_{nj} dV. \quad (25)$$

При использовании метода конечных элементов уравнение вибрации трехслойных пластин имеет следующий вид

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [C]\{\dot{\delta}\} + [K]\{\delta\} + \{R\} = 0, \quad (26)$$

где  $[M]$ - матрица масс системы,  $[C]$ - матрица демпфирования механической системы,  $[K]$ - матрица жесткости механической системы,  $\{\ddot{\delta}\}, \{\dot{\delta}\}, \{\delta\}$  – векторы ускорения, скорости и перемещения. Это уравнение было решено с использованием программного обеспечения MATLAB. В расчетах использовались трехпараметрическое слабо- сингулярное ядро Ржаницына-Колтунова и дробно- экспоненциальное ядро Работнова. Таким образом, во второй главе приведены постановка задачи, методика и алгоритм решения задачи.

В третьей главе диссертации под названием «Свободные колебания трехслойной вязкоупругой пластины» решена задача о свободных колебаниях трехслойной вязкоупругой пластины для прямоугольной, круглой, эллиптической форм. Основные интегро-дифференциальные уравнения трехслойных пластин, полученные в этой главе, представлены во второй главе

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K_0]\{\delta\} - \int_0^t [\Gamma(t-\tau)]\{\delta(\tau)\}d\tau = 0, \quad (27)$$

где  $[K_0]$ - матрица мгновенного модуля упругости,  $[\Gamma(t-\tau)]$ - матрица ядра релаксации элементов. Для решения задачи о свободных колебаниях трехслойной пластины пользуемся методом замораживания (разработанным Филатовым и Сунчалиевым) с учетом малости интеграла при интегро-дифференциальном уравнении (27) и ищем решение задачи о свободных колебаниях в виде

$$\{\delta(t)\} = \{\delta_0\} e^{-i\omega t},$$

в результате получаем систему однородных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами

$$([K_0 \Gamma(\omega_R)] - \omega^2 [M])\{\delta\} = 0. \quad (28)$$

где  $\{\delta_0\}$ - амплитуда смещения.

Чтобы эта система однородных алгебраических уравнений имела нетривиальное решение, ее главный определитель должен быть равен нулю:

$$[K_0 \Gamma(\omega_R)] - \omega^2 [M] = 0, \quad (29)$$

где  $\omega = \omega_R + i\omega_I$  – частота колебаний, которую требуется найти.

Займёмся поиском основной частоты трехслойных вязкоупругих прямоугольных пластин разных размеров и толщин. Параметры внешних слоев пластин таковы:

$$E_x = 50 \text{ ГПа}, E_y = 50 \text{ ГПа}, G_{xy} = 21 \text{ ГПа}, G_{xz} = G_{yz} = 4 \text{ ГПа}, \nu_{xy} = \nu_{yx} = 0.30, \rho = 1500 \text{ кг} / \text{м}^3.$$

Физико-механические свойства заполнителя следующие:

$$G_{xz} = 400 \text{ МПа}, G_{yz} = 220 \text{ МПа}, \rho = 83 \text{ кг} / \text{м}^3.$$

Размеры пластины:  $b=1\text{м}, a=0.5; 1; 2\text{м}$ . Толщина внешнего слоя  $h=0.001-0.002$ , толщина заполнителя  $0.01, 0.05, 0.1\text{м}$ . Параметры ядра релаксации:  $R_k(t) = A_k e^{-\beta_k t} / t^{1-\alpha_k}$   $A = 0,048, \beta = 0,05$  и  $\alpha = 0,1$ . Полученные численные результаты представлены в таблицах 1 и 2.

**Таблица 1.**

**Изменение действительной части частоты в зависимости от толщины заполнителя**

$h_0, \text{м}$	$h_z(a=1, b=2)$					
	0.01m	0.05m	0.1m	0.01m	0.05m	0.1m
0.002	35,40323	115,8264	176,7201	29,7564	87,9423	146,0646
0.004	41,46511	150,1305	251,4235	32,8465	114,3162	178,0835

**Таблица 2.**

**Изменение частоты мнимой части в зависимости от толщины наполнителя**

$h_0, \text{м}$	$h_z(a=1, b=2)$					
	0.01m	0.05m	0.1m	0.01m	0.05m	0.1m
0.002	0.1525	1.8275	1.9332	0.1246	0.7719	1.4606
0.004	0.5416	2.5025	3.5452	0.4313	2.1041	3.1708

Эти результаты были получены на основе программного комплекса MATLAB. Такие же результаты также были получены с помощью программного комплекса ABAQUS. Результаты представлены в таблице 3.

**Таблица 3.**

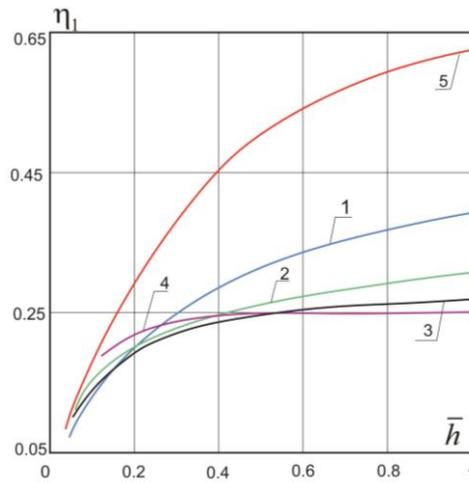
**Изменение действительной части частоты в зависимости от толщины заполнителя**

$h_0, \text{м}$	$h_z(a=1, b=2)$					
	0.01m	0.05m	0.1m	0.01m	0.05m	0.1m
0.002	34,2917	113,2782	174,5472	27,5475	85,1527	144,9264
0.004	39,2854	147,2374	191,4123	30,7473	112,9231	176,1083

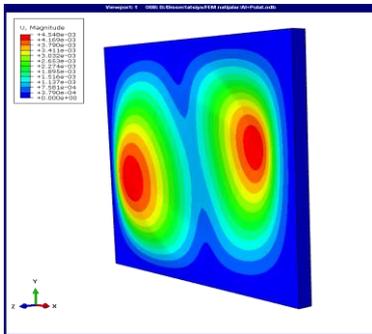
Видно, что разница между реальными частями частот, полученными на основе двух программных комплексов, перекрывается на 15%. Это объясняется тем, что программа ABAQUS основана на методе численного решения. Изменение коэффициента затухания в зависимости от толщины срединного мягкого слоя (s-симметричная форма колебаний) показано на рис. 2 (углеродная пластинка HMS/DX-209).

Таким образом, в третьей главе аналитически и численно решена задача колебаний прямоугольных, круглых и эллиптических трехслойных пластин. Результаты показаны на рисунках 2, 3, 4 и 5. Установлено, что частота и форма собственных колебаний существенно зависят от свойств срединного слоя.

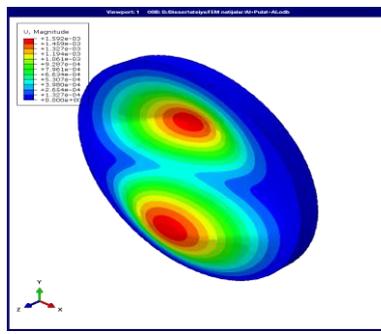
В четвертой главе, названной «**Вынужденные колебания трехслойной вязкоупругой пластины**» аналитически и численно решены вынужденные колебания трехслойной вязкоупругой пластины. Получены результаты и проанализированы.



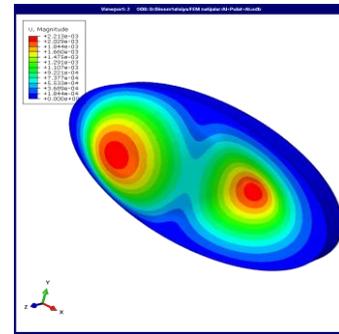
**Рис 2. Изменение коэффициента затухания в зависимости от толщины среднего мягкого слоя (симметричная форма колебаний) (1.  $E_1=0.01$ , 2.  $E_1=0.005$ , 3.  $E_1=0.001$ , 4.  $E_1=10^{-4}$ , 5.  $E_1=0.1$ )**



**Рис 3. 2-я колебательная форма пластины**



**Рис 4. 2-я колебательная форма пластины**



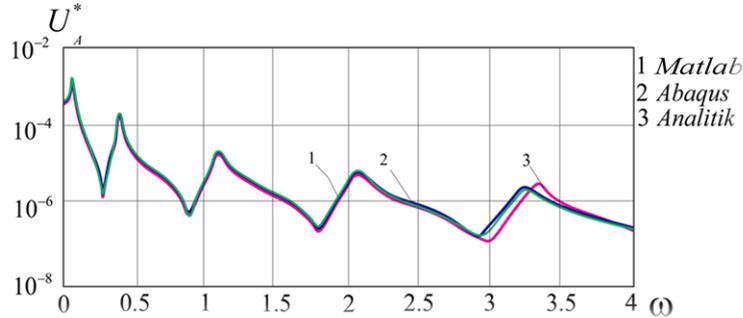
**Рис 5. 2-я колебательная форма пластины**

Рассмотрим получение численных результатов задачи нахождения напряженно-деформированного состояния трехслойной пластинки с легким наполнителем под действием динамической силы, рассмотренного во второй главе. Для этого используются уравнения и алгоритм их решения, полученные во второй главе. Смещение прямоугольной трехслойной пластины под действием внешней периодической силы находится следующим образом

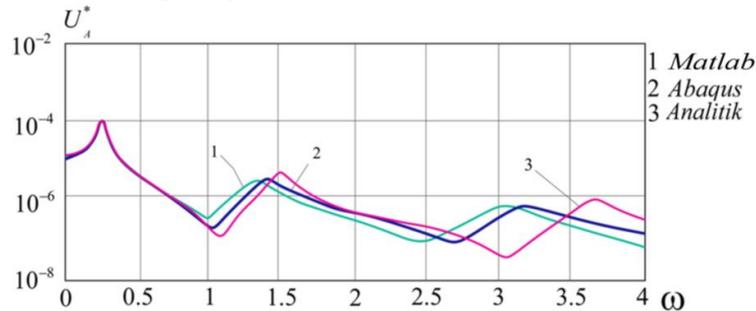
$$\begin{aligned}
 w_1(\eta_1, \eta_2, t) = & \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left( c_{1m}^{(1)} ch(\lambda_m^{(1)} \eta_2) + c_{2m}^{(1)} ch(\alpha_m^{(1)} \eta_2) \sin(\beta_m^{(1)} \eta_2) \right) \sin(\pi m \eta_1) e^{i\omega t} + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{4A}{\pi m p^2 \rho h_0} + \left( \frac{c_{1m}^{(2)} ch(\lambda_m^{(2)} \eta_2) + c_{2m}^{(2)} ch(\alpha_m^{(2)} \eta_2) \sin(\beta_m^{(2)} \eta_2) + c_{3m}^{(2)} sh(\alpha_m^{(2)} \eta_2) \sin(\beta_m^{(2)} \eta_2) +}{\pi m (2K - p^2 \rho h_0)} \frac{h(\pi^2 m^2 + 12\bar{c})}{12\bar{c}} \right) \right) \sin(\pi m \eta_1) e^{i\omega t} + \\
 & + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\alpha^2 h}{3\bar{c} b^2} \left( c_{1m}^{(2)} (\lambda_m^{(2)})^2 ch(\lambda_m^{(2)} \eta_2) + c_{2m}^{(2)} \alpha_m^2 ch(\alpha_m^{(2)} \eta_2) \cos(\beta_m^{(2)} \eta_2) \right) \sin(\pi m \eta_1) e^{i\omega t} - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left( c_{2m}^{(2)} (\beta_m^{(2)})^2 ch(\alpha_m^{(2)} \eta_2) \cos(\beta_m^{(2)} \eta_2) - c_{3m}^{(2)} \alpha_m \beta_m sh(\alpha_m^{(2)} \eta_2) \sin(\beta_m^{(2)} \eta_2) \right) \sin(\pi m \eta_1) e^{i\omega t} - \\
 & - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \left( c_{3m}^{(2)} (\beta_m^{(2)})^2 sh(\alpha_m^{(2)} \eta_2) \sin(\beta_m^{(2)} \eta_2) - 2c_{2m}^{(2)} \alpha_m \beta_m ch(\alpha_m^{(2)} \eta_2) \cos(\beta_m^{(2)} \eta_2) - \right. \\
 & \left. - 2c_{2m}^{(2)} \alpha_m \beta_m sh(\alpha_m^{(2)} \eta_2) \sin(\beta_m^{(2)} \eta_2) \right) \sin(\pi m \eta_1) e^{i\omega t}
 \end{aligned}$$

Для получения численных результатов приняты следующие величины: внешняя пластинка и заполнитель

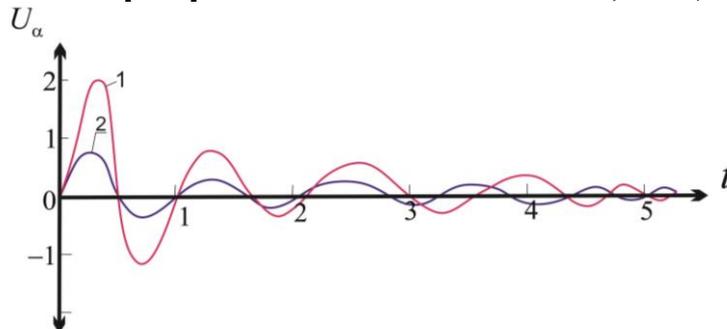
$$h=h_0=1, \quad K=24 \times 10^3 \text{ kg/sm}^2, \quad b=a=10 \text{ cm}, \quad E_0=2.1 \times 10^6 \text{ kg/sm}^2, \\ \nu_0=0.3; \quad G=10 \text{ кг/см}^2, \quad \kappa=1.62; \quad \rho=1.2 \times 10^{-3} \text{ кг/см}^3, \quad p=500 \text{ с}^{-1}, \\ A=0,048; \quad \beta=0,05; \quad \alpha=0,10.$$



**Рис 6. Частотно-зависимое изменение амплитуды смещения (на основе трех разных моделей (A=0.001))**



**Рис 7. Частотно-зависимое изменение амплитуды смещения (на основе трех различных моделей. A=0,0025)**



**Рис 8. Изменение амплитуды смещения во времени  
1. A=0,001 2. A=0,01**

Увеличение инерции основания приводит к увеличению амплитуды смещения и уменьшению периода колебаний. Увеличение массы основания с 400 до 900 приводит к увеличению амплитуды смещения на 48%, а увеличение массы основания с 1000 до 1500 приводит к увеличению смещения на 26%. Было обнаружено, что инерция основания зависит от смещения пластины нелинейной функцией.

## ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

1. С помощью принципа возможных перемещений получена система линейных интегро-дифференциальных уравнений в частных производных,

выражающих свободные колебания. Заданы удовлетворяющие им граничные и начальные условия. Разработаны математическая постановка задач, методика и алгоритм решения. Алгоритм исследования, учитывающий вязкость трехслойных пластин при решении задач свободных колебаний разработан на основе программного комплекса MATLAB. Разработаны метод решения задачи о колебаниях многослойных пластин, алгоритм численного решения (МКЭ) и получены численные результаты.

2. Корректность разработанного алгоритма доказана путем решения конкретных задач и сравнения с известными результатами. Обнаружено, что разница уместна для динамического процесса, то есть разница не превышает 3-5%.

3. Тот факт, что частота колебаний равна мнимой величине, создает апериодические движения. Амплитуды смещения, соответствующие малым частотам (максимальная амплитуда смещения), может быть сведена к затуханию за счет внешней диссипации. Обоснована эффективность затухания резонансных амплитуд, соответствующие большим частотам, за счет внутренней вязкости.

4. С использованием методов теории колебаний и уравнений математической физики впервые разработан метод аналитического решения задач колебаний трехслойной пластинки с мягким наполнителем.

5. Разработаны методика аналитического и численного решения и алгоритм исследования колебаний вязкоупругой трехслойной пластины прямоугольного и круглого поперечного сечения. Численное решение осуществлено на основе современных программных комплексов.

6. Установлено, что увеличение инерции основания приводит к увеличению амплитуды смещения и уменьшению периода колебаний. Увеличение массы основания с 400 до 900 привело к увеличению амплитуды смещения на 48%, а увеличение массы основания с 1000 до 1500 привело к увеличению смещения на 26%. Отсюда установлено, что инерция основания зависит от смещения пластины нелинейной функцией.

**ONE-TIME SCIENTIFIC COUNCIL CREATED ON THE BASIS  
OF THE SCIENTIFIC COUNCIL PhD.03/27.02.2021.FM.101.02  
ON AWARDING SCIENTIFIC DEGREES AT  
BUKHARA ENGINEERING-TECHNOLOGICAL INSTITUTE**

---

**TASHKENT CHEMICAL-TECHNOLOGICAL INSTITUTE**

**NAMOZOV JASUR SHOQULOVICH**

**FEATURES OF FREE AND FORCED VIBRATIONS OF THREE-LAYER  
VISCOELASTIC PLATES**

**01.02.04 – Mechanics of a deformable solid**

**DISSERTATION ABSTRACT  
for scientific degree Doctor of Philosophy (PhD) in Technical Sciences**

**Tashkent –2024**

**The theme of the dissertation of Doctor of Philosophy (PhD) in physical and mathematical sciences was registered under the number B2024.2.PhD/T4561 in Higher Attestation Commission under the Ministry of Higher education, science and innovations of the Republic of Uzbekistan**

The dissertation has been accomplished at Tashkent of Chemical Technology Institute

The dissertation abstract in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) has been placed on the website of Scientific Council ([www.bmti.uz](http://www.bmti.uz)) and on the Information-Educational portal "ZiyoNET" ([www.ziynet.uz](http://www.ziynet.uz)).

**Scientific adviser:** **Usmanov Botir Shukurillaevich,**  
Doctor of technical sciences, professor

**Official Opponents:** **Mardonov Botir Mardonovich**  
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

**Rahmonov Bahodir Sobirovich**  
Doctor of technical sciences, professor

**Lead organization:** **"Tashkent Institute of Irrigation and Agricultural  
Mechanization Engineers" National Research  
Institute**

The dissertation defense will be held on 10<sup>th</sup> January 2025 y. at 11<sup>00</sup> o'clock at the meeting of the One-time Scientific Council based on the Scientific Council Phd.03/27.02.2021.FM.101.02 at Bukhara Engineering-Technological Institute. (Address: 100118, 15. Qayum Murtazaev street, Bukhara. Phone: (+99865) 223-78-84; fax: (+99865) 223-79-72, e-mail: [bmti\\_info@edu.uz](mailto:bmti_info@edu.uz)).

The dissertation is available at the Information resource center of Bukhara Engineering-Technological Institute (registered under the number No.337.). (Address: 100118, 15. Qayum Murtazaev street, Bukhara. Phone: (+99865) 223-78-84).

The dissertation abstract is distributed on 26<sup>th</sup> December 2024.

(Mailing report № 1 on 23<sup>rd</sup> November 2024)



**M.Kh. Teshaev**

Chairperson of the one-time Scientific Council on awarding scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

**Z.I. Boltaev**

Scientific Secretary of the one-time Scientific Council on awarding scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences (DSc), Professor

**M.Z. Sharipov**

Chairperson of the one-time Scientific Seminar at the Scientific Council on awarding scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences (DSc), Professor

## INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

**Relevance and relevance of the topic of the dissertation.** In the world of engineering and moving vehicles, the use of multiple structural elements of multilayer plates and shells occupies a priority place. All over the world much attention is paid to the study of the dynamic state of three-layer composite plates under the action of external forces and the search for their optimal composition (in terms of strength and mass). In this connection it is actual to study peculiarities of proper and forced vibrations of three-layer plate structures at interaction with the base and their use in moving vehicles. In this connection in many foreign countries, including the USA, Canada, Russia and other countries, special attention is paid to the fact that the use of three-layer plates is effective in solving the problem of vibration and noise control in moving vehicles.

A viscoelastic three-layer plate with filler is taken as an **object of study**.

**Implementation of the research results.** Based on the obtained results of mathematical modeling taking into account viscoelastic properties of the material, theory development, development of calculation methods, algorithm and programs for solving vibration problems of a three-layer plate with filler:

theoretical and experimental formulas for the study of dynamic stress-strain states arising under the influence of harmonic force were used within the framework of the fundamental project “Development of theory and development of calculation methods for the study of stress-strain states of external influences on horizontal curvilinear pipelines with liquid flow” with the number F-4-14, implemented in the period from 2012 to 2016 within the framework of state scientific and technical programs of Bukhara Engineering and Technology Institute As a result, methods for assessing stress-strain states in single-type and different-type systems operating under load were obtained;

the methodology developed for solving problems related to the interaction of three-layer visco-elastic structures was used within the framework of the fundamental project OT-F4-01 “Development of methods and development of the theory of research of nonlinear dynamic stress-strain states of curved sections of multilayer composite pipes with liquid flow under the influence of temperature and dynamic loads”, carried out in the period from 2016 to 2020 within the framework of the State Scientific and Technical Program of the Tashkent Institute of Chemical Technology. As a result, it was found that the difference between the analytical solution and the solutions obtained using the methodology developed in the thesis does not exceed 15%

The methods of calculation of deformations, strength, vibrations and dynamic reliability of structures made of composite materials, presented in the thesis, were used at JSC “Tashkent Mechanical Plant” (reference of the Civil Aviation Agency “Uzaviation” of the Ministry of Transport of the Republic of Uzbekistan № 01-39/16-2955 from August 16, 2024). As a result, the use of modern personal computers to analyze the stress-strain state of structures made of composite materials made it possible to analyze their deformations.

**The scientific novelty of the research is as follows:**

the problems of free and forced vibrations of three-layer plates on the basis of the Hamilton-Ostrogradsky variational principle taking into account the viscoelastic properties of materials have been posed, and the methodology and algorithm for solving the problem have been developed;

amplitude-frequency characteristics of displacements and stresses of forced steady-state vibrations of a three-layer viscoelastic plate have been found by solving a system of inhomogeneous linear differential equations;

on the basis of the classical theory of free vibrations of a three-layer plate, a frequency equation for determining complex frequencies and their analytical expression depending on the rigidity and thickness of the filler is obtained;

it is established that an increase in the inertia of the base leads to an increase in the amplitude of displacement and a decrease in the oscillation period, and a change in the mass of the base from 1000 to 1500 leads to an increase in displacement by 26%.

**Publication of the results of the study.** In total, 18 scientific papers have been published on the topic of the dissertation, including 6 articles in scientific publications recommended for publication of the main scientific results of doctoral (doctoral) dissertations of the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan, including 2 in the Republic and 4 of them published in foreign scientific journals.

**The structure and Scope of the dissertation.** The content of the dissertation consists of an introduction, four chapters, a conclusion, a list of references and appendices. The volume of the dissertation was 105 pages.

**E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI**  
**СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ**  
**LIST OF PUBLISHED WORKS**  
**I bo'lim (I часть; I part)**

1. Усмонов.Б.Ш., Намозов Ж.Ш. Неосесимметричные задачи стационарного напряжённого состояния цилиндрических оболочек с жидкостью. “Muhandislik sohasidagi ilg'or texnologiyalar” jurnal. – Navoiy. –2024. –№3(15). – 61-66 b. Journal of Advances in Engineering Technology Vol.3(15), 61-66 b. July–September, 2024 DOI 10.24412/2181-1431-2024-3-61-66. <http://www.sciencealgorithm.uz/> (IF=4.261).
2. Usmonov.B.Sh., Namozov J.Sh. Cheksiz uzundagi ko'p qatlamli kompozit qovushqoq-elastik mexanik sistemalarda to'liqin tarqalishi. “Muhandislik sohasidagi ilg'or texnologiyalar” jurnal -Navoiy -2024 - №3(15) 55-60 betlar. Journal of Advances in Engineering Technology Vol.3(15), 55-60 b. July–September, 2024 DOI 10.24412/2181-1431-2024-3-55-60. <http://www.sciencealgorithm.uz/> (IF=4.261).
3. Safarov I.I., Tashaev M.Kh., Ablokulov Sh.Z., Namozov J.Sh. Oscillations of a viscoelastic mechanical system with damper // SOI:1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS. International Scientific Journal Theoretical & Applied Science p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online) Year: 2022 Issue: 09 Volume: 113 Published: 27.09.2022 <http://T-Science.org> (IF=7.184)
4. Kulmurotov N.R., Almurodov Sh.N., Namozov J.Sh. Vibration damping of rod and tubular structures. SOI: 1.1/TAS DOI: 10.15863/TAS International Scientific Journal Theoretical & Applied Science p-ISSN: 2308-4944 (print) e-ISSN: 2409-0085 (online) Year: 2021 Issue: 06 Volume: 98 Published: 18.06.2021 <http://T-Science.org> (IF=7.184)

**II bo'lim (2 часть; part 2)**

5. Namozov J.Sh. Uch qatlamli qovushqoq-elastik plastinkaning erkin va majburiy tebranishlarida chastota, ko'chish amplituda va tebranish formasini aniqlash // Elektron hisoblash mashinalari uchun yaratilgan dasturning rasmiy ro'yxatdan o'tkazilganligi to'g'risidagi GUVOHNOMA № DGU 40652. O'zbekiston Respublikasining Dasturiy mahsulotlar davlat reyestrda 25.06.2024-y. ro'yxatdan o'tkazilgan.
6. Nuriddinov B., Karimov I., Namozov J., Ismoilova Z., Ibragimova D. Energy dissipation under natural vibrations of viscoelastic composite cylindrical shells // E3S Web Conf. Volume 419, 2023. V International Scientific Forum on Computer and Energy Sciences (WFCES 2023) Number 01004 Energy Sciences, Engineering and Industry <https://doi.org/10.1051/e3sconf/202341901004> (IF=4.1)
7. Akhmedov M.Sh.; Namozov Zh.; Eshpulatov J.; Negmatullayev

- B.B.; Jalolov F.B. Natural oscillations of three-layered viscoelastic flat spherical shells // AIP Conference Proceedings. Volume 2969, Issue 1 12 January 2024. AIP Conf. Proc. 2969, 050025 (2024) <https://doi.org/10.1063/5.0187770>
8. Nuriddinov B.Z., Namozov J.Sh., O‘rolov O‘.A. Suyuqlik bilan to‘ldirilgan silindrik qobiqning osisimmetrik bo‘lmagan dinamik kuchlanganlik holati // “ILM SARCHASHMALARI” ilmiy-nazariy, metodik jurnal. 9.2022-yildagi sonida 7-11-betlar. (01.00.00, №12)
  9. Namozov J.Sh. To‘g‘ri to‘rtburchakli uch qatlamli qovushoq-elastik plastinkaning erkin tebranishi // “ILM SARCHASHMALARI” ilmiy-nazariy, metodik jurnal. 5.2024-yildagi sonida 7-13-b.
  10. Сафаров И.И., Тешаев М.Х., Намозов Ж.Ш., Уролов У.А. Колебания вязкоупругой пластинки, несущей сосредоточенные массы//«КАБАРДИНО-БАЛКАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Х.М Бербекова» Современные проблемы прикладной математики, информатики и механики. Сборник трудов международной научной конференции. – Нальчик: -2023. – С.199-200
  11. Алмуратов Ш.Н., Эсанов Н.К., Каримов И.М. Собственные линейные колебание сферической неоднородности в вязкоупругой среде // Вухоро davlat universiteti. Fizika, matematika va mexanikaning dolzarb muammolari xalqaro ilmiy-amaliy anjumani materiallari (II qism). -Vuxoro:- 2023. 24-25-may, 13-16 b.
  12. Safarov Ismoil Ibrokhimovich, Teshaeв Muhsin Khudoyberdiyevich, Rayimov Doniyor Gapirovich, Namozov Jasur Shoqulovich. Nonlinear vibrations of a body mounted on viscoelastic oscillating supports // “Sifatli ta’lim va interdisipliner yondashuv: muammolar, yechim va hamkorlik” xalqaro ilmiy-amaliy konferensiya. – Guliston. – 2023. – 190-19-b.
  13. Nuriddinov B.Z., Abloqulov Sh.Z., Teshaeв M.X., Jo‘rayev Sh.I. Колебания вязкоупругих пластин с присоединенным массами // “Рахматулин чтения” международной научной конференции. – Ташкент. – 2023. – С.176-177
  14. Чориев М. Намозов Ж.Ш. Радиальные колебания линейной вязкоупругой сферической оболочки // “Механика va matematikaning amaliy muammolari” Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi. – Toshkent.– 2022. – 169-202 b.
  15. Rahmonov B.S., Nuriddinov B.Z., Safarov U.I. Задачи действие подвижных нагрузок на неподкреплённый тоннель // “Raqamli texnologiyalar asosida ta’lim jarayonini takomillashtirish” mavzusida xalqaro ilmiy-amaliy konferensiya. – Toshkent: – 2024. – 30-36 b.
  16. Safarov I.I., O‘rolov O‘.A., Choriyev M., Namozov J.Sh. Statikaning muvozanat tenglamalari yordamida yechiladigan ba’zi masalalarini abaqus dasturi yordamida yechish // “Raqamli texnologiyalar asosida ta’lim jarayonini takomillashtirish” mavzusida xalqaro ilmiy-amaliy konferensiya. – Toshkent.– 2024. . – 18-21 b.
  17. Жураев Ш.И., Уролов У., Намозов Ж., Ахмедов О. Колебания

оболочки, с присоединенной массой // *Механика va matematikaning amaliy muammolari Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi.* – Toshkent. – 2024. – 377-379-b.

18. Almurodov Sh.N., Mustafoyev N.S., Sharipova N.U. Собственные колебания сферической неоднородности в упругой среде // *Механика va matematikaning amaliy muammolari. Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi.* – Toshkent.– 2024. –86-88 b.



**Avtoreferatning o‘zbek, rus va ingliz tilidagi matnlari  
“IPAKYO‘LI” nashriyotida tahrirdan o‘tqizildi.**

**Bosishga ruxsat etildi: 25.12.2024.  
Qog‘oz bichimi 60x84 1/16.  
Temes New Roman garniturasida chop etildi.  
Hajmi 3 bosma taboq. Adadi 100 nusxa. Buyurtma № 309.**

**“West Media Express” MCHJ bosmaxonasida chop etildi.  
Bosmaxona manzili: Buxoro shahri,  
Qayum Murtazoyev ko‘chasi 15A uy.  
Tel: +998 93 080 39 00**

