**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

KUZIYEV SHAXOBIDDIN SOBIROVICH

SOBOLEV FAZOSIDA HOSILALI OPTIMAL KVADRATUR FORMULALAR

01.01.03 – Hisoblash matematikasi va diskret matematika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2025

UDK: 519.644

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

KUZIYEV SHAXOBIDDIN SOBIROVICH

SOBOLEV FAZOSIDA HOSILALI OPTIMAL KVADRATUR FORMULALAR

01.01.03 – Hisoblash matematikasi va diskret matematika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2025

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2024.1.PhD/FM1014 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (резюме)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (http://ik-fizmat.nuu.uz/) va «Ziyonet» ta’lim axborot tarmog‘ida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Nuraliyev Farxod Abdug‘aniyevich** fizika-matematika fanlari doktori, dotsent
Rasmiy opponentlar:	**Xudoyberganov Mirzoali Urazaliyevich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Uteuliev Nietbay Uteulievich fizika-matematika fanlari doktori, professor
Yetakchi tashkilot:	**Samarqand davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi O‘zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 raqamli Ilmiy kengashning «___»________ 2025 yil soat____ dagi majlisida bo‘lib o‘tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 227-12-24, faks: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan O‘zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (___ raqami bilan ro‘yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 246-02-24).

Dissertatsiya avtoreferati 2025 yil «____» ________________ kuni tarqatildi.
(2025 yil «____» ____________ dagi _______ raqamli reestr bayonnomasi).

M.M. Aripov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash raisi,
f.-m.f.d., professor

Z.R. Raxmonov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash
ilmiy kotibi, f.-m.f.d.

R.D. Aloyev
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash huzuridagi
ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida olib borilayotgan ko‘plab ilmiy-amaliy tadqiqotlar natijasida quyosh fizikasi, sintezlangan gologrammalarni modellashtirish, suyuqlik va gazlar mexanikasi masalalaridagi differensial va integral tenglamalarni yuqori aniqlikda sonli yechish hosilali optimal kvadratur formulalar qurishga olib kelinadi. Odatda bunday masalalarni yechishda oddiy interpolyatsion kvadratur formulalaridan foydalanish katta miqdordagi hisoblash ishlarini talab qiladi. Shu sababli, matematikada tipik masalalarning yechimlarini yetarlicha aniqlikda hisoblashga imkon beruvchi optimal sonli yechish algoritmlarini yaratish va shu maqsadda hozirgi zamon hisoblash vositalaridan foydalanish yo‘llarini ishlab chiqish, hamda ma’lum Gilbert va Banax fazolarida hosilali optimal kvadratur formulalar qurish va ularning xatoliklarini baholash hisoblash matematikasining muhim vazifalaridan biri bo‘lib hisoblanmoqda.

Hozirgi kunda dunyoda funksiyalarning tugun nuqtalardagi ikkinchi tartibli hosilasigacha bo‘lgan qiymatlaridan foydalanib, hosilali optimal kvadratur va kubatur formulalar qurish, ularning xatoliklarini baholash keng tadqiq etilmoqda. Hosilali optimal kvadratur formulalar tabiiy jarayonlarni matematik modellashtirishda hosil bo‘ladigan xususiy hosilali differensial tenglamalar va integral tenglamalarning sonli analitik yechimlarini topishda, funksiyaning tugun nuqtalardagi birinchi hamda ikkinchi tartibli hosilalari yordamida ifodalanuvchi mexanik yoki fizik jarayonlarga bog‘liq integrallarni taqribiy yechishda, gidroenergetika sohasidagi optimal yuzalarni hisoblashda keng qo‘llaniladi. Shu munosabat bilan differensiallanuvchi funksiyalarning Gilbert va Banax fazolarida hosilali optimal kvadratur formulalar qurish hamda keng doiradagi foydalanuvchilarga mo‘ljallangan qulay interfeysga ega dasturlar majmuasini yaratish maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tadbiqiga ega bo‘lgan suyuqliklar mexanikasi va matematik fizika, geofizika masalalarini sonli-analitik yechish hamda integral tenglamalarni taqribiy yechishning samarali metodlarini yaratishga katta e’tibor qaratilmoqda. Xususan, hisoblash matematikasining sonli integrallash nazariyasiga katta e’tibor qaratilgan bo‘lib, Sobolev fazolarida funksiyalarning tugun nuqtalardagi ikkinchi tartibli hosilasigacha bo‘lgan qiymatlaridan foydalanib, hosilali optimal kvadratur formulalar qurish va ularning xatoliklarini baholash bo‘yicha salmoqli natijalarga erishildi. “Funksional analiz, differensial tenglamalar, matematik fizika, matematik modellashtirish, hisoblash matematikasi va diskret matematika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” kabi ustuvor yo‘nalishlar bo‘yicha jahon standartlari darajasidagi ilmiy izlanishlar olib borish ko‘plab respublika ilmiy-tadqiqot institutlari, universitetlari fundamental tadqiqotlarining asosiy vazifalaridan biri hisoblanadi[1]. Qaror ijrosini ta’minlashda,

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” gi PQ-4708-son qarori.

hosilali kvadratur formulalar qurish va ularning xatoliklarini baholash usullarini takomillashtirish muhim ahamiyatga ega.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevral PF-4947-sonli “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi, 2022-yil 28-yanvar PF-60 sonli “2022-2026-yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi farmonlari, 2017-yil 17-fevral PQ-2789-sonli “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2017-yil 20-aprel PQ-2909-sonli “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2018-yil 27-aprel PQ-3682-sonli “Innovatsion g‘oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2020-yil 7-may PQ-4708-sonli “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Ko‘plab amaliy masalalarda xususan, jismning og‘irlik markazi, inersiya momentlarini, tasvir va signallarni tahlil qilish va filtrlash bilan bog‘liq masalalarni hal qilishda hosilali optimal kvadratur formulalar muhim ahamiyatga ega. Funksiyaning tugun nuqtalardagi birinchi hamda ikkinchi tartibli hosilalari yordamida ifodalanuvchi mexanik yoki fizik jarayonlarga bog‘liq integrallarni hisoblashda hosilali optimal kvadratur formulalar yaxshi natija beradi. Shuning uchun hosilali optimal kvadratur formulalarni qurish va ularning turli fazolarda xatoliklarini baholash muhimdir. Hosilali optimal kvadratur formulalar qurish masalasi bu ma’lum funksiyalar sinfida, tugun nuqtalar fiksirlanganda xatolik funksionali normasini minimallashtirishdir. Bunday hosilali optimal kvadratur formulalar splaynlar, ϕ – funksiyalar va Sobolev metodlari yordamida quriladi.

I. Schoenberg splayn metodi bilan $L_2^{(m)}(0,n)$ fazoda klassik Eyler-Makloren formulasining optimalligini isbotlagan. S.A. Michelli $W_2^{(m)}$ fazoda $m-$ toq bo‘lganda Eyler-Makloren formulasi eng yaxshi formula ekanligini ko‘rsatgan. T. Catinas, G. Coman ϕ - funksiyalar metodi bilan optimal kvadratur formulalar qurgan. B. Bojanov, P. Petrov $2n-1$ darajali barcha algebraik ko‘phadlarga aniq bo‘lgan Gauss tipidagi kvadratur formula qurgan. V.I. Danchenko, L.A. Semin ishida Chebishev-Markov ko‘phadining nollaridan foydalangan holda murakkab ratsional funksiyalarning integrallarini hisoblash uchun hosilali kvadratur formulalar qurgan va ulardan ratsional funksiyalarning L_2 normalarini hisoblashda foydalangan. E.F. William, Y. Xu, Y. Zhao singulyar integrallarni taqribiy hisoblash uchun hosilali kvadratur formulalardan foydalangan hamda Riemann zeta funksiyasining hosilalarini hisoblash uchun samarali algoritm berilgan. M. Kanagawa, K.B. Sriperumbudur, K. Fukumizu Sobolev fazolarida Bayes kvadratur formulasining yaqinlashish tezligini o‘rgangan. M.B. Klaricic, J. Pecaric, R.P. Mihaela, A. Vukelic uch nuqtali Ermit tipidagi hosilali kvadratur formulalar yordamida ba’zi yangi Gruss tipidagi tengsizliklar ko‘rib chiqilgan va Eyler Simpson formulasi yordamida kvadratur formulaning xatoligini baholagan. A.I.Zadorin $C^3\left[a,b\right]$ fazoda funksiyaning hosilasidan foydalanib, uchinchi darajali ko‘phadgacha aniq bo‘lgan hosilali formula qurgan. Sh.Zhang, E.Novak Sobolevning $H_0^{(1)}\left[0,1\right]$ fazosida teng taqsimlangan tugun nuqtalarda ixtiyoriy vaznli integrallarni taqribiy hisoblash uchun optimal algoritm bergan va davriy funksiyalarning Furye koeffitsiyentlarini hisoblashda muhim natijalar olgan. M.Sh. Muhammad, S.Ch. Muhammad, W.Sh Abdul ishida funksiya hosilalaridan foydalanib, ba’zi yangi kvadratur formulalar taklif qilingan hamda ular vaqt va hisoblash jihatidan samarali ekanligi isbotlangan.

Hosilali optimal kvadratur formulalar qurish va ulardan amaliy masalalarni yechishdagi tadbig‘i bo‘yicha ilmiy yangiliklarni I. Area, K.D. Dimitrov, D. Eduardo, G.V. Paschoa, H. Ayman, S. Rania, H. Raed, W. Mohammad, Q. Ahmad, A. El-Ajou, O.A. Arqub, V. Al-Smadi, Q. Feng, G. Bai-Ni, P. Irina, P. Tam, F. Petr, W. Kailiang, Sh. Yeonjong X. Dongbin, T.K. Bratislava, N.P. Zilina, M.M. Spalevic, Y. Quintana, A. Urieles, M. Sanda, T. Szostok, X.M. Shadimetov, A.R. Hayotov, F.A. Nuraliev, D.M. Axmedov, A.K. Boltayev, S.S. Babayev va boshqa olimlar o‘z ilmiy ishlarida bayon etishgan.

Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilayotgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti Hisoblash matematikasi laboratoriyasining “Gilbert fazolarida optimal kvadratur, interpolyatsion, ayirmali formulalar qurish va ularni integral tenglamalarni yechishga tatbiqlari” mavzusidagi kalendar reja doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi. Sobolevning $L_2^{(m)}(0,1)$ differensiallanuvchi funksiyalar fazosida hosilali optimal kvadratur formulalar qurish, ularga mos xatolik funksionali normasini hisoblash hamda integral tenglamalarni sonli yechishda hosilali optimal kvadratur formulalarni qo‘llashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

$L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida algebraik ko‘phadlarga aniq bo‘lgan hosilali kvadratur formulalar xatolik funksionali normasining ko‘rinishini topish;

$L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida hosilali optimal kvadratur formulaning koeffitsiyentlari uchun Vinner-Xopf tipidagi tenglamalar sistemasini olish;

$L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida $m=3$ va $m=4$ bo‘lgan hollarda hosilali optimal kvadratur formulaning koeffitsiyentlarini topish;

$L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida $m>4$ uchun hosilali optimal kvadratur formulalar koeffitsiyentlarining analitik ko‘rinishini topish;

$L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida $m=3$ va $m=4$ bo‘lgan hollarda hosilali optimal kvadratur formulaning xatolik funksionali normasini hisoblash;

$L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida hosilali optimal kvadratur formula xatoligining yuqori chegarasini baholash

Tadqiqotning obyekti. Sobolev fazolari, hosilali optimal kvadratur formulalar, xatolik funksionallaridan iborat.

Tadqiqotning predmeti. Riss elementi, algebraik ko‘phadlarga aniq bo‘lgan hosilali optimal kvadratur formulalar, chiziqli uzluksiz funksionallar, Sobolevning $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida qurilgan hosilali optimal kvadratur formulaning xatolik funksionali normasidan iborat.

Tadqiqot usullari. Ilmiy tadqiqot ishida hisoblash matematikasi, funksional analiz, ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi, umumlashgan funksiyalar hamda diskret argumentli funksiyalar nazariyasi usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

differensiallanuvchi funksiyalarning $L_2^{(m)}(0,1)$ haqiqiy qiymatli Sobolev fazosida $m \geq 3$ uchun algebraik ko‘phadlarga aniq bo‘lgan hosilali optimal kvadratur formula xatolik funksionali normasining analitik ko‘rinishini topilgan;

optimal koeffitsiyentlarni topish uchun Vinner-Xopf tipidagi tenglamalar sistemasi Lagranjning aniqmas ko‘paytuvchilar usulidan foydalanib olingan;

differensiallanuvchi funksiyalarning $L_2^{(m)}(0,1)$ haqiqiy qiymatli Sobolev fazosida $m=3$ uchun hosilali optimal kvadratur formulaning koeffitsiyentlari va xatolikning yuqori chegarasi topilgan;

differensiallanuvchi funksiyalarning $L_2^{(m)}(0,1)$ haqiqiy qiymatli Sobolev fazosida $m \geq 3$ uchun hosilali optimal kvadratur formulaning koeffitsiyentlari diskret operatordan foydalanib topilgan;

differensiallanuvchi funksiyalarning $L_2^{(m)}(0,1)$ haqiqiy qiymatli Sobolev fazosida $m \geq 3$ uchun hosilali optimal kvadratur formulaning xatolik funksionali normasi hisoblangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

hosilali optimal kvadratur formula yordamida murakkab tabiiy tizimlarda hosil bo‘ladigan dinamik jarayonlarning matematik modellari qurilgan;

ko’ndalang to‘lqin tarqalish tenglamalari uchun to‘g‘ri va teskari masalalarni sonli hisoblash sxemalari qurilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi kvadratur formulalar nazariyasi, hisoblash matematikasi, ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi, matematik - fizika tenglamalari, funksional analiz, diskret argumentli funksiyalar nazariyasi metodlari qo‘llanganligi va matematik mulohazalarning qat’iyligi bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot ishining ilmiy ahamiyati Sobolevning $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida aniq integrallarni yetarli aniqlikda taqribiy hisoblash uchun hosilali optimal kvadratur formulalar qurilganligi va bu formulalar xatoligining yuqori chegarasi baholanganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati hosilali optimal kvadratur formulalar aniq integrallarni sonli taqribiy hisoblash usullari yordamida murakkab tabiiy tizimlarda hosil bo‘ladigan dinamik jarayonlarning matematik modellari qurishda, ko‘ndalang to‘lqin tarqalish tenglamalari uchun to‘g‘ri va teskari masalalarini yechishda qo‘llaniladi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Sobolevning $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida algebraik ko‘phadlarga aniq bo‘lgan hosilali optimal kvadratur formulalar qurish bo‘yicha olingan yangi ilmiy natijalar asosida:

differensiallanuvchi funksiyalarning $L_2^{(m)}(0,1)$ haqiqiy qiymatli Sobolev fazosida qurilgan hosilali optimal kvadratur formulalardan С-ПМ1 “Gidroturbonasos qurilmasi yordamida qishloq xo‘jaligi yerlarini elektr energiya sarfisiz sug‘orish tizimi” mavzusidagi davlat ilmiy-texnik dasturlari doirasidagi xalqaro qo‘shma ilmiy amaliy loyihada elektr energiyasi bilan ishlaydigan sug‘orish tizimlarini samarali boshqarish va suv resurslarini tejash jarayonlarini ifodalovchi matematik modellar yechimlarini baholashda foydalanilgan (Farg‘ona politexnika institutining 2024-yil 14-avgustdagi 01-2074-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, gidroenergetikada muhim ko‘rsatkichlardan biri bo‘lgan murakkab shaklli gidroturbinalarning yuzalarini kichik tugunlarga bo‘lish orqali ularning yuzalarini hisoblash, murakkab shaklli gidroturbinalarni loyihalash va optimal yuzalarni tanlash imkonini bergan;

differensiallanuvchi funksiyalar fazosida qurilgan algebraik ko‘phadlarga aniq bo‘lgan hosilali optimal kvadratur formulalardan “Avtotransport vositalarini metal qismlarini korroziyadan himoyalovchi mahalliy qoplama yaratish” mavzusidagi davlat ilmiy-texnik amaliy loyihasida avtomobillarning metal qismlari chidamliligini o‘rganishda foydalanilgan (Jizzax politexnika institutining 2024-yil 8-iyundagi 03-1200-1190-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, ushbu yangi hosilali optimal kvadratur formuladan avtomobillarning tag qismini korroziyadan himoyalovchi qoplamani mahalliy xom-ashyolardan tayyorlash texnologik jarayonida qo‘llaniladigan vollastonit gossipol polimer materiallarning xossalarini va obyektiv xususiyatlarini o‘rganishga imkon yaratgan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiya ishi natijalari 12 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan 5 ta xalqaro va 7 ta respublika miqyosidagi ilmiy-amaliy anjumanlarda muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinishi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 20 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 6 ta maqola, jumladan 2 tasi xorijiy va 4 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan, shuningdek elektron hisoblash mashinalari uchun dasturni rasmiy ro‘yxatdan o‘tkazish to‘g‘risidagi ikkita guvohnoma olingan.

Dissertatsiyaning hajmi va tuzilishi. Dissertatsiya ishi kirish, uchta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati va ilovalardan tashkil topgan. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 100 betni tashkil etadi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan,tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, muammoning o‘rganilganlik darajasi, mavzu bo‘yicha dunyo miqyosidagi ilmiy-tadqiqotlar sharhi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning “**Sobolev fazosida hosilali optimal kvadratur formulalar qurish masalasi”** deb nomlangan birinchi bobi asosan kirish xarakteriga ega bo‘lib, unda dissertatsiyada qo‘llaniladigan asosiy tushuncha va ta’riflar keltirilgan. Shuningdek, ushbu ilmiy tadqiqot mavzusi doirasida tadqiq etilgan ilmiy izlanishlar va olingan natijalar bayon qilingan.

Bu bobning birinchi paragrafida Sobolev fazolari, funksionallar fazosi, chiziqli uzluksiz funksionalning normasi, umumlashgan funksiya va uning hosilasi haqida ma’lumotlar berilgan. Xususan, biz ish olib boradigan $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosi va undagi skalyar ko‘paytma va norma tushunchalari keltirilgan.

Biz quyidagi fazoni qaraymiz

$$L_2^{(m)}(0,1):=\{u:[0,1]\to\mathbb{R}\,|\,u^{(m-1)}\text{ abs. uzl. va } u^{(m)}\in L_2(0,1)\}$$

bu haqiqiy qiymatli funksiyalarning Sobolev fazosi bo‘lib, elementlari $m-1$ chi tartibli hosilasi va m chi tartibli umumlashgan hosilalari yig‘indisining absolyut qiymati kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalardir. Ushbu fazoda ikkita u va v funksiyalarning skalyar ko‘paytmasi quyidagicha aniqlangan

$$\langle u,v\rangle_{L_2^{(m)}(0,1)}=\int_0^1 u^{(m)}(x)\cdot v^{(m)}(x)dx, \tag{1}$$

(1)-skalyar ko‘paytma bilan birgalikda $L_2^{(m)}(0,1)$ fazo Gilbert fazosini tashkil etadi. (1)-skalyar ko‘paytmaga mos biror u funksiyaning normasi quyidagicha kiritiladi

$$\|u\|_{L_2^{(m)}}=\langle u,u\rangle_{L_2^{(m)}}^{1/2}. \tag{2}$$

Ushbu $L_2^{(m)}(0,1)$ fazoning har bir elementi bu – biri ikkinchisidan $(m-1)$ darajaligacha bo‘lgan ko‘phadlarning chiziqli kombinatsiyasi bilan farq qiluvchi funksiyalar sinfidir, ya’ni $L_2^{(m)}(0,1)$ fazo faktor fazodir.

Birinchi bobning ikkinchi paragrafida Sobolev fazosida aniqlangan funksiyalarning aniq integrallarini sonli hisoblash usullari va hosilali optimal kvadratur formulalar qurishda olingan ba’zi natijalar keltirilgan. Aniq integrallarni sonli hisoblash klassik, ehtimolli-statistik va funksional yondashuvlarga asoslangan. Klassik ma’noda kvadratur formulalar qurishda formulaning koeffitsiyentlari va tugun nuqtalari berilgan W funksiyalar to‘plamining barcha elementlarini aniq integrallaydi degan shart bilan quriladi. Ehtimolli-statistik yo‘nalishida qurilgan formulalar Monte-Karlo usuliga asoslanadi. Aniq integrallarni taqribiy hisoblashda funksional yondashuv funksional analiz nazariyasiga asoslangan bo‘lib, aniq integral va kvadratur yig‘indi B Banax fazosida aniqlangan chiziqli, uzluksiz funksional sifatida qaraladi.

Birinchi bobning uchinchi paragrafida ushbu dissertatsiya ishda muhim bo‘lgan ta’riflar, Bernulli sonlari hamda ularning xossalari keltirilgan.

1-ta’rif. β o‘zgaruvchining faqat butun qiymatlarida aniqlangan $u(h\beta)$ funksiya diskret argumentli funksiya deyiladi.

2-ta’rif. $u(h\beta)$ va $v(h\beta)$ diskret argumentli funksiyalarning skalyar ko‘paytmasi quyidagicha aniqlanadi

$$[u,v]=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}u(h\beta)\cdot v(h\beta)$$

agar tenglikning o‘ng tomonidagi cheksiz yig‘indi yaqinlashuvchi bo‘lsa.

3-ta’rif. Ikkita $u(h\beta)$ va $v(h\beta)$ diskret argumentli funksiyalarning $u(h\beta)*v(h\beta)$ o‘rama amali skalyar ko‘paytma orqali quyidagicha aniqlanadi

$$u(h\beta)*v(h\beta)=\left[u(h\beta),v(h\beta-h\gamma)\right]=\sum_{\gamma=-\infty}^{\infty}u(h\beta)\cdot v(h\beta-h\gamma).$$

Quyidagi tenglikda

$$\frac{z}{e^z-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}z^n,\quad |z|<2\pi,$$

B_n - Bernulli soni bo‘lib, ular

$$z=(e^z-1)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_nz^n}{n!}=\left(z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+...\right)\left(B_0+\frac{B_1z}{1!}+\frac{B_2z^2}{2!}+\frac{B_3z^3}{3!}+\frac{B_4z^4}{4!}+...\right),$$

$$z=B_0z+\left(\frac{B_0}{2!}+\frac{B_1}{1!}\right)z^2+\left(\frac{B_0}{3!}+\frac{B_1}{2!}+\frac{B_2}{2!}\right)z^3+\left(\frac{B_0}{4!}+\frac{B_1}{3!}+\frac{B_2}{2!2!}+\frac{B_3}{3!}\right)z^4+...\ .$$

tenglikdan z ning mos darajalarini tenglash natijasida topiladi. B_1 elementidan boshqa qolgan barcha toq nomerdagi sonlari nolga teng, ya’ni

$$B_{2k+1}=0,\ k=1,2,\ldots.$$

Birinchi bobning to‘rtinchi paragrafida B - Banax fazosida optimal kvadratur formulalar qurish masalasi keltirib o‘tilgan.

Bizga [0,1] da aniqlangan uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalarning biror B Banax fazosi berilgan bo‘lsin.

Butun B sinfda

$$\int_0^1 u(x)dx\cong\sum_{\beta=0}^{N}d[\beta]u(h\beta) \tag{3}$$

kvadratur formulaning xatoligi deb

$$R[I]=\left|\int_0^1 u(x)dx-\sum_{\beta=0}^{N}d[\beta]u(h\beta)\right| \tag{4}$$

tenglikka aytiladi. Bu xatolikning aniq quyi chegarasi berilgan funksiyalar fazosida kvadratur formula xatoligining optimal bahosi deyiladi. Bu yerda $u\in H,\ d[\beta]$-

kvadratur formulaning koeffitsiyentlari, $h\beta$ - tugun nuqtalari. (3) kvadratur formulaga quyidagi chiziqli, uzluksiz xatolik funksionali mos keladi

$$\ell(x)=\varepsilon_{[0,1]}(x)-\sum_{\beta=0}^{N}d\left[\beta\right]\delta(x-h\beta). \tag{5}$$

Bu funksional B Banax fazosiga qo‘shma $B*$ fazoga tegishlidir. (3) kvadratur formulaning xatoligi funksionalning normasi ta’rifidan quyidagicha baholanadi

$$\left\|\ell|B*\right\|=\sup_{\|u|B\|=1}\left|\ell,u\right|. \tag{6}$$

Binobarin, berilgan fazoda (3) kvadratur formulaning xatoligini baholash, qo‘shma fazoda aniqlangan (5) funksionalning normasini topishga keltiriladi. Xatolik funksionali $d\left[\beta\right]$ koeffitsiyentlarga va $h\beta$ tugun nuqtalarga bog‘liq bo‘lib quyidagi munosabatni qanoatlantiradigan koeffitsiyentlar *optimal koeffitsiyentlar* deyiladi

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}|B*\right\|:=\inf_{\overset{\circ}{d}[\beta]}\left\|\ell|B*\right\|. \tag{7}$$

Topilgan $\overset{\circ}{d}\left[\beta\right]$ koeffitsiyentlarga mos (3) kvadratur formula optimal kvadratur formula deyiladi. Shunday qilib biz, optimal kvadratur formula qurishimiz uchun quyidagi masalalarni ketma-ket yechishimiz kerak:

Masala A. (5) xatolik funksionali normasining umumiy ko‘rinishini aniqlash.

Masala B. (5) xatolik funksionali normasiga minimum qiymat beruvchi $\overset{\circ}{d}\left[\beta\right]$ koeffitsiyentlarni topish.

Dissertatsiyaning **“Xatolik funksionali normasiga minimum qiymat beruvchi optimal koeffitsiyentlar uchun analitik ifodalar”** deb nomlangan ikkinchi bobi $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida $m\geq 3$ bo‘lgan holda hosilali optimal kvadratur formulalarning koeffitsiyentlarini topishga bag‘ishlanadi.

Ushbu bobning birinchi paragrafida $L_2^{(m)}(0,1)$ fazoda aniq integrallarni sonli hisoblash uchun hosilali optimal kvadratur formulalar qurish algoritmi berilgan.

Biz quyidagi ko‘rinishdagi kvadratur formulani qaraymiz

$$\int_0^1\varphi(x)dx\cong\sum_{\beta=0}^{N}C_0\left[\beta\right]\varphi(h\beta)+\frac{h^2}{12}(\varphi'(0)-\varphi'(1))+\sum_{\beta=0}^{N}C_1\left[\beta\right]\varphi''(h\beta) \tag{8}$$

ushbu ayirmaga (8) kvadratur formulaning xatoligi deyiladi

$$\left(\ell_N,\varphi\right)=\int_0^1\varphi(x)dx-\sum_{\beta=0}^{N}C_0\left[\beta\right]\varphi(h\beta)-\frac{h^2}{12}(\varphi'(0)-\varphi'(1))-\sum_{\beta=0}^{N}C_1\left[\beta\right]\varphi''(h\beta)$$

bunga mos xatolik funksionali esa

$$\begin{aligned}\ell_N(x)=\varepsilon_{[0,1]}(x)-\sum_{\beta=0}^{N}C_0\left[\beta\right]\delta(x-h\beta)+\frac{h^2}{12}(\delta'(x)-\delta'(x-1))-\\-\sum_{\beta=0}^{N}C_1\left[\beta\right]\delta''(x-h\beta),\end{aligned} \tag{9}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu yerda $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ - [0,1] kesmaning xarakteristik funksiyasi, $\delta(x)$ - Dirakning delta funksiyasi, $C_0[\beta]$ $(\beta=\overline{0,N})$ ma’lum koeffitsiyentlar va $C_1[\beta]$, $(\beta=\overline{0,N})$ lar (8) formulaning noma’lum koeffitsiyentlari, $h=\dfrac{1}{N}$, $N\in\mathbb{N}$.

(8) hosilali kvadratur formulaga mos $\ell_N(x)$ xatolik funksionali $L_2^{(m)*}(0,1)$ qo‘shma fazoda aniqlangan chiziqli, uzluksiz funksionaldir.

Funksional normasining ta’rifiga ko‘ra

$$\left\|\ell_N \mid L_2^{(m)*}\right\| = \sup_{\left\|\varphi|L_2^{(m)}\right\|\neq 0}\frac{|(\ell_N,\varphi)|}{\left\|\varphi \mid L_2^{(m)}\right\|}.$$

Supremum ta’rifidan foydalanib, Koshi-Shvarts tengsizligini olamiz

$$|(\ell_N,\varphi|\leq\|\varphi\mid L_2^{(m)}\|\cdot\|\ell_N\mid L_2^{(m)*}\|.$$

Bu tengsizlikdan ko‘rinib turibdiki (8) hosilali kvadratur formulaning xatoligi, yuqoridan $L_2^{(m)*}(0,1)$ qo‘shma fazodan olingan $\ell_N(x)$ xatolik funksionalining normasi va $L_2^{(m)}(0,1)$ fazodan olingan $\varphi(x)$ funksiyaning normasi ko‘paytmalari orqali baholanadi. Shunday qilib, (8) hosilali kvadratur formulaning $L_2^{(m)}(0,1)$ fazo elementlari bo‘yicha xatoligini baholash $L_2^{(m)*}(0,1)$ qo‘shma fazodagi $\ell_N(x)$ xatolik funksionali normasi bilan bog‘liq bo‘ladi. $\ell_N(x)$ xatolik funksionali normasi (8) kvadratur formulaning koeffitsiyentlari va tugun nuqtalariga bog‘liq bo‘ladi. Optimal kvadratur formulalarni qurishning bir nechta usullari mavjud: splayn usuli, $\varphi-$ funksiyalar usuli va chiziqli differensial operatorning diskret analogiga asoslangan Sobolev usuli. Ushbu ishda $L_2^{(m)}(0,1)$ fazoda d^{2m}/dx^{2m} differensial operatorning diskret analogiga asoslangan Sobolev usuldan foydalanib hosilali optimal kvadratur formulalar qurilgan. $\ell_N(x)$ xatolik funksionali $L_2^{(m)*}(0,1)$ fazoda aniqlanganligi uchun u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi

$$(\ell_N,x^{\alpha})=0,\quad \alpha=0,1,2,...,m-1. \tag{10}$$

Yuqorida Koshi-Shvarts tengsizligi bilan ta’kidlanganidek, (8) kvadratur formulaning xatoligi (9) xatolik funksionalining normasi bilan baholanadi. Bundan tashqari, xatolik funksionalining normasi tugun nuqtalar va $C_1[\beta]$, $\beta=\overline{0,N}$ koeffitsiyentlarga bog‘liq bo‘lib, biz xatolik funksionali normasini tugun nuqtalar fiksirlanganda faqat $C_1[\beta]$, $\beta=\overline{0,N}$ koeffitsiyentlar orqali minimumini topamiz

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}_N\left|L_2^{(m)*}(0,1)\right.\right\|:=\inf_{\overset{\circ}{C}_1[\beta]}\left\|\ell_N\left|L_2^{(m)*}(0,1)\right.\right\|. \tag{11}$$

Shunday qilib, (8) ko‘rinishidagi hosilali optimal kvadratur formula qurish uchun biz quyidagi masalalarni yechishimiz kerak.

1-masala. $L_2^{(m)*}(0,1)$ fazoda (8) ko‘rinishdagi hosilali kvadratur formulaning (4) xatolik funksionali normasining umumiy ko‘rinishini aniqlash.

2-masala. (11) munosabatni qanoatlantiruvchi $\overset{\circ}{C}_1[\beta]$ koeffitsiyentlarni topish.

3-masala. (8)-optimal kvadratur formulaning $\overset{\circ}{\ell}_N$ xatolik funksionali normasini hisoblash.

Matematik-fizika masalalari asosan differensial tenglamalarni sonli yechish yoki aniq integrallarni taqribiy hisoblashga keltiriladi. Agar masalada berilgan funksiyaning tugun nuqtalardagi birinchi hamda ikkinchi tartibli hosilalarining qiymatlari berilgan bo‘lsa (8) ko‘rinishdagi hosilali optimal kvadratur formulalardan foydalanish yaxshi natija beradi.

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida 1-masalani yechish bilan shug‘ullanamiz. Bunig uchun ℓ_N xatolik funksionalining ekstremal funksiyasidan foydalanamiz.

Koshi-Shvarts tengsizligini tenglikka aylantiruvchi, ya’ni quyidagi tenglikni qanoatlantiruvchi ℓ_N xatolik funksionaliga mos ψ_ℓ funksiyaga *ekstremal funksiya* deyiladi

$$(\ell_N, \psi_\ell) = \| \ell_N \|_{L_2^{(m)*}} \cdot \| \psi_\ell \|_{L_2^{(m)}} .$$

Ekstremal funksiya uchun quyidagi tasdiq o‘rinli.

Chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko‘rinishi haqidagi Riss teoremasidan foydalanib, quyidagi differensial tenglamani olamiz

$$\psi_\ell^{(2m)}(x) = \left(-1\right)^m \ell_N(x) \tag{12}$$

Teorema 1. (12)-tenglamaning umumlashgan yechimi ℓ_N xatolik funksionaliga mos ψ_ℓ ekstremal funksiya bo‘lib, u quyidagicha ifodalanadi

$$\psi_\ell(x) = \left(-1\right)^m \ell_N(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x)$$

bu yerda $G_m(x) = \dfrac{|x|^{2m-1}}{2(2m-1)!}$, $P_{m-1}(x)$ - $m-1$ chi darajali ko‘phad.

Ekstremal funksiya va Riss teoremasidan foydalanib, (8) hosilali kvadratur formulaning xatolik funksionali normasining analitik ko‘rinishi topilgan.

Teorema 2. Ushbu $L_2^{(m)*}(0,1)$ qo‘shma fazoda $m \geq 3$ uchun ℓ_N xatolik funksionali normasi kvadratining analitik ko‘rinishi quyidagicha aniqlanadi

$$\begin{aligned}
\left\| \ell_N \middle| L_2^{(m)*} \right\|^2 = (-1)^m \Bigg[& \sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta] \sum_{\gamma=0}^{N} C_1[\gamma] \frac{|h\beta - h\gamma|^{2m-5}}{2(2m-5)!} - 2\sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta] \int_0^1 \frac{|x-h\beta|^{2m-3}}{2(2m-3)!} dx - \\
& - \frac{h^2}{6} \sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta] \left[\frac{h\beta^{2m-4} + (1-h\beta)^{2m-4}}{2(2m-4)!} \right] + 2\sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta] \sum_{\gamma=0}^{N} C_1[\gamma] \frac{|h\beta - h\gamma|^{2m-3}}{2(2m-3)!} - \\
& - \frac{h^2}{6} \sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta] \left[\frac{h\beta^{2m-2} + \left(1-h\beta\right)^{2m-2}}{2(2m-2)!} \right] - 2\sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta] \int_0^1 \frac{|x-h\beta|^{2m-1}}{2(2m-1)!} dx + \\
& + \sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta] \sum_{\gamma=0}^{N} C_0[\gamma] \frac{|h\beta - h\gamma|^{2m-1}}{2(2m-1)!} + \frac{h^2}{6(2m-1)!} + \frac{1}{(2m+1)!} + \frac{h^4}{144(2m-3)!} \Bigg].
\end{aligned} \tag{13}$$

Shunday qilib, 1 - masala yechildi.

Ikkinchi bobning uchinchi paragrafida ℓ_N xatolik funksionalining normasiga minimum qiymat beruvchi, (8)-kvadratur formulaning $\overset{\circ}{C}_1[\beta]$ optimal koeffisiyentlarini topish uchun quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini olamiz.

$$\sum_{\gamma=0}^{N} C_1[\gamma]\frac{|h\beta-h\gamma|^{2m-5}}{2(2m-5)!}+P_{m-3}(h\beta)=f_m(h\beta),\qquad \beta=\overline{0,N},\tag{14}$$

$$\sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta](h\beta)^{\alpha}=-\sum_{j=1}^{\alpha}\frac{\alpha!B_{\alpha+3-j}h^{\alpha+3-j}}{j!(\alpha+3-j)!},\qquad \alpha=\overline{0,m-3}.\tag{15}$$

bu yerda

$$f_m(h\beta)=\sum_{i=0}^{2m-5}\frac{(h\beta)^{2m-5-i}}{(2m-5-i)!}\left[-\frac{B_{i+3}h^{i+3}}{(i+3)!}+\sum_{j=1}^{i}\frac{(-1)^i B_{i+3-j}h^{i+3-j}}{2j!(i+3-j)!}\right]+\frac{B_{2m-2}h^{2m-2}}{(2m-2)!}$$

Ta'kidlash kerakki, (14)-(15) tenglamalar sistemasi diskret Vinner-Xopf tipidagi tenglamalar sistemasi bo‘lib, bu turdagi sistemalarning yechimi mavjud va yagonaligi va bu yechim $\|\ell_N\|$ normaga mininimum berishi S.L. Sobolev va X.M. Shadimetovlar tomonidan isbotlangan.

Ikkinchi bobning to‘rtinchi paragrafida (8) ko‘rinishdagi hosilali optimal kvadratur formulaning $L_2^{(m)}(0,1)$ fazoda $m=3$ uchun koeffitsiyentlarini topamiz.

Teorema 3. $L_2^{(3)}(0,1)$ fazoda (8)-ko‘rinishidagi hosilali optimal kvadratur formulaning koeffisiyentlari quyidagicha bo‘ladi

$$C_1[\beta]=0,\quad \beta=\overline{0,N}.\tag{16}$$

Sobolevning $L_2^{(3)}(0,1)$ fazosida qurilgan (8) ko‘rinishdagi hosilali optimal kvadratur formuladan Eyler-Makloren formulasi kelib chiqishini xulosa qilish mumkin.

Ushbu bobning beshinchi paragrafida $L_2^{(m)}(0,1)$ fazoda $m\geq 4$ bo‘lganda hosilali optimal kvadratur formula koeffitsiyentlarining analitik ko‘rinishi topilgan.

Buning uchun quyidagi teorema o‘rinli.

Teorema 4. Haqiqiy qiymatli funksiyalarning $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida (8) ko‘rinishidagi hosilali kvadratur formulalar orasida, koeffisiyentlari quyidagi ko‘rinishda bo‘lgan yagona optimal kvadratur formula mavjud

$$C_1[\beta]=h^3\sum_{k=1}^{m-3}a_k\frac{q_k^N-q_k}{1-q_k},\qquad \beta=0,N,$$

$$C_1[\beta]=h^3\sum_{k=1}^{m-3}a_k\left(q_k^{\beta}+q_k^{N-\beta}\right),\qquad \beta=\overline{1,N-1},$$

a_k quyidagi tenglamalar sistemasining yechimi

$$\sum_{k=1}^{m-3}a_k\sum_{i=0}^{\alpha}\frac{(q_k^{N+i}+(-1)^{i+1}q_k)}{(1-q_k)^{i+1}}\Delta^i 0^{\alpha}=\frac{B_{\alpha+3}}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)},\qquad \alpha=\overline{1,m-3}.$$

bu yerda B_α Bernulli sonlari, q_k Euler-Frobenius $(2m-6)$- darajali ko‘phadining ildizi, $|q_k|<1$.

Teorema 4 dan quyidagi natija kelib chiqadi:

Natija 1. Sobolevning $L_2^{(4)}(0,1)$ fazosida (8) ko‘rinishdagi hosilali optimal kvadratur formulaning koeffitsiyentlari quyidagicha bo‘ladi

$$C_1[\beta] = ah^3 \frac{(q - q^N)}{q-1}, \qquad \beta = 0, N,$$

$$C_1[\beta] = ah^3 \left(q^\beta + q^{N-\beta}\right), \qquad \beta = \overline{1, N-1},$$

bu yerda $a = \dfrac{1}{120(1+q^N)}$, $q = \sqrt{3} - 2$.

Teorema 5. Vinner-Xopf tipidagi (14)-(15) diskret tenglamalar sistemasidagi noma’lum bo‘lgan ko‘phad quyidagi ko‘rinishda aniqlanadi

$$P_{m-3}(h\beta) = \sum_{i=m-2}^{2m-5} \frac{(h\beta)^{2m-5-i}}{(2m-5-i)!} \left[\frac{h^{i+3}}{i!} \sum_{k=1}^{m-3} \sum_{\alpha=1}^{i} \frac{a_k q_k + b_k q_k^{N+\alpha}(-1)^{\alpha+1}}{(q_k - 1)^{\alpha+1}} \Delta^\alpha 0^i + \right.$$

$$\left. + \frac{(-1)^i}{2i!} \sum_{\gamma=0}^{N} C_1[\gamma](h\gamma)^i - \frac{B_{i+3} h^{i+3}}{(i+3)!} + \sum_{j=1}^{i} \frac{(-1)^i B_{i+3-j}}{2\,j!(i+3-j)!} \right] + \frac{B_{2m-2} h^{2m-2}}{(2m-2)!}.$$

Biz keyinchalik bu ko‘phadning ko‘rinishidan xatolik funksionali normasini hisoblashda foydalanamiz.

Shunday qilib, 2-masala to‘liq yechildi.

Dissertatsiyaning **“$L_2^{(m)}(0,1)$ fazoda hosilali optimal kvadratur formulalar yaqinlashish tartibini baholash”** deb nomlanuvchi uchinchi bobida (8) ko‘rinishdagi hosilali optimal kvadratur formulaning xatolik funksionali normasini hisoblash bilan shug‘ullanamiz.

Uchinchi bobning birinchi paragrafida $L_2^{(3)}(0,1)$ fazoda (8) hosilali optimal kvadratur formulaning yaqinlashish tartibi o‘rganilgan.

Teorema 6. $L_2^{(3)}(0,1)$ fazoda (8) ko‘rinishdagi hosilali kvadratur formulaga mos ℓ_N xatolik funsionali normasining kvadrati quyidagiga teng

$$\left\| \ell_N \middle| L_2^{(3)*}(0,1) \right\|^2 = \frac{h^6}{30240}.$$

Teorema 6 dan $L_2^{(3)}(0,1)$ fazoda qurilgan hosilali kvadratur formulaning xatoligi Eyler-Makloren formulasining xatoligiga teng ekanligini ko‘rish mumkin.

Uchinchi bobning ikkinchi paragrafida $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida $m \geq 4$ bo‘lgan xolda algebraik ko‘phadlarga aniq bo‘lgan hosilali optimal kvadratur formulalar xatoligining yuqori bahosi hisoblangan.

Uchinchi bobning asosiy natijasini isbotlash uchun quydagi tasdiqlar o‘rinli.

Tasdiq 1. Kvadratur formulaning qadami h va Bernulli sonlari uchun quyidagi tenglik o‘rinli

$$\sum_{i=0}^{m-3} \frac{(-1)^{2m-5-i}}{(2m-5-i)!} \sum_{j=1}^{i} \frac{B_{i+3-j} h^{i+3-j}}{j!(i+3-j)!} \left[h^{2m-2-i} Z_{2m-5-i} + \sum_{p=1}^{2m-6-i} \frac{(2m-5-i)! h^{p+3} Z_p}{p!(2m-5-i-p)!} \right] =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m-3} h^{i+6} \sum_{p=1}^{i} \sum_{j=p}^{m-3} \frac{(-1)^j B_{p+2} Z_{i+1-p}}{(j+1-p)!(p+2)!(i+1-p)!(2m-6-j-i+p)!} -$$

$$-\sum_{i=1}^{m-3} h^{i+m+3}\left[\sum_{p=i}^{m-3}\sum_{j=p}^{m-3}\frac{(-1)^{m-p}B_{m-j}Z_{i+j}}{(j+1-p)!(m-j)!(i+j)!(m-3-j-i+p)!}+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{i-1}\sum_{j=p}^{m-3-i+p}\frac{(-1)^{m-p}B_{m-j}Z_{j+i}}{(j+1-p)!(m-j)!(j+i)!(m-3-j-i+p)!}\right]$$

bu yerda $Z_p=\sum_{k=1}^{m-3}\sum_{t=0}^{p}\frac{a_k q_k^{N+t}+b_k q_k(-1)^{t+1}}{(1-q_k)^{t+1}}\Delta^t 0^p,\quad p=\overline{0,2m-5}.$

Tasdiq 2. Bernulli sonlari uchun quyidagi tengliklar o‘rinli

$$\sum_{j=0}^{m-3}\sum_{p=1}^{j}\frac{B_{j+3-p}h^{j+3-p}}{p!(j+3-p)!}\sum_{i=1}^{2m-5-j}\frac{(-1)^{2m-5-j}B_{2m-2-j-i}h^{2m-2-j-i}}{2i!(2m-2-j-i)!}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{p=m+3}^{2m-1}h^p\sum_{j=1}^{2m-p}\sum_{i=1}^{m-2-j}\frac{(-1)^{i+j}B_{i+2}B_{p-2-i}}{j!(i+2)!(p-2-i)!(2m+1-p-j)!}+\right.$$

$$+\sum_{p=6}^{m+2}h^p\left[\sum_{j=1}^{m+2-p}\sum_{i=1}^{p-5}\frac{(-1)^{i+j}B_{i+2}B_{p-2-i}}{j!(i+2)!(p-2-i)!(2m+1-p-j)!}+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=1}^{p-5}\sum_{i=1}^{p-4-j}\frac{(-1)^{i+j+m-p+2}B_{i+2}B_{p-2-i}}{(j+m+2-p)!(i+2)!(p-2-i)!(m-j-1)!}\right]\right\}$$

Teorema 7. $L_2^{(m)}(0,1)$ fazoda $m\geq 4$ uchun (8) ko‘rinishdagi hosilali optimal kvavdratur formulaga mos (9) xatolik funksionali normasining kvadrati quyidagiga teng

$$\left\|\ell_N\left|L_2^{(m)*}(0,1)\right\|^2=(-1)^{m+1}\left[\frac{h^{2m}B_{2m}}{(2m)!}+h^{2m+1}\sum_{i=0}^{m-3}\sum_{k=1}^{m-3}\sum_{t=0}^{2m-5-i}\frac{B_{i+3}\theta_t(q_k)\Delta^t 0^{2m-5-i}}{(2m-5-i)!(i+3)!}\right],\right.$$

bu yerda

$$\theta_t(q_k)=\frac{a_k(q_k^N-1)(q_k^t+(-1)^t q_k)}{(1-q_k)^{t+1}},$$

B_l - Bernulli sonlari, a_k - Teorema 4 da berilgan, q_k $2m-6$ darajali $E_{2m-6}(q)$ Eyler ko‘phadining ildizi, $|q_k|<1$.

Teorema 7 dan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija 2. $L_2^{(4)}(0,1)$ fazoda (8) ko‘rinishdagi hosilali optimal kvavdratur formulaga mos (9) xatolik funksionali normasining kvadrati quyidagiga teng

$$\left\|\ell_N\left|L_2^{(4)*}(0,1)\right\|^2=\frac{h^8}{1209600}+\frac{h^9(2+q)(1-q^N)}{1555200(1+q^N)}\right.$$

bu yerda $q=\sqrt{3}-2$.

Uchinchi bobning uchinchi paragrafida olingan analitik natijalarni ba’zi murakkab funksiyalar yordamida sonli tahlil qilingan. Shu bilan birga, hosilali optimal kvadratur formula yordamida Fredgolmning ikkinchi tur integral tenglamasini sonli yechish qaralgan. Integral tenglamalarni hosilali optimal kvadratur formulalar yordamida yechishdagi xatolik Simpson formulasining xatoligidan kichik ekanligi ko’rsatilgan.

XULOSA

Dissertatsiya ishida haqiqiy qiymatli, differensiallanuvchi funksiyalarning $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida funksiyaning tugun nuqtalardagi birinchi hamda ikkinchi tartibli hosilalarining qiymatlaridan foydalanib, $m-1$ chi darajali algebraik ko‘phadlarga aniq bo‘lgan hosilali optimal kvadratur formulalar qurilgan.

Tadqiqot ishining asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1. $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida algebraik ko‘phadlarga aniq bo‘lgan hosilali kvadratur formulalar xatolik funksionali normasining ko‘rinishini topilgan.
2. $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida hosilali optimal kvadratur formulaning koeffitsiyentlari uchun Vinner-Xopf tipidagi tenglamalar sistemasini olingan.
3. $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida $m=3$ bo‘lganda hosilali optimal kvadratur formulaning koeffitsiyentlari topilgan.
4. $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida $m\geq 4$ uchun hosilali optimal kvadratur formulalar koeffitsiyentlarining analitik ko‘rinishi olingan.
5. $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida $m=3$ bo‘lganda hosilali optimal kvadratur formulaning xatolik funksionali normasi hisoblangan.
6. $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev fazosida $m\geq 4$ uchun hosilali optimal kvadratur formulaning xatolik funksionali normasi hisoblangan.
7. $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida qurilgan hosilali optimal kvadratur formulalar yordamida integral tenglamalar sonli yechilgan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

КУЗИЕВ ШАХОБИДДИН СОБИРОВИЧ

ПРОИЗВОДНЫЕ ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ СОБОЛЕВА

01.01.03 – Вычислительная и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ – 2025

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за № B2024.1.PhD/FM1014.

Диссертация выполнена в институте математики имени В.И.Романовского АНРУз.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный руководитель:	**Нуралиев Фарход Абдуганиевич** доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Худойберганов Мирзоали Уразалиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Утеулиев Ниетбай Утеулиевич доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Самаркандский государственный университет**

Защита диссертации состоится «____» ________ 2025 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2025 года.
(протокол рассылки №_________ от «____» ________________2025 года).

М.М. Арипов
Председатель Научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

З.Р. Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н.

Р.Д. Алоев
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению научных степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В результате многочисленных научно-практических исследований, проводимых в мировом масштабе, численное решение дифференциальных и интегральных уравнений в задачах физики солнца, моделирования синтезированных голограмм, механики жидкостей и газов с высокой точностью приводит к построению оптимальных квадратурных формул с производными. Обычно при решении таких задач использование простых интерполяционных квадратурных формул требует большого объема вычислительной работы. Поэтому одной из важнейших задач вычислительной математики считается разработка способов создания оптимальных алгоритмов численного решения, позволяющих с достаточной точностью вычислять решения типичных задач математики и использовать для этой цели современные вычислительные средства, а также построение оптимальных квадратурных формул с производными в определенных Гильбертовых и банаховых пространствах и оценка их погрешностей.

В настоящее время в мире методы построения производных оптимальных квадратурных и кубатурных формул с точностью до производной второго порядка в узлах и оценки их погрешностей широко исследуются. При нахождении численно-аналитических решений дифференциальных и интегральных уравнений образующихся при математическом моделировании природных процессов, при приближенном решении интегралов связанных с механическими или физическими процессами, выраженными с помощью первых и вторых производных функции в узлах, при расчете оптимальных поверхностей в области гидроэнергетики широко используются оптимальные квадратурные формулы. В связи с этим целенаправленными научными исследованиями являются построение производных оптимальных квадратурных формул в пространствах Гильберта и Банаха дифференцируемых функций и создание комплекса программ с удобным интерфейсом, предназначенным для широкого круга пользователей.

В частности, большое внимание уделялось теории численного интегрирования вычислительной математики, с использованием значений функций в пространствах Соболева до второй производной в узлах, были достигнуты значительные результаты по построению производных оптимальных квадратурных формул. и их оценка погрешности. Проведение научных исследований мирового уровня по таким приоритетным направлениям «функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, математическое моделирование, вычислительная математика и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика» [2] является одной из основных задач фундаментальных исследований деятельности многих исследовательских институтов и вузов

[2] Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП–4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 07 мая 2020 года.

республики. Важно совершенствовать методы построения производных квадратурных формул и оценки их погрешностей для обеспечения реализации решения.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан УП –№ 4947 от 07 февраля 2017 года “О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан”, УП-№60 от 28 января 2022 года “О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы”, в постановлениях ПП – № 2789 от 17 февраля 2017 года “О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности”, ПП – № 2909 от 20 апреля 2017 года “О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования”, ПП –№ 3682 от 27 апреля 2018 года “О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов”, ПП – № 4708 от 07 мая 2020 года “О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики”, а также в других нормативно–правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. “Математика, механика и информатика”.

Степень изученности проблемы. Оптимальные квадратурные формулы с производными важны во многих практических задачах, особенно при решении задач, связанных с центром тяжести тела, моментами инерции, анализом и фильтрацией изображений и сигналов. Оптимальные квадратурные формулы с производными дают хорошие результаты при вычислении интегралов, связанных с механическими или физическими процессами, которые выражаются с использованием производных первого и второго порядка функции в узловых точках. Поэтому важно строить оптимальные квадратурные формулы с производными и оценивать их погрешности в различных пространствах. Задача построения оптимальных квадратных формул с производными состоит в том, чтобы минимизировать норму функции погрешности в данном классе функций, когда узловые точки фиксированы. Оптимальные квадратурные формулы с производными строятся с помощью сплайнов, ϕ – функций и методов Соболева.

И.Шенберг доказал оптимальность классической формулы Эйлера-Макларена в пространстве $L_2^{(m)}(0,n)$ методом сплайнов. С.А.Мишелли показал, что формула Эйлера-Макларена является лучшей формулой, когда $m-$ нечетны в пространстве $W_2^{(m)}$.

Т. Катинас, Г. Коман построили оптимальные квадратурные формулы методом ϕ -функций. Т.В.Божанов, П.Петров построили квадратурную формулу типа Гаусса, которая является точной для всех алгебраических многочленов степени $2n-1$. В.И.Данченко, Л.А.Семин в своих работах построили квадратурные формулы с производными для вычисления интегралов комплексных рациональных функций с использованием нулей многочлена Чебышева-Маркова и использовали их для вычисления норм L_2 рациональных функций. Е.Ф.Уильям, Ю. Сюй, Ю. Чжао использовали квадратурные формулы с производными для приближенного вычисления сингулярных интегралов, а также дал эффективный алгоритм для вычисления производных дзета-функции Римана. М.Канагава, К.Б.Шриперумбудур, К.Фукумидзу изучали скорость сходимости квадратурной формулы Байеса в пространствах Соболева. В работах М.Б.Кларича, Дж.Пекари, Р.П.Михаэла, А.Вукелис были рассмотрены некоторые новые неравенства типа Гаусса с использованием квадратурных формул с производными трехточечного Эрмитова типа, и оценены погрешность квадратурной формулы, используя формулу Эйлер-Симпсона. А.И.Задорин построил производную формулу, точную до полинома третьей степени, используя производную функции в пространстве $C^3[a,b]$. Ш.Чжан, Э.Новак дал оптимальный алгоритм приближенного вычисления произвольно весовых интегралов в равноудаленных узловых точках в пространстве Соболева $H_0^{(1)}[0,1]$ и получил важные результаты при вычислении коэффициентов Фурье периодических функций. М.Ш.Мухаммед, С.Ч.Мухаммед, В.Ш.Абдул предложил некоторые новые квадратурные формулы с использованием производных функций, которые оказались эффективными с точки зрения времени и вычислений. Научные новизны в построении производных оптимальных квадратурных формул и их применении для решения практических задач изложены в научных трудах таких ученых, как И.Ареа, К.D.Димитров, D.Эдуардо, Г.В.Пасхоа, Х.Айман, С.Рания, Х.Раэd, В.Мохаммед, К.Ахмад, А.Эль-Аджу, О.А.Аргуб, В.Аль-Смади, К.Фэн, Г. Бай-Ни, П.Ирина, Р.Там, Ф.Петр, В.Кайлианг, Ш.Йонгжонг Х.Донгбин, Т.К.Братислава, Н.П.Зилина, М.М.Спалевич, Ю.Кинтана, А.Уриелес, М.Санда, Т.Шосток, Х.М.Шадиметов, А.Р.Хаётов, Ф.А.Нуралиев, Д.М.Ахмедов, А.К. Болтаев, С.С.Бабаев.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполнена диссертация. Диссертационное исследование выполнено в рамках календарного плана лаборатории вычислительной математики Института математики им. В.И.Романовского Академия Наук Республики Узбекистан по теме “Построение оптимальных квадратурных, интерполяционных, дифференциальных формул в Гильбертовых пространствах и их приложения к решению интегральных уравнений”.

Цель исследования. Построение оптимальных квадратных формул с производными в пространств $L_2^{(m)}(0,1)$ дифференцируемых функций Соболева заключается в вычислении соответствующей им нормы функции погрешности и применении оптимальных квадратных формул с производными при численном решении интегральных уравнений.

Задачи исследования:

нахождение представления нормы функционала погрешности в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ квадратурной формулы с производными, определенной алгебраическим многочленам;

получение системы уравнений типа Виннера-Хопфа для коэффициентов оптимальной квадратурной формулы с производными в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$;

нахождение коэффициентов производной оптимальной квадратурной формулы для $m=3$ в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ и верхней границы погрешности;

нахождение аналитического представления коэффициентов квадратурной формулы с производными для $m \geq 3$ в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$;

Вычисление нормы функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы с производной в случаях $m \geq 3$ в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$.

Объект исследования. Пространства Соболева, оптимальные квадратные формулы с производными, функционал погрешности.

Предмет исследования. Элемент Рисса, оптимальные квадратурные формулы с производными, определенные алгебраическим многочленам, линейные непрерывные функционалы, нормы функциональна погрешности оптимальной квадратурной формулы с производной, построенной в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$.

Методы исследования. В научно-исследовательской работе использованы методы вычислительной математики, функционального анализа, теории многомерных функций, обобщенных функций и теории функций с дискретными аргументами.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

найдено аналитическое представление нормы функционала погрешности для алгебраических многочленов для $m \geq 3$ оптимальной квадратурной формулы с производной в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ с действительным значением дифференцируемых функций;

для нахождения оптимальных коэффициентов с использованием метода неопределенных множителей Лагранжа была получена система линейных уравнений типа Виннера-Хопфа;

найдены коэффициенты полученной оптимальной квадратурной формулы для $m=3$ в вещественном пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ дифференцируемых функций и верхняя граница погрешности;

в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ с действительным значением дифференцируемых функций с использованием дискретного оператора найдены коэффициенты оптимальной квадратурной формулы с производной для $m \geq 3$;

в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ с действительным значением дифференцируемых функций вычислена норма функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы с производной для $m \geq 3$.

Практические результаты исследования следующее:

математические модели динамических процессов, протекающих в сложных природных системах, строятся с использованием оптимальной квадратурной формулы с производной;

для уравнений поперечного распространения волн построены численные схемы вычисления правильных и обратных задач.

Достоверность результатов исследования обоснована применением методов теории квадратных формул с производными, вычислительной математики, теории многомерных функций, математико - физических уравнений, функционального анализа, теории функций с дискретными аргументами, строгостью математических рассуждений.

Научно-практическая значимость результатов исследования. Научная значимость исследовательской работы объясняется тем, что в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ построены оптимальные квадратурные формулы с производными для приближенного вычисления определённых интегралов с достаточной точностью и оценена верхняя граница погрешности этих формул.

Практическая значимость результатов исследования производных оптимальных квадратурных формул заключается в построении математических моделей динамических процессов, протекающих в сложных природных системах с использованием методов численного приближенного вычисления определённых интегралов, решении задач прямого и обратного для уравнений поперечного распространения волн.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных новых научных результатов по построению оптимальных квадратурных формул с производными, точных к алгебраическим полиномам в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$:

оптимальные квадратурные формулы с производными дифференцируемых функций, построенные в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$ с действительным значением, были использованы в международном совместном научно-практическом проекте в рамках государственных научно-технических программ по теме “Система орошения сельскохозяйственных угодий с использованием гидротурбонасосной установки без затрат электроэнергии” при оценке решений математических моделей, представляющих процессы эффективного управления и экономии водных ресурсов электроэнергетическими оросительными системами (Ферганского политехнического института 01-2074 от 14 августа 2024 г. справочник). В результате одним из важнейших показателей в гидроэнергетике стал расчет поверхностей гидротурбин сложной формы путем деления их поверхностей на более мелкие узлы, что позволило спроектировать гидротурбины сложной формы и выбрать оптимальные поверхности;

оптимальные квадратурные формулы с производными, точные для алгебраических многочленов, построенных на пространстве дифференцируемых функций, были использованы при изучении долговечности металлических деталей автомобилей в государственном научно-техническом практическом проекте на тему “создание локального покрытия, защищающего от коррозии металлические части транспортных средств” (см. статью “Создание локального покрытия для защиты металлических частей транспортных средств от коррозии” от 8 июня 2024 г.) 03-1200-1190). В результате из этой новой производной оптимальной квадратурной формулы удалось изучить свойства и объективные свойства полимерных материалов волластонит госсипол, применяемых в технологическом процессе изготовления коррозионно-защитного покрытия днища автомобилей из отечественного сырья.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационной работы обсуждались на 12 научно-практических конференциях, в том числе 5 международных и 7 республиканских.

Публикация результатов исследования. Всего по теме диссертации опубликовано 20 научных работ, из них 6 статей в научных изданиях ВАК Республики Узбекистан, в которых рекомендовано опубликовать основные научные результаты докторских диссертаций, в том числе 2 в зарубежных и 4 в республиканских журналах, а также получены два свидетельства об официальной регистрации программы для электронных вычислительных машин.

Объем и структура диссертации. Диссертационная работа состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Общий объем диссертации составляет 100 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность и необходимость темы диссертации, указывается соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и техники республики, указывается степень изученности проблемы, приводится обзор мировых исследований по теме, описываются цель, задачи, объект и предмет исследования, излагается научная новизна и практические результаты исследования, раскрывается теоретическая и практическая значимость полученных результатов, дано внедрение результатов исследования, приводятся данные по опубликованным работам и структуре диссертации.

Первая глава диссертации под названием **“Проблема построения оптимальных квадратных формул с производными в пространстве Соболева”** носит в основном вводный характер и содержит основные понятия и определения, используемые в диссертации. В нем также изложены научные исследования и полученные результаты, которые были исследованы в рамках темы этого исследования.

Первый абзац этой главы содержит сведения о пространствах Соболева, пространстве функционалов, норме линейного непрерывного функционала, обобщенной функции и ее производной. В частности, представлено пространство Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$, над которым мы работаем, и понятия скалярного умножения и нормы в нем.

Рассмотрим следующее пространство

$$L_2^{(m)}(0,1):=\{u:[0,1]\to\mathbb{R}\,|\,u^{(m-1)} \text{ abs. uzl. va } u^{(m)}\in L_2(0,1)\}$$

это пространство Соболева действительных функций, элементы которых являются интегрируемыми функциями с произведением $m-1$ - порядка и квадратом абсолютного значения суммы обобщенных производных m - порядка. В этом пространстве скалярное произведение двух функций u и v определяется как

$$\langle u,v\rangle_{L_2^{(m)}(0,1)}=\int_0^1 u^{(m)}(x)\cdot v^{(m)}(x)dx, \tag{1}$$

вместе со скалярным произведением (1) пространство $L_2^{(m)}(0,1)$ образует гильбертово пространство. Норма функции u, соответствующая скалярному произведению (1), вводится следующим образом

$$\|u\|_{L_2^{(m)}}=\langle u,u\rangle_{L_2^{(m)}}^{1/2}. \tag{2}$$

Каждый элемент этого пространства $L_2^{(m)}(0,1)$ представляет собой класс функций, отличающихся линейной комбинацией многочленов, один из которых имеет ранг от другого $(m-1)$, то есть пространство $L_2^{(m)}(0,1)$ является факторным пространством.

Во втором параграфе первой главы представлены методы численного вычисления определённых интегралов функций, определенных в пространстве Соболева, и некоторые результаты, полученные при построении оптимальных квадратурных формул с производными. Численное вычисление определённых интегралов основано на классическом, вероятностно-статистическом и функциональном подходах. В классическом понимании квадратурные формулы строятся при условии, что при построении коэффициенты и узловые точки формулы точно интегрируют все элементы заданного множества функци W. Построенные в вероятностно-статистическом направлении формулы основаны на методе Монте-Карло. Функциональный подход к приближенному вычислению определённых интегралов основан на теории функционального анализа, где определённый интеграл и квадратурная сумма рассматриваются как линейные непрерывные функционалы, определенные в Банаховом пространстве B.

Третий параграф первой главы содержит определения, числа Бернулли, а также их свойства, которые важны в диссертационной работе.

Определение 1. Функци $u(h\beta)$, определенная только на целых значениях переменной β, называется функцией с дискретными аргументами.

Определение 2. Скалярное произведение функций с дискретными аргументами $u(h\beta)$ и $v(h\beta)$ определяется как

$$\left[u, v\right] = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} u(h\beta) \cdot v(h\beta)$$

если бесконечная сумма справа от равенства является сходящийся.

Определение 3. Операция обертывания $u(h\beta) * v(h\beta)$ двух функций $u(h\beta)$ и $v(h\beta)$ с дискретными аргументами определяется скалярным умножением следующим образом

$$u(h\beta) * v(h\beta) = \left[u(h\beta), v(h\beta - h\gamma)\right] = \sum_{\gamma=-\infty}^{\infty} u(h\beta) \cdot v(h\beta - h\gamma).$$

В следующем равенстве

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n, \quad |z| < 2\pi,$$

B_n - Числа Бернулли, которые

$$z = (e^z - 1)\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n z^n}{n!} = \left(z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + ...\right)\left(B_0 + \frac{B_1 z}{1!} + \frac{B_2 z^2}{2!} + \frac{B_3 z^3}{3!} + \frac{B_4 z^4}{4!} + ...\right),$$

$$z = B_0 z + \left(\frac{B_0}{2!} + \frac{B_1}{1!}\right) z^2 + \left(\frac{B_0}{3!} + \frac{B_1}{2!} + \frac{B_2}{2!}\right) z^3 + \left(\frac{B_0}{4!} + \frac{B_1}{3!} + \frac{B_2}{2!2!} + \frac{B_3}{3!}\right) z^4 + ...$$

из равенства найдется в результате выравнивания соответствующих степеней z. Все остальные числа в нечетном номере, кроме элемента B_1, равны нулю, то есть

$$B_{2k+1} = 0, \;\; k = 1, 2, \ldots.$$

В четвертом параграфе первой главы поставлен вопрос о построении оптимальных квадратурных формул банаховом пространстве B.

Пусть нам дано Банахово пространство B непрерывных дифференцируемых функций, определенных в [0,1].

Целом в классе B

$$\int_0^1 u(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} d[\beta] u(h\beta) \tag{3}$$

равенство

$$R[I] = \left| \int_0^1 u(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} d[\beta] u(h\beta) \right| \tag{4}$$

называется погрешностью квадратурной формулы.

Точная нижняя граница этой погрешности называется оптимальной оценкой погрешности квадратурной формулы в заданном пространстве функций. Где $u \in H$, $d[\beta]$- коэффициенты квадратичной формулы, $h\beta$ - узловые точки.

квадратурной формуле (3) соответствует следующий линейный непрерывный функционал погрешности

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} d\left[\beta\right] \delta(x - h\beta). \tag{5}$$

Этот функционал относится к пространству B^*, сопряженным Банахову пространству B. Погрешность квадратурной формулы (3) оценивается из определения нормы функционала следующим образом

$$\left\|\ell|B^*\right\| = \sup_{\|u|B\|=1} |\ell,u|. \tag{6}$$

Следовательно, оценка погрешности квадратурной формулы (3) в заданном пространстве сводится к нахождению нормы функционала (5), определенной в сопряженном пространстве. Коэффициенты, удовлетворяющие следующему соотношению в зависимости функционала погрешности от коэффициентов $d[\beta]$ и узловых точек $h\beta$, называются оптимальными коэффициентами

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}|B^*\right\| := \inf_{\overset{\circ}{d}[\beta]} \left\|\ell|B^*\right\|. \tag{7}$$

Найденная квадратурная формула (3), соответствующая коэффициентам $\overset{\circ}{d}[\beta]$, называется оптимальной квадратурной формулой. Итак, чтобы построить оптимальную квадратурную формулу, нам нужно последовательно решить следующие задачи:

Задача A. Определение общего вида нормы функционала погрешности (5).

Задача B. Найти коэффициенты $\overset{\circ}{d}[\beta]$, которые дают минимальное значение норме функционала погрешности (5).

Вторая глава диссертации, озаглавленная “**Аналитические выражения для оптимальных коэффициентов, придающих минимальное значение норме функционала погрешности**”, посвящена нахождению коэффициентов оптимальных квадратных формул с производными в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, при $m \geq 3$.

В первом параграфе этой главы дан алгоритм построения оптимальных квадратурных формул с производными для численного вычисления определенных интегралов в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

Рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta]\varphi(h\beta) + \frac{h^2}{12}(\varphi'(0)-\varphi'(1)) + \sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta]\varphi''(h\beta). \tag{8}$$

Разность

$$(\ell_N,\varphi) = \int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta]\varphi(h\beta) - \frac{h^2}{12}(\varphi'(0)-\varphi'(1)) - \sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta]\varphi''(h\beta)$$

называется ошибкой квадратурной формулы (8), а соответствующий функционал погрешности имеет вид

$$\ell_N(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_0[\beta]\delta(x-h\beta) + \frac{h^2}{12}(\delta'(x)-\delta'(x-1)) - \\ - \sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta]\delta''(x-h\beta), \tag{9}$$

где $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ - характеристическая функция отрезка [0,1], $\delta(x)$ - Дельта функция Дирака, $C_0[\beta]$ $(\beta = \overline{0,N})$ -известные коэффициенты и $C_1[\beta]$, $(\beta = \overline{0,N})$ неизвестные коэффициенты формулы (8) , $h = \dfrac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$.

Функционал погрешности $\ell_N(x)$, соответствующая квадратурной формуле с производными (8), является линейной непрерывной функцией, определенной в сопряженном пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$.

По определению нормы функционала

$$\left\| \ell_N \mid L_2^{(m)*} \right\| = \sup_{\left\| \varphi | L_2^{(m)} \right\| \neq 0} \frac{|(\ell_N, \varphi)|}{\left\| \varphi \mid L_2^{(m)} \right\|}.$$

Используя определение супремума, получим неравенство Коши-Шварца

$$|(\ell_N, \varphi| \leq \| \varphi \mid L_2^{(m)} \| \cdot \| \ell_N \mid L_2^{(m)*} \|.$$

Из этого неравенства видно, что погрешность квадратурной формулы с производными (8) оценивается через произведения нормы функционала погрешности $\ell_N(x)$, полученной из сопряженного пространства $L_2^{(m)*}(0,1)$ сверху, и нормы функционала $\varphi(x)$, полученной из пространства $L_2^{(m)}(0,1)$. Таким образом, оценка погрешности квадратурной формулы с производными (8) по элементам пространства будет связана с нормой функционала погрешности в сопряженном пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$. Норма функционала погрешности $\ell_N(x)$ будет зависеть от коэффициентов и узловых точек квадратурной формулы (8). Существует несколько методов построения оптимальных квадратурных формул: метод сплайнов, метод $\varphi-$ функций и метод Соболева, основанный на дискретном аналоге линейного дифференциального оператора. В данной работе оптимальные квадратурные формулы с производными построены методом Соболева на основе дискретного аналога дифференциального оператора d^{2m} / dx^{2m} в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$. Поскольку функционал погрешности $\ell_N(x)$ определяется в пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$, поэтому удовлетворяет следующим условиям

$$(\ell_N, x^{\alpha}) = 0, \quad \alpha = 0,1,2,...,m-1. \tag{10}$$

Как отмечалось выше неравенством Коши-Шварца, погрешность квадратурной формулы (8) оценивается нормой функционала погрешности (9). Кроме того, норма функционала погрешности зависит от узловых точек и коэффициентов $C_1[\beta],\ \beta = \overline{0,N}$, и мы находим минимум норму функционала погрешности только через коэффициенты $C_1[\beta],\ \beta = \overline{0,N}$, когда узловые точки фиксированы

$$\left\| \overset{\circ}{\ell}_N \left| L_2^{(m)*}(0,1) \right. \right\| := \inf_{\overset{\circ}{C}_1[\beta]} \left\| \ell_N \left| L_2^{(m)*}(0,1) \right. \right\|. \tag{11}$$

Итак, чтобы построить оптимальную квадратурную формулу с производной в виде (8), нам нужно решить следующие задачи.

Задача 1. Определение общего вида нормы функционала погрешности (4) квадратурной формулы с производной (8) в пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$.

Задача 2. Нахождение коэффициентов $\overset{\circ}{C}_1[\beta]$, удовлетворяющих соотношению (11).

Задача 3. Вычисление нормы функционала погрешности $\overset{\circ}{\ell}_N$ оптимальной квадратурной формулы (8).

Задачи математической физики сводятся в основном к численному решению дифференциальных уравнений или к приближенному вычислению определенных интегралов. Если в задаче заданы значения производных первого и второго порядка данной функции в узловых точках, то хороший результат дает использование оптимальных квадратурных формул с производной в виде (8).

Во втором параграфе второй главы займемся решением задачи 1. Для этого мы используем экстремальную функцию функционала погрешности ℓ_N.

Функция ψ_ℓ, соответствующая функционала погрешности ℓ_N, которая преобразует неравенство Коши-Шварца в равенство, то есть удовлетворяет следующему равенству, называется экстремальной функцией

$$(\ell_N, \psi_\ell) = \| \ell_N \|_{L_2^{(m)*}} \cdot \| \psi_\ell \|_{L_2^{(m)}} .$$

Для экстремальной функции уместно следующее утверждение.

Используя теорему Рисса об общем представлении линейного непрерывного функционала, получим следующее дифференциальное уравнение

$$\psi_\ell^{(2m)}(x) = (-1)^m \ell_N(x) \qquad (12)$$

Теорема 1. Обобщенным решением уравнения (12) является экстремальная функция ψ_ℓ, соответствующая функционалу погрешности ℓ_N, которая выражается

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \ell_N(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x)$$

где $G_m(x) = \dfrac{|x|^{2m-1}}{2(2m-1)!}$, $P_{m-1}(x)$ - многочлен степени $m-1$.

С помощью экстремальной функции и теоремы Рисса найдено аналитическое представление нормы функционала погрешности квадратурной формулы с производной (8).

Теорема 2. Аналитическое представление квадрата нормы функционала погрешности ℓ_N для $m \geq 3$, в сопряженном пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$ определяется следующим образом

$$\left\| \ell_N \middle| L_2^{(m)*} \right\|^2 = (-1)^m \left[\sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta] \sum_{\gamma=0}^{N} C_1[\gamma] \frac{|h\beta - h\gamma|^{2m-5}}{2(2m-5)!} - 2\sum_{\beta=0}^{N} C_1[\beta] \int_0^1 \frac{|x - h\beta|^{2m-3}}{2(2m-3)!} dx - \right.$$

$$-\frac{h^2}{6}\sum_{\beta=0}^{N}C_1[\beta]\left[\frac{h\beta^{2m-4}+(1-h\beta)^{2m-4}}{2(2m-4)!}\right]+2\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta]\sum_{\gamma=0}^{N}C_1[\gamma]\frac{|h\beta-h\gamma|^{2m-3}}{2(2m-3)!}-$$

$$-\frac{h^2}{6}\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta]\left[\frac{h\beta^{2m-2}+\left(1-h\beta\right)^{2m-2}}{2(2m-2)!}\right]-2\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta]\int_0^1\frac{|x-h\beta|^{2m-1}}{2(2m-1)!}dx+$$

$$+\sum_{\beta=0}^{N}C_0[\beta]\sum_{\gamma=0}^{N}C_0[\gamma]\frac{|h\beta-h\gamma|^{2m-1}}{2(2m-1)!}+\frac{h^2}{6(2m-1)!}+\frac{1}{(2m+1)!}+\frac{h^4}{144(2m-3)!}\Bigg]. \quad (13)$$

Итак, задача 1 решена.

В третьем параграфе второй главы мы получаем следующую систему линейных уравнений для нахождения оптимальных коэффициентов $\overset{\circ}{C}_1[\beta]$ квадратурной формулы (8), дающей минимальное значение норме функционала погрешности ℓ_N.

$$\sum_{\gamma=0}^{N}C_1[\gamma]\frac{|h\beta-h\gamma|^{2m-5}}{2(2m-5)!}+P_{m-3}(h\beta)=f_m(h\beta), \qquad \beta=\overline{0,N}, \quad (14)$$

$$\sum_{\beta=0}^{N}C_1[\beta](h\beta)^{\alpha}=-\sum_{j=1}^{\alpha}\frac{\alpha!B_{\alpha+3-j}h^{\alpha+3-j}}{j!(\alpha+3-j)!}, \qquad \alpha=\overline{0,m-3}. \quad (15)$$

Здесь

$$f_m(h\beta)=\sum_{i=0}^{2m-5}\frac{(h\beta)^{2m-5-i}}{(2m-5-i)!}\left[-\frac{B_{i+3}h^{i+3}}{(i+3)!}+\sum_{j=1}^{i}\frac{(-1)^iB_{i+3-j}h^{i+3-j}}{2j!(i+3-j)!}\right]+\frac{B_{2m-2}h^{2m-2}}{(2m-2)!}$$

Следует отметить, что система уравнений (14)-(15) - это дискретная система уравнений типа Виннера-Хопфа, в которой решение систем этого типа существует и единственно, и это решение дает минимум нормы $\|\ell_N\|$, доказаны С.Л.Соболевым и Х.М.Шадиметовым.

В четвертом параграфе второй главы находим коэффициенты оптимальной квадратурной формулы с производной (8) для $m=3$ в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

Теорема 3. Коэффициенты оптимальной квадратурной формулы с производной (8) в пространстве $L_2^{(3)}(0,1)$ имеет вид

$$C_1[\beta]=0, \quad \beta=\overline{0,N}. \quad (16)$$

Из теоремы 3 можно сделать вывод, что квадратурная формула вида (8), построенная в пространстве Соболева $L_2^{(3)}(0,1)$, является формулой Эйлера-Маклорена.

В пятом параграфе этой главы найдено аналитическое представление коэффициентов оптимальной квадратурной формулы с производной, когда $m\ge 4$ в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

Теорема 4. Среди квадратурных формул с производными в виде (8) на пространстве действительных функций $L_2^{(m)}(0,1)$ существует единственная оптимальная квадратурная формула, коэффициенты которой имеют вид

$$C_1[\beta]=h^3\sum_{k=1}^{m-3}a_k\frac{q_k^N-q_k}{1-q_k},\qquad \beta=0,N,$$

$$C_1[\beta]=h^3\sum_{k=1}^{m-3}a_k\left(q_k^{\beta}+q_k^{N-\beta}\right),\qquad \beta=\overline{1,N-1},$$

a_k решение следующей системы уравнений

$$\sum_{k=1}^{m-3}a_k\sum_{i=0}^{\alpha}\frac{(q_k^{N+i}+(-1)^{i+1}q_k)}{(1-q_k)^{i+1}}\Delta^i 0^{\alpha}=\frac{B_{\alpha+3}}{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)},\qquad \alpha=\overline{1,m-3}.$$

где B_α - числа Бернулли, q_k - корень многочлена степени $(2m-6)$- Эйлера - Фробениуса, $|q_k|<1$.

Из теоремы 4 следует следующие следствие:

Следствие 1. В пространстве Соболева $L_2^{(4)}(0,1)$ коэффициенты оптимальной квадратурной формулы с производной (8) имеют вид

$$C_1[\beta]=ah^3\frac{(q-q^N)}{q-1},\qquad \beta=0,N,$$

$$C_1[\beta]=ah^3\left(q^{\beta}+q^{N-\beta}\right),\qquad \beta=\overline{1,N-1},$$

где $a=\dfrac{1}{120(1+q^N)}$, $q=\sqrt{3}-2$.

Теорема 5. Неизвестный многочлен в системе дискретных уравнений типа Виннера-Хопфа (14) - (15) определяется следующим образом

$$P_{m-3}(h\beta)=\sum_{i=m-2}^{2m-5}\frac{(h\beta)^{2m-5-i}}{(2m-5-i)!}\left[\frac{h^{i+3}}{i!}\sum_{k=1}^{m-3}\sum_{\alpha=1}^{i}\frac{a_kq_k+b_kq_k^{N+\alpha}(-1)^{\alpha+1}}{(q_k-1)^{\alpha+1}}\Delta^{\alpha}0^i+\right.$$
$$\left.+\frac{(-1)^i}{2i!}\sum_{\gamma=0}^{N}C_1[\gamma](h\gamma)^i-\frac{B_{i+3}h^{i+3}}{(i+3)!}+\sum_{j=1}^{i}\frac{(-1)^iB_{i+3-j}}{2j!(i+3-j)!}\right]+\frac{B_{2m-2}h^{2m-2}}{(2m-2)!}.$$

Затем мы будем использовать представление этого многочлена для вычисления нормы функционала погрешности.

Таким образом, задача 2 полностью решена.

В третьей главе диссертации, известной как **“Оценка порядка сходимости оптимальных квадратных формул с производными в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$”** мы имеем дело с вычислением нормы функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы с производной (8).

В первом параграфе третьей главы исследуется порядок аппроксимации оптимальной квадратичной формулы с производной (8) в пространстве $L_2^{(3)}(0,1)$.

Теорема 6. Квадрат нормы функционала погрешности ℓ_N, соответствующий квадратурной формуле с производной (8) в пространстве $L_2^{(3)}(0,1)$ равен

$$\left\|\ell_N\middle|L_2^{(3)*}(0,1)\right\|^2=\frac{h^6}{30240}.$$

Из теоремы 6 видно, что погрешность построенной в пространстве $L_2^{(3)}(0,1)$ квадратурной формулы с производной равна погрешности формулы Эйлера-маклорена.

Во втором параграфе третьей главы рассчитана высокая оценка погрешности оптимальной квадратурной формулы с производной, которая точна для алгебраических многочленов в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$, при $m \geq 4$.

Следующие утверждения уместны для доказательства основного вывода третьей главы.

Утверждение 1. Для чисел Бернулли уместны следующие равенства

$$\sum_{i=0}^{m-3}\frac{(-1)^{2m-5-i}}{(2m-5-i)!}\sum_{j=1}^{i}\frac{B_{i+3-j}h^{i+3-j}}{j!(i+3-j)!}\left[h^{2m-2-i}Z_{2m-5-i}+\sum_{p=1}^{2m-6-i}\frac{(2m-5-i)!h^{p+3}Z_p}{p!(2m-5-i-p)!}\right]=$$

$$=-\sum_{i=1}^{m-3}h^{i+6}\sum_{p=1}^{i}\sum_{j=p}^{m-3}\frac{(-1)^j B_{p+2}Z_{i+1-p}}{(j+1-p)!(p+2)!(i+1-p)!(2m-6-j-i+p)!}-$$

$$-\sum_{i=1}^{m-3}h^{i+m+3}\left[\sum_{p=i}^{m-3}\sum_{j=p}^{m-3}\frac{(-1)^{m-p}B_{m-j}Z_{i+j}}{(j+1-p)!(m-j)!(i+j)!(m-3-j-i+p)!}+\right.$$

$$\left.+\sum_{p=1}^{i-1}\sum_{j=p}^{m-3-i+p}\frac{(-1)^{m-p}B_{m-j}Z_{j+i}}{(j+1-p)!(m-j)!(j+i)!(m-3-j-i+p)!}\right].$$

где $Z_p=\sum_{k=1}^{m-3}\sum_{t=0}^{p}\frac{a_k q_k^{N+t}+b_k q_k(-1)^{t+1}}{(1-q_k)^{t+1}}\Delta^t 0^p,\quad p=\overline{0,2m-5}.$

Утверждение 2. Для чисел Бернулли уместны следующие равенства

$$\sum_{j=0}^{m-3}\sum_{p=1}^{j}\frac{B_{j+3-p}h^{j+3-p}}{p!(j+3-p)!}\sum_{i=1}^{2m-5-j}\frac{(-1)^{2m-5-j}B_{2m-2-j-i}h^{2m-2-j-i}}{2i!(2m-2-j-i)!}=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\sum_{p=m+3}^{2m-1}h^p\sum_{j=1}^{2m-p}\sum_{i=1}^{m-2-j}\frac{(-1)^{i+j}B_{i+2}B_{p-2-i}}{j!(i+2)!(p-2-i)!(2m+1-p-j)!}+\right.$$

$$+\sum_{p=6}^{m+2}h^p\left[\sum_{j=1}^{m+2-p}\sum_{i=1}^{p-5}\frac{(-1)^{i+j}B_{i+2}B_{p-2-i}}{j!(i+2)!(p-2-i)!(2m+1-p-j)!}+\right.$$

$$\left.\left.+\sum_{j=1}^{p-5}\sum_{i=1}^{p-4-j}\frac{(-1)^{i+j+m-p+2}B_{i+2}B_{p-2-i}}{(j+m+2-p)!(i+2)!(p-2-i)!(m-j-1)!}\right]\right\}$$

Теорема 7. В пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ для $m \geq 4$ квадрат нормы функционала погрешности (9) соответствующее оптимальной квадратурной формуле с производной (8) равен

$$\left\|\ell_N \left| L_2^{(m)*}(0,1)\right\|^2=(-1)^{m+1}\left[\frac{h^{2m}B_{2m}}{(2m)!}+h^{2m+1}\sum_{i=0}^{m-3}\sum_{k=1}^{m-3}\sum_{t=0}^{2m-5-i}\frac{B_{i+3}\theta_t(q_k)\Delta^t 0^{2m-5-i}}{(2m-5-i)!(i+3)!}\right],\right.$$

где

$$\theta_t(q_k) = \frac{a_k(q_k^N - 1)(q_k^t + (-1)^t q_k)}{(1-q_k)^{t+1}},$$

B_l --числа Бернулли, a_k - корень многочлена Эйлера $E_{2m-6}(q)$ степени $2m-6$, заданной в теореме 4, $|q_k|<1$..

Из теоремы 7 следует следующий вывод.

Следствие 2. В пространстве $L_2^{(4)}(0,1)$ квадрат нормы функционала погрешности, соответствующий оптимальной квадратурной формуле с производной (8), равен

$$\left\| \ell_N \left| L_2^{(4)*}(0,1) \right\|^2 = \frac{h^8}{1209600} + \frac{h^9(2+q)(1-q^N)}{1555200(1+q^N)}\right.$$

где $q=\sqrt{3}-2$.

На третьем графике этой главы полученные аналитические результаты были подвергнуты численному анализу с использованием некоторых сложных функций. При этом рассмотрено численное решение интегрального уравнения Фредгольма второго рода с использованием полученной оптимальной квадратурной формулы. Показано, что погрешность решения интегральных уравнений с использованием производных оптимальных квадратурных формул меньше погрешности формулы Симпсона.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе построены оптимальные квадратурные формулы с производными, точные для алгебраических многочленов степени $m-1$, с использованием значений производных первого и второго порядка функции в узловых точках в пространстве действительных дифференцируемых функций $L_2^{(m)}(0,1)$.

Основными результатами исследовательской работы являются:

1. Найдено представление нормы функционала погрешности квадратурных формул с производными в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, точных для алгебраических многочленов;

2. Получена система уравнений типа виннера-Хопфа для коэффициентов оптимальной квадратурной формулы с производной в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$;

3. Найдены коэффициенты оптимальной квадратурной формулы с производной, когда $m=3$ в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$;

4. Получено аналитическое представление коэффициентов оптимальной квадратурной формулы с производной для $m\geq 4$ в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$;

5. Вычислена норма функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы с производной, когда $m=3$ в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$;

6. Вычислена норма функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы с производной для $m \geq 4$ в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$;

7. Численно решены интегральные уравнения с помощью оптимальных квадратных формул с производными, построенные в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

KUZIEV SHAXOBIDDIN SOBIROVICH

DERIVATIVE OPTIMAL QUADRATURE FORMULAS IN SOBOLEV SPACE

01.01.03 – Computational and discrete mathematics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT – 2025

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number № B2024.1.PhD/FM1014.

Dissertation has been prepared at V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences.

Abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the website http://ik-fizmat.nuu.uz/ and the «ZiyoNet» Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific superviser:	**Nuraliev Farxod Abduganievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, docent
Official opponents:	**Khudoyberganov Mirzoali Urazalievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
	Uteuliev Nietbay Uteulievich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
Leading organization:	**Samarkand State University**

Defense will take place «____» _____________2025 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc/03/30/12/2019/FM.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2025 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2025 year)

M.M. Aripov
Chairman of Scientific Council on award of
scientific degrees, D.F.-M.S., professor

Z.R. Rakhmonov
Scientific Secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, D.F.-M.S.

R.D. Aloyev
Chairman of Scientific Seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

The purpose of the study is to construct derivative optimal quadrature formulas in the space of Sobolev $L_2^{(m)}(0,1)$ differentiable functions, calculate the norm of error functionals corresponding to them, and use derivative optimal quadrature formulas in the numerical solution of integral equations.

The object of the study consists of Sobolev spaces, derivative optimal quadrature formulas, error functionals.

The scientific novelty of the research work is as follows:

in the real-valued $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev space of differentiable functions, an analytical representation of the norm of the derivative optimal quadrature formula error functional exact to algebraic polynomials was found for $m \geq 3$;

to find the optimal coefficients using the method of undetermined Lagrange multipliers, a system of linear equations of the Wiener-Hopf type was obtained;

the coefficients of the derived optimal quadrature formula for $m = 3$ in the real-valued $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev space of differentiable functions and the upper bound of the error were found;

in the $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev space with real value of differentiable functions, using a discrete operator, the coefficients of the optimal quadrature formula with a derivative for $m > 3$ were found;

in the $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev space with real values of differentiable functions, the norm of the error functional of the optimal quadrature formula with derivative for $m > 3$ is calculated.

Implementation of the research results. Based on the new scientific results obtained on the construction of derivative optimal quadrature formulas exact to algebraic polynomials in $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev's space:

from the derived optimal quadrature formulas built in the real-valued $L_2^{(m)}(0,1)$ Sobolev space of differentiable functions, effective irrigation systems working with electricity in the international joint scientific and practical project within the framework of state scientific and technical programs on the topic “Irrigation system of agricultural land using a hydro-turbo pump device” used to evaluate the solutions of mathematical models representing the processes of management and saving of water resources (certificate No. 01-2074 of August 14, 2024 of the Fergana Polytechnic Institute). As a result, by dividing the surfaces of complex-shaped hydroturbines into small nodes, which is one of the important indicators in hydropower, it was possible to calculate their surfaces, design complex-shaped hydroturbines and choose optimal surfaces;

Derivative optimal quadrature formulas specific to algebraic polynomials built in the space of differentiable functions were used to study the durability of metal parts of cars in the state scientific and technical practical project on the topic "Creating a local coating protecting metal parts of vehicles from corrosion" (certificate No. 1200-1190 of June 8, 2024 of the Jizzakh Polytechnic Institute). As a result, this newly derived optimal quadrature formula made it possible to study the properties and objective characteristics of wollastonite gossypol polymer materials used in the technological process of preparing the anti-corrosion coating of cars from local raw materials.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, a list of references and applications. The volume of the dissertation is 100 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (Часть I; Part I)

1. Шадиметов Х.М., Нуралиев Ф.А., Кузиев Ш.С., Дискретная система типа Винера-Хопфа для составных оптимальных квадратурных формул // Проблемы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, 2022, № 4(42), С. 116-127. (01.00.00; №9)
2. Nuraliev F.A., Kuziev Sh.S. About an optimal quadrature formula with derivatives, // Problems of Computational and Applied Mathematics, Tashkent, 2022, № 5/1(144), pp. 143-151. (01.00.00; №9)
3. Nuraliev F. A., Kuziev Sh. S., The coefficients of an optimal quadrature formula in the space of differentiable functions // Uzbek Mathematical Journal, Tashkent, 2023, № 67(2), pp 124-135. (01.00.00; №6)
4. Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A., Kuziev Sh.S., Derivative optimal quadrature formula coefficients of the Hermite type // Reports of Uzbekistan Academy of Sciences, 2023, №3, pp. 39-46. (01.00.00; №7)
5. Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A., Kuziev Sh.S. Optimal Quadrature Formula of Hermite Type in the Space of Differentiable Functions, // International Journal of Analysis and Applications, 2024, №22, pp. 1-19. (**3. Scopus, IF:=0.75**), https://doi.org/10.28924/2291-8639-22-2024-25.
6. Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A., Kuziev Sh.S., Coefficients and Errors of the Optimal Quadrature Formula of the Hermite Type // AIP Conference Proceeding, 2024, 3147, 030030, pp. 1-12. (**3. Scopus, IF:=0.4**), https://doi.org/10.1063/5.0210357.

II bo‘lim (Часть II; Part II)

7. Nuraliev F.A., Kuziev Sh.S. Representation of the norm of the error functional of quadrature formulas with derivatives in Sobolev space // Theoretical foundations and applied problems of modern mathematics, Andijan, March 28, 2022, pp. 278-279.
8. Nuraliev F.A., Kuziev Sh.S., Yuldashov Sh.Sh. Norms of the error functional of quadrature formulas with derivatives in Sobolev space // Modern problems of applied mathematics and information technologies, Proceedings of the International Scientific and Practical Conference, Bukhara, May 11-12, 2022, pp. 346-347.
9. Nuraliev F.A., Kuziev Sh.S., Kudratullaev M.I. System for coefficients of optimal quadrature formulas // Uzbekistan-Malaysia international conference “Computational models and technologies” 2022, September 16-17, pp. 59-60.
10. Kuziev Sh.S. Derivative optimal quadrature formula in the space of differentiable functions // Republican Scientific-Practical Conference on

"Actual Problems of Informatics and Information Technologies", Termiz, 2023, June 23-24, pp. 202-206.

11. Nuraliev F. A., Kuziev Sh. S., Qudratillayev M. I. Explicit representation of optimal coefficients for Hermite type quadrature formulas // "Topical issues of algebra and analysis collection of materials" of the Republican scientific and practical conference, 2022, November 18-19, pp. 224-226..
12. Nuraliyev F.A., Kuziev Sh.S. Coefficients and norm of the optimal quadrature formula in space $L_2^{(3)}(0,1)$ // Modern problems of analysis, Proceedings of the republican scientific conference, June 2-3, 2023, pp. 307-309.
13. Nuraliev F.A., Kuziev Sh.S. Derivative optimal quadrature formula coefficients of the Hermite type // International scientific and practical conference "Actual problems of the mathematical modeling and information technology" 2023, Nukus, 2-3 may, pp. 120-123.
14. Nuraliev F.A., Kuziev Sh.S. Derivative optimal quadrature formula in the space of differentiable functions // "Actual problems of applied mathematics and information technologies" International conference, 2023, 25-26 sentabr, Samarqand, pp. 138-139.
15. Nuraliev F. A., Kuziev Sh. S. Hermite type optimal quadrature formulas // International scientific conference on "Modern problems of differential equations and their applications" 2023, Tashkent, November 23-25, pp. 117-119.
16. Nuraliev F. A., Kuziev Sh. S., Coefficients of derivative optimal quadrature formula in the Sobolev space // Actual problems and applications of modern mathematics, 2024, Tashkent, March 14-15, pp. 120-121.
17. Nuraliev F. A., Kuziev Sh. S., Coefficients of the optimal quadrature formulas with derivatives // Proceedings of the seminar dedicated to the memory of professor M.I. Isroilov on April 27, 2024 (CMT2024), pp. 48-51.
18. Nuraliev F.A., Kuziev Sh.S. Optimal Quadrature Formulas with Derivative in the Space $L_2^{(m)}(0,1)$ // Republican scientific and practical conference on the theme of "Modern problems and prospects of applied mathematics" 2024, Karshi, May 24-25, pp. 287-289.
19. Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A., Kuziev Sh.S., Differensiallanuvchi funksiyalar fazosida hosilali optimal kvadratur formula xatolik funksionali normasining yaqinlashish tartibini baholash uchun dastur. // Intelektual mulk agentligi, Toshkent, №. DGU 35431, 28.03.2024.
20. Shadimetov Kh.M., Nuraliev F.A., Kuziev Sh.S., Hosilali optimal kvadratur formula uchun sonli natijalar. // Intelektual mulk agentligi, Toshkent, №. DGU 29181, 14.11.2023.

Avtoreferat Toshkent davlat transport universitetining “TDTU xabarlari” jurnali tahririyatida tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillarida matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$ “Times New Roman” garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 4. Adadi 100. Buyurtma № 43-5/2025.
Nashrga ruxsat etildi 06.01.2025 y.
Guvohnoma № 8057, 2021-04-13.
“Transport” nashriyoti
Toshkent davlat transport universiteti bosmaxonasida chop etilgan.

Bosmaxona manzili: 100167, Toshkent sh; Temiryo‘lchilar ko‘chasi, 1.