

**V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

**MATEMATIKA INSTITUTI,
URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI**

ATAMURATOV ALIMARDON ABDIRIMOVICH

**PARABOLIK KO'PXILLIKLARDA ANALITIK FUNKSIYALAR
NAZARIYASI**

01.01.01 – Matematik analiz

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI DOKTORI (DSc) DISSERTATSIYASI
AVTOREFERATI**

TOSHKENT – 2025

Doktorlik (DSc) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата докторской (DSc) диссертации

Content of the abstract of doctoral (DSc) dissertation

Atamuratov Alimardon Abdirimovich Parabolik ko'pxiliklarda analitik funksiyalar nazariyasi.....	3
Атамуратов Алимардон Абдиримович Теория аналитических функций на параболических многообразиях.....	21
Atamuratov Alimardon Abdirimovich Theory of analytical functions on parabolic manifolds.....	41
E'lon qilingan ishlar ro'uxati Список опубликованных работ List of published works.....	45

**V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

**MATEMATIKA INSTITUTI,
URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI**

ATAMURATOV ALIMARDON ABDIRIMOVICH

**PARABOLIK KO'PXILLIKLARDA ANALITIK FUNKSIYALAR
NAZARIYASI**

01.01.01 – Matematik analiz

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI DOKTORI (DSc) DISSERTATSIYASI
AVTOREFERATI**

TOSHKENT – 2025

Fizika-matematika fanlari doktori (DSc) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2017.2.DSc/FM69 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Doktorlik dissertatsiyasi Matematika instituti va Urganch Davlat universitetida bajarilgan.
Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (<http://kengash.mathins.uz>) va "Ziyonet" ta'lim axborot tarmog'ida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan

Ilmiy maslahatchi: **Sadullayev Azimbay**
fizika-matematika fanlari doktori, professor, akademik

Rasmiy opponentlar: **Shcherbina Nikolay Vasilyevich**
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Kudaybergenov Karimbergen Kadirbergenovich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Imomkulov Sevdiyor Akramovich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Yetakchi tashkilot: **Sibir Federal universiteti**

Dissertatsiya himoyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2025 yil " 18 " fevral soat 16:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz. Website: www.mathinst.uz).

Doktorlik dissertatsiyasi bilan V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (197-raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 9-uy. Tel.: (+99871) 207-91-40).

Dissertatsiya avtoreferati 2025 yil " 31 " yanvar kuni tarqatildi.
(2025 yil " 31 " yanvardagi 2-raqamli reyestr bayonnomasi).



U.A.Rozikov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi,
f.-m.f.d., akademik

J.K. Adashev
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash kotibi,
f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

U.U. Jamilov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash huzuridagi
Ilmiy seminar raisi,
f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

KIRISH (doktorlik dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida olib borilayotgan ko‘plab ilmiy-amaliy tadqiqotlar ko‘pchilik holatlarda kompleks ko‘pxilliklar va xususan Riman sirtlari bilan bog‘liq matematik modellarga keltiriladi. Riman sirtlari nazariyasida kompleks tekisliklarga xos xususiyatga ega sirtlar parabolik va birlik doiraga ekvivalent sirtlarga esa giperbolik Riman sirtlari deya klassifikatsiya qilinadi. Umuman olganda paraboliklik tushunchasi mutaxassislar tomonidan turlicha tavsiflanib kelinadi. Masalan, Kobayashi va Karateodori metrikalari terminida (triviallik – paraboliklik, trivial bo‘lmaslik – giperboliklik), maxsus qamrov funksiyasini mavjudligi va boshqalar. Ba’zi olimlar tomonidan esa trivial bo‘lmagan chegaralangan golomorf funksiyalarning mavjud bo‘lmasligi (sust paraboliklik) bilan ham xarakterlanadi. Ko‘p o‘lchamli kompleks analizda Nevanlinna qiymatlar taqsimoti nazariyasini umumlashtirish maqsadida P.Griffits-J.King va W.Stolllar paraboliklik tushunchasini maxsus plyurisubgarmonik qamrov funksiyasi mavjudligi sharti bilan kiritishadi. Bunday parabolik ko‘pxilliklar va ularda aniqlangan analitik funksiyalar nazariyasi dinamik sistemalar nazariyasi, meromorf akslantirishlarning qiymatlari taqsimotini o‘rganishda, fraktal geometriya va boshqa ko‘pgina sohalarida tadbiq etilib kelinmoqda. Shu sababdan parabolik ko‘pxilliklarda analitik funksiyalarning xossalari tadqiq etish va xususan polinomial yaqinlashtirish masalalarini o‘rganish bu yo‘nalishdagi dolzarb masalalardan biri bo‘lib qolmoqda.

Hozirgi kunda jahonda plyuripotensiallar nazariyasi metodlari murakkab modellarni tadqiq etishning muhim matematik asosi sifatida xizmat qilmoqda. Ma’lumki, kompleks ko‘pxilliklarda analitik funksiyalar nazariyasi lokal tarzda quriladi. Modellashtirilgan jarayon haqida umumiy tasavvurlarni hosil qilish uchun tadqiqot obyektlarining global xossa va xususiyatlarini bilish talab etiladi. O‘z navbatida bu muammolar parabolik ko‘pxilliklarda analitik funksiyalar nazariyasini ancha sifatli, kuchli global natijalar bilan boyitishni talab etadi. Parabolik ko‘pxilliklarda analitik funksiyalar va polinomlar fazolarini o‘rganish, polinomial approksimatsiya, algebraik to‘plamlarni o‘rganish tez polinomial approksimatsiya va analitik davom o‘rtasidagi bog‘liqlikni o‘rganish mazkur dissertatsiya ishining tadqiqot maqsadiga kiradi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqiga ega bo‘lgan statistik fizika va mexanikaning dolzarb yo‘nalishlariga e’tibor kuchaytirildi. Jumladan, ko‘p kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi va plyuripotensiallar nazariyasining zamonaviy matematikaning hamda nazariya fizikaning turli sohalaridagi tatbiqlariga e’tibor qaratilgan. Natijada, parabolik ko‘pxilliklarda potensiallar nazariyasi asoslarini ishlab chiqishda, ekstremal funksiyalarni o‘rganishda va analitik funksiyalarni polinomlar bilan yaqinlashtirish bo‘yicha ko‘pgina muhim natijalarga erishildi. Matematik fizika, nochiziqli analiz, o‘lchovlar nazariyasi va stoxastik jarayonlar kabi ilmiy sohalarida xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish matematika fanining asosiy

vazifalari va faoliyat yo‘nalishlari etib belgilandi¹. Qaror ijrosini ta‘minlashda parabolik ko‘pxilliklarda analitik funksiyalar nazariyasini rivojlantirish, kompleks Monj-Amper operatoriga asoslangan potensiallar nazariyasini asoslash shuningdek, ekstremal plyurisubgarmonik funksiyalar va analitik funksiyalarni polinomlar bilan yaqinlashtirish masalalarini o‘rganish muhim ahamiyatga ega

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi “Matematika ta‘limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4387- son Qarori, 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta‘lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-sonli Qarori, 2020 yil 29 oktabrdagi “Ilm-fanni 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-6097 sonli farmoni, 2022 yil 28 yanvardagi “2022 – 2026-yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-60 sonli farmoni hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha xorijiy-ilmiy tadqiqotlar sharhi. Paraboliklik tushunchasi va uning golomorf hamda meromorf funksiyalarning qiymatlari taqsimoti nazariyasiga tatbiq etilishi bilan bog‘liq tadqiqotlar dastavval Prinston (AQSh) universitetida joriy qilingan. Keyinchalik Vuppertal (Germaniya) universiteti ilmiy maktabi vakillari parabolik ko‘pxilliklarda Nevanlinna nazariyasini ishlab chiqdilar. Tuluzadagi Fransuz matematiklar maktabi sharofati bilan parabolik ko‘pxilliklar nazariyasiga plyuripotensiallar nazariyasi usullari kirib keldi. Bu yerda shuningdek, parabolik ko‘pxilliklarda polinomlar tushunchasi ham kiritildi. Parabolik ko‘pxilliklarning geometrik jihatlari Furrye instituti (Fransiya), Indiana (AQSh), Tulon (AQSh), Florensiya (Italiya) universitetlarida o‘rganilgan. Bu markazlarda parabolik ko‘pxilliklarni katta o‘lchamli fazolarga joylashtirish va parabolik qatlamlanishlar o‘rganilgan. Parabolik ko‘pxilliklarda analitik va plyurisubgarmonik funksiyalar fazolari Sabanchi (Turkiya) universiteti, O‘zbekiston Milliy universiteti, O‘zbekiston Fanlar akademiyasining Matematika instituti va Urganch Davlat universitetida keng o‘rganilmoqda.

Parabolik ko‘pxilliklar va ularning turli kengaytmalari kompleks dinamik sistemalar, Nevanlinna nazariyasi, analitik funksiyalar fazolari nazariyasi va boshqa sohalarda keng ko‘lamli tatbiqqa ega ekanligi bilan bugungi kunda ko‘pgina xorijiy ilmiy markazlar tadqiqot predmetiga aylangan. Ular jumlasiga,

¹ O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi “Matematika ta‘limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” gi № PQ-4387-son qarori

Vetnam respublikasidagi Tian Long va Nguyen universitetlari, Xitoydagi Renmin va Chyonking universitetlari, Chexiya respublikasidagi Palatskiy va Tomash Bat universitetlari, AQShdagi Hyuston universiteti, shuningdek Tayvandagi Matematika institutini kiritish mumkin.

Muammoning o'rganilganlik darajasi. O'tgan asrning 80-yillariga kelib, ko'p o'lchamli kompleks analizda zaruriyati tufayli plyuripotensiallar nazariyasiga asos solindi. Ushbu nazariya ko'p o'lchamli kompleks analizni ko'pgina yangi fundamental natijalar bilan to'ldirdi va ular bugungi kunda nazariy fizika va matematikaning turli sohalarida qo'llanilib kelinmoqda. Tatbiqiy matematikaning asosiy obyektlarining kompleksifikatsiyasi kompleks ko'pxilliklarga olib keladi. Kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning geometrik nazariyasida kompleks ko'pxilliklarni alohida strukturaga ega bir nechta turlari tavsiflanadi va ular ma'lum bir masalalar yechimini soddalashtirishga xizmat qiladi. Ular orasida Riman sirtlari, analitik va algebraik to'plamlarga alohida e'tibor qaratilgan. Parabolik ko'pxilliklar, ularda geometrik usullaridan tashqari plyuripotensiallar nazariyasi metodlari ham effektiv qo'llanilishi bilan alohida ahamiyatlidir. Bu yo'nalishdagi tadqiqotlar 1970 yillarda boshlangan bo'lib, parabolik ko'pxilliklarni o'rganishda sezilarli natijalarga erishilgan. Ular orasida parabolik ko'pxilliklarni algebraik joylashtirilishini ta'minlab beruvchi egrilik shartlari tadqiq etilgan R.Fut ishlari, parabolik qatlamlanishlar egriligi tadqiq etilgan D.Byorns ishlari diqqatga sazovordir.

A.Zeriahi tomonidan parabolik ko'pxilliklarda plyuripotensiallar nazariyasi asoslari ishlab chiqildi, M.Ru va J.Vang tomonidan esa parabolik ko'pxilliklarda Nevanlinna nazariyasining ikkinchi asosiy teoremasi isbot qilingan. K.Ataxanov, A.Sadullayev, G.L.Ashlin, Y.Liu va M.Ru ishlari parabolik ko'pxilliklarda golomorf va meromorf akslantirishlar uchun defekt divizorlar tadqiq etilgan. A.Aytuna, J.Krone, T.Terzio'g'li ishlarida parabolik ko'pxilliklarda aniqlangan analitik funksiyalarning Freshe fazolarining chiziqli-topologik xossalari tadqiq etilgan bo'lsa, A.Aytuna, A.Sadullayev tomonidan parabolik ko'pxilliklar klassifikatsiyasi keltirilib, polinomlar fazosining nazariy-potensial xossalari o'rganilgan. M.Kalka, G.Patrizio ishlari qatlamlanuvchi qat'iy parabolik ko'pxilliklarga bag'ishlangan va F.Forstnerich tomonidan Shteyn ko'pxilliklarining singulyar va nosingulyar qatlamlanishi o'rganilgan. A.S.Snaebjarnarson Shteyn ko'pxilliklarida polinomial approksimatsiya masalalari o'rganishga o'z hissasini qo'shgan.

Bu sohadagi zamonaviy tadqiqotlar bir nechta yo'nalishlarda olib borilmoqda va qator muhim natijalarga erishilmoqda. A.Sadullayev va X.Kamolov ishlarida parabolik analitik sirtlarda plyuripotensiallar nazariyasi asoslari ishlab chiqilgan. V.Chen va B.T.Nguyenlar tomonidan esa p-parabolik Keler ko'pxilliklarida Nevanlinna nazariyasi asosiy teoremlari isbotlangan. Yaqinda P.Peshka, J.Mikesh, X.Chuda, M.Shin ishlarida va J.Chen, K.Zang ishlarida harakatlanuvchi maqsadlar bilan kesishuvchi parabolik ko'pxilliklarda meromorf akslantirishlar uchun Nevanlinna nazariyasining asosiy teoremlarining umumlashgan versiyalari

isbotlangan. Bu ishlar nazariyani rivojlanishi va uning matematikaning turli sohalariga tadbiq etilishini rivojlanishida katta hissa bo‘lib qo‘shiladi.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalariga bilan bog‘liqligi. Tadqiqot ishlari O‘zbekiston Fanlar Akademiyasining V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti Xorazm bo‘limi ilmiy tadqiqot rejalariga va Urganch davlat universiteti “Matematik tahlil” kafedrasida ilmiy tadqiqot rejalariga muvofiq bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi parabolik ko‘pxilliklarda analitik funksiyalarning global xossalarini va polinomial approksimatsiyasi haqidagi asosiy fundamental teoremlarni isbotlashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari quyidagilardan iborat:

regulyar parabolik ko‘pxilliklarni tadqiq etish. Ikkita regulyar parabolik ko‘pxilliklarning Dekart ko‘paytmasini regulyar parabolik bo‘lishini isbotlash;

regulyar parabolik ko‘pxilliklarning qism ko‘pxilliklarini regulyar bo‘lishlik shartlarini aniqlash;

kompleks fazolarda analitik funksiyalar grafiklarini regulyar parabolik bo‘lishini ko‘rsatish. Analitik funksiyalar grafiklari ustida Sichak va Zahariuta ekstremal funksiyalarining ekvivalentligini isbotlash;

Veyershtass polinomi nollari to‘plamining to‘ldiruvchisini S -parabolik bo‘lishini isbotlash;

Veyershtass polinomi nollari to‘plamining to‘ldiruvchisida polinomlar tuzilishini aniqlash;

Veyershtass polinomi nollari to‘plamining to‘ldiruvchisini regulyar parabolik bo‘lish kriteriyasini olish;

parabolik ko‘pxilliklarda Φ_ρ Sichak ekstremal funksiyasining xossalarini isbotlash. Parabolik ko‘pxilliklarda kompakt to‘plamlarning regulyarligini tadqiq etish;

parabolik ko‘pxilliklarda Φ_ρ ekstremal funksiyalar terminida Bernshteyn-Uolsh teoremasining analogini isbotlash;

parabolik ko‘pxilliklarda Runge teoremasining analogini isbotlash;

algebraik ko‘pxilliklarda ekstremal Grin funksiyasi va Sichak ekstremal funksiyalarining ekvivalentligini isbotlash;

algebraik ko‘pxilliklarda $V(z, K)$ Grin funksiyasi terminida Bernshteyn-Uolsh teoremasining analogini isbotlash.

Tadqiqotning obykti. Parabolik ko‘pxilliklar va parabolik ko‘pxilliklarda aniqlangan analitik va plyurisubgarmonik funksiyalar. Parabolik ko‘pxilliklarda plyuripotensiallar nazariyasi.

Tadqiqotning predmeti. Parabolik ko‘pxilliklarda aniqlangan analitik funksiyalar fazosi.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiyada potentsiallar nazariyasi, ko‘p kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi va Monj-Amper nochiziqli differensial operator nazariyasi usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

parabolik ko'pxilliklarning Dekart ko'paytmasida polinomlar ko'rinishi tavsiflangan va golomorf funksiyalar fazosida polinomlar sistemasining to'laligi orqali regular parabolik ko'pxilliklar Dekart ko'paytmasining yana regular parabolik bo'lishligi isbotlangan;

analitik funksiyalar grafiklari ustida polinomlar va plyurisubgarmonik funksiyalar fazolarini tavsiflash orqali Sichak va Zahariuta ekstremal funksiyalarining ekvivalent bo'lishligi ko'rsatilgan;

Veyershtass polinomi nollari to'plami tashqarisidagi sohalarda analitik funksiyalar maxsus poliedrlardagi Veyl qatoriga yoyilmasi koeffitsiyentlari uchun baholashlar olingan va Veyershtass polinomi nollari to'plami to'ldiruvchisidan iborat parabolik ko'pxilliklarning regulyarligi kriteriyasi isbotlangan;

kompakt to'plamlar Dekart ko'paytmasi uchun ekstremal funksiyaning bu kompaktlar ekstremal funksiyalari maksimumi bo'lishi ko'rsatilib, regular kompaktlar Dekart ko'paytmasi regulyar bo'lishi haqidagi tasdiq isbotlangan;

parabolik ko'pxilliklarda katta o'lchamli fazolarga maxsus lokal joylashtirilishi va qism ko'pxilliklardan golomorf davom ettirish haqidagi Oka-Kartan teoremasidan foydalanib, Bernshteyn-Uolsh va Runge teoremlarining analoglari isbotlangan;

algebraik qism ko'pxilliklarda aniqlangan polinamlarni butun kompleks fazoga darajasini nazorat qilgan holda polinom sifatida davom ettirilishi asosida algebraik ko'pxilliklar ustida Grin funksiyasi va Sichak ekstremal funksiyalarining ekvivalent bo'lishligi hamda Bernshteyn-Uolsh teoremasining analogi Grin funksiyasi terminida isbotlangan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi ko'p kompleks o'zgaruvchili funksiyalarning geometrik nazariyasi usullari, matematik analiz usullari, funksional analiz usullaridan foydalangan holda keltirilgan qat'iy matematik isbotlarga tayanadi. Bundan tashqari dissertatsiya natijalarining nufuzli impakt-faktorli jurnallarda chop etilgani hamda dissertatsiya ishining yetakchi ilmiy markazlarda muhokamadan o'tganligi, muallif olgan natijalarning respublika va xorijdagi olimlarning ishlarida e'tirof etilishi va ularga havolalar berilganligi ham dissertatsiya natijalarining ishonchliligiga asos bo'la oladi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Parabolik ko'pxilliklarda Bernshteyn-Uolsh teoremasi analogining isbot qilangani, algebraik ko'pxilliklar ustida Sichak va Grin ekstremal funksiyalarining ekvivalent bo'lishini ko'rsatilishi, analitik funksiyalar va polinomial yaqinlashtirishlar nazariyasi asoslarining ishlab chiqilgani dissertatsiya tadqiqotlarini ilmiy ahamiyatini ko'rsatadi.

Dissertatsiya natijalarining ilmiy-amaliy ahamiyati Veyershtass algebraik to'plamlarining to'ldiruvchisida polinomlar tuzilishining aniqlangani va bunday ko'pxilliklarning regulyar bo'lishlik kriteriyasi olingani bilan xarakterlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Dissertatsiya tadqiqoti jarayonida olingan ilmiy natijalar quyidagi yo'nalishlarda amaliyotga joriy qilingan:

Veyershtass polinomi nollari to'plami tashqarisidagi sohalarda analitik funksiyalar maxsus poliedrlardagi Veyl qatoriga yoyilmasi koeffitsiyentlari uchun

baholashlardan va Veyershtass polinomi nollari to'plami to'ldiruvchisidan iborat parabolik ko'pxilliklarning regulyarligi kriteriyasidan OT-Φ4-88 raqamli "Aralash tipdagi ikkinchi va undan yuqori tartibli tenglamalar uchun to'g'ri va teskari masalalarni tadqiq etish" mavzusidagi fundamental loyihada singulyar koeffitsiyentli aralash tipdagi masalalar uchun chegaraviy masalalarni yechishda qo'llanilgan (Matematika institutining 2024 yil 4-oktabrdagi 2/352-sonli ma'lumotnomasi). Ilmiy natijalarni qo'llanishi turli analitik defektli parabolik fazolarda maxsus polynomial funksiyalarning qurilishi aralash tipdagi masalalarda koeffitsiyentlar singulyarligini inobatga oluvchi bazislar va maxsus vazn funksiyalarini aniqlash imkonini bergan;

parabolik ko'pxilliklarda polinomlarni tavsiflanishi, analitik funksiyalar grafiklari ustida va algebraik qism ko'pxilliklarda polinomlar tuzilishidan OT-Φ4-30 raqamli "Ikki marta nochizikli kross sistemaning manba, konvektiv ko'chish, o'zgaruvchan zichlik, manba yoki yutish ta'siridagi sifat xossalarini tadqiq qilish" mavzusidagi fundamental loyihada nochizikli differensial tenglamalar yechimlarini sifat xossalarini ishbotlashda qo'llanilgan (O'zbekiston Milliy universitetining 2024 yil 11-oktabrdagi 04/11-8623-sonli ma'lumotnomasi). Ilmiy natijalarni qo'llanilishi, sonli turg'unlik xususiyatiga ega polinomlar qurish yordamida ikkinchi va yuqori tartibli nochizikli tenglamalar uchun qiyin chegaraviy masalalar va o'zgaruvchan koeffitsiyentlarning maxsusliklariga oson moslashish imkonini bergan;

parabolik ko'pxilliklarda analitik funksiyalarni polinomlar bilan yaqinlashtirish haqidagi Bernshteyn-Uolsh-Sichak teoremasining analogi Tuluza universiteti Matematika institutining kompleks analiz laboratoriyasining geometrik funksiyalar nazariyasi va Keler geometriyasi bo'yicha tadqiqotlarida parabolik ko'pxilliklarni algebraik joylashtirish nuqtai nazaridan strukturaviy tadqiq etishga qo'llanilgan (Tuluza Matematika institutining 2024 yil 4-sentabrdagi ma'lumotnomasi, Fransiya). Natijalarni qo'llanilishi parabolik ko'pxilliklarni algebraik joylashtirishi bo'yicha Keler va Shteyn ko'pxilliklarni joylashtirishi haqidagi Kodaira va Remmert kriteriyalariga o'xshash tasdiqlarni isbotlash uchun yangi shartlarni aniqlash imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobasiyasi. Dissertatsiyaning asosiy natijalari quyidagi xalqaro va Respublika ilmiy anjumanlarida muhokama qilingan:

"Analiz va matematik fizika" mavzusidagi ikkinchi AQSh-O'zbekiston xalqaro konferensiyasi (Urganch, 2017 y.), "Matematika va fizikaning zamonaviy masalalari" mavzusidagi birinchi O'zbekiston-Isroil xalqaro konferensiyasi (Toshkent, 2017 y.), "Fundamental matematika muammolari va tatbiqlari" mavzusidagi Respublika ilmiy konferensiyasi (Navoi, 2019 y.), "Matematika va kompyuter ilmlarida yangi jabhalar" mavzusidagi to'rtinchi O'zbekiston-Isroil xalqaro konferensiyasi (Toshkent, 2020 y.), "Matematikaning zamonaviy muammolari" mavzusidagi Respublika ilmiy konferensiyasi (Nukus 2020 y.), "Zamonaviy matematika va uning tadbiqlari" mavzusidagi Respublika ilmiy konferensiyasi (Toshkent, 2020 y.), "Operatorli algebralar, noassosiativ strukturalar va yondosh muammolar" mavzusidagi xalqaro ilmiy konferensiyasi

(Toshkent, 2020 y.), “Matematikaning zamonaviy muammolari” mavzusidagi birinchi xalqaro Al-Xorazmiy ilmiy konferensiyasi (Urganch, 2022 y.), “Matematika va mexanikaning zamonaviy masalalari” mavzusidagi xalqaro konferensiyasi (Baku, 2023 y.), “Kompleks analiz va uning tatbiqari” mavzusidagi xalqaro ilmiy konferensiyasi (Krasnoyarsk, 2023 y.), Gonchar va Vitushkin xotiralariga bag‘ishlangan xalqaro ilmiy konferensiya (Moskva, MI RAN, 2023 y.).

Ilmiy natijalar doimiy ravishda Urganch Davlat universitetining “Kompleks potentsiallar nazariyasi va uning tadbirlari” ilmiy seminarida va O‘zbekiston Milliy universiteti matematik analiz kafedrasining “Kompleks analizning zamonaviy masalalari” ilmiy seminarida muhokama qilinib kelingan.

Tadqiqot natijalarining e‘lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 23 ta ilmiy ish nashr ettirilgan, jumladan, milliy jurnallarda 7 ta, xalqaro jurnallarda 5 ta maqola, ilmiy anjumanlarda 11 ta tezis nashr etilgan.

Dissertatsiyaning hajmi va tuzilishi. Dissertatsiya kirish qismi, 5 ta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati, 145 betlik matndan iborat.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obykti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma‘lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning **“Parabolik Shteyn ko‘pxilliklari”** deb nomlanuvchi birinchi bobi yordamchi xarakterga ega. Ushbu bobda parabolik ko‘pxilliklar nazariyasidan asosiy ta‘riflar va muhim faktlar keltiriladi, shuningdek, kompleks potentsiallar nazariyasining asosiy prinsiplari va metodlari tavsiflanadi.

1-ta‘rif. Agar n o‘lchamli X kompleks analitik ko‘pxillik uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

- 1) X golomorf ajratilgan, ya‘ni X ning turli p_1 va p_2 nuqtalari uchun X da aniqlangan shunday f golomorf funksiya topilib, $f(p_1) \neq f(p_2)$ munosabat o‘rinli bo‘lsin;
- 2) X golomorf qavariq, ya‘ni har qanday $K \subset X$ kompakt qism to‘plam uchun uning golomorf qavariq qobig‘i bo‘lgan ushbu

$$\hat{K} = \{z \in X : |f(z)| \leq \sup_K |f|, \forall f \in \mathcal{O}(X)\}$$

to‘plam X ning kompakt qismi bo‘lsin, bu yerda $\mathcal{O}(X)$ – X da aniqlangan barcha golomorf funksiyalar to‘plami;

- 3) har bir $z \in X$ nuqta uchun n ta shunday $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{O}(X)$ funksiyalar topilib, bu nuqtaning biror atrofida lokal koordinatalarni tashkil etsin.

U holda X ko'pxillikka Shteyn ko'pxilligi deyiladi.

Shteyn ko'pxilliklarining kompleks fazolarga joylashtirilishi haqidagi quyidagi teorema muhim geometrik xarakteristika hisoblanadi. Chunki buning natijasida har qanday Shteyn ko'pxilligini biror kattaroq o'lchamdagi kompleks fazoning analitik qism ko'pxilligi sifatida qarash mumkin bo'ladi.

1-teorema. n o'lchamli X kompleks ko'pxillik Shteyn ko'pxiligi uchun unda aniqlangan $f_1, f_2, \dots, f_{2n+1} \in \mathcal{O}(X)$ golomorf funksiyalar topilib, $f = (f_1, f_2, \dots, f_{2n+1}) : X \rightarrow \mathbb{C}^{2n+1}$ akslantirish xosmas regulyar akslantirish bo'ladi, ya'ni X xosmas ravishda \mathbb{C}^{2n+1} kompleks fazoga joyashtiriladi.

Parabolik ko'pxilliklarni kiritishda va o'rganishda asosiy vosita bu $(dd^c u)^n$ Monj-Amper operatori va plyuripotensiallar nazariyasi hisoblanadi. Aytaylik, X Shteyn ko'pxilligi bo'lib, uning o'lchami n bo'lsin. Biz differensiallarning standart $d = \partial + \bar{\partial}$ va $d^c = \frac{\partial - \bar{\partial}}{4i}$ belgilashlaridan foydalanamiz. $u \in C^2(X)$ funksiya uchun

$$(dd^c u)^n = dd^c u \wedge dd^c u \wedge \dots \wedge dd^c u \quad (n \text{ marta})$$

operatorga kompleks Monj-Amper operatori deyiladi va $u \in X$ da hajm elementi orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$(dd^c u)^n = n! \det \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right) \beta_n.$$

Bu yerda $\beta_n = \left(dd^c |z|^2 \right)^n = \left(\frac{i}{2} \right)^n dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$.

2-ta'rif. Agar X Shteyn ko'pxilligida yuqoridan chegaralangan plyurisubgarmonik funksiyalar faqat o'zgarmas funksiyalar bo'lsa, ya'ni X da aniqlangan o'zgarmasdan farqli yuqoridan chegaralangan plyurisubgarmonik funksiyalar mavjud bo'lmasa, u holda X ga *parabolik* ko'pxillik deyiladi.

3-ta'rif. Agar X Shteyn ko'pxilligida shunday maxsus $\rho(z) \in psh(X)$ plyurisubgarmonik qamrov funksiyasi mavjud bo'lib, bu funksiya biror kompakt qism to'plamdan tashqarida maksimal bo'lsa, u holda bu ko'pxillikka *S-parabolik* deyiladi. Agar yuqoridagilarga qo'shimcha ravishda $\rho(z)$ funksiyaning uzluksizligi ham talab etilsa, u holda X ko'pxillikka *S*-parabolik* deyiladi.

S-parabolik ko'pxilliklarda plyuripotensiallar nazariyasi asoslari ishlab chiqilgan, shuningdek polinom tushunchasi va ekstremal Grin funksiyasi, regulyar kompakt va boshqa tushunchalarni aniqlash mumkin.

S-parabolik bo'lgan X ko'pxillik berilgan bo'lib, $\rho(z)$ uning maxsus qamrov funksiyasi bo'lsin. Biz quyidagi $u(z) \leq c_u + \rho^+(z), z \in X$, shartni qanoatlantiruvchi $u \in psh(X)$ funksiyalarning $\mathfrak{A}_\rho(X)$ Lelon sinfini qaraymiz. Bunda c_u o'zgarmas son u funksiyaga bog'liq.

$K \subset\subset X$ kompakt uchun

$$V_\rho(z, K) = \sup \left\{ u(z) : u \in \mathfrak{A}_\rho(X), u|_K \leq 0 \right\}.$$

funksiyani aniqlaymiz. U holda $V_\rho^*(z, K) = \overline{\lim_{w \rightarrow z} V_\rho(w, K)}$ yuqori regulyarizatsiyaga K kompaktning ρ -Grin funksiyasi deyiladi.

4-ta'rif. Agar $f(z) \in \mathcal{O}(X)$ funksiya uchun shunday c va d musbat haqiqiy sonlar topilib, barcha $z \in X$ uchun ushbu

$$\ln |f(z)| \leq d\rho^+(z) + c \quad (1)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(z)$ funksiyaga X da aniqlangan ρ -polinom (ko'phad) deyiladi. Bu yerda $\rho^+(z) = \max \{0, \rho(z)\}$. (1) tengsizlikni qanoatlantiruvchi d sonlar ichida eng kichigiga polinomning darajasi deyiladi (umuman olganda d ning minimumi butun son bo'lmasligi ham mumkin).

$K \subset X$ kompakt uchun plyuriregulyar nuqtalar ta'rifi klassik holdagi kabi aniqlanadi: $V_\rho^*(z^0, K) = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi barcha $z^0 \in X$ nuqtalar plyuriregulyar nuqtalar deyiladi. Agar $K \subset X$ kompaktning barcha $z \in K$ nuqtalarida $V_\rho^*(z, K) = 0$ tenglik bajarilsa, u holda bu kompaktga plyuriregulyar kompakt deyiladi.

2-teorema. S^* -parabolik ko'pxillik X berilgan bo'lib, $\rho(z)$ uning maxsus qamrov funksiyasi bo'lsin. Quyidagi psevdosharlarni qaraymiz:

$$K_r = \{z \in X : \rho(z) \leq r\}, B_r = \{z \in X : \rho(z) < r\},$$

bunda $r > r_0 = \min_X \rho(z)$. U holda quyidagi tengliklar o'rinli:

$$V_\rho^*(z, K_r) = \sup \{\rho(z) - r, 0\} = (\rho - r)^+(z), z \in X,$$

$$\omega^*(z, K_r, B_R) = \sup \left\{ \frac{\rho(z) - R}{R - r}, -1 \right\}, \forall z \in X (R > r).$$

3-teorema(W.Stoll). (X_1, ρ_1) va (X_2, ρ_2) mos ravishda n_1 va n_2 o'lchamli S^* -parabolik ko'pxilliklar bo'lsin. Biz $n = n_1 + n_2$ o'lchamli $X = X_1 \times X_2$ ko'pxillikni aniqlaymiz va $\pi_1 : X \rightarrow X_1$, $\pi_2 : X \rightarrow X_2$ proyeksiyalar bo'lsin. U holda $X = X_1 \times X_2$ ko'pxillik $\rho = \ln(e^{\rho_1 \circ \pi_1} + e^{\rho_2 \circ \pi_2})$ maxsus qamrov funksiyasi bilan S^* -parabolik ko'pxillik bo'ladi.

S^* -parabolik ko'pxilliklar ularda aniqlangan analitik funksiyalarning Freshe fazolari nuqtai nazaridan qaysidir ma'noda \mathbb{C}^n fazo tipidagi mukammal ko'pxilliklar sirasiga kiradi. Darajalangan Freshe fazosi bu sanoqli normalangan Y

fazo va uning topologiyasini aniqlovchi tayinlangan $(\|\cdot\|_s)$ yarimnormalarning $(Y, \|\cdot\|_s)$ juftligidir.

A.Aytuna ishlarida Shteyn ko'pxilliklarini parabolik bo'lishi va bu ko'pxillikda aniqlangan analitik funksiyalarning Freshe fazosining aniq chiziqli-topologik xossasi o'rtasida bog'liqlik o'rnatilgan. $\mathcal{O}(X)$ analitik funksiyalar fazosi bo'lsa, $\mathcal{O}(X)$ dagi topologiya esa X ning kompakt qism to'plamlarida tekis yaqinlashish topologiyasidir.

4-teorema(A.Aytuna). n o'lchamli X Shteyn ko'pxilligi uchun quyidagilar ekvivalent:

- X parabolik ko'pxillik;
- $\mathcal{O}(X)$ Freshe fazosi sifatida $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$ fazoga izomorf.

Parabolik ko'pxilliklar orasida ko'phadlar to'plami trivial bo'lganlari ham mavjud. Bunday ko'pxillikka misol qurish uchun quyidagi teorema yordam beradi

5-teorema (Aytuna-Sadullayev). Shunday $K \subset \mathbb{C}$ polyar kompakt va \mathbb{C} da subgarmonik va $\mathbb{C} \setminus K$ to'plamda garmonik bo'lgan $u(z)$ funksiya mavjudki, $u|_K = -\infty$ va

$$\lim_{z \rightarrow K} \frac{u(z)}{\ln \text{dist}(z, K)} = 0. \quad (2)$$

tenglik bajariladi.

Agar biz yuqoridagi teoremada ta'kidlangani kabi K kompakt to'plamni olib $X = \overline{\mathbb{C}} \setminus K$ ko'pxillikni qarasaq, u holda maxsus qamrov funksiyasi sifatida yana shu teoremada aytilgan $\rho(z) = -u(z)$ potensialni olamiz. U holda $\rho(z)$ $X \setminus \{\infty\}$ da garmonik, $\rho(\infty) = -\infty$ va $z \rightarrow K$ da $\rho(z) \rightarrow \infty$ shartlar bajariladi. Shunday qilib, (X, ρ) S^* -parabolik ko'pxillik bo'ladi. Bundan tashqari bu ko'pxillikda notrivial bo'lgan ko'phad mavjud emas, ya'ni X da aniqlangan ρ -ko'phad faqat o'zgarmas funksiyalar bo'ladi.

Dissertatsiyaning "**Regulyar parabolik ko'pxilliklar**" deb nomlangan ikkinchi bobida ularda aniqlangan polinomlarning boy oilasiga ega bo'lgan S -parabolik ko'pxilliklari o'rganiladi.

5-ta'rif. Agar S -parabolik X ko'pxillik uchun unda aniqlangan barcha ρ -polinomlar fazosi $\mathcal{P}_\rho(X)$ analitik funksiyalar fazosi $\mathcal{O}(X)$ da zich bo'lsa, u holda X *regulyar parabolik* deyiladi.

Mazkur bobing birinchi va ikkinchi paragraflarida regulyar parabolik ko'pxilliklarga bir qator misollar va ularning xossalari o'rganilgan. Xususan, \mathbb{C}^n kompleks fazoda butun funksiyalarning grafiklari qaralib, bunday ko'pxilliklarning regulyar parabolik bo'lishligi ko'rsatiladi.

Fazoda analitik funksiyaning grafigi $X = \{z \in \mathbb{C}^n : z_n = f('z)\}$, bu yerda $z = ('z, z_n) = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n)$, har doim S -parabolik bo'lib, maxsus qamrov funksiyasi sifatida $\rho(z) = \ln^+ \|z\|$ funksiyani olish mumkin. Bunda $\rho(z) \in psh(\mathbb{C}^n)$ va $\{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) \leq M\} \subset\subset X, \forall M > 0$, shuningdek $(dd^c \rho)^{n-1} = 0$ tenglik $\{z \in X : \|z\| \leq 1\} \subset\subset X$ kompaktdan tashqarida bajariladi. X da ρ -polinomlar odatdagidek aniqlanadi.

6-teorema. *Analitik funksiyaning $X = \{z \in \mathbb{C}^n : z_n = f('z)\}$ grafigi $\rho = \ln \|z\|$ qamrov funksiyasi bilan regulyar parabolik ko'pxillik bo'ladi, ya'ni har qanday $F(z) \in \mathcal{O}(X)$ golomorf funksiya X ning kompakt qism to'plamlarida ρ -polinomlar bilan tekis yaqinlashtirilishi mumkin.*

Ikkinchi bobning uchinchi paragrafi regulyar parabolik ko'pxilliklarning xossalriga bag'ishlangan. Bunda ikkita regulyar parabolik ko'pxilliklarning Dekart ko'paytmasi yana regulyar parabolik bo'lishi isbotlanadi va regulyar parabolik ko'pxilliklarning qism ko'pxilliklarini regulyarlik shartlari o'rganiladi.

7-teorema. (X_1, ρ_1) va (X_2, ρ_2) mos ravishda n_1 va n_2 o'lchamli regulyar parabolik ko'pxilliklar bo'lsin. Biz $n = n_1 + n_2$ o'lchamli $X = X_1 \times X_2$ ko'pxillikni aniqlaymiz va $\pi_1 : X \rightarrow X_1, \pi_2 : X \rightarrow X_2$ proyeksiyalar bo'lsin. U holda $X = X_1 \times X_2$ ko'pxillik $\rho = \ln(e^{\rho_1 \circ \pi_1} + e^{\rho_2 \circ \pi_2})$ maxsus qamrov funksiyasi bilan regulyar parabolik ko'pxillik bo'ladi.

8-teorema. n o'lchamli X regulyar parabolik ko'pxillik va f_1, f_2, \dots, f_m – chiziqli erkli ρ -polinomlar bo'lsin. Agar ushbu

$$F = \{z \in X : f_1(z) = 0, \dots, f_m(z) = 0\},$$

analitik to'plam bo'shmas bo'lib, kritik nuqtalarga ega bo'lmasa (ya'ni F da $df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_m \neq 0$), u holda F ning bog'lamli komponentalari X ning regulyar parabolik qism ko'pxilligi bo'ladi.

Dissertatsiyaning uchinchi bobi “**Veyershtrass analitik to'plami to'ldiruvchisining regulyarligi**” deb nomlanib, bunda $A \subset \mathbb{C}^n$ analitik to'plamlarni to'ldiruvchisining regulyar parabolikligi o'rganiladi.

\mathbb{C}^n fazoda Veyershtrass ko'phadining nollari to'plami berilgan bo'lsin

$$A = \left\{ z = ('z, z_n) \in \mathbb{C}^n : F(z) := z_n^m + f_{m-1}('z)z_n^{m-1} + \dots + f_1('z)z_n + f_0('z) = 0 \right\},$$

bu yerda $f_j('z), j = 0, 1, 2, \dots, m-1$, koeffitsiyentlar $'z = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ o'zgaruvchining (barchasi ham ko'phad bo'lmagan) butun funksiyalari. U holda $X = \mathbb{C}^n \setminus A$ ko'pxillik S^* -parabolik bo'lib, uning maxsus qamrov funksiyasi sifatida ushbu

$$\rho(z) = \frac{1}{2} \ln \left(|z|^2 + \left| F(z) + \frac{1}{F(z)} \right|^2 \right): \rho(z) \in psh(X)$$

funksiyani olishimiz mumkin. Bu funksiya $Q = \{F'(0, z_n) = 0\}$ chekli to'plamdan tashqarida maksimal, ya'ni $(dd^c \rho)^n = 0, z \in X \setminus Q$.

9-teorema. *Bizga quyidagicha*

$$A = \left\{ (z, z_n) \in \mathbb{C}^n : F(z) := z_n^m + f_{m-1}(z)z_n^{m-1} + \dots + f_1(z)z_n + f_0(z) = 0 \right\} \quad (3)$$

Veyershtrass polinomining nollari to'plami berilgan bo'lib, $f_j(z), j = 0, 1, 2, \dots, m-1$, koeffitsiyentlar $z = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$ o'zgaruvchining butun funksiyalari bo'lsin. Agar $F(z)$ funksiya z bo'yicha

ko'phad bo'lmasa, u holda $\rho(z) = \frac{1}{2} \ln \left(|z|^2 + \left| F(z) + \frac{1}{F(z)} \right|^2 \right)$ maxsus qamrov

funksiyasi bilan S^ -parabolik bo'lgan $X = \mathbb{C}^n \setminus A$ ko'pxillikda aniqlangan f golomorf funksiya darajasi d ga teng ρ -polinom bo'lishi uchun uning quyidagi*

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^d a_k z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_{n-1}^{k_{n-1}} (F(z))^{k_n} + \sum_{|k|=0}^{d-1} b_k z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_{n-1}^{k_{n-1}} \left(\frac{1}{F(z)} \right)^{k_n+1}, \quad (4)$$

chekli yoyilmaga ega bo'lishi zarur va yetarli. Bunda a_k va b_k o'zgaruvchilar koeffitsiyentlar.

Quyidagi teorema $X = \mathbb{C}^n \setminus A$ to'ldiruvchining regulyar bo'lishligi kriteriyasidir.

10-teorema. *$X = \mathbb{C}^n \setminus A$ ko'pxillik regulyar bo'lishi uchun $f(z) = z_n$ funksiyaning X ning ichida ρ -polinomlar bilan tekis yaqinlashtirilishi zarur va yetarli.*

Dissertatsiyaning to'rtinchi bobi "**Regulyar parabolik ko'pxilliklarda golomorf funksiyalarni polinomlar bilan yaqinlashtirish**" deb nomlanadi. Ushbu bobda polinomlarni baholashda foydalaniladigan ekstremal funksiyalar ta'riflanadi va ularning bir qator xossalari isbotlanadi. Bobning asosiy natijasi parabolik ko'pxilliklarda Bernshteyn-Uolsh teoremasining analogi hisoblanadi.

Kompleks tekisliklarda approksimatsiya va interpolatsiya nazariyasida $K \subset \mathbb{C}$ kompakt to'plamning Grin funksiyasi deb ataluvchi $\mathbb{C} \setminus \hat{K}$ da garmonik va $z \rightarrow \infty$ da $V(z, K) \sim \ln|z| + c$ shartni qanoatlantiruvchi $V(z, K)$ funksiya muhim o'rin tutadi. Bu funksiya uchun $V(z, K)|_{\hat{K}} = 0$ tenglik ham bajariladi. J.L.Uolsh monografiyasida (Interpolation and approximation, Waverly Press, Baltimore, Md., 1935) bu Grin funksiyaning xossalari va qo'llanilishi batafsil yoritilgan. Asosan $V(z, K)$ funksiya polinomlar modulini baholashda

foydalanilgan, ya'ni har qanday $P(z)$ polinom uchun ushbu Bernshteyn-Uolsh tengsizligi o'rinli:

$$|P(z)| \leq \|P\|_K \cdot e^{\deg P \cdot V(z,K)}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

bu yerda $\|P\|_K$ – supremum norma.

Bernshteyn va Uolsh kompleks tekislikdagi kompakt to'plamda golomorflik va tez (geometrik progressiya tezligi bilan) polinomial yaqinlashtirilish o'rtasidagi bog'liqlikni isbot qilishdi.

Bernshteyn-Uolsh teoremasining ko'p o'lchamli analogini isbotlash uchun tekislikdagi Grin funksiyasiga o'xshash funksiyani kompleks fazoda ham aniqlash masalasi turar edi. 1962 yilda J.Sichak ushbu

$$\Phi(z, K) = \sup \left\{ |P(z)|^{\frac{1}{\deg P}} : P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n), \|P\|_K \leq 1 \right\}$$

tenglik bilan aniqlanuvchi ekstremal funksiya terminida Bernshteyn-Uolsh teoremasini ko'p o'lchamli analogini isbotladi.

S -parabolik ko'pxilliklarda ham ekstremal funksiyalarni shunga o'xshash tarzda aniqlab olamiz: X ko'pxillik S -parabolik va $\rho(z)$ uning maxsus qamrov funksiyasi bo'lsin. $\mathcal{P}_\rho(X)$ orqali X da aniqlangan barcha ρ -polinomlar fazosini belgilaymiz. Tayinlangan $K \subset X$ kompakt uchun ushbu funksiyani aniqlaymiz:

$$\Phi_\rho(z, K) = \sup \left\{ |f(z)|^{\frac{1}{\deg f}} : f \in \mathcal{P}_\rho(X), \|f\|_K \leq 1 \right\}.$$

Shuni ta'kidlab o'tish joizki, $\Phi_\rho(z, K)$ funksiya faqat va faqat X regulyar parabolik bo'lgandagina ahamiyatlidir.

$\Phi_\rho(z, K)$ funksiya quyidagi xossalarga ega:

1) agar $K \subset K_1 \subset X$ bo'lsa, u holda $\Phi_\rho(z, K) \geq \Phi_\rho(z, K_1)$, $\forall z \in X$;

2) ixtiyoriy $P(z) \in \mathcal{P}_\rho^d(X)$ polinom va $K \subset X$ kompakt uchun

$$|P(z)| \leq \|P\|_K \cdot (\Phi_\rho(z, K))^{\deg P}, \quad z \in X, \quad (5)$$

Bernshteyn-Uolsh tengsizligi o'rinli. Bunda $\|P\|_K = \sup_{z \in K} |P(z)|$ – supremum norma;

3) agar $\Phi_\rho(z, K)$ funksiya yuqoridan lokal chegaralanmagan bo'lsa, u holda $K \subset X$ kompakt X da plyuripolyar to'plam bo'ladi. Shunday qilib, plyuripolyar bo'lmagan $K \subset X$ kompakt uchun $\Phi_\rho(z, K)$ funksiya har doim yuqoridan lokal chegaralangan bo'ladi;

4) plyuripolyar bo'lmagan $K \subset X$ kompakt uchun $\ln \Phi_\rho^*(z, K) \in psh(X)$ bo'ladi;

$K \subset X$ kompakt to'plam uchun uning polinomial qavariq qobig'ini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\hat{K} = \left\{ z \in X : |P(z)| \leq \|P\|_K, \forall P \in \mathcal{P}_\rho(X) \right\}.$$

5) Ixtiyoriy $K \subset X$ kompakt uchun $\Phi_\rho(z, \hat{K}) \equiv \Phi_\rho(z, K)$ tenglik o'rinli.

11-teorema. (X_1, ρ_1) va (X_2, ρ_2) regulyar parabolik ko'pxilliklar bo'lib, $K_1 \subset X_1, K_2 \subset X_2$ ixtiyoriy kompakt to'plamlar bo'lsin. U holda $\rho = \ln(e^{2\rho_1 \circ \pi_1} + e^{2\rho_2 \circ \pi_2})$ maxsus qamrov funksiyasiga ega $X = X_1 \times X_2$ regulyar parabolik ko'pxillikdagi $K = K_1 \times K_2 \subset X_1 \times X_2$ kompaktning ekstremal funksiyasi uchun ushbu

$$\Phi_\rho(z, K) = \max \left\{ \Phi_{\rho_1}(\pi_1(z), K_1), \Phi_{\rho_2}(\pi_2(z), K_2) \right\}.$$

tenglik o'rinli. Bunda $\pi_1 : X \rightarrow X_1, \pi_2 : X \rightarrow X_2$ – proyeksiyalar.

6-ta'rif. X regulyar parabolik ko'pxillikning qismi bo'lgan K kompakt uchun uning $\Phi_\rho(z, K)$ ekstremal funksiyasi X da uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda bu to'plamga regulyar kompakt deyiladi.

X ko'pxillik S -parabolik va $\rho(z)$ uning maxsus qamrov funksiyasi bo'lsin. $\mathcal{P}_\rho^d(X)$ orqali X da aniqlangan va darajasi d dan oshmagan barcha ρ -polinomlar fazosini belgilaymiz. f funksiyaning K kompaktda $\mathcal{P}_\rho^d(X)$ polinomlar fazosidan minimal chetlanishini

$$e_d(f, K) = \inf_{P \in \mathcal{P}_\rho^d(X)} \sup_{z \in K} |f(z) - P(z)|$$

orqali belgilaymiz.

12-teorema. Bizga X regulyar parabolik ko'pxillikda $K \subset X$ regulyar kompakt berilgan bo'lsin. U holda K da aniqlangan $f(z)$ funksiyaning $D_R = \left\{ z \in X : \Phi_\rho(z, K) < R \right\}, R > 1$ sohaga golomorf davom etishi uchun

$$\overline{\lim}_{d \rightarrow \infty} e_d^{1/d}(f, K) \leq \frac{1}{R}$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Mazkur teoremadan Runge teoremasining analogi bo'lgan ushbu natija kelib chiqadi:

1-natija. X regulyar parabolik ko'pxillik bo'lib, $\rho(z)$ uning maxsus qamrov funksiyasi bo'lsin. Agar K kompakt X dagi ρ -polinomial qavariq kompakt bo'lsa, u holda K ning biror atrofida golomorf bo'lgan ixtiyoriy $f(z)$ funksiyaning K kompaktda ρ -polinomlar bilan tekis yaqinlashtirish mumkin.

Shuni ta'kidlab o'tish joizki, yuqoridagi 12-teorema va uning natijasi ham \mathbb{C}^n fazoda Veyl integral formulasi yordamida isbotlanadi va bunda Xefer yoyilmalari muhim rol o'ynaydi. Ammo X ko'pxillikda bunga mos keluvchi integral formula

yo'qligi sababli boshqacha geometrik usullardan, ya'ni kompaktni biror atrofni katta o'lchamli \mathbb{C}^N fazoga xosmas tarzda joylash va qism ko'pxilliklardan golomorf davom ettirish haqidagi Oka-Kartan teoremasidan foydalaniladi.

Dissertatsiyaning **“Algebraik ko'pxilliklarda golomorf funksiyalarni polinomlar bilan yaqinlashtirish”** deb nomlangan beshinchi bobida \mathbb{C}^N kompleks fazoning algebraik qism ko'pxilliklari regulyar parabolik ko'pxilliklar sifatida qaraladi. A algebraik qism ko'pxilliklarda aniqlangan polinomlarni \mathbb{C}^N fazoga davom ettirish masalalari o'rganiladi. Algebraik ko'pxilliklarda ekstremal funksiyalarning qo'shimcha xossalari isbotlanadi. Grin va Sichak ekstremal funksiyalarining ekvivalentligi isbotlanadi. Bobning so'ngida algebraik ko'pxilliklarda Bernshteyn-Uolsh teoremasining analogi Grin funksiyasi terminida isbotlanadi.

Agar $p(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$ funksiya uchun shunday $C, d > 0$ o'zgarmas sonlar topilib, $A \subset \mathbb{C}^N$, $\dim A = n$ algebraik ko'pxillikda $|p(z)| \leq C(1 + \|z\|)^d$, $z \in A$, tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda unga bu algebraik ko'pxillikdagi polinom deyiladi. Bu yerda $\|z\|$ — \mathbb{C}^N dagi Evklid normasi. Yuqoridagi tengsizlikni qanoatlantiruvchi d sonlarning eng kichigi p polinomning darajasi deyiladi: $d = \deg p$. $A \subset \mathbb{C}^N$ algebraik ko'pxillikda aniqlangan darajasi m dan oshmagan

polinomlar sinfini $\mathcal{P}^m(A)$ orqali, barcha polinomlar fazosini esa

$\mathcal{P}(A) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{P}^m(A)$ orqali belgilaymiz. Polinomlar ta'rifida $p(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^N)$ o'rniga $p(z) \in \mathcal{O}(A)$ sinf bilan cheklanish mumkin, zero $A \subset \mathbb{C}^N$, $\dim A = n$, qism ko'pxillikda aniqlangan har qanday golomorf funksiya butun fazo \mathbb{C}^N ga golomorf funksiya sifatida davom etadi.

Algebraik ko'pxilliklar S - parabolik ko'pxillik bo'lib, unda polinom ta'rifini boshqacha tarzda, $\rho(z)$ maxsus qamrov funksiyasidan foydalangan holda berish mumkin. $A \subset \mathbb{C}^N$ algebraik ko'pxillikda maxsus qamrov funksiyasini aniqlash uchun esa biz Rudinning geometrik kriteriyasidan foydalanamiz: istalgan sof $n, 1 \leq n < N$, o'lchamli $A \subset \mathbb{C}^N$ algebraik to'plam tegishli unitar almashtirishdan keyin ushbu ko'rinishga keladi:

$$A \subset \left\{ z \in \mathbb{C}^N : \|z''\| < c(1 + \|z'\|)^\beta \right\}, \quad z' = (z_1, \dots, z_n), \quad z'' = (z_{n+1}, \dots, z_N), \quad (6)$$

va bunda c, β — biror o'zgarmas sonlar. A.Sadullayev tomonidan yuqoridagi kriteriyaga aniqlik kiritilib, $\beta = 1$ deb olish mumkinligi isbotlanadi va shu bilan har qanday algebraik to'plamni konusga joylashishi mumkinligi kelib chiqadi:

$$A \subset \left\{ z \in \mathbb{C}^N : \|z''\| < c(1 + \|z'\|) \right\}. \quad (7)$$

Bundan foydalanib A da maxsus qamrov funksiyasini quyidagicha olishimiz mumkin:

$$\rho(z) = \ln^+ \|z\|, z \in A, \rho(z) \in psh(A)$$

va $A \setminus \{\|z\| \leq 1\}$ da $(dd^c \rho(z))^n = 0$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Endi esa A da polinomni ρ funksiya terminida 4-ta’rifdan foydalanib aniqlash mumkin.

$A \setminus \{\|z\| \leq 1\}$ to‘plamda $\|z'\| \leq \|z\| \leq 2c\|z'\|$ tengsizlik bajarilgani sabab, ixtiyoriy $P(z) \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ polinomning $p = P|_A$ qisqartmasi A da ρ -polinom bo‘ladi.

Beshinchi bobning asosiy natijasi quyidagidan iborat

13-teorema. \mathbb{C}^N fazoning qismi bo‘lgan A -algebraik ko‘pxillik berilgan bo‘lsin. U holda har qanday $K \subset A$ kompakt uchun $V_A(z, K) = \ln \Phi_A(z, K)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi, bu yerda

$$\Phi_A(z, K) = \sup \left\{ |p(z)|^{\frac{1}{\deg p}} : p(z) \in \mathcal{P}(A), \|p\|_K \leq 1 \right\}.$$

XULOSA

Mazkur dissertatsiya ishining maqsadi parabolik ko‘pxilliklarda analitik funksiyalar nazariyasini qurishdan iborat. Shu asosda parabolik ko‘pxilliklar xossalari, ularda aniqlangan analitik funksiyalar fazolari va polinomlar oilasining xossalari o‘rganilgan.

Parabolik ko‘pxilliklarda polinomlar strukturalari tadqiq etilib, ularning regulyarligiga oid bir qator tasdiqlar isbot qilingan. Regulyar va regulyar bo‘lmagan parabolik ko‘pxilliklarga turli xil misollar qurilgan.

Algebraik ko‘pxilliklar va Veyershtass ko‘phadlari nollari to‘plami to‘ldiruvchisining regular parabolik bo‘lishligi tadqiq etilgan. Bundan tashqari regulyar parabolik ko‘pxilliklarning dekart ko‘paytmasining regulyar parabolik bo‘lishligi va regulyar parabolik ko‘pxilliklarning qism ko‘pxilliklarining regulyar bo‘lishligi shartlari o‘rganilgan.

Analitik funksiyalarning kompakt to‘plamlarda polinomlar bilan yaqinlashtirilishi masalalari tadqiq etilgan. Parabolik ko‘pxilliklarda ekstremal plyurisubgarmonik funksiyalarning bir qator muhim xossalari isbotlangan. Mashhur Bernshteyn-Uolsh teoremasining parabolik ko‘pxilliklardagi analogi Grin funksiyasi va Sichak ekstremal funksiyalari vositasida isbotlangan.

Hozirgi kunda olingan natijalar analitik davom ettirish nazariyasi va analitik funksiyalarni cheksiz uzoqlashgan to‘plamlar atrofida o‘rishini o‘rganish masalalarida o‘z tadbiqlarini topgan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО**

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ,
УРГЕНЧСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

АТАМУРАТОВ АЛИМАРДОН АБДИРИМОВИЧ

**ТЕОРИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ НА ПАРАБОЛИЧЕСКИХ
МНОГООБРАЗИЯХ**

01.01.01 – Математический анализ

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА (DSc)
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК**

ТАШКЕНТ – 2025

Тема докторской (Doctor of Science) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за № В2017.2.DSc/FM69.

Докторская диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовского и Ургенчском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (<http://kengash.mathinst.uz>) и информационно-образовательном портале «ZIYONET» (www.ziyonet.uz)

Научный консультант: Садуллаев Азимбай
доктор физико-математических наук, академик

Официальные оппоненты: Щербина Николай Васильевич
доктор физико-математических наук, профессор
Кудайбергенов Каримберген Кадирбергенович
доктор физико-математических наук, профессор
Имомкулов Севдиёр Акрамович
доктор физико-математических наук, профессор

Ведущая организация: Сибирский Федеральный университет

Защита диссертации состоится « 18 » февраля 2025 года в 16:00 часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 Института Математики имени В.И.Романовского (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

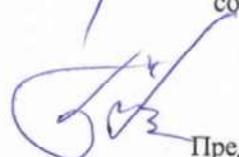
С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (регистрационный номер № 197). (Адрес: 100174, г.Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская. Тел.: (+99871)-207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 31 » января 2025 года.
(протокол рассылки № 2 от « 31 » января 2025 года).




У.А.Розиков
Председатель Научного совета
по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., академик


Ж.К. Адашев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., старший
научный сотрудник


У.У. Жамилов
Председатель Научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., старший научный
сотрудник.

Введение (аннотация докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные и практические исследования, проводимые в мировом масштабе, в большинстве случаев представляются математическими моделями, которые связаны комплексными многообразиями в частности и римановыми поверхностями. В теории римановых поверхностей многообразия типа комплексной плоскости называют параболическими, а многообразия, эквивалентные единичному кругу – гиперболическими. В общем случае понятие параболичности характеризуется по-разному у многих авторов. Например, в терминах метрики Кобаяши и Каратеодори (тривиальность – параболичность, нетривиальность – гиперболичность), в терминах существования специальной функции исчерпания и т.п. У некоторых авторов важно не существование ограниченной нетривиальной голоморфной функции (слабая параболичность). В многомерном комплексном анализе в целях обобщения теории распределения значений Неванлинны В. Штолл и П.Грифитс - Ж.Кинг определили параболичность, требуя существования специальной функции исчерпания. Параболические многообразия и теория аналитических функций на них были применены в теории динамических систем, в теории распределения значений мероморфных функций, в фрактальной геометрии и др. Поэтому исследования свойств аналитических функций и в частности изучения полиномиальную аппроксимацию на параболических многообразиях остается одной из важных задач в этом направлении.

В настоящее время методы теории плюрипотенциала служат важным математическим инструментом при исследовании сложных моделей. Как известно, на комплексных многообразиях теория аналитических функций строится локально. Для получения более общих представлений о моделированных процессах требуется изучить глобальные свойства объектов исследования. Эти задачи требуют построение более качественную теорию аналитических функций на параболических многообразиях. Изучения пространства полиномов и аналитических функций, полиномиальную аппроксимацию, алгебраические множества, связь между быстрой полиномиальной аппроксимации и аналитическим продолжением функций входят в задачи исследования данной работы.

В нашей стране особое внимание уделяется разработке и применению современных математических методов для решения прикладных задач математической физики, имеющих практическое и фундаментальное значение. В частности, внимание уделяется исследованиям в теории функций многих комплексных переменных, а также приложениям теории плюрипотенциала в различных областях современной математики и теоретической физики. В результате были получены значительные результаты по обоснованию теории потенциала и по изучению экстремальных функций на параболических многообразиях и их приложению в вопросах приближения аналитических функций полиномами.

Проведение исследований на уровне международных стандартов в области математики, физики и современных методов математической физики является одной из основных задач научно-исследовательских и высших учебных заведений¹. В рамках реализации указа важное значение имеет развитие теории аналитических функций на параболических многообразиях, обоснования теории потенциала на параболических многообразиях, базирующаяся на комплексном операторе Монжа-Ампера, изучения свойства экстремальных плюрисубгармонических функций и вопросы полиномиальной аппроксимации аналитических функций.

Данная диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан» от 9 июля 2019 года, № ПП-4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 7 мая 2020 года, №УП «Об утверждении Концепции развития науки до 2030 года» от 29 октября 2020 года, № УП-6108 «О мерах по развитию сфер образования и воспитания, и науки в новый период развития Узбекистана» от 6 ноября 2020 года, № УП-60 «О Стратегии развития Нового Узбекистана на 2022 – 2026 годы» от 28 января 2022 года а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Связь исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики. Настоящая работа выполнена в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий Республики Узбекистан № Ф4 «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации. Исследования, с приложением понятия параболичности в многомерной теории распределения значений голоморфных и мероморфных функций впервые были проведены в Принстонском университете (США). Затем представители научной школы из университета Вупперталь (Германия) построили теорию Неванлинны на параболических многообразиях. Благодаря французской школе математиков из Тулузы в теорию параболических многообразий были привлечены методы теории плюрипотенциала. Там также были введены понятия полиномов на параболических многообразиях. Геометрические аспекты параболических многообразий были исследованы в Институте Фурье (Франция), Университетах Индианы (США), Тулона (США), Флоренции (Италия). В этих центрах активно велись исследования о вложении параболических многообразий в комплексные пространства большой размерности и

¹ Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП-4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 7 мая 2020 года

параболические расслоения. Изучение пространств голоморфных и плюрисубгармонических функций на параболических многообразиях активно проводится в Университете Сабанчи (Турция), в Национальном университете Узбекистана и в Институте математики Академии наук Республики Узбекистан, Ургенчском государственном университете. Параболические многообразия и их различные расширения стали объектом активного изучения в ряде международных научных центров, включая университеты Тиан Лонг и Нгуена (Вьетнам), Ренмин и Чонкинг (Китай), Палацкого и Томаша Бата (Чехия), университет Хьюстона (США), а также Институт математики (Тайвань). Их широкое применение в таких областях, как комплексные динамические системы, теория Неванлинны, теория пространств аналитических функций и другие направления, делает эту тему особенно актуальной для современной математики.

Степень изученности проблемы. В 80-х годах прошлого столетия была построена теория плюрипотенциала, в связи с ее востребованностью в многомерном комплексном анализе. Эта теория пополнила многомерный комплексный анализ многими новыми фундаментальными результатами, которые успешно применяются в различных областях теоретической физики и математики. Комплексификация основных объектов прикладной математики приводит к комплексным многообразиям. В геометрической теории функций комплексных переменных выделяют несколько типов комплексных многообразий, обладающих специальными структурами, которые упрощают решение конкретных задач. Среди них особое внимание уделяется римановым поверхностям, аналитическим и алгебраическим множествам. Параболические многообразия занимают особое место, поскольку для их изучения эффективно применяются как геометрические методы, так и инструменты теории потенциала. Исследования в этом направлении начались в конце 1970-х годов и привели к значительным результатам в изучении параболических многообразий. Среди ключевых работ можно выделить исследования Р. Фути, который определил условия кривизны, обеспечивающие алгебраическое вложение таких многообразий, и Д. Бернса, изучавшего кривизну параболических расслоений.

А.Зариахи заложил основы теории плюрипотенциала на параболических многообразиях, а Мин Ру и Ж.Ванг, доказали обобщенную вторую основную теорему теории Неванлинны для параболических многообразий. В работах К.Атаханова, А.Садуллаева, Г.Л. Эйшлина, а также Й. Лиу и М.Ру изучены дефектные дивизоры голоморфных и мероморфных отображений на параболических многообразиях. А. Айтун, Ж. Кроне и Т. Терзиоглу исследовали линейно-топологические свойства пространств Фреше аналитических функций, в то время как А. Айтун и А. Садуллаев выполнили классификацию параболических многообразий и изучили их теоретико-потенциальные свойства и пространства полиномов. Работы М. Калка и Г. Патриззио были посвящены строго параболическим расщепляемым многообразиям, а Ф. Форстнерич исследовал сингулярные и

несингулярные расслоения штейновых многообразий. А. Снаебжарнарсон внёс вклад в изучение полиномиальных аппроксимаций на этих многообразиях.

Современные исследования активно продолжаются в несколько направлениях, в которых получены значительные результаты. В работах А. Садуллаева и Х. Камолова заложены основы теории плюрипотенциала на параболических аналитических поверхностях. В. Чен и В.Т. Нгуен доказали основные теоремы теории Неванлинны на p -параболических кэлеровых многообразиях. В недавних работах П. Пешка, Ж. Микеш, Х. Чуда и М. Шина, а также Ж. Чена и К. Занга рассмотрены обобщённые версии второй основной теоремы для мероморфных отображений, пересекающихся с движущимися целями на параболических многообразиях. Эти работы способствуют развитию теории и её приложений в различных областях математики и теоретической физики.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполнена диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научного исследования Хорезмского регионального отделения Института Математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан, а также планом научного исследования кафедры математики Ургенчского государственного университета по теме «Комплексная теория потенциала».

Целью исследования является построение глобальной теории аналитических функций на параболических многообразиях, доказательство основных фундаментальных теорем полиномиальной аппроксимации аналитических функций на параболических многообразиях.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

исследовать регулярные параболические многообразия. Доказать регулярную параболичность декартова произведения регулярных параболических многообразий;

исследовать и определить условия регулярности подмногообразий регулярных параболических многообразий;

показать регулярную параболичность графика целых функций в комплексных пространствах. Установить эквивалентность экстремальных функций Сичака и Захарюты на графиках аналитических функций.

доказать S -параболичность дополнения множества нулей полинома Вейерштрасса;

определить структуру полиномов, определенных на дополнении множества нулей полинома Вейерштрасса;

получить критерий регулярной параболичности дополнения множества нулей полинома Вейерштрасса;

доказать свойства экстремальной функции Сичака Φ_ρ на параболических многообразиях. Исследовать регулярность компактов на параболических многообразиях;

доказать аналог теоремы Бернштейна-Уолша на параболических многообразиях в терминах экстремальной функции Φ_ρ ;

доказать аналог теоремы Рунге на параболических многообразиях;
установить эквивалентность экстремальной функции Грина и экстремальной функции Сичака на алгебраических многообразиях;

доказать аналог теоремы Бернштейна-Уолша на алгебраическом многообразии в терминах функции Грина $V(z, K)$.

Объект исследования. Параболические многообразия, аналитические и плюрисубгармонические функции, определенные на параболических многообразиях. Теория плюрипотенциала на параболических многообразиях.

Предмет исследования. Пространства аналитических функций, определенных на параболических многообразиях.

Методы исследования. В диссертации использовались методы теории потенциала и теории функций многих комплексных переменных и теории нелинейного дифференциального оператора Монжа-Ампера.

Научная новизна исследования. Диссертационная работа является новым научным направлением. В ней:

представлено описание полинома на декартовом произведении параболических многообразий и с использованием метода установления полноты системы полиномов в пространстве голоморфных функций доказано, что декартово произведение регулярных параболических многообразий также обладает свойством регулярной параболичности;

на основе описания пространства полиномов и плюрисубгармонических функций установлена эквивалентность экстремальных функций Сичака и Захарюты на графиках аналитических функций;

в области, исключаяющей нули полинома Вейерштрасса, получены оценки коэффициентов разложения аналитических функций в ряды Вейля внутри специальных полиэдров, и доказан критерий регулярности параболических многообразий, дополняющих множество нулей полинома Вейерштрасса;

доказано, что экстремальная функция для декартового произведения компактных множеств совпадает с максимумом экстремальных функций этих множеств, а также сформулировано утверждение о регулярных компактах на декартовом произведении параболических многообразий.

с помощью метода специального локального вложения многообразия в комплексные пространства большой размерности и теоремы Ока-Картана о продолжении голоморфных функций из замкнутых подмногообразий доказаны аналоги теорем Бернштейна-Уолша и Рунге для параболических многообразий;

доказана эквивалентность функции Грина и экстремальной функции Сичака на алгебраических многообразиях, а также установлен аналог теоремы Бернштейна–Уолша в терминах функции Грина.

Достоверность результатов исследования обосновывается применениями методов геометрической теории функций многих комплексных переменных, методов математического анализа, функционального анализа и строгими математическими доказательствами. Кроме того, публикации результатов диссертации в авторитетных научных журналах с импакт-факторами, апробации работы в ведущих научных центрах, ссылки и обсуждения результатов автора в публикациях местных и зарубежных авторов, также доказывают достоверность результатов диссертации.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Доказательство аналога теоремы Бернштейна-Уолша на параболических многообразиях, установление эквивалентности экстремальных функций Сичака и Грина на алгебраических многообразиях, построение основ теории аналитических функций и полиномиальной аппроксимации на параболических многообразиях указывает на научную значимость исследований диссертации.

Научно-практическое значение работы характеризуется описанием конструкции полиномов на дополнениях алгеброидных множеств Вейерштрасса и получением критериев регулярной параболичности подобных многообразий.

Внедрение результатов исследования. Результаты исследования диссертации получили следующие применения:

результаты, связанные с оценками коэффициентов разложения аналитических функций в ряды Вейля в специальных полиэдрах за пределами множества нулей полинома Вейерштрасса, а также критерий регулярности параболических многообразий, являющихся дополнением этого множества, были использованы в фундаментальном проекте № ОТ-Ф4-88 «Исследование прямых и обратных задач для уравнений смешанного типа второго и более высоких порядков» при решении краевых задач для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами (Справка Института математики от 4 октября 2024 года, № 2/352). Применение научных результатов позволило построить специальные полиномиальные функции в различных аналитических дефектных параболических пространствах, а также определить базисы и специальные весовые функции, учитывающие сингулярность коэффициентов в задачах смешанного типа;

результаты, полученные при описании многочленов на параболических многообразиях, их структурировании на графиках аналитических функций и алгебраических подмногообразиях, были использованы в фундаментальном проекте № ОТ-Ф4-30 «Исследование качественных свойств решений дважды нелинейной кросс-системы с учетом источников, конвективного переноса, переменной плотности, источников или поглощения» при

изучении качественных свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений (Справка Национального университета Узбекистана от 11 октября 2024 года, № 04/11-8623). Применение научных результатов позволило разрабатывать численно устойчивые полиномы для решения сложных краевых задач второго и более высоких порядков, а также адаптироваться к особенностям уравнений с переменными коэффициентами;

аналог теоремы Бернштейна–Уолша–Сичака о приближении аналитических функций многочленами на параболических многообразиях был использован в исследованиях лаборатории комплексного анализа Института математики Тулузского университета в области теории геометрических функций и кэлеровой геометрии. В частности, он применялся для изучения структуры параболических многообразий с точки зрения их алгебраического вложения (Письмо Института математики Тулузы, от 4 сентября 2024 года, Франция). Применение результатов позволило сформулировать новые условия для доказательства утверждений, аналогичных критериям Кодайры и Реммерта о вложении кэлеровых и штейновых многообразий.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на следующих международных и республиканских научных конференциях: Вторая международная конференция США-Узбекистан «Анализ и математическая физика» (Ургенч, 2017 г.), Первая Узбекско-Израильская международная конференция «Современные проблемы математики и физики» (Ташкент, 2017г.), «Проблемы и приложения фундаментальной математики» (Навои, 2019 г.), Четвертая Узбекско-Израильская международная конференция «Рубежи в математике и в компьютерных науках» (Ташкент, 2020 г.), «Современные проблемы математики» (Нукус 2020 г.), «Современная математика и ее применение» (Ташкент 2020 г.), «Операторные алгебры, не ассоциативные структуры и смежные проблемы» (Ташкент 2022 г.), Первая международная конференция Ал-Хорезми «Современные проблемы математики» (Ургенч, 2022 г.), Международная конференция «Современные проблемы математики и механики» (Баку 2023 г.), Конференция по комплексному анализу и его приложениям (Красноярск, 2023 г.), Международная конференция, в честь памяти Гончара-Витушкина (Москва, ИМ РАН, 2023).

Результаты диссертации также регулярно обсуждались на Республиканских семинарах «Современные проблемы комплексного анализа» Ургенчского государственного университета, на семинаре кафедры математического анализа Национального университета Узбекистана.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 23 научные работы, из них 5 статей в зарубежных, 7 статей в республиканских журналах и 11 тезисов докладов конференций.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка использованной литературы. Общий объем диссертации – 145 страницы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цель и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава, которая называется «**Параболические Штейновы многообразия**» имеет вспомогательный характер. В ней приведены основные определения и важные факты из теории параболических многообразий, описаны главные принципы и методы комплексной теории потенциала.

Определение 1. Комплексное аналитическое многообразие X размерности n , называется многообразием Штейна, если

- 1) X голоморфно отделимо, т.е. если p_1 и p_2 различные точки X , то существует голоморфная на X функция f такая, что $f(p_1) \neq f(p_2)$;
- 2) X голоморфно выпукло, т.е. для любого компакта $K \subset X$ голоморфно выпуклая оболочка

$$\hat{K} = \{z \in X : |f(z)| \leq \sup_K |f|, \forall f \in \mathcal{O}(X)\}$$

является компактным подмножеством X . Где $\mathcal{O}(X)$ – множество всех голоморфных на X функций;

- 3) для каждой точки $z \in X$ можно найти n функций $f_1, f_2, \dots, f_n \in \mathcal{O}(X)$, которые образуют локальную координату в окрестности этой точки.

Следующая теорема о вложении многообразия Штейна является важной геометрической характеристикой, так как она дает возможность рассматривать многообразие Штейна как комплексное аналитическое подмногообразие некоторого комплексного пространства \mathbb{C}^n большей размерности.

Теорема 1. Если X является многообразием Штейна, то в нем существует набор голоморфных функций $f_1, f_2, \dots, f_{2n+1} \in \mathcal{O}(X)$ таких, что отображение $f = (f_1, f_2, \dots, f_{2n+1}) : X \rightarrow \mathbb{C}^{2n+1}$ является собственным регулярным отображением, т.е. f – взаимно-однозначное и прообразы компактов из \mathbb{C}^{2n+1} являются компактными подмножествами X .

Основным инструментом введения и изучения параболического многообразия является оператор Монжа-Ампера $(dd^c u)^n$ и теория плюрипотенциала. Пусть X – многообразие Штейна размерности n . Воспользуемся стандартными обозначениями $d = \partial + \bar{\partial}$ и $d^c = \frac{\partial - \bar{\partial}}{4i}$. Для функции $u \in C^2(X)$ оператор

$$(dd^c u)^n = dd^c u \wedge dd^c u \wedge \dots \wedge dd^c u \quad (n \text{ раз})$$

называется комплексным оператором Монжа-Ампера, и он представляется через элемент объема на X следующим образом

$$(dd^c u)^n = n! \det \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \right) \beta_n.$$

Здесь $\beta_n = \left(dd^c |z|^2 \right)^n = \left(\frac{i}{2} \right)^n dz_1 \wedge d\bar{z}_1 \wedge dz_2 \wedge d\bar{z}_2 \wedge \dots \wedge dz_n \wedge d\bar{z}_n$.

Определение 2. Штейново многообразие X называется *параболическим*, если каждое ограниченное сверху плюрисубгармоническая функция на X тождественно равна константе, т.е. на X не существует ограниченная сверху плюрисубгармоническая функция, кроме констант.

Определение 3. Штейново многообразие X называется *S -параболическим*, если существует специальная плюрисубгармоническая функция исчерпания $\rho(z) \in psh(X)$, которая максимальна вне некоторого компактного подмножества в X . Если дополнительно, требуется непрерывность функции $\rho(z)$, то многообразие X называется *S^* -параболическим*.

На S -параболических многообразиях построена теория плюрипотенциала, введены понятия полинома, функции Грина, регулярные компакты и др.

Пусть дано S -параболическое многообразие X и $\rho(z)$ – специальная функция исчерпания. Рассмотрим класс Лелона $\mathfrak{A}_\rho(X)$ функций $u \in psh(X)$, удовлетворяющих условию

$$u(z) \leq c_u + \rho^+(z), z \in X,$$

с некоторой константой c_u , зависящей от u . Для компакта $K \subset\subset X$ определим

$$V_\rho(z, K) = \sup \left\{ u(z) : u \in \mathfrak{A}_\rho(X), u|_K \leq 0 \right\}.$$

Тогда регуляризация $V_\rho^*(z, K) = \overline{\lim_{w \rightarrow z} V_\rho(w, K)}$ называется ρ -Грин функцией(или просто функцией Грина) компакта K .

Определение 4. Если для функции $f(z) \in \mathcal{O}(X)$ существуют положительные числа c и d такие, что при всех $z \in X$ выполняется

неравенство

$$\ln|f(z)| \leq d\rho^+(z) + c, \quad (1)$$

где $\rho^+(z) = \max\{0, \rho(z)\}$, то функция $f(z)$ называется ρ -полиномом на X .

Минимальное значения d , удовлетворяющее (1) называется степенью полинома (в общем случае минимальное значение d может быть нецелым).

Для компакта $K \subset X$, также как в классическом случае, плюрирегулярные точки определяются как множество точек $z^0 \in X$, удовлетворяющих равенству $V_\rho^*(z^0, K) = 0$. Компакт $K \subset X$ называется плюрирегулярным, если для каждой точки $z \in K$ выполняется равенство $V_\rho^*(z, K) = 0$.

Теорема 2. Пусть X является S^* -параболическим многообразием, со специальной функцией исчерпания $\rho(z) \in psh(X)$. Рассмотрим псевдошары

$$K_r = \{z \in X : \rho(z) \leq r\}, B_r = \{z \in X : \rho(z) < r\},$$

где $r > r_0 = \min_X \rho(z)$. Тогда имеют место равенства

$$V_\rho^*(z, K_r) = \sup\{\rho(z) - r, 0\} = (\rho - r)^+(z), \quad z \in X,$$

$$\omega^*(z, K_r, B_R) = \sup\left\{\frac{\rho(z) - R}{R - r}, -1\right\}, \quad \forall z \in X \quad (R > r).$$

Теорема 3 (В.Штоль). Пусть (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) являются S^* -параболическими многообразиями размерности n_1 и n_2 , соответственно. Определим многообразие $X = X_1 \times X_2$ размерности $n = n_1 + n_2$ и пусть $\pi_1 : X \rightarrow X_1$, $\pi_2 : X \rightarrow X_2$ — проекции. Тогда $X = X_1 \times X_2$ является S^* -параболическим многообразием, со специальной функцией исчерпания $\rho = \ln(e^{\rho_1 \circ \pi_1} + e^{\rho_2 \circ \pi_2})$.

S^* -параболические многообразия относятся к усовершенной категории Штейновых многообразий типа пространства \mathbb{C}^n . С точки зрения пространства Фреше аналитических функций, определенных на этих многообразиях. Градуированное пространство Фреше это пара $(Y, \|\cdot\|_s)$, где Y — пространство Фреше и $(\|\cdot\|_s)$ фиксированная система полунорм на Y , определяющих его топологию.

В работе А.Айтуны установлена связь между параболическостью Штейновых многообразий с конкретными линейно-топологическими свойствами пространства Фреше аналитических функций, определенных на этих многообразиях. Пусть $\mathcal{O}(X)$ — пространство аналитических функций на X . Топология на $\mathcal{O}(X)$ это топология равномерного приближения на

компактных подмножествах X .

Теорема 4 (А.Айтуна). Для штейново многообразия X размерности n , следующие условия эквивалентны:

- 1) X является параболической;
- 2) $\mathcal{O}(X)$ обладает свойством DN ;
- 3) $\mathcal{O}(X)$ изоморфно пространству $\mathcal{O}(\mathbb{C}^n)$, как пространство Фреше.

Существует параболическое многообразие, с тривиальными полиномами на них. Построению такого многообразия способствует следующая

Теорема 5 (Айтуна-Садуллаев). Существует полярный компакт $K \subset \mathbb{C}$ и субгармоническая на всей плоскости \mathbb{C} и гармоническая на $\mathbb{C} \setminus K$ функция $u(z)$, для которой $u|_K = -\infty$ и

$$\lim_{z \rightarrow K} \frac{u(z)}{\ln \text{dist}(z, K)} = 0. \quad (2)$$

Если мы теперь рассмотрим многообразие $X = \overline{\mathbb{C}} \setminus K$, где K – компакт из теоремы 5. В качестве специальной функции исчерпания возьмем потенциал $\rho(z) = -U^u(z)$. Тогда $\rho(z)$ является гармонической на $X \setminus \{\infty\}$, $\rho(\infty) = -\infty$ и $\rho(z) \rightarrow \infty$ при $z \rightarrow K$. Таким образом, (X, ρ) является S^* -параболическим многообразием. Более того на нем не существует нетривиального полинома, т.е. любой ρ -полином на X является константой.

Во второй главе диссертации, названной «Регулярные параболические многообразия» изучаются S -параболические многообразия, имеющие богатые семейства определенных на них полиномов, .

Определение 5. S -параболическое многообразие X называется *регулярным*, если пространство всех ρ -полиномов $\mathcal{P}_\rho(X)$ плотно в $\mathcal{O}(X)$.

В первом и во втором параграфах изучаются ряд примеров регулярно-параболических многообразий и их свойства. В частности, рассматривается график целой функций в комплексном пространстве \mathbb{C}^n , и доказывается регулярная параболичность такого многообразия.

График аналитической функции $X = \{z \in \mathbb{C}^n : z_n = f(z)\}$, где $z = (z, z_n) = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}, z_n)$, является S -параболическим многообразием со специальной функцией исчерпания $\rho(z) = \ln^+ \|z\|$. Функция $\rho(z) \in psh(\mathbb{C}^n)$, причем множество $\{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) \leq M\} \subset\subset X \quad \forall M > 0$, и

$(dd^c \rho)^{n-1} = 0$ вне компакта $\{z \in X : \|z\| \leq 1\} \subset\subset X$. ρ -полиномы на X определяются обычным образом.

Теорема 6. *График аналитической функции $X = \{z \in \mathbb{C}^n : z_n = f('z)\}$ является регулярным параболическим многообразием, относительно специальной функции исчерпания $\rho = \ln \|z\|$: любая голоморфная функция $F(z) \in \mathcal{O}(X)$ равномерно аппроксимируется ρ -полиномами на компактных подмножествах X .*

Третий параграф посвящается свойствам регулярно-параболических многообразий. Доказана регулярность декартова произведения регулярных параболических многообразий, а также изучены условия регулярности подмногообразий регулярно-параболического многообразия.

Теорема 7. *Пусть (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) – регулярно-параболические многообразия размерности n и m соответственно. Определим многообразие $X = X_1 \times X_2$ размерности $k = n + m$ и пусть $\pi_1 : X \rightarrow X_1$, $\pi_2 : X \rightarrow X_2$ – проекции. Тогда $X = X_1 \times X_2$ является регулярно-параболическим многообразием, со специальной функцией исчерпания $\rho = \ln(e^{2\rho_1 \circ \pi_1} + e^{2\rho_2 \circ \pi_2})$.*

Теорема 8. *Пусть X является n -мерным регулярным параболическим многообразием и f_1, f_2, \dots, f_m – линейно независимые ρ -полиномы. Если аналитическое множество*

$$F = \{z \in X : f_1(z) = 0, \dots, f_m(z) = 0\},$$

не пусто и не имеет критических точек (т.е. $df_1 \wedge df_2 \wedge \dots \wedge df_m \neq 0$ на F), то связные компоненты F являются регулярно-параболическими подмногообразиями X .

Третья глава диссертации называется «**Регулярность дополнения вейерштрассовского аналитического множества**» и здесь изучается регулярно-параболическость дополнения аналитического множества $A \subset \mathbb{C}^n$.

Пусть в комплексном пространстве \mathbb{C}^n дано множество нулей многочлена Вейерштрасса

$$A = \{z = ('z, z_n) \in \mathbb{C}^n : F(z) := z_n^m + f_{m-1}('z)z_n^{m-1} + \dots + f_1('z)z_n + f_0('z) = 0\},$$

где $f_j('z), j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ – целые функции (не все являются полиномами) от переменного $'z = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$. Тогда многообразие $X = \mathbb{C}^n \setminus A$ является S^* -параболическим со специальной функцией исчерпания

$$\rho(z) = \frac{1}{2} \ln \left(|z|^2 + \left| F(z) + \frac{1}{F(z)} \right|^2 \right): \rho(z) \in psh(X)$$

и она максимална вне конечного множества точек $Q = \{F'(0, z_n) = 0\}$, т.е.

$$(dd^c \rho)^n = 0, \quad z \in X \setminus Q.$$

Теорема 9. Пусть дано множество нулей полинома Вейерштрасса

$$A = \left\{ (z, z_n) \in \mathbb{C}^n : F(z) = z_n^m + f_{m-1}(z)z_n^{m-1} + \dots + f_1(z)z_n + f_0(z) = 0 \right\}, \quad (3)$$

где коэффициенты $f_j(z), j = 0, 1, 2, \dots, m-1$ — целые функции от переменного $z = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^{n-1}$. Если $F(z)$ не является полиномом по z , то аналитическая функция f на S^* -параболическом многообразии $X = \mathbb{C}^n \setminus A$ со специальной функцией исчерпания

$$\rho(z) = \frac{1}{2} \ln \left(|z|^2 + \left| F(z) + \frac{1}{F(z)} \right|^2 \right)$$
 является ρ -полиномом степени d тогда и

только тогда, когда она допускает конечное разложение вида

$$f(z) = \sum_{|k|=0}^d a_k z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_{n-1}^{k_{n-1}} (F(z))^{k_n} + \sum_{|k|=0}^{d-1} b_k z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_{n-1}^{k_{n-1}} \left(\frac{1}{F(z)} \right)^{k_n+1}, \quad (4)$$

где a_k и b_k — постоянные коэффициенты.

Следующая теорема является критерием регулярности дополнения $X = \mathbb{C}^n \setminus A$.

Теорема 10. Многообразие $X = \mathbb{C}^n \setminus A$ является регулярным тогда и только тогда, когда функция $f(z) = z_n$ допускает равномерное приближение ρ -полиномами внутри X .

Четвертая глава диссертации называется «Аппроксимация голоморфных функций полиномами на регулярных параболических многообразиях». В этой главе определены экстремальные функции, используемые при оценках полиномов, и доказаны их свойства. Основным результатом является аналог теоремы Бернштейна-Уолша на параболических многообразиях.

В теории интерполяции и аппроксимации на комплексной плоскости особо важную роль играет так называемая функция Грина $V(z, K)$ компакта $K \subset \mathbb{C}$, которая является гармонической на $\mathbb{C} \setminus \hat{K}$ и $V(z, K) \sim \ln|z| + c$ при $z \rightarrow \infty$, причем $V(z, K)|_{\hat{K}} = 0$. В монографии Ж.Л.Уолша (Interpolation and approximation, Waverly Press, Baltimore, Md., 1935) подробно изложены применения и свойства этой обобщенной функции Грина. В основном функция $V(z, K)$ используется при оценке модулей полиномов, т.е. для

любого полинома $P(z)$ имеет место следующее неравенство Бернштейна-Уолша

$$|P(z)| \leq \|P\|_K \cdot e^{\deg P \cdot V(z,K)}, \quad \forall z \in \mathbb{C},$$

где $\|P\|_K$ – супремум нормы.

Бернштейн и Уолш доказали взаимосвязь между голоморфностью заданной функции $f(z)$ в окрестности компакта $K \subset \mathbb{C}$ и скоростью полиномиального приближения функции на компакте $K \subset \mathbb{C}$.

Чтобы получить многомерный аналог теоремы Бернштейна-Уолша требовалась найти подходящую функцию, которая бы сыграла такую же роль, что и функция Грина на комплексной плоскости.

В 1962 году Й.Сичак доказал многомерный аналог теоремы Бернштейна-Уолша в терминах экстремальной функции

$$\Phi(z, K) = \sup \left\{ |P(z)|^{\frac{1}{\deg P}} : P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n), \quad \|P\|_K \leq 1 \right\}.$$

Экстремальную функцию на S -параболическом многообразии определим аналогично: пусть X является S -параболическим многообразием и $\rho(z)$ – специальная функция исчерпания на X . Обозначим через $\mathcal{P}_\rho(X)$ класс всех ρ -полиномов на многообразии X . Для фиксированного компактного подмножества $K \subset X$ положим

$$\Phi_\rho(z, K) = \sup \left\{ |f(z)|^{\frac{1}{\deg f}} : f \in \mathcal{P}_\rho(X), \quad \|f\|_K \leq 1 \right\}.$$

Следует отметить, что функция $\Phi_\rho(z, K)$ представляет интерес только тогда, когда X является регулярным параболическим многообразием, на котором имеются богатая семейство полиномов.

Следующие свойства функции $\Phi_\rho(z, K)$ вытекают непосредственно из её определения.

1) если $K \subset K_1 \subset X$, то $\Phi_\rho(z, K) \geq \Phi_\rho(z, K_1)$, $\forall z \in X$;

2) для полинома $P(z) \in \mathcal{P}_\rho^d(X)$ и компакта $K \subset X$ имеет место неравенство Бернштейна-Уолша

$$|P(z)| \leq \|P\|_K \cdot \left(\Phi_\rho(z, K) \right)^{\deg P}, \quad z \in X, \quad (5)$$

где $\|P\|_K = \sup_{z \in K} |P(z)|$ – супремум нормы

3) если функция $\Phi_\rho(z, K)$ не является локально ограниченной сверху, то компакт $K \subset X$ является плюриполярным на X . Таким образом, для неплюриполярного компакта $K \subset X$ экстремальная функция $\Phi_\rho(z, K)$ – локально ограничена сверху;

4) для любого неплюриполярного компакта $K \subset X$ функция

$$\ln \Phi_\rho^*(z, K) \in psh(X);$$

Полиномиальную выпуклую оболочку компакта $K \subset X$, определяется следующим образом

$$\hat{K} = \left\{ z \in X : |P(z)| \leq \|P\|_K, \forall P \in \mathcal{P}_\rho(X) \right\}.$$

5) для любого компакта $K \subset X$ верно равенство $\Phi_\rho(z, \hat{K}) \equiv \Phi_\rho(z, K)$.

Теорема 11. Пусть (X_1, ρ_1) и (X_2, ρ_2) – регулярно-параболические многообразия и пусть $K_1 \subset X_1, K_2 \subset X_2$ – произвольные компакты. Тогда для экстремальной функции подмножества $K = K_1 \times K_2 \subset X_1 \times X_2$ регулярно-параболического многообразия $X = X_1 \times X_2$, со специальной функцией исчерпания $\rho = \ln(e^{2\rho_1 \circ \pi_1} + e^{2\rho_2 \circ \pi_2})$ (см. теорему 2.4) имеет место равенство

$$\Phi_\rho(z, K) = \max \left\{ \Phi_{\rho_1}(\pi_1(z), K_1), \Phi_{\rho_2}(\pi_2(z), K_2) \right\}.$$

Здесь $\pi_1 : X \rightarrow X_1, \pi_2 : X \rightarrow X_2$ – проекции.

Определение 6. Компактное подмножество K регулярного параболического многообразия X называется регулярным, если функция $\Phi_\rho(z, K)$ является непрерывной на X .

Пусть X является S -параболическим многообразием и $\rho(z)$ – специальная функция исчерпания. Обозначим через $\mathcal{P}_\rho^d(X)$ класс всех полиномов на многообразии X степени $\leq d$. Обозначим через

$$e_d(f, K) = \inf_{P \in \mathcal{P}_\rho^d(X)} \sup_{z \in K} |f(z) - P(z)|$$

минимальное отклонение функции f от пространства полиномов $\mathcal{P}_\rho^d(X)$ на компакте K .

Теорема 12. Пусть дан регулярный компакт $K \subset X$ на регулярном параболическом многообразии X . Тогда функция $f(z)$ определенная на K , голоморфно продолжается в область $D_R = \{z \in X : \Phi_\rho(z, K) < R\}$, $R > 1$ тогда и только тогда, когда выполняется неравенство

$$\overline{\lim}_{d \rightarrow \infty} e_d^{1/d}(f, K) \leq \frac{1}{R}.$$

Из теоремы 12 вытекает следующее следствие, которое является аналогом теоремы Рунге об аппроксимации:

Следствие 1. Пусть X – регулярное параболическое многообразие со специальной функцией исчерпания $\rho(z)$. Если K является ρ -полиномиально выпуклым компактом на X , то любую аналитическую в

окрестности компакта K функцию $f(z)$ можно равномерно приблизить ρ -полиномами на компакте K .

Отметим, что Теорема 12 и ее Следствие 1 в пространстве \mathbb{C}^n доказывается при помощи интегральной формулы Вейля, где существенную роль играет Теорема Хефера о представлении разностей голоморфных функций. Однако на многообразии X не имеются подходящей интегральной формулы, пригодной к доказательству Теоремы 12. В диссертации мы воспользуемся другими геометрическими методами, связанными с взаимно-однозначным вложением окрестности $K \subset X$ в некоторое комплексное пространство \mathbb{C}^N большей размерности и теоремой Ока-Картана о голоморфном продолжении с подмногообразиями.

В пятой главе названной «**Аппроксимация голоморфных функций полиномами на алгебраическом многообразии**», рассматривается алгебраическое подмногообразие A комплексного пространства \mathbb{C}^N в качестве регулярного параболического многообразия. Изучаются продолжения полиномов с алгебраического многообразия A на все пространство \mathbb{C}^N . Доказываются дополнительные свойства экстремальных функций на алгебраических многообразиях. Устанавливается эквивалентность экстремальных функций Сичака и Грина. В конце главы доказывается аналог теоремы Бернштейна-Уолша на алгебраических многообразиях в терминах функции Грина.

Голоморфная функция $p(z) \in \mathcal{O}(A)$, заданная на алгебраическом многообразии $A \subset \mathbb{C}^N$, $\dim A = n$, называется полиномом, если для неё имеет место оценка $|p(z)| \leq C(1 + \|z\|)^d$, $z \in A$, где $C, d > 0$ – константы, $\|z\|$ – эвклидова норма в \mathbb{C}^n . Наименьшее число d называется степенью полинома p , $d = \deg p$. Класс полиномов на алгебраическом многообразии обозначим через

$$\mathcal{P}^m(A) = \{p : p \text{ — полином, } \deg p \leq m\}, \quad \mathcal{P}(A) = \bigcup_{m=1}^{\infty} \mathcal{P}^m(A).$$

Отметим, что алгебраическое многообразие является параболическим многообразием и понятия полинома можно ввести и по другому, используя специальную функцию исчерпания $\rho(z)$. Для самого простого способа определения специальной функции исчерпания на алгебраическом многообразии A , мы воспользуемся известным геометрическим критерием В.Рудина: любое алгебраическое множество $A \subset \mathbb{C}^N$ чистой размерности n , $1 \leq n < N$, после подходящего унитарного преобразования представляется в виде

$$A \subset \left\{ z \in \mathbb{C}^N : \|z''\| < c(1 + \|z'\|)^\beta \right\}, \quad z' = (z_1, \dots, z_n), \quad z'' = (z_{n+1}, \dots, z_N), \quad (5.1)$$

где c, β – некоторые константы. В работе А.Садуллаева указано, что вместо β в (5.1) на самом деле можно поставить единицу, $\beta = 1$, т.е. алгебраическое многообразие всегда можно вложить в конус

$$A \subset \left\{ z \in \mathbb{C}^N : \|z''\| < c(1 + \|z'\|) \right\}.$$

Тогда в качестве специальной функции исчерпания на A можно взять $\rho(z) = \ln^+ \|z''\|$, $z \in A$, $\rho(z) \in psh(A)$, $(dd^c \rho(z))^n = 0$ на $A \setminus \{\|z''\| \leq 1\}$.

Тогда полиномы на A можно определить при помощи специальной функции исчерпания ρ .

Легко видеть, что $\|z'\| \leq \|z\| \leq 2c\|z'\|$ на $A \setminus \{\|z''\| \leq 1\}$. Поэтому сужение $p = P|_A$ произвольного полинома $P(z) \in \mathcal{P}(\mathbb{C}^n)$ будет ρ – полиномом на A .

Основным результатом главы является

Теорема 13. Пусть A – алгебраическое подмногообразие пространства \mathbb{C}^N . Тогда для любого компактного подмножества $K \subset A$ имеет место равенство $V_A(z, K) = \ln \Phi_A(z, K)$, где

$$\Phi_A(z, K) = \sup \left\{ |p(z)|^{\frac{1}{\deg p}} : p(z) \in \mathcal{P}(A), \|p\|_K \leq 1 \right\}.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Целью настоящей диссертации является построение теории аналитических функций на параболических многообразиях. В этой связи были изучены свойства параболических многообразий, свойства пространства аналитических функций и семейства полиномов на них.

Изучена структура полиномов на параболических многообразиях, доказаны ряд утверждений относительно их регулярности. Построены различные примеры регулярных и нерегулярных параболических многообразий.

Исследованы на регулярную параболичность алгебраические многообразия и дополнение множества нулей вейерштрассовского полинома. Кроме того, изучен вопрос о регулярности декартова произведения регулярных параболических многообразий и подмногообразия регулярно-параболического многообразия.

Исследованы вопросы приближения аналитических функций полиномами на компактах. Доказаны ряд свойств экстремальных плюрисубгармонических функций на параболических многообразиях. Доказан аналог известной теоремы Бернштейна-Уолша на параболических

многообразиях в терминах экстремальной функции Сичака и функции Грина.

В настоящее время полученные результаты уже нашли ряд применений в теории аналитического продолжения и в вопросах изучения роста аналитических функций в окрестности удаленного множества.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED
AFTER V.I. ROMANOVSKY**

INSTITUTE OF MATHEMATICS AND URGENCH STATE UNIVERSITY

ATAMURATOV ALIMARDON ABDIRIMOVICH

**THEORY OF ANALYTICAL FUNCTIONS ON PARABOLIC
MANIFOLDS**

01.01.01 – Mathematical Analysis

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF SCIENCE (DSc) ON
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

TASHKENT – 2025

The theme of dissertation of doctor of science (DSc) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number № B2017.2.DSc/FM69.

Doctoral dissertation is carried out at Institute of Mathematics and Urgench State University.
Abstract of dissertation in three languages (Uzbek, Russian and English(resume)) is placed on web page of Scientific Council (<http://kengash.mathinst.uz>) and information-educational portal «ZIYONET» (www.ziyonet.uz)

Scientific consultant: **Sadullaev Azimbay**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Academician

Official opponents: **Shcherbina Nikolai Vasilevich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Kudaybergenov Karimbergen Kadirbergenovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Imomkulov Sevdiyor Akramovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Leading organization: **Siberian Federal University**

Defense will take place « 18 » February 2025 at 16:00 at the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky. (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99878) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovsky (is*registered № 197) (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99878) 207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on « 31 » January 2025 year
(Mailing report № 2 on « 31 » January 2025 year).



[Handwritten signature]

U.A. Rozikov

Chairman of Scientific Council on award of scientific degree of Doctor of Sciences, D.F.-M.S., Academician

[Handwritten signature]

J.K. Adashev

Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degree of Doctor of Sciences, D.F.-M.S., Senior researcher

[Handwritten signature]

U.U. Jamilov

Chairman of scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., Senior researcher

Introduction (summary of the doctoral dissertation)

Aim of research is to construct a global theory of analytic functions on parabolic manifolds and to prove the main fundamental theorems of polynomial approximation of analytic functions on parabolic manifolds.

Object of research. Parabolic manifolds, analytic and plurisubharmonic functions defined on parabolic manifolds. Pluripotential theory on parabolic manifolds.

Scientific novelty of the research. The dissertation is a new scientific direction. In it:

a description of polynomials on the Cartesian product of parabolic manifolds is provided, and by using the method of establishing the completeness of the polynomial system in the space of holomorphic functions, it is proven that the Cartesian product of regular parabolic manifolds also possesses the property of regular parabolicity;

based on the characterization of the polynomial space and plurisubharmonic functions, the equivalence of the Siciak and Zahariuta extremal functions on the graphs of analytic functions has been established;

in the region excluding the zeros of the Weierstrass polynomial, estimates for the coefficients of the Weil series expansion of analytic functions within special polyhedra have been obtained, and a criterion for the regularity of parabolic manifolds that complement the set of zeros of the Weierstrass polynomial has been proven;

it has been demonstrated that the extremal function for the Cartesian product of compact sets coincides with the maximum of the extremal functions of these sets, and a statement about regular compact sets in the Cartesian product of parabolic manifolds has been formulated;

by using the method of special local embedding of a manifold into high-dimensional complex spaces and the Oka–Cartan theorem on the holomorphic extension from closed submanifolds, analogs of the Bernstein–Walsh and Runge theorems for parabolic manifolds have been established;

the equivalence of the Green function and the Siciak extremal function on algebraic manifolds has been proven, as well as an analog of the Bernstein–Walsh theorem formulated in terms of the Green function.

Accuracy of the results of research are justified by the application of methods of geometric theory of functions of many complex variables, methods of mathematical analysis, functional analysis and strict mathematical proofs. In addition, the publication of the dissertation results in authoritative scientific journals with impact factors, testing of the work in leading scientific centers, references and discussions of the author's results in publications of local and foreign authors also prove the reliability of the dissertation results.

Implementation of research results. The research results of the dissertation have the following applications:

the results related to the estimates of the coefficients in the Weil series expansion of analytic functions in special polyhedra outside the set of zeros of the

Weierstrass polynomial, as well as the criterion of regularity for parabolic manifolds that form the complement of this set, were used in the fundamental project No. OT-F4-88 "Investigation of direct and inverse problems for second- and higher-order mixed-type equations" to solve boundary value problems for mixed-type equations with singular coefficients (Certificate of the Institute of Mathematics, dated October 4, 2024, No. 2/352). The application of these scientific results enabled the construction of special polynomial functions in various analytically defective parabolic spaces and allowed for the identification of bases and special weight functions that account for coefficient singularities in mixed-type problems;

the results obtained in the characterization of polynomials on parabolic manifolds, their structure on the graphs of analytic functions, and their construction on algebraic submanifolds were applied in the fundamental project No. OT-F4-30 "Investigation of qualitative properties of solutions to a doubly nonlinear cross-system under the influence of sources, convective transfer, variable density, sources, or absorption" in the study of qualitative properties of solutions to nonlinear differential equations (Certificate of the National University of Uzbekistan, dated October 11, 2024, No. 04/11-8623). The application of these scientific results facilitated the development of numerically stable polynomials for solving complex boundary value problems for second- and higher-order nonlinear equations, as well as adaptation to the peculiarities of equations with variable coefficients;

an analogue of the Bernstein–Walsh–Siciak theorem on polynomial approximation of analytic functions on parabolic manifolds was employed in research conducted by the Laboratory of Complex Analysis at the Institute of Mathematics of Toulouse University, focusing on the theory of geometric functions and Kähler geometry. In particular, it was applied to the structural study of parabolic manifolds from the perspective of their algebraic embedding (Letter from the Institute of Mathematics of Toulouse, France, dated September 4, 2024). The application of these results allowed for the formulation of new conditions for proving statements similar to the Kodaira and Remmert criteria for embedding Kähler and Stein manifolds.

The volume and structure of the dissertation. The dissertation consists: introduction, five chapters, conclusion and list of references. The total volume of the dissertation is 145 pages.

E‘LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (Часть I; Part I)

1. А.С.Садуллаев, А.А.Атамуратов, Полиномиальные аппроксимации на параболических многообразиях, Математический сборник, Т. 215:5 (2024), 146–160 (3. Scopus. IF=0.55).

2. А.А.Атамуратов, Polynomials on algebraic manifolds, Carpatian Mathematical Publications, V16:2 (2024), 401-406 (3. Scopus. IF=0.51).

3. А.А. Атамуратов, Polynomials on Regular Parabolic Manifolds, Journal of Mathematical Sciences V.278 (2024), 596–612. (3. Scopus. IF=0.3).

4. А.А.Атамуратов, On regular parabolicity of complements of Weierstrass algebroidal sets, Complex Analysis and its Synergies, 9:8 (2023), 1-10 (3. Scopus. IF=0.42).

5. А.А.Атамуратов, Polynomials on graphs of analytical function, Uzbek Mathematical Journal V. 68:2 (2024), 20-26 (01.00.00, №6).

6. А.А.Атамуратов, Полиномы на алгебраических графиках и аналог теоремы Бернштейна-Уолша, Ilm sarchashmalari, №12 (2023), 22-28 (01.00.00; № 12).

7. А.Атамуратов, Полиномиальная аппроксимация на многообразии $A = \{z_1^2 + z_2^2 = 1\} \subset \mathbb{C}^2$, Доклады Академии Наук Республики Узбекистан, №6 (2023), 3-7 (01.00.00; № 7).

8. А.А.Атамуратов, И.Тураханов, О регулярной параболичности дополнения графика целых функций и полиномиальные базисы, Ilm Sarchashmalari, №3 (2021), 7-13 (01.00.00; № 12).

9. А.А.Атамуратов, Cartesian product of regular parabolic manifolds, Central Asian Problems of Modern Science and Education, V. 3 (2020), Article 6, 1-13.

10. А.А.Атамуратов, О регулярно параболичности дополнения множества нулей многочленов Вейерштрасса, Доклады Академии Наук Республики Узбекистан, №6, (2020), 3-8 (01.00.00; № 7).

11. А.А.Атамуратов, Полиномы на регулярно-параболических многообразиях, Доклады Академии Наук Республики Узбекистан, №4, (2019), 3-7 (01.00.00; № 7).

12. А.А.Атамуратов, Kh.Q.Kamolov, On polynomial power series with the holomorphic coefficients, Istanbul University Science Faculty the Journal of Mathematics Physics and Astronomy, V.4 (2013), 27-32.

II bo‘lim (Часть II; Part II)

13. А.С.Садуллаев, А.А.Атамуратов, Полиномиальная аппроксимация на параболическом многообразии, Международная конференция по комплексному анализу посвященная Гончару-Витушкину, 20-24 Октября

2023 г., Москва, с.17-18.

14. А.А.Атамуратов, Полиномиальная аппроксимация аналитических функций на параболических многообразиях, Конференция по комплексному анализу и его приложениям, 11-15 сентября 2023 г., г. Красноярск, с.17-18.

15. A.S.Sadullaev, A.A.Atamuratov, Polynomials on parabolic manifolds, Modern Problems of Mathematics and Mechanics, Abstracts of the International Conference dedicated to the 100-th anniversary of the National Leader Heydar Aliyev, Baku, 26-28 April 2023, pp. 354-355.

16. A.A.Atamuratov, On regular parabolicity of the complements of Weierstrass algebroidal sets, Abstracts of the International scientific conference of "Contemporary Mathematics and its application" November 19-21, 2021, Tashkent, pp. 14-15.

17. A.A.Atamuratov, Kh.Kamolov, Polynomially convex sets on regular parabolic manifolds, International Online Conference "Frontier in Mathematics and Computer science", 12-15 October, 2020, pp. 23-24.

18. А.А.Атамуратов, М.Ю.Саидова, О параболическом расслоении штейновых многообразий, «Современные проблемы математики», Сборник тезисов Научной онлайн-конференции, 2020 г. Нукус, с. 105-107.

19. А.А.Атамуратов, Kh.Kamolov, Bernstein-Walsh theorem on regular parabolic manifolds, «Проблемы и приложения фундаментальной математики», 25 мая 2019 года, Навои, с. 162-163.

20. А.А.Атамуратов, On Parabolic foliation of Stein manifolds, Abstracts of the Republican scientific conference with participation of foreign scientists Modern Problems of Dynamical Systems and Their Applications, May 1-3, 2017 y, Tashkent, pp 11-12.

21. А.А.Атамуратов, Kh.Kamolov, On regular parabolicity of the manifolds $\mathbb{C}^n \setminus A$, Abstracts of the second USA-Uzbekistan conference on analysis and mathematical physics, 08-12 august, 2017 y., Urgench, pp.94-95.

22. А.А.Атамуратов, Kh. Kamolov, Polynomials on parabolic manifolds defined as complements of algebraic sets, Abstracts of the Uzbek-Israeli International conference on Contemporary problems in mathematics and Physics, October 6-10, 2017, Tashkent, pp 30-31.

23. А.А.Атамуратов, Регулярно параболичность дополнений графиков целых функций, Республиканская научная конференция «Актуальные вопросы анализа», 22-23 апреля 2016 г. Карши. с. 105-107.

Avtoreferat “O‘zbekiston matematika jurnali” tahririyatida 2024 yil 23-dekabrda tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:



9338

Bichimi: 84x60 $\frac{1}{16}$. «Times New Roman» garniturası.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 3. Adadi 100 dona. Buyurtma № 10/25.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.