**URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

KAMOLOV XURSANDBEK QUROLBOYEVICH

PARABOLIK ANALITIK SIRTLAR

01.01.01 – Matematik analiz

**Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Urganch shahri – 2025 yil

UDK: 517.55

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

KAMOLOV XURSANDBEK QUROLBOYEVICH

PARABOLIK ANALITIK SIRTLAR

01.01.01 – Matematik analiz

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Urganch shahri – 2025 yil

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2022.4.PhD/FM784 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Urganch Davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida(www.ik-mat.urdu.uz) va "Ziyonet" Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Abdullayev Baxrom Ismoilovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Imomkulov Sevdiyor Akramovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Atamuratov Alimardon Abdirimovich fizika-matematika fanlari nomzodi, katta ilmiy xodim
Yetakchi tashkilot:	**Qoraqalpoq davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi Urganch Davlat universiteti huzuridagi PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 raqamli Ilmiy kengashning 2025-yil "01" mart soat 14:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi (Manzil: 220100, Urganch sh., H.Olimjon ko'chasi, 14-uy. Tel.: (99862) 224-66-11; faks: (99862) 224-67-00; e-mail: info@urdu.uz).

Dissertatsiya bilan Urganch Davlat universiteti Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (Q-764- raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 220100, Urganch sh., H. Olimjon ko'chasi, 14-uy. Tel.: (+99862) 224-66-11; faks: (+99862) 224-67-00, e-mail: arm@urdu.uz).

Dissertatsiya avtoreferati 2025 yil "17" fevral kuni tarqatildi.

(2025 yil "17" fevral dagi 2 - raqamli reyestr bayonnomasi).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

G'.O'. O'razboyev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi o'rinbosari, f.-m.f.d.

A.A. Reyimberganov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.n.

B.A. Babajanov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d.

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida olib borilayotgan ko‘plab ilmiy va amaliy tadqiqotlar natijalari shuni ko‘rsatadiki, golomorf va plyurisubgarmonik funksiyalar sinflarini o‘rganish matematik analiz hamda matematik fizikaning muhim yo‘nalishi hisoblanadi. Bunda turli analitik sirtlar ustida golomorf va plyurisubgarmonik funksiyalarni aniqlash, ularning xossalarini tadqiq qilish kompleks dinamik sistemalar shuningdek, funksiyalarning geometrik nazariyasida alohida ahamiyatlidir. Ayniqsa, plyurisubgarmonik funksiyalar sinfi asosida qurilgan plyuripotensiallar nazariyasi nazariy fizikada maydonning kvant nazariyasidagi kompleks analizning turli tadbiqlarida asosiy va muhim tadqiqot vositalaridan biriga aylangan. Shuning uchun plyuripotensiallar nazariyasi usullaridan foydalangan holda analitik sirtlarda golomorf va plyurisubgarmonik funksiyalarning xossalarini o‘rganish dolzarb sanaladi. Analitik sirtlar ustida potensiallar nazariyasi asoslarini ishlab chiqishda maxsus plyurisubgarmonik qamrov funksiyalari asosiy rolni o‘ynaydi. Bu masalalar o‘z navbatida analitik sirtlarning parabolikligi tushunchasiga borib taqaladi. Shu sababli, paraboliklik ta’riflarini berish, P-o‘lchov tushunchasini kiritish, Grin funksiyasi va parabolik analitik sirtlarda ko‘phadlarni o‘rganish ushbu sohadagi muhim vazifalardan biri bo‘lib qolmoqda.

Hozirgi kunda jahonda plyuripotensiallar nazariyasi asosida analitik sirtlar va kompleks ko‘pxilliklarda turli funksiyalar sinflarini o‘rganish, shuningdek ularni funksiyalarning geometrik nazariyasi va kompleks dinamik sistemalari nazariyasi orqali boshqa sohalarga tadbiq qilish muhim ahamiyat kasb etmoqda. Plyurisubgarmonik funksiyalar va ularning boy xossalarga ega bo‘lgan ekstremal plyurisubgarmonik funksiyalar sinfi yordamida matematikaning turli sohalarida tatbiq qilish uchun yangi obyektlar aniqlanadi. Xususan, ko‘p o‘lchovli kompleks dinamik sistemalar nazariyasida parabolik qatlamlar (Monje-Amper qatlamlari) murakkabroq matematik strukturalarni tushunish uchun muhim geometrik obyektlarni ifodalaydi. Shuning uchun parabolik analitik sirtlarni, shuningdek ulardagi ekstremal plyurisubgarmonik funksiyalarning xossalarini o‘rganish maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda amaliy va fundamental ahamiyatga ega bo‘lgan funksiyalar nazariyasining tadbiqiy masalalarini hal qilishga, zamonaviy matematik usullarni ishlab chiqishga alohida e’tibor kuchaydi. Bu borada ko‘p o‘lchamli kompleks analizda plyuripotensiallar nazariyasining dolzarb yo‘nalishlariga, jumladan analitik sirtlar va kompleks ko‘pxilliklarda turli funksiyalar sinflarini o‘rganishga alohida e’tibor qaratildi. Buning natijasida parabolik analitik sirtlarning xossalarini o‘rganish va golomorf akslantirishning nuqsonli bo‘luvchilar tuzilishlarini tavsiflash yo‘nalishida bir qator muhim natijalarga erishildi. Matematika, fizika va tadbiqiy matematika sohalarida xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish oliy ta’lim muassasalari faoliyatining asosiy vazifalaridan biri qilib belgilandi[1]. Qaror ijrosini ta’minlashda plyuripotensiallar nazariyasini rivojlantirish, parabolik analitik

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020–yil 7-maydagi “Matematika sohasida ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-son qarori.

sirtlarda golomorf va plyurisubgarmonik funksiyalarning xossalarini oʻrganish ularni tadqiq qilish usullarini ishlab chiqish muhim ahamiyatga ega.

Mazkur dissertatsiyaning tadqiqotlari Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 29-oktabrdagi “Ilm-fanni 2030-yilgacha rivojlantirish Konsepsiyasini tasdiqlash toʻgʻrisida”gi PF-6097-son Farmoni, 2020-yil 6-noyabrdagi “Oʻzbekistonning yangi taraqqiyot davrida ta’lim-tarbiya va ilm-fan sohalarini rivojlantirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida”gi PF-6108-son farmoni, 2022-yil 28-yanvardagi “2022-2026-yillarga moʻljallangan Yangi Oʻzbekistonning taraqqiyot strategiyasi toʻgʻrisida”gi PF-60-son Farmoni, 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qoʻllab-quvvatlash, shuningdek, Oʻzbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida”gi va 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida”gi qarorlari, hamda ushbu faoliyat sohasiga oid boshqa me’yoriy-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yoʻnalishlariga mosligi. Mazkur dissertatsiya Oʻzbekiston Respublikasi fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yoʻnalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning oʻrganilganlik darajasi. Plyurisubgarmonik funksiyalar sinfida qurilgan plyuripotensiallar nazariyasi AQSH (E. Bedford va B.A. Teylor) va Oʻzbekiston (A. Sadullayev) olimlarining qator ishlarida ishlab chiqilgan. Bir necha yillar davomida bu nazariya Fransiya (J.P. Demail, A. Zeriahi, N. Siboni, V. Guedj), Shvetsiya (U. Segrel, K.O. Kiselman, B. Berndson), AQSH (N. Levenberg, L. Lempert, E. Poletskiy), Polsha (Z. Blocki, S. Kolodziej) va boshqa mamlakatlar mutaxassislari tomonidan yanada rivojlantirildi.

Parabolik koʻpxilliklar dastlab AQSH, Germaniya, Fransiya, Turkiya va Oʻzbekistoning bir qator olimlari (P. Griffits, J. King, V. Shtol, A. Sadullaev, A. Zeriahi, J.P. Demail, A. Aytuna, A. Atamuratov) ishlarida koʻrib chiqilgan. Jumladan, P. Griffits va J. King ishlarida algebraik parabolik koʻpxilliklarda Nevanlinna nazariyasi oʻrganilgan. V. Shtol ishlarida parabolik fazolarda Nevanlinna nazariyasining asosiy teoremalarini isbot qilgan, A. Zeriahi ishlarida esa parabolik koʻpxilliklarda potensiallar nazariyasi asoslari ishlab chiqilgan va ilk bor parabolik koʻpxillikdagi polinom tushunchasi kiritiladi, shuningdek algebraik parabolik koʻpxilliklarda approksimatsiya masalalariga tadbiq qilingan. J.P. Demail tomonidan parabolik koʻpxilliklarning kichik proektiv hajmga ega tiplari uchun geometrik xususiyatlari tadqiq etilgan. A.Aytuna va A.Sadullaev ishlarida parabolik koʻpxilliklar klassifikatsiya qilinib, S-parabolik koʻpxilliklarda aniqlangan golomorf funksiyalar fazosining strukturasi oʻrganilgan. Bundan tashqari A.Sadullaev va A.Atamuratov ishlarida parabolik koʻpxilliklarda polinomial approksimatsiya masalalari oʻrganiladi, jumladan Bernshtyen-Uolsh teoremasi analogi isbotlangan. Golomorf va plyurisubgarmonik funksiyalarning parabolik koʻpxilliklardan tashqari boshqa turdagi koʻpxilliklarda xossalarini oʻrganish boʻyicha tadqiqotlar bugungi kunda ham Shvetsiya (Goteburg texnologiya universiteti), Fransiya (Tuluza universiteti), Polsha (Yagelloniya universiteti, Krakov) va boshqa davlatlarning yetakchi ilmiy markazlarida davom ettirilmoqda.

Plyuripotensiallar nazariyasi zamonaviy ilm-fanning turli sohalarida koʻplab muhim tatbiqlariga ega boʻlishi va muammolarni yechilishida muvaffaqiyatli qoʻllanilishi turli xil qism koʻpxilliklar va kompleks fazolarning analitik qism toʻplamlarida golomorf va plyurisubgarmonik funksiyalarni chuqurroq oʻrganishni taqozo etadi.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bogʻliqligi. Tadqiqot Urganch davlat universiteti Matematik tahlil kafedrasining “Kompleks potensiallar nazariyasi” mavzusidagi ilmiy tadqiqotlar rejasi doirasida (2019-2023-yillar) amalga oshirildi.

Tadqiqotning maqsadi analitik sirtlarda plyuripotensiallar asoslarini ishlab chiqish, analitik sirtlarda golomorf va plyurisubgarmonik funksiyalarni oʻrganishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

analitik sirtlarda plyurisubgarmonik funksiyalar uchun maksimum prinsip va Hartogs lemmasini oʻrganish;

analitik sirtda P-oʻlchov tushunchasini aniqlash va uning xossalarini oʻrganish;

analitik sirtlarda plyurisubgarmonik funksiyalar uchun solishtirish prinsipini isbotlash va maksimallik kriteriyasini olish uchun solishtirish prinsipini qoʻllash;

S-parabolik sirt parabolik ekanligini koʻrsatish;

S-parabolik sirtlarda Grin funksiyasining xossalarini oʻrganish;

algebraik sirtlarda va ularning toʻldiruvchisida koʻphadlarni tavsiflash;

algebraik sirtlar va ularning toʻldiruvchilarining regulyar parabolik boʻlishini koʻrsatish.

Tadqiqot obyekti analitik va parabolik sirtlar.

Tadqiqot predmeti parabolik sirtlarda golomorf va plyurisubgarmonik funksiyalar xossalarini oʻrganish.

Tadqiqot usullari. Dissertatsiyada koʻp kompleks oʻzgaruvchilarning funksiyalari nazariyasi usullari, plyuripotensiallar nazariyasi usullari, shuningdek matematik fizika usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

analitik sirtlarning maxsus nuqtalari toʻplami atrofida analitik qoplamalardan foydalangan holda plyurisubgarmonik funksiyalarni oʻrganish metodlari ishlab chiqilgan va bu metodlar asosida plyurisubgarmonik funksiyalar uchun maksimum prinsipi hamda Hartogs lemmasining analitik sirtdagi analogi isbotlangan;

analitik sirtda plyuripolyar toʻplam tushunchasi kiritilib, plyuripolyar toʻplamlarning sanoqli birlashmasi plyuripolyar ekanligi isbotlangan;

analitik sirtda P-oʻlchov tushunchasi kiritilgan boʻlib, kompleks fazolarda oldindan berilgan plyuripolyar toʻplamlar uchun qutb nuqtalari bu toʻplamda boʻlgan plyurisubgarmonik funksiyalarni qurish konstruksiyasi yordamida plyuripolyar toʻplamlarning P-oʻlchovi trivial boʻlishi isbotlangan;

analitik sirtlarda Monje-Amper operatori uchun plyurisubgarmonik funksiyalar sinfida solishtirish prinsipi ishlab chiqilib, bu prinsip asosida plyurisubgarmonik funksiyalarning maksimallik kriteriyasi isbotlangan;

analitik sirtlarning paraboliklik, S-paraboliklik, S^*-parabolikligi klassifikatsiyasi keltirilgan. Analitik sirtlarda P-o‘lchov uchun ikki konstanta haqidagi tasdiq isbotlanib, bu tasdiqdan foydalangan holda S-parabolik sirtlarning parabolik bo‘lishi ko‘rsatilgan;

S-parabolik sirtlarda Grin funksiyasi kiritilgan, hamda Grin funksiyasining trivial bo‘lmasligi K kompaktning L-plyuripolyar bo‘lmasligiga ekvivalent bo‘lishi isbotlangan;

algebraik sirtlar va ularning to‘ldiruvchilarida aniqlangan ko‘phadlarning tuzilishi tasniflangan bo‘lib, bu asosida ularning regulyar parabolikligi isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

Analitik sirtlarda plyurisubgarmonik funksiyalarning solishtirish prinsipi isbotlangan;

algebraik sirtlarda va ularning to‘ldiruvchilarida ko‘phadlar tavsifi berilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi matematik fizikaning, klassik potensiallar nazariyasi va ko‘p kompleks o‘zgaruvchilarning funksiyalar nazariyasi usullari qo‘llanilganligi, asosiy natijalarning qat’iy matematik isbotlanganligi bilan asoslanadi. Bundan tashqari, dissertatsiyada olingan natijalarning nufuzli ilmiy nashrlarda, shu jumladan impakt faktorli ilmiy jurnallarda nashr qilinganligi va ilmiy seminarlarda ishning muhokamadan o‘tkazilganligi dissertatsiya natijalarining ishonchliligini tasdiqlaydi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati analitik sirtlarda plyurisubgarmonik funksiyalarni o‘rganish metodlari ishlab chiqilganligi, algebraik sirtning to‘ldiruvchisi regulyar parabolikligi haqidagi natijalar olinganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati analitik sirtlardagi plyurisubgarmonik funksiyalarning maksimallik kriteriyasidan matematik fizikada Monje-Amper tenglamasini qanoatlantiruvchi funksiyalar sinfini aniqlash imkonini berganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Dissertatsiyada olingan natijalar quyidagi ilmiy-tadqiqot loyihalarida qo‘llanilgan:

parabolik analitik sirtlarda isbotlangan regulyar kompakt to‘plamlar uchun ekstremal Grin funksiyasining uzluksizlik xossalaridan kompleks sohalarda maxsus funksiyalar uchun baholashlar olishda qo‘llanilgan (Mersin universitetining 2024 yil 31 iyuldagi ma’lumotnomasi, Turkiya). Polinomlar uchun ekstremal Grin funksiyasi bilan bog‘liq Bernshteyn-Uolsh tipidagi tengsizliklarning kompleks sohalarda analitik funksiyalar uchun kompakt qism to‘plamlarda approksimatsiya qildirish masalalarida qo‘llanilishi, analitik funksiyalarga yuqori tartibda yaqinlashuvchi polinomial ketma-ketliklarni aniqlash imkonini bergan;

analitik sirtlardagi plyurisubgarmonik funksiyalarning maksimallik kriteriyasi UT-OT-2020-1 raqamli “Monje-Amper tenglamasi va ekstremal plyurisubgarmonik funksiyalar” mavzusidagi fundamental loyihasi doirasida Monje-Amper tenglamasi yechimining xossalarini o‘rganishda qo‘llanilgan (O‘zbekiston Milliy universitetining

2024 yil 4 oktabrdagi №04/11-8260 sonli ma’lumotnomasi). Natijalarni qo‘llash analitik sirtda singulyar nuqtalardan tashqarida Monje-Amper tenglamasini qanoatlantiruvchi funksiyalar sinfi bilan ekstremal plyurisubgarmonik funksiyalar o‘rtasidagi bog‘lanishni aniqlash imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot ishi natijalari 5 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan 2 ta xalqaro va 3 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Tadqiqot mavzusi bo‘yicha jami 9 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 4 ta maqola, jumladan, 2 tasi xorijiy (Scopus) va 2 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Dissertatsiyaning hajmi 74 betni tashkil qiladi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar berilgan.

Dissertatsiyaning **“Dastlabki ma’lumotlar”** deb nomlanuvchi birinchi bobining birinchi paragrafida golomorf funksiya va uning nollari, kompleks ko‘pxillik, ko‘pxillikda golomorf va plyurisubgarmonik funksiyalar, analitik to‘plamlar va uning xossalari, analitik to‘plam tuzilishi, shuningdek algebraik to‘plam to‘g‘risidagi umumiy ma’lumotlar va natijalar keltirilgan.

M kompleks ko‘pxillik bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar M ko‘pxillikning har bir $a \in M$ nuqtasi uchun shunday $U \ni a$ atrof topilib, U da golomorf bo‘lgan $f_1, f_2, \ldots, f_l$ funksiyalar uchun $X \cap U = Z_{f_1} \cap Z_{f_2} \cap \ldots \cap Z_{f_l} \cap U$ bo‘lsa, $X \subset M$ to‘plam M da *analitik to‘plam* deyiladi.

2-ta’rif. X to‘plam M kompleks ko‘pxillikdagi analitik to‘plam bo‘lsin. X to‘plamning ixtiyoriy $z^0 \in X$ nuqtasidagi *o‘lchami* quyidagi ifoda orqali aniqlanadi:

$$\dim_{z^0} X := \overline{\lim_{\substack{z \to z^0 \\ z \in X^0}}} \dim_z X.$$

X to‘plamning o‘lchami uning nuqtalaridagi maksimal o‘lchamiga teng bo‘lib, quyidagicha aniqlanadi:

$$\dim X := \max_{z \in X} \dim_z X = \max_{z \in X^0} \dim_z X.$$

Odatda, $z^0 \notin X$ bo‘lsa, qulaylik uchun $\dim_{z^0} X = -1$ deb qabul qilinadi. $X \subset M$ analitik to‘plamning koo‘lchami $\dim M - \dim X$ ga teng. Agar $\forall z \in X$ uchun $\dim_z X \equiv n$ bo‘lsa, X analitik to‘plam *sof* n*-o‘lchamli* deyiladi.

Mazkur bobning ikkinchi paragrafida analitik to‘plamda Kartan ma’nosida golomorf funksiya ta’rifi va uning muhim xossalari keltirilgan. Ushbu bobning uchinchi paragrafida esa Shteyn ko‘pxilligi, parabolik va S-parabolik ko‘pxilliklar, shuningdek parabolik ko‘pxilliklarda potensiallar nazariyasining asosiy natijalari keltirilgan.

3-ta’rif (A. Kartan). $D \subset X$ soha bo‘lib, $f(z)$ funksiya $D \cap X^0$ sohada aniqlangan bo‘lsin. Agar $f(z)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, D sohada golomorf deyiladi.

a) $D \cap X^0$ ko‘pxillikda golomorf bo‘lsa;

b) D sohada lokal chegaralangan bo‘lsa, ya’ni har qanday $z^0 \in D$ nuqta uchun shunday $W \ni z^0, W \subset D$ atrof mavjud bo‘lib, bu atrofdagi $\forall z \in W \bigcap X^0$ nuqta uchun $\left|f(z)\right| \leq const$ sharti bajariladi.

4-ta’rif. Agar $X \subset \mathbb{C}^N$, $\dim X = n$ Shteyn ko‘pxilligida yuqoridan chegaralangan o‘zgarmasdan farqli plyurisubgarmonik funksiya mavjud bo‘lmasa, X parabolik ko‘pxillik deyiladi. Ya’ni, agar $u(z)$ funksiya X da plyurisubgarmonik va $u(z) \leq C$ bo‘lsa, u holda $u(z) \equiv const$ bo‘ladi.

Agar X da maxsus qamrov funksiya $\rho(z)$ mavjud bo‘lib, quyidagi shartlarni qanoatlantirsa unga S-parabolik ko‘pxillik deyiladi:

a) $\rho(z) \in psh(X), \left\{z \in X : \rho(z) \leq c\right\} \subset\subset X \quad \forall c \in \mathbb{R};$

b) biror $K \subset\subset X$ kompaktdan tashqarida $\left(dd^c\rho\right)^n = 0$ bo‘lsa, ya’ni ρ funksiya $X \setminus K$ da maksimal funksiya bo‘lsa.

Agar X da maxsus uzluksiz $\rho(z)$ qamrov funksiyasi mavjud bo‘lsa, X ko‘pxillikka S^**-parabolik* deyiladi.

Dissertatsiyaning **“Analitik sirtda potensiallar nazariyasi”** deb nomlanuvchi ikkinchi bobi analitik sirtlardagi plyurisubgarmonik funksiyalarni o‘rganishga bag‘ishlangan. Birinchi paragrafida analitik sirtlardagi plyurisubgarmonik funksiyalar uchun maksimum prinsipi va Hartogs lemmasi analogi isbotlangan. Ikkinchi paragrafda analitik sirtlarda plyuripolyar to‘plam va P-o‘lchov tushunchalari kiritilib, ularning xossalari isbotlangan. Uchinchi paragrafda analitik sirtlarda maksimal funksiyalar o‘rganilgan, solishtirish prinsipi va maksimallik kriteriyasi isbotlangan.

Aytaylik, $X \subset \mathbb{C}^N$ to‘plam o‘lchami $\mathrm{dim} X = n, n \leq N$ bo‘lgan keltirilmaydigan analitik to‘plam bo‘lib, $\mathbb{C}^N$ kompleks fazoda X kompakt joylashsa, ya’ni har qanday $B\left(0, r\right) \subset \mathbb{C}^N$ shar uchun $X \cap B\left(0, r\right) \subset\subset X$ bo‘lsin. Bunday analitik to‘plam *analitik sirt* deyiladi.

X da plyurisubgarmonik funksiyalar tushunchasini kiritamiz. X to‘plamning oddiy(regulyar) nuqtalari to‘plami $X^0 \subset X$ bilan belgilanadi. U holda $X \setminus X^0$ kritik nuqtalari to‘plami kichik o‘lchamli analitik to‘plam bo‘ladi, $\dim X \setminus X^0 < n.$ $X \setminus X^0$ to‘plam X analitik to‘plamni ajratmaydi va X^0 to‘plam $\mathbb{C}^N$ da n o‘lchamli qism ko‘pxillik bo‘ladi.

5-ta’rif (A. Sadullaev). Agar $D \subset X$ sohada berilgan $u(z)$ funksiya D da yuqoridan lokal chegaralangan va $D \cap X^0$ ko‘pxillikda $u(z) \in psh(D \cap X^0)$ plyurisubgarmonik bo‘lsa, u holda $u(z)$ funksiya D sohada *plyurisubgarmonik* deyiladi.

D dagi plyurisubgarmonik funksiyalar sinfi $psh(D)$ orqali belgilangan. Qulaylik uchun $u\left(z\right) \equiv -\infty$ funksiyasini ham $psh\left(D\right)$ sinfiga kiritamiz. Amaliyotda $z \in X \setminus X^0$ kritik nuqtalarda

$$u^*(z) = \overline{\lim_{\substack{w \to z \\ w \in X^0 \cap D}}} u(w),\ z \in D,$$

funksiya qaraladi va plyurisubgarmonik funksiyalarni o‘rganishda D ning hamma yerida aniqlangan $u^*(z)$ funksiya o‘rganiladi. $u^*(z)$ funksiya D da yuqoridan yarim uzluksiz bo‘lib, barcha $C \in \mathbb{R}$ uchun $\left\{z \in D: \quad u^*\left(z\right) < C\right\} -$ to‘plam ochiq va $\forall\ z \in X^0 \cap D$ uchun $u^*(z) = u(z)$ bo‘ladi.

X analitik sirtda plyurisubgarmonik funksiyalarning xossalari.

1) $D \subset X$ da plyurisubgarmonik funksiyalarning nomanfiy sonlarga ko‘paytmasining chiziqli kombinatsiyasi ham plyurisubgarmonik bo‘ladi, ya’ni agar $u_j^*(z) \in psh(D),\ \alpha_j \geq 0, j = 1,2,\dots,s$ bo‘lsa, u holda

$$\alpha_1 u_1^*(z) + \dots + \alpha_s u_s^*(z) \in psh(D);$$

2) tekis yaqinlashuvchi yoki monoton kamayuvchi $\left\{u_j^*(z)\right\}$ plyurisubgarmonik funksiyalar ketma – ketligining limiti plyurisubgarmonik funksiya bo‘ladi. Ya’ni, agar $u_j^*(z) \in psh(D)$ ($j = 1,2,\dots$), $u_j^*(z) \rightrightarrows u^*(z)$ yoki $u_j^*(z) \searrow u^*(z)$, u holda $u^*(z) \in psh(D)$;

3) aytaylik, $\{u_\alpha^*(z)\}, \alpha \in \Lambda -$ yuqoridan lokal tekis chegaralangan plyurisubgarmonik funksiyalarning ixtiyoriy oilasi va $u(z) = \sup_\alpha \{u_\alpha^*(z)\}$ bo‘lsin, u holda $u^*(z)$ regulyarizatsiyalangan funksiya D da plyurisubgarmonik bo‘ladi.

4) agar $\{u_j^*(z)\} -$ lokal tekis yuqoridan chegaralangan plyurisubgarmonik funksiyalar ketma-ketligi bo‘lib, $u(z) = \overline{\lim_{j \to \infty}} u_j^*(z)$ bo‘lsin, u holda $u^*(z)$ funksiya plyurisubgarmonik bo‘ladi.

Mazkur paragrafda quyidagi teoremalar isbot qilingan.

1-teorema (Maksimum prinspi). $u^*(z) \in psh\left(D\right)$ *funksiya uchun* $D \subset X$ *da maksimum prinsipi bajariladi, ya'ni agar* $u^*(z) \in psh\left(D\right)$ *funksiya biror ichki* $z^0 \in D$ *nuqtada* $u^*(z^0) = \sup\limits_D u^*(z)$ *bo'lsa, u holda* $u^* \equiv const$ *bo'ladi.*

2-teorema (Hartogs lemmasining analitik sirtdagi analogi). *Faraz qilaylik,* $D \subset X$ *ochiq to'plam va* $\left\{u_j\right\}$ *ketma-ketlik* D *da yuqoridan lokal tekis chegaralangan plyurisubgarmonik funksiyalar bo'lib, har bir tayinlangan* $z \in D$ *uchun*

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} u_j^*(z) \leq A,$$

tengsizlik bajarilsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ *va* $K \subset\subset D$ *kompakt uchun shunday* $j_0 = j_0(\varepsilon, K) \in \mathbb{N}$ *topiladiki,* $\forall\ j \geq j_0,\quad \forall\ z \in K$ *da*

$$u_j^*(z) \leq A + \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

1-natija. *Faraz qilaylik, X analitik sirtda* D *soha bo'lib,* D *da* $g(z)$ *uzluksiz funksiya va* $\left\{u_j\right\}$ *yuqoridan lokal tekis chegaralangan plyurisubgarmonik funksiyalar ketma-ketligi berilgan bo'lsin. Agar har bir tayinlangan* $z \in D$ *uchun*

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} u_j^*(z) \leq g(z),$$

tengsizlik bajarilsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ *va* $K \subset\subset D$ *kompakt uchun shunday* $j_0 = j_0(\varepsilon, K) \in \mathbb{N}$ *topiladiki,* $\forall\ j \geq j_0,\quad \forall\ z \in K$ *da*

$$u_j^*(z) \leq g(z) + \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafi analitik sirtlarda plyuripolyar to'plam, P-o'lchov va ularning xossalarini o'rganishga bag'ishlanadi.
$D \subset X$ soha va uning biror $E \subset D \subset X$ qism to'plami berilgan bo'lsin.

6-ta'rif. Agar shunday $u(z) \in psh(D)$, $u^*(z) \not\equiv -\infty$ funksiya topilib, $u^*\big|_E = -\infty$ bo'lsa, $E \subset D \subset X$ to'plam D da *plyuripolyar* to'plam deyiladi.

Plyuripolyar to'plamlar quyidagi muhim xossaga ega.

3-teorema. *Sanoqli sondagi plyuripolyar to'plamlar birlashmasi plyuripolyar bo'ladi, ya'ni agar* $E_j \subset D, j = 1, 2, \ldots,$ *to'plamlar plyuripolyar to'plamlar bo'lsa, u holda* $E = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} E_j$ *ham plyuripolyar bo'ladi.*

Analitik sirtda ham P-o'lchov regulyar sohalarda aniqlanadi.

7-ta'rif. Agar shunday $\rho(z) \in psh(D) : \rho(z) < 0,\ \lim\limits_{z\to\partial D} \rho(z) = 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi plyurisubgarmonik funksiya mavjud bo'lsa, $D \subset X$ soha *regulyar* soha deyiladi.

Agar $\rho(z)$ plyurisubgarmonik funksiya $D=\{z\in X:\rho(z)<0\}$ sohaning biror $\hat{D}\supset\bar{D}$ atrofida uzluksiz bo‘lsa, $D\subset X$ ga *kuchli regulyar* yoki *kuchli psevdoqavariq* deyiladi.

8-ta’rif. Tayinlangan $E\subset D$ to‘plam uchun

$$\mathcal{H}\Big(E,D\Big)=\Big\{u^*\in psh\Big(D\Big):u^*\Big|_E\le -1,\ u^*\Big|_D\le 0\Big\},$$

sinfni qaraylik. Ushbu $\omega(z,E,D)=\sup\limits_{u^*\in\mathcal{H}(E,D)}u^*(z)$ funksiyaning regulyarizatsiyalangan $\omega^*(z,E,D)=\overline{\lim\limits_{w\to z}}\ \omega(w,E,D)$ funksiyasiga E to‘plamning D sohaga nisbatan P*-o‘lchovi* deyiladi.

Plyurisubgarmonik funksiyalarning 3-xossasiga ko‘ra $\omega^*(z,E,D)\in psh(D)$. Shokening topologik lemmasiga ko‘ra, $\mathcal{H}'(E,D)\subset\mathcal{H}(E,D)$ qism oila mavjud bo‘lib, $\left\{\sup\limits_{u^*\in\mathcal{H}'(E,D)}u^*(z)\right\}^*\equiv\omega^*(z,E,D)$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bundan kelib chiqadi, P-o‘lchovni $\{u_j^*(z)\}\subset\mathcal{H}(E,D)$ monoton o‘suvchi ketma-ketlikning limiti deb qarash mumkin, ya’ni $\left[\lim\limits_{j\to\infty}u_j^*(z)\right]^*\equiv\omega^*(z,E,D)$.

P-o‘lchov $\mathbb{C}^n$ kompleks fazodagi P-o‘lchov bilan bir xil bo‘lgan quyidagi xossalarga ega.

1) monotonlik xossasi. Agar $E_1\subset E_2$ bo‘lsa, u holda $\omega^*(z,E_1,D)\ge\omega^*(z,E_2,D)$ bo‘ladi; agar $E\subset D_1\subset D_2$ bo‘lsa, u holda $\omega^*(z,E,D_1)\ge\omega^*(z,E,D_2)$ bo‘ladi.

2) $U\subset D$ ochiq to‘plam uchun $\omega^*(z,U,D)\in\mathcal{H}(U,D)$ va shuningdek $\omega^*(z,U,D)\equiv\omega(z,U,D)$ bo‘ladi.

3) agar $U\subset D-$ ochiq to‘plam bo‘lib, $U=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}K_j,\ K_j\subset\overset{\circ}{K}_{j+1}$ bo‘lsa, u holda $\omega^*(z,K_j,D)\downarrow\omega(z,U,D)$ bo‘ladi.

4) agar ixtiyoriy $E\subset D$ to‘plam bo‘lsa, u holda $U_j\supset E,\ U_j\supset U_{j+1}$, $j=1,2,\ldots,$ ochiq to‘plamlarning kamayib boruvchi ketma-ketligi mavjudki, $\omega^*(z,E,D)=[\lim\limits_{j\to\infty}\omega(z,U_j,D)]^*$ bo‘ladi.

5) $\omega^*(z,E,D)$ P-o‘lchov yoki hech qayerda nolga teng emas yoki u aynan nolga teng bo‘ladi. $\omega^*(z,E,D)\equiv 0$ bo‘lishi uchun E to‘plam D da plyuripolyar bo‘lishi zarur va yetarli.

6) *ikki konstanta haqidagi teorema*. Agar $u^*(z)$ funksiya $D\subset X$ da plyurisubgarmonik va $u^*\Big|_D\le M,\ u^*\Big|_E\le m,\ E\subset D$ bo‘lsa, u holda barcha $z\in D$ uchun

$$u^*(z)\le M(1+\omega^*(z,E,D))-m\omega^*(z,E,D)$$

tengsizlik bajariladi.

Ikkinchi bobning uchinchi paragrafida analitik sirtlarda maksimal funksiyalar va ularning xossalari o‘rganilgan.

9-ta’rif. Aytaylik, X analitik sirtda $D \subset X$ soha berilgan bo‘lsin. Agar $u^*(z) \in psh(D)$ funksiya uchun ixtiyoriy $\forall G \subset\subset D$ kompaktda maksimum prinsipi bajarilsa, ya’ni agar $v^*(z) \in psh(D)$ va $\forall \xi \in \partial G$ da $\varliminf_{z \to \xi}\left(u^*(z) - v^*(z)\right) \geq 0$ bo‘lishidan, $\forall z \in G$ uchun $u^*(z) \geq v^*(z)$ tengsizlik bajarilsa, $u^*(z) \in psh(D)$ funksiyaga *maksimal* deyiladi.

4-teorema. *Quyidagi tasdiqlar ekvivalent:*

1) $u^*(z)$ *funksiya* D *sohada maksimal;*

2) *agar har qanday* $v^*(z) \in psh(D)$ *funksiya uchun* $\varliminf_{z \to \partial D}\left(u^*(z) - v^*(z)\right) \geq 0$ *bo‘lsa, u holda* D *da* $u^*(z) \geq v^*(z)$ *bo‘ladi;*

3) *agar har bir* $v^*(z) \in psh(D)$ *funksiya va har qanday kompakt* $G \subset\subset D$ *qism soha uchun* $u^*(z)\Big|_{\partial G} \geq v^*(z)\Big|_{\partial G}$ *tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda* $\forall z \in G$ *uchun* $u^*(z) \geq v^*(z)$ *bo‘ladi;*

4) *har bir* $v^*(z) \in psh(D)$ *funksiya va har qanday kompakt* $G \subset\subset D$ *qism soha uchun* $\varliminf_{z \to \xi}\left(u^*(z) - v^*(z)\right) \geq 0,\, z \in G, \xi \in \partial G$ *tengsizlik bajarilsa, bundan* $\forall z \in G$ *da* $u^*(z) \geq v^*(z)$ *bo‘ladi;*

5) *har qanday kompakt* $G \subset\subset D$ *qism soha va har qanday* $v^*(z) \in psh(G)$ *funksiya uchun* $u^*(\xi) \geq \varliminf_{z \to \xi} v^*(z) \geq 0,\, z \in G,\, \xi \in \partial G$ *tengsizlik o‘rinli bo‘lsa,* G *da* $u^*(z) \geq v^*(z)$ *tengsizlik bajariladi.*

Bu paragrafda analitik sirtda plyuripotensiallar nazariyasini qurishda muhim ahamiyatga ega quyidagi teorema isbotlangan.

5-teorema (Solishtirish prinsipi). X *analitik sirtda* D *soha va* $u^*, v^* \in psh(D) \cap L^\infty_{loc}(D)$ *funksiyalar berilgan bo‘lsin. Agar* $F = \left\{z \in D : u^*(z) < v^*(z)\right\}$ *to‘plam* D *da kompakt yotsa, u holda*

$$\int_{\left\{u^* < v^*\right\}} \left(dd^c v^*\right)^n \leq \int_{\left\{u^* < v^*\right\}} \left(dd^c u^*\right)^n$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

5-teoremani quyidagi formalarda ham berish mumkin.

2-natija. *Aytaylik,* $u^*, v^* \in psh(D) \cap L^\infty_{loc}(D)$ *va* $\varliminf_{z \to \partial D}\left[u^*(z) - v^*(z)\right] \geq 0$ *bo‘lsin. U holda*

$$\int_{\left\{u^{*}<v^{*}\right\}}\left(dd^{c}v^{*}\right)^{n} \leq \int_{\left\{u^{*}<v^{*}\right\}}\left(dd^{c}u^{*}\right)^{n}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

3-natija. *Aytaylik,* $D \subset X$ *chegaralangan ochiq to'plam va* $u^{*}, v^{*} \in psh(D) \cap L_{loc}^{\infty}(D)$ *funksiyalar uchun quyidagi shartlar bajarilsin:*

(1) $\lim\limits_{z \to \partial D} u^{*}(z) = \lim\limits_{z \to \partial D} v^{*}(z)$;

(2) D *da* $u^{*} \leq v^{*}$ *bo'lsin.*

U holda

$$\int_{D}\left(dd^{c}v^{*}\right)^{n} \leq \int_{D}\left(dd^{c}u^{*}\right)^{n}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

5-teoremadan quyidagi dominatlik prinsipi oson kelib chiqadi, bu natija boshqa usulda A. Zeriahi tomonidan ham olingan.

4-natija. *Aytaylik,* $D \subset\subset X$ *va* $u^{*}, v^{*} \in psh(D) \cap L_{loc}^{\infty}(D)$ *bo'lib,* $(dd^{c}u^{*})^{n} \leq (dd^{c}v^{*})^{n}$ *bo'lsin. Agar* $\varliminf\limits_{z \to \partial D}\left[u^{*}(z) - v^{*}(z)\right] \geq 0$ *bo'lsa, u holda* D *ning hamma yerida* $u^{*} \geq v^{*}$ *bo'ladi.*

Shuningdek, bu paragrafda ushbu maksimallik kriteriyasi ham isbot qilingan.

6-teorema. *Aytaylik,* X *analitik sirtda* D *soha berilgan bo'lsin.* $u^{*}(z) \in psh\left(D\right) \cap L_{loc}^{\infty}\left(D\right)$ *funksiya maksimal bo'lishi uchun D da*

$$\left(dd^{c}u^{*}\right)^{n} = 0$$

bo'lishi zarur va yetarli.

5-natija. P*-o'lchov* $K \subset X$ *plyuripolyar bo'lmagan kompaktdan tashqarida maksimal, ya'ni*

$$\left(dd^{c}\omega^{*}(z,K,D)\right)^{n} = 0 \qquad \forall z \in X^{0} \setminus K.$$

Dissertatsiyaning **"Regulyar parabolik sirtlar. Grin funksiyasi"** deb nomlangan uchinchi bobida parabolik sirtlar va ularning tasnifi o'rganiladi. 3.1 paragrafda analitik sirtlarning tasnifi (S-paraboliklik, S^{*}-paraboliklik va boshqalar) o'rganilgan. 3.2 paragrafda ekstremal Grin funksiyasining ta'rifi va xossalari o'rganilgan. 3.3 paragrafda regulyar parabolik sirtlar, ularning muhim xossalari va misollari ko'rib chiqiladi. Sirtlardagi kritik to'plamning mavjudligi kritik to'plam atrofida maxsus yondashuvni talab qiladi.

X analitik sirtning parabolikligi tushunchasi ko'pxilliklarning parabolikligi kabi kiritiladi.

10-ta'rif. Agar X analitik sirtda yuqoridan chegaralangan o'zgarmasdan farqli plyurisubgarmonik funksiya mavjud bo'lmasa, X sirt *parabolik* deyiladi.

Agar X analitik sirtda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi maxsus qamrov funksiyasi $\rho(z)$ mavjud bo'lsa, X analitik sirt S*-parabolik* deyiladi.

a) $\rho(z) \in psh(X), \left\{z \in X : \rho \leq c\right\} \subset\subset X \ \ \forall c \in \mathbb{R}$;

b) biror $K \subset\subset X$ kompaktdan tashqarida ρ^* funksiya maksimal bo‘lsin. Bu $X^0 \setminus K$ da $\left(dd^c\rho^*\right)^n = 0$ tenglik bajarilishiga ekvivalent bo‘ladi, bu yerda $\dim X = n$.

Agar X analitik sirtda uzluksiz $\rho(z) \in C\left(X^0\right)$ maxsus qamrov funksiyasi mavjud bo‘lsa, X analitik sirt S^**-parabolik* deyiladi.

Bu paragrafning asosiy natijasi quyidagi teorema.

7-teorema. *S-parabolik X sirt parabolik bo‘ladi, ya’ni S-parabolik X sirtda o‘zgarmasdan farqli yuqoridan chegaralangan $u^*(z)$ plyurisubgarmonik funksiya mavjud bo‘lmaydi.*

Uchinchi bobning ikkinchi paragrafida S-parabolik analitik sirtlarda Grin funksiyasi o‘rganiladi.

Aytaylik, $\left(X,\rho\right)$ S-parabolik sirt bo‘lsin. $\mathfrak{A}_\rho(X)$ bilan

$$u(z) \le c_u + \rho^+(z),\ z \in X,$$

shartni qanoatlantiradigan $u \in psh(X)$ plyurisubgarmonik funksiyalar sinfini belgilanadi, bu yerda c_u u va $\rho^+(z) = \max\left\{0,\ \rho(z)\right\}$ funksiyalarga bog‘liq bo‘lgan biror o‘zgarmas. $\mathfrak{A}_\rho(X)$ ga X dagi *plyurisubgarmonik funksiyalarning Lelon sinfi* deyiladi, ya’ni $\mathfrak{A}_\rho(X) = \left\{u \in psh(X) : u(z) \le c_u + \rho^+(z),\ z \in X\right\}$. $K \subset\subset X$ to‘plami uchun

$$V_\rho(z,K) = \sup\left\{u(z) :\ u \in \mathfrak{A}_\rho(X),\ u\big|_K \le 0\right\}$$

ni aniqlaymiz. U holda $V_\rho^*(z,K) = \overline{\lim_{w\to z}} V_\rho(w,K)$ regulyarizatsiyaga ρ*-Grin funksiyasi* deyiladi.

11-ta’rif. Agar shunday $u(z) \in \mathfrak{A}_\rho(X)$, $u^*(z) \not\equiv -\infty$ funksiya mavjud bo‘lib, $K \subset X$ to‘plamda $u^*\big|_K = -\infty$ bo‘lsa, K to‘plam L*-plyuripolyar* deyiladi.

1-lemma. *Agar $K \subset X$ plyuripolyar to‘plam bo‘lsa, u holda u L-plyuripolyar to‘plam ham bo‘ladi.*

Grin funksiyasi klassik holatda bo‘lgani kabi quyidagi xossalarga ega.

1) agar $K_1 \subset K_2 \subset X$ bo‘lsa, u holda $V_\rho^*(z,K_1) \ge V_\rho^*(z,K_2)$ bo‘ladi;

2) har qanday $K \subset X$ plyuripolyar bo‘lmagan kompakt uchun $V_\rho^*(z,K)$ ρ-Grin funksiyasi

$$\mathfrak{A}_\rho^+(X) = \left\{u \in psh(X) : c_u' + \rho^+(z) \le u(z) \le c_u + \rho^+(z),\ z \in X\right\}$$

sinfga tegishli bo‘ladi.

3) agar E ochiq to‘plam ushbu $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$ ko‘rinishda $K_j \subset \overset{\circ}{K}_{j+1}$ $(j = 1,2,\ldots)$ o‘sib boruvchi kompakt to‘plamlar ketma-ketligidan iborat bo‘lsa, u holda $V_\rho^*(z,K_j) \downarrow V_\rho^*(z,E)$ bo‘ladi.

4) agar $E \subset X$ ixtiyoriy to‘plam bo‘lsa, u holda shunday

$$E_j \supset E,\ E_j \supset E_{j+1},\ j = 1,2,\ldots,$$

ochiq to‘plamlarning kamayuvchi ketma-ketligi mavjud bo‘lib,

$$\left[\lim_{j\to\infty} V_\rho^*\left(z, E_j\right)\right]^* = V_\rho^*\left(z, E\right)$$

bo‘ladi.

Quyidagi xossa X sirtning kritik nuqtalari mavjudligi sababli oddiy emas.

5) $V_\rho \in \mathfrak{A}_\rho(X)$ yoki $V_\rho \equiv +\infty$ bo‘ladi. $V_\rho(z,K) \equiv +\infty$ bo‘lishi uchun K to‘plam X da plyuripolyar bo‘lishi zarur va yetarli. Ya’ni shunday $u^* \in psh(X):\ u^* \not\equiv -\infty$ funksiya mavjud bo‘lib, $\forall z \in K$ uchun $u^*(z) = -\infty$ bo‘ladi.

6) aytaylik, $K \subset\subset X$ plyuripolyar bo‘lmagan kompakt bo‘lsin. U holda $V_\rho(z,K)$ Grin funksiyasi $X \setminus K$ da maksimal bo‘ladi. Xususan, $X^0 \setminus K$ kompleks ko‘pxillikda $\left(dd^c V_\rho^*(z,K)\right)^n = 0$ bo‘ladi.

7) agar $E \subset X$ plyuripolyar to‘plam bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $K \subset X$ to‘plam uchun $V_\rho^*(z, K \cup E) = V_\rho^*(z,K)$ bo‘ladi.

12-ta’rif. Agar $z^0 \in X$ nuqtada $V_\rho^*\left(z^0,\ K\right) = 0$ tenglik bajarilsa, $K \subset X$ kompakt $z^0 \in X$ nuqtada *regulyar* deyiladi. Agar $K \subset X$ kompaktning barcha nuqtalari regulyar bo‘lsa, K *regulyar kompakt* deyiladi.

8) agar $K \subset X$ regulyar kompakt bo‘lsa, u holda $G_\varepsilon = \left\{z \in X : V_\rho^*(z,K) < \varepsilon\right\}$ ochiq to‘plam K ni o‘zida saqlaydi, ya’ni $G_\varepsilon \supset K$.

Uchinchi bobning uchinchi paragrafida regulyar parabolik sirtlar o‘rganilgan. Aytaylik, $X \subset \mathbb{C}^N$ S-parabolik sirt va $\rho(z)$ uning maxsus qamrov funksiyasi bo‘lsin.

13-ta’rif. Agar $f \in \mathcal{O}(X)$ funksiya

$$\ln\left|f(z)\right| \le d_f \rho^+(z) + c_f \quad \forall z \in X, \tag{1}$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, bu yerda c_f va d_f musbat haqiqiy sonlar (o‘zgarmas), u holda f ga ρ-*ko‘phad* deyiladi. (1) shartni qanoatlantiradigan d_f ning eng kichik qiymatiga f ko‘phadning darajasi deyiladi.

Darajasi d dan kichik yoki teng barcha ρ-ko‘phadlar to‘plamini $\mathcal{P}_\rho^d(X)$ bilan va $\mathcal{P}_\rho(X)$ orqali esa $\mathcal{P}_\rho(X) = \bigcup_{d\ge 1} \mathcal{P}_\rho^d(X)$ birlashmani belgilaymiz.

14-ta’rif. Agar barcha $\mathcal{P}_\rho(X) = \bigcup_{d\ge 1} \mathcal{P}_\rho^d(X)$ ρ-ko‘phadlar fazosi $\mathcal{O}(X)$ fazoda zich bo‘lsa, u holda S-parabolik X sirt *regulyar* deyiladi.

Uchinchi bobning uchinchi paragrafida quyidagi asosiy teorema isbotlangan:

8-teorema. *Ixtiyoriy* $A=\left\{z\in\mathbb{C}^n : p(z)=0\right\}\subset\mathbb{C}^n$ *sof* $(n-1)$*-o‘lchamli algebraik to‘plamning* $X=\mathbb{C}^n\setminus A$ *to‘ldiruvchisi regulyar* S^**-parabolik ko‘pxillik bo‘ladi. Agar* $p(0)\neq 0$ *bo‘lsa, u holda*

$$\rho(z)=-\frac{1}{\deg p}\ln\left|p(z)\right|+2\ln\left\|z\right\|$$

funksiya X *sirtning maxsus qamrov funksiyasi bo‘ladi.*

Muallif ushbu dissertatsiya natijalarini ko‘p marotaba muhokama qilishda va ishni yakunlashda qimmatli maslahatlarini berganligi uchun akademik A. Sadullayevga, dotsent A.A. Atamuratovga shuningdek, dissertatsiyada ko‘rilgan masalalarni qo‘yish va dissertatsiya ishiga doimiy e’tiborda bo‘lganligi uchun ilmiy rahbari, fizika-matematika fanlari doktori, professor B.I. Abdullayevga chuqur minnatdorchilik bildiradi.

XULOSA

Dissertatsiya ishi analitik sirtda potensiallar nazariyasining asoslarini ishlab chiqish, shuningdek parabolik sirtlarni va parabolik sirtlardagi Grin funksiyasining xossalarini o‘rganishga bag‘ishlangan. Analitik sirt regulyar ko‘pxilliklardan analitik sirtlarda maxsus (kritik) nuqtalari mavjudligi bilan farq qiladi. Bu esa analitik sirtlarda golomorf va plyurisubgarmonik funksiyalarni o‘rganishdagi asosiy qiyinchilikdir. Shu o‘rinda, dissertatsiya ishidagi ushbu qiyinchiliklarni ko‘p o‘lchovli kompleks analizning geometrik jihatlarining zamonaviy usullarini qo‘llash orqali bartaraf etiladi.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1) analitik sirtlarda plyurisubgarmonik funksiyalar uchun maksimum prinsipi va Hartogs lemmasi isbotlangan;

2) analitik sirtda plyuripolyar to‘plam tushunchasi kiritildi va plyuripolyar to‘plamlarning sanoqli birlashmasi yana plyuripolyar ekanligi isbotlangan;

3) analitik sirtda P-o‘lchov tushunchasi kiritiladi va uning bir qator muhim xossalari isbotlangan;

4) analitik sirtlarda $\left(dd^c u^*\right)^n$ operatorining solishtirish prinsipi isbotlangan;

5) analitik sirtdagi plyurisubgarmonik funksiyalarning maksimallik kriteriyasi $\left(dd^c u^*\right)^n$ operatori ma’nosida isbotlangan;

6) S-parabolik sirtlarning parabolik bo‘lishligi isbotlangan;

7) S-parabolik sirtlarda Grin funksiyasi kiritilgan;

8) $V_\rho^*\left(z,K\right)$ Grin funksiyaning trivial bo‘lmasligi K kompaktning L-plyuripolyarligi terminida isbotlangan;

9) algebraik sirtlarning regulyar parabolik bo‘lishi isbotlangan;

10) algebraik sirtning to‘ldiruvchisi regulyar parabolik bo‘lishi isbotlangan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.12.2019.FM.55.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
УРГЕНЧСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

УРГЕНЧСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАМОЛОВ ХУРСАНДБЕК КУРОЛБОЕВИЧ

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ АНАЛИТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам

Ургенч – 2025 г.

Тема диссертации доктора философии (PhD) зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при министерстве Высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за № B2022.4.PhD/FM784.

Диссертация выполнена в Ургенчском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-mat.urdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный руководитель:	**Абдуллаев Бахром Исмаилович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Имомкулов Севдиер Акрамович** доктор физико-математических наук, профессор
	Атамуратов Алимардон Абдиримович кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	**Каракалпакский государственный университет**

Защита диссертации состоится «01» марта 2025 года в 14:00 часов на заседании Научного совета PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 при Ургенчском государственном университете (Адрес: 220100, г. Ургенч, ул. Х. Алимджана, дом 14. Тел.: (+99862)224-66-11, факс: (+99862) 224-67-00, e-mail: info@urdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Ургенчского государственного университета (зарегистрирована за №D-764. (Адрес: 220100, г. Ургенч, ул. Х.Алимджана, дом 14. Тел.: (+99862) 224-66-11, факс: (+99862) 224-67-00, e-mail: arm@urdu.uz).

Автореферат диссертации разослан «17» февраля 2025 года.

(протокол рассылки №17 от «17» февраля 2025 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

Г.У. Уразбоев
Заместитель председателя Научного совета по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук

А.А. Рейимберганов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, кандидат физико-математических наук

Б.А. Бабажанов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Результаты многих научных и практических исследований, проводимые в мировом уровне, показывают, что изучения голоморфных и плюрисубгармонических функций является одним из актуальных направлений в теории функций и математической физики. В частности, определение голоморфных и плюрисубгармонических функций на различных аналитических поверхностях и иcследование их свойств имеет особое значение в теории комплексных динамических систем, а также в геометрической теории функций. А именно, теория плюрипотенциалов, построенная на основе класса плюрисубгармонических функций, стала одним из основных и важных исследовательских инструментов в различных приложениях комплексного анализа в квантовой теории поля в теоретической физике. Поэтому, изучение свойств голоморфных и плюрисубгармонических функций на аналитических поверхностях методами теории плюрипотенциала является актуальным. Специальные плюрисубгармонические функции исчерпания играют ключевую роль в разработке основ теории потенциалов на аналитических поверхностях. Эти вопросы, в свою очередь, сводятся к понятии параболичности аналитических поверхностей. Поэтому, определение параболичности, введение понятия P-меры, функции Грина и изучение полиномов на аналитических параболических многообразиях являются важными задачами в данной области.

В настоящее время основное внимание уделяется изучению различных классов функций на аналитических поверхностях и комплексных многообразиях на основе теории плюрипотенциалов, а также их применению к другим областям посредством геометрической теории функций и теории комплексных динамических систем. Используя плюрисубгармонические функции и их класс экстремальных плюрисубгармонических функций, которые имеют богатый набор свойств, определяются новые объекты для внедрения в различных областях математики. В частности, в теории многомерных комплексных динамических систем параболические расслоение (расслоение Монжа-Ампера) представляют собой важные геометрические объекты для понимания более сложных математических структур. Поэтому изучение параболических аналитических поверхностей, а также свойств экстремальных плюрисубгармонических функций на них, считаются целевыми научными исследованиями.

В нашей стране особое внимание уделяется решению прикладных задач и разработке современных математических методов теории функций, имеющим фундаментальную и практическую значимость. Особенно усиливается внимание изучению современных задач теории плюрипотенциала в многомерном комплексном анализе имеющие практическую значимость. В частности, в направлении по исследованию свойств параболических аналитических поверхностей, описании структур дефектных дивизоров голоморфных отображений получены ряд существенных результат. Проведение научных исследований на уровне международного стандарта по приоритетным направлениям математики, физики и современных методов математической физики является основной задачей деятельности высших учебных заведений[2]. Изучение свойств голоморфных и плюрисубгармонических функций на параболических аналитических поверхностей, а также разработка методов их исследования играют важную роль в обеспечении исполнении постановления.

Исследования данной диссертации в определенной степени служат решению задач, указанных в Указах №-УП-6097 «Об утверждении концепции развития науки до 2030 года» от 29 октября 2020 года, №-УП-6108 «О мерах по развитию сфер образования и воспитания, и науки в новый период развития Узбекистана» от 6 ноября 2020 года, №-УП-60 «О стратегии развития нового Узбекистана на 2022-2026 годы» от 28 января 2022 года, Постановлениях Президента Республики Узбекистан ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан», №-ПП-4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 7 мая 2020 года, а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Настоящая работа выполнена в соответствии с приоритетными направлениями развития науки и технологий Республики Узбекистан №4. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Теория плюрипотенциала, построенная в классе плюрисубгармонических функций, была разработана в цикле работ учёных из США (Э. Бедфорда и Б.А. Тэйлора) и Узбекистана (А. Садуллаева). На протяжении нескольких лет это теория была развита специалистами из многих стран, таких как Франция (Ж.П. Демаи, А. Зериахи, Н. Сибони, В. Гуедж), Швеция (У. Сегрел, К.О. Киселман, Б. Берндсон), США (Н. Левенберг, Л. Лемперт, Е. Полетский), Польша (З. Блоцки, С. Колодзей) и др..

Параболические многообразия, впервые рассматривались в работах ряда ученых США, Германии, Франции, Турции и Узбекистана (П. Гриффитса, Ж. Кинга, В. Штоля, А. Зериахи, Ж.П. Демаи, А. Айтуны и А. Садуллаева, А. Атамуратова). В частности, в работах П. Гриффитса и Ж. Кинга была изучена теория Неванлинны на алгебраических параболических многообразиях. В работах В. Штоля доказаны основные теоремы теории Неванлинны в параболических пространствах. А. Зериахи разработал основы теории потенциалов на параболических многообразиях, впервые вводил понятие полинома на параболическом многообразии, а также исследовал приложения к задачам аппроксимации на алгебраических параболических многообразиях. Ж. П. Демаи изучил геометрические аспекты параболических многообразий с малыми проективными объёмами. В работах А. Айтуны и

[2] Постановление Президента Республики Узбекистан от 7 мая 2020 года № -ПП-4708 “О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики”

А. Садуллаева была проведена классификация параболических многообразий, а также исследована структура пространства голоморфных функций, определённых на S-параболических многообразиях. Кроме того, в работах А. Садуллаева и А. Атамуратова изучались задачи полиномиальной аппроксимации на параболических многообразиях, включая доказательство аналога теоремы Бернштейна-Уолша. Настоящее время исследования свойств голоморфных и плюрисубгармонических функций не только на параболических, но и на других типах многообразий продолжаются в ведущих научных центров Швеции (Технологический университет Гётибурга), Франции (Университете Тулузы), Польша (Ягеллонского университета, Краков) и др.

Теория плюрипотенциалов имеет многочисленные важные приложения в различных областях современной науки и успешное её использование в решении проблем требует углублённого изучения голоморфных и плюрисубгармонических функций на аналитических подмножествах и различных подмногообразиях комплексных пространств.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научных исследований по теме «Комплексная теория потенциала» кафедры Математического анализа Ургенчского государственного университета (2019-2023 гг.).

Цель исследования: разработка основы плюрипотенциала на аналитических поверхностях и изучение голоморфных и плюрисубгармонических функций на аналитических поверхностях.

Задачи исследования, решаемые в данной работе:

изучение принципа максимума и леммы Хартогса для плюрисубгармонических функций на аналитических поверхностях;

определение понятия P-меры на аналитической поверхности и изучение ее свойств;

доказать принципа сравнение на аналитических поверхностях для плюрисубгармонических функций и применяя принципа сравнения получить критерию максимальности;

показать, что S-параболические поверхности являются параболическими;

изучение свойств функции Грина на S-параболических поверхностях;

описать полиномы на алгебраических поверхностях и на их дополнениях;

установить регулярную параболичность алгебраических поверхностей и их дополнений.

Объект исследования. Аналитические и параболические поверхности.

Предмет исследования. Изучение свойств голоморфных и плюрисубгармонических функций на параболических поверхностях.

Методы исследования. В диссертации использованы методы теории функций многих комплексных переменных, методы теории плюрипотенциала, а также методы математической физики.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

разработаны методы изучения плюрисубгармонических функций в окрестности особых точек аналитических поверхностей с использованием аналитических накрытий и на основе этих методов доказаны принцип максимума и аналог леммы Хартогса на аналитической поверхности;

введено понятие плюриполярного множества на аналитической поверхности, и доказано, что счётное объединение плюриполярных множеств также является плюриполярным;

введено понятие P-меры на аналитической поверхности, для заданных плюриполярных множеств в комплексных пространствах доказано, что P-мера плюриполярного множества является тривиальной с использованием конструкции плюрисубгармонических функций, полюсы которых принадлежат этим множествам;

разработан принцип сравнения в классе плюрисубгармонических функций для оператора Монжа-Ампера на аналитических поверхностях, и на основе этого принципа доказан критерий максимальности плюрисубгармонических функций;

приведена классификация параболичности, S-параболичности и S^*-параболичности аналитических поверхностей. Доказано утверждение о двух константах для P-меры на аналитических поверхностях, и с его помощью показано, что S-параболические поверхности являются параболическими;

введена функция Грина на S-параболических поверхностях, и доказано, что нетривиальность функции Грина эквивалентна тому, что компакт K не является L-плюриполярными;

классифицирована структура многочленов, определённых на алгебраических поверхностях и их дополнениях, и на основе этой классификации доказана их регулярная параболичность.

Практические результаты исследования. Установлен принцип сравнения плюрисубгармонических функций на аналитических поверхностях, дано описание полиномов на алгебраических поверхностях и их дополнениях.

Достоверность результатов исследования подтверждается использованием признанных методов математической физики, классической теории потенциала и теории функций нескольких комплексных переменных, а также строгими математическими доказательствами основных положений. Кроме того, достоверность результатов диссертации подтверждается публикацией их этих результатов в авторитетных научных изданиях, включая журналы с импакт-факторами, и обсуждением работы на научных семинарах.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования объясняется в том, что разработаны методы исследования плюрисубгармонических функций на аналитических поверхностях, получены результаты о регулярной параболичности дополнения алгебраической поверхности.

Практическая значимость результатов исследования объясняется в том, что критерий максимальности плюрисубгармонических функций на аналитических поверхностях позволяет определить класс функций, удовлетворяющих уравнению Монжа-Ампера в математической физике.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

свойства непрерывности экстремальных функций Грина для регулярных компактов на параболических аналитических поверхностях использовались для получения оценок специальных функций в комплексных областях (справка Университета Мерсин, Турция, от 31 июля 2024 года). Неравенства типа Бернштейна-Уолша, связанные с экстремальной функцией Грина, нашли применение в задачах аппроксимации аналитических функций на компактных подмножествах в комплексных областях. Это позволило определить последовательности полиномов, которые с высокой скоростью и точностью приближаются к аналитическим функциям;

критерий максимальности плюрисубгармонических функций на аналитических поверхностях применен в иследованиях свойств решения уравнения Монжа-Ампера при выполнении гранта UT-OT-2020-1: «Уравнение Монжа-Ампера и экстремальные плюрисубгармонические функции» (справка № 04/11-8260 Национального университета Узбекистана от 4 октября 2024 года). Применение результата дал возможность установить связь экстремальных плюрисубгармонических функций с классом функции удовлетворяющих уравнению Монжа-Ампера на аналитической поверхности вне сингулярных точек.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на 5 научно-практических конференциях, в том числе, на 2 международных и 3 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 9 научных работ, из которых 4 статьи включены в перечень научных изданий, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора философии. Из этих статей 2 опубликованы в зарубежных журналах, индексируемых в базе Scopus, и 2 в республиканских научных изданиях.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка использованной литературы. Объём диссертации составляет 74 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и восстребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первом параграфе первой главы диссертации, названной **«Предварительные сведения»,** приводятся определения и свойства голоморфных и плюрисубгармонических функций на комплексных многообразиях, аналитические множества и их свойства, структура аналитических множеств, а также необходимые сведения и результаты об алгебраических множествах.

Пусть $M -$ комплексное многообразие.

Определение 1. Множество $X \subset M$ называется *аналитическим* в M, если для всякой точки $a \in M$ найдется окрестность $U \ni a$ и голоморфные в U функции $f_1, f_2, \dots, f_l$ такие, что $X \cap U = Z_{f_1} \cap Z_{f_2} \cap \dots \cap Z_{f_l} \cap U$.

Определение 2. Пусть $X -$аналитическое множество на комплексном многообразии M. *Размерностью* X в произвольной точке $z^0 \in X$ называется число

$$\dim_{z^0} X := \overline{\lim_{\substack{z \to z^0 \\ z \in X^0}}} \dim_z X.$$

Размерность X есть, по определению, максимум его размерностей в точках:

$$\dim X := \max_{z \in X} \dim_z X = \max_{z \in X^0} \dim_z X.$$

В точках $z^0 \notin X$ иногда удобно полагать $\dim_{z^0} X = -1$. Коразмерность аналитического множества $X \subset M$ по определению равна $\dim M - \dim X$. Множество X называется *чисто* n*-мерным*, если $\dim_z X \equiv n, \forall z \in X$.

Во втором параграфе данной главы приводится определение голоморфной функции в смысле Картана на аналитическом множестве и ее важные свойства. В третьем параграфе этой главы излагаются многообразия Штейна, параболические и S-параболические многообразия, а также основные результаты теории потенциалов на параболических многообразиях.

Определение 3 (А. Картан). Функция $f(z)$ определенная в области $D \cap X^0$, $D \subset X -$ область, называется *голоморфной* в D, если она

а) голоморфна на многообразии $D \cap X^0$;

б) локально ограничена в D, т.е. для каждой точки $z^0 \in D$ существует окрестность $W \ni z^0, \ \ W \subset D: \ \left|f(z)\right| \le const \ \ \forall z \in W \bigcap X^0.$

Определение 4. Штейново многообразие $X \subset \mathbb{C}^N, \ \dim X = n,$ называется *параболическим,* если в нем не существует ограниченная сверху плюрисубгармоническая функция, отличная от константы, т.е. если $u(z)-$ плюрисубгармонична на X и $u(z) \le C,$ то $u(z) \equiv const.$

Оно называется S-*параболическим многообразием,* если в нем существует специальная функция исчерпания $\rho(z),$ удовлетворяющая условиям

а) $\rho(z) \in psh(X), \left\{z \in X : \rho(z) \le c\right\} \subset\subset X \quad \forall c \in \mathbb{R};$

б) $\left(dd^c\rho\right)^n = 0,$ вне некоторого компакта $K \subset\subset X,$ т.е. функция ρ является максимальной функцией на $X \setminus K.$

X называется S^*-*параболическим,* если существует непрерывная специальная функция исчерпания $\rho(z).$

Вторая глава диссертации, называемая как **«Теория потенциала на аналитической поверхности»,** посвящена изучению плюрисубгармонических функций на аналитических поверхностях. В первом параграфе доказаны принцип максимума и аналог леммы Хартогса для плюрисубгармонических функций на аналитических поверхностях. Во втором параграфе введены понятия плюриполярного множества и P-меры на аналитических поверхностях, а также доказаны их свойства. В третьем параграфе изучены максимальные функции на аналитических поверхностях, доказаны принцип сравнения и критерий максимальности.

Рассмотрим неприводимое аналитическое множество $X \subset \mathbb{C}^N,$ размерности, $\dim X = n, n \le N,$ причем X компактно вложено в комплексное пространство $\mathbb{C}^N,$ т.е. $X \cap B\left(0,r\right) \subset\subset X$ для любого шара $B\left(0,r\right) \subset \mathbb{C}^N.$ Такое аналитическое множество называется аналитической поверхностью.

Введем на X понятие плюрисубгармонических функций. Обозначим через $X^0 \subset X -$ совокупность обыкновенных точек множества $X.$ Тогда множество критических точек $X \setminus X^0$ является аналитическим множеством меньшей размерности, $\dim X \setminus X^0 < n.$ $X \setminus X^0$ не разбивает X и множество X^0 является комплексным n-мерным подмногообразием в $\mathbb{C}^N.$

Определение 5 (А. Садуллаев). Функция $u(z),$ заданная в области $D \subset X,$ называется *плюрисубгармонической* $\left(psh\right)$ в $D,$ если она локально ограничена сверху в этой области и плюрисубгармоническая на многообразии $D \cap X^0, \ u(z) \in psh\left(D \cap X^0\right).$

Класс плюрисубгармонических в D функций обозначается через $psh\left(D\right)$. Для удобства функцию $u(z) \equiv -\infty$ мы тоже включим в класс $psh\left(D\right)$. На практике в критических точках $z \in X \setminus X^0$ обычно рассматривается функция

$$u^*(z) = \varlimsup_{\substack{w \to z \\ w \in X^0 \cap D}} u(w),\ z \in D,$$

и в исследованиях плюрисубгармонических функций изучают определенную всюду в D функцию $u^*(z)$. Функция $u^*(z)$ будет полунепрерывной сверху в D, множество $\left\{z \in D : u^*(z) < C\right\}-$ открытое для всех $C \in \mathbb{R}$, причем $u^*(z) = u(z),\ \forall z \in X^0 \cap D.$

Свойства плюрисубгармонических функций на аналитической поверхности X.

1) линейная комбинация плюрисубгармонических функций в $D \subset X$ с положительными коэффициентами является плюрисубгармонической функцией, то есть если $u_j^*(z) \in psh(D),\ \alpha_j \geq 0,\ j = 1,2,...,s,$ то

$$\alpha_1 u_1^*(z) + ... + \alpha_s u_s^*(z) \in psh(D);$$

2) равномерный предел или предел монотонно убывающей последовательности $\left\{u_j^*(z)\right\}$ плюрисубгармончеких функций является плюрисубгармонической, то есть если $u_j^*(z) \in psh(D),\ j = 1,2,...,\ u_j^*(z) \rightrightarrows u^*(z)$ или $u_j^*(z) \searrow u^*(z)$, то $u^*(z) \in psh(D)$;

3) пусть $\{u_\alpha^*(z)\},\ \alpha \in \Lambda,$ $-$ произвольное локально равномерно ограниченное сверху семейство плюрисубгармонических функций и $u(z) = \sup\limits_\alpha\{u_\alpha^*(z)\}$. Тогда регуляризация $u^*(z)$ является плюрисубгармонической функцией в D;

4) если $\{u_j^*(z)\}-$ последовательность локально равномерно ограниченных сверху плюрисубгармонических функций и $u(z) = \varlimsup\limits_{j \to \infty} u_j^*(z)$, то $u^*(z)$ является плюрисубгармонической функцией.

В данном параграфе были доказаны следующие теоремы.

Теорема 1 (Принцип максимума). *Для* $u^*(z) \in psh\left(D\right),\ D \subset X,$ *имеет место принцип максимума, то есть если в некоторой внутренней точке* $z^0 \in D$ *значение* $u^*(z^0) = \sup\limits_D u^*(z)$, *то* $u^* \equiv const.$

Теорема 2 (Аналог леммы Хартогса на аналитической поверхности). *Пусть* $D \subset X -$ *открытое множество и* $\left\{u_j\right\}-$ *последовательность локально равномерно ограниченных сверху на* D *плюрисубгармонических функций. Если при каждом фиксированном* $z \in D$ *выполняется неравенство*

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} u_j^*(z) \le A,$$

то для любого числа $\varepsilon > 0$ *и компакта* $K \subset\subset D$ *существует номер* $j_0 = j_0(\varepsilon, K) \in \mathbb{N}$ *такой, что при* $\forall j \ge j_0, \forall z \in K$ *имеет место равномерное неравенство*

$$u_j^*(z) \le A + \varepsilon.$$

Следствие 1. *Пусть* D *область на аналитической поверхности* X, $g(z)$ *непрерывная функция на* D *и* $\{u_j\}$ – *последовательность локально равномерно ограниченных сверху на* D *плюрисубгармонических функций. Если при каждом фиксированном* $z \in D$ *выполняется неравенство*

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} u_j^*(z) \le g(z),$$

то для любого числа $\varepsilon > 0$ *и компакта* $K \subset\subset D$ *существует номер* $j_0 = j_0(\varepsilon, K) \in \mathbb{N}$ *такой, что при* $\forall\ j \ge j_0$, $\forall\ z \in K$ *имеет место равномерное неравенство*

$$u_j^*(z) \le g(z) + \varepsilon.$$

Второй параграф второй главы посвящён изучению плюриполярных множеств, P-меры и их свойств на аналитических поверхностях.
Пусть дана область $D \subset X$ и некоторое её подмножество $E \subset D \subset X$.

Определение 6. Множество $E \subset D \subset X$ называется *плюриполярным* в D, если существует функция $u(z) \in psh(D)$, $u^*(z) \not\equiv -\infty$, такая, что $u^*\big|_E = -\infty$.

Плюриполярные множества имеют следующие важные свойства.

Теорема 3. *Счетное объединение плюриполярных множеств плюриполярное, то есть если* $E_j \subset D, j = 1, 2, \dots,$ *являются плюриполярными, то* $E = \bigcup_{j=1}^{\infty} E_j$ *тоже является плюриполярным.*

На аналитических поверхностях P-мера также определяется в регулярных областях.

Определение 7. Область $D \subset X$ называется *регулярной*, если существует функция $\rho(z) \in psh(D) : \rho(z) < 0$, $\lim_{z\to\partial D} \rho(z) = 0$.

Область $D \subset X$ называется *сильно регулярной* или *усиленно псевдовыпуклой*, если $\rho(z)$ является непрерывной плюрисубгармонической функцией в некоторой окрестности $\hat{D} \supset \bar{D}$, причем $D = \{z \in X : \rho(z) < 0\}$.

Определение 8. Фиксируем множество $E \subset D$ и рассмотрим класс

$$\mathcal{H}\Big(E, D\Big) = \Big\{u^* \in psh\Big(D\Big) : u^*\Big|_E \le -1,\ u^*\Big|_D \le 0\Big\},$$

тогда регуляризация $\omega^*(z, E, D) = \overline{\lim_{w\to z}} \omega(w, E, D)$, где $\omega(z, E, D) = \sup_{u^* \in \mathcal{H}(E,D)} u^*(z)$, называется P-*мерой* множества E относительно области D.

Согласно свойству 3 плюрисубгармонических функций $\omega^*(z,E,D)\in psh(D)$. По топологической лемме Шоке существует счётное подсемейство $\mathcal{H}'(E,D)\subset\mathcal{H}(E,D)$ такое, что имеет место равенство $\left\{\sup\limits_{u^*\in\mathcal{H}'(E,D)} u^*(z)\right\}^* \equiv\omega^*(z,E,D)$. Отсюда следует, что P-меру можно рассматривать как предел монотонно возрастающей последовательности $\left\{u_j^*(z)\right\}\subset\mathcal{H}(E,D)$: $\left[\lim\limits_{j\to\infty} u_j^*(z)\right]^*\equiv\omega^*(z,E,D)$.

P-мера обладает следующими свойствами, идентичными P-мерам в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$.

1) выполняются свойства монотонности $\omega^*(z,E_1,D)\geq\omega^*(z,E_2,D)$ при $E_1\subset E_2$, и $\omega^*(z,E,D_1)\geq\omega^*(z,E,D_2)$ при $E\subset D_1\subset D_2$.

2) для открытого множества $U\subset D$ выполняется $\omega^*(z,U,D)\in\mathcal{H}(U,D)$ и следовательно $\omega^*(z,U,D)\equiv\omega(z,U,D)$.

3) если $U\subset D-$ открытое множество, $U=\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}K_j$, где $K_j\subset\overset{\circ}{K}_{j+1}$, то $\omega^*(z,K_j,D)\downarrow\omega(z,U,D)$.

4) если $E\subset D$ произвольное множество, то существует убывающая последовательность открытых множеств

$$U_j\supset E,\, U_j\supset U_{j+1},\quad j=1,2,...,$$

такая, что $\omega^*(z,E,D)=[\lim\limits_{j\to\infty}\omega(z,U_j,D)]^*$.

5) P-мера $\omega^*(z,E,D)$ либо нигде не равна нулю, либо тождественно равна нулю. $\omega^*(z,E,D)\equiv 0$ тогда и только тогда, когда $E-$ плюриполярное в D.

6) *Теорема о двух константах*. Если функция $u^*(z)$ плюрисубгармонична в $D\subset X$ и $u^*\big|_D\leq M$, $u^*\big|_E\leq m$, $E\subset D$, то для всех $z\in D$ имеет место неравенство

$$u^*(z)\leq M(1+\omega^*(z,E,D))-m\omega^*(z,E,D).$$

В третьем параграфе второй главы изучаются максимальные функции на аналитических поверхностях и их свойства.

Определение 9. Пусть на аналитической поверхности X дана область $D\subset X$. Функция $u^*(z)\in psh(D)$ называется *максимальной*, если для нее выполняется принцип максимума на любой компактной области $\forall G\subset\subset D$, то есть если $v^*(z)\in psh(D)$ и $\forall\xi\in\partial G$, то выполнение неравенства $\varliminf\limits_{z\to\xi}\left(u^*(z)-v^*(z)\right)\geq 0$ влечет выполнение неравенства $u^*(z)\geq v^*(z)$ для $\forall z\in G$.

Теорема 4. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) *функция* $u^*(z)$ *является максимальной в области* D;

2) *для любой функции* $v^*(z) \in psh(D)$ *имеет место неравенство* $u^*(z) \geq v^*(z)$ *на* D, *если выполняется* $\varliminf_{z \to \partial D} \left(u^*(z) - v^*(z) \right) \geq 0$;

3) *для каждой функции* $v^*(z) \in psh(D)$ *и для любой компактной подобласти* $G \subset\subset D$ *имеет место неравенство* $u^*(z) \geq v^*(z)$ *при* $\forall z \in G$, *если только выполняется неравенство* $u^*(z)\Big|_{\partial G} \geq v^*(z)\Big|_{\partial G}$;

4) *для каждой функции* $v^*(z) \in psh(D)$ *и для любой компактной подобласти* $G \subset\subset D$ *из неравенства* $\varliminf_{z \to \xi} \left(u^*(z) - v^*(z) \right) \geq 0, z \in G, \xi \in \partial G$, *следует* $u^*(z) \geq v^*(z)$ *при* $\forall z \in G$;

5) *для любой компактной подобласти* $G \subset\subset D$, *для любой функции* $v^*(z) \in psh(G)$ *выполнение неравенства* $u^*(\xi) \geq \varliminf_{z \to \xi} v^*(z) \geq 0, z \in G, \xi \in \partial G$, *влечет неравенство* $u^*(z) \geq v^*(z)$ *в* G.

В этом параграфе доказана следующая теорема, имеющая важное значение для построения теории плюрипотенциалов на аналитических поверхностях.

Теорема 5 (Принцип сравнения). *Пусть* D *область на аналитической поверхности* X *и* $u^*, v^* \in psh(D) \cap L^\infty_{loc}(D)$. *Если множество* $F = \left\{ z \in D : u^*(z) < v^*(z) \right\}$ *компактно лежит на* D, *то имеет место неравенство*

$$\int\limits_{\left\{u^* < v^*\right\}} \left(dd^c v^* \right)^n \leq \int\limits_{\left\{u^* < v^*\right\}} \left(dd^c u^* \right)^n .$$

Теорему 5 можно также сформулировать в следующих формах.

Следствие 2. *Пусть* $u^*, v^* \in psh(D) \cap L^\infty_{loc}(D)$ *и* $\varliminf_{z \to \partial D} \left[u^*(z) - v^*(z) \right] \geq 0$. *Тогда имеет место неравенство*

$$\int\limits_{\left\{u^* < v^*\right\}} \left(dd^c v^* \right)^n \leq \int\limits_{\left\{u^* < v^*\right\}} \left(dd^c u^* \right)^n .$$

Следствие 3. *Пусть* $D \subset X -$ *ограниченное открытое множество и для функции* $u^*, v^* \in psh(D) \cap L^\infty_{loc}(D)$ *выполняются следующие условия:*

1) $\lim_{z \to \partial D} u^*(z) = \lim_{z \to \partial D} v^*(z)$;

2) $u^* \leq v^*$ *на* D.

Тогда верно неравенство

$$\int\limits_D \left(dd^c v^* \right)^n \leq \int\limits_D \left(dd^c u^* \right)^n .$$

Из теоремы 5 легко получить следующий принцип доминирования, который другим способом также был получен А. Зериахи.

Следствие 4. *Пусть* $D \subset\subset X$ *и* $u^*, v^* \in psh(D) \cap L^{\infty}_{loc}(D)$: $(dd^c u^*)^n \le (dd^c v^*)^n$. *Тогда, если* $\lim\limits_{z \to \partial D} \left[u^*(z) - v^*(z)\right] \ge 0$, *то* $u^* \ge v^*$ *всюду в* D.

Также в этом параграфе доказан критерий максимальности.

Теорема 6. *Пусть* D *область на аналитической поверхности* X. *Функция* $u^*(z) \in psh\left(D\right) \cap L^{\infty}_{loc}\left(D\right)$ *является максимальной тогда и только тогда, когда в* D *выполняется равенство*

$$\left(dd^c u^*\right)^n = 0.$$

Следствие 5. P*-мера неплюриполярного компакта* $K \subset X$ *является максимальной вне этого компакта, то есть*

$$\left(dd^c \omega^*(z, K, D)\right)^n = 0 \qquad \forall z \in X^0 \setminus K.$$

В третьей главе диссертации, названной **«Регулярные параболические поверхности. Функция Грина»,** изучены параболические поверхности и их классификация. В параграфе 3.1 рассматривается классификация аналитических поверхностей (S-параболичность, S^*-параболичность и другие). В параграфе 3.2 исследуются определение и свойства экстремальной функции Грина. В параграфе 3.3 рассматриваются регулярные параболические поверхности, их важные свойства и примеры. Наличие критического множества на поверхностях, требует особый подход в окрестности критического множества.

Понятие параболичности поверхности X вводится аналогично параболичности многообразий.

Определение 10. Аналитическая поверхность X называется *параболическим,* если в ней не существует ограниченная сверху плюрисубгармоническая функция, отличной от константы.

Аналитическая поверхность X называется S*-параболической,* если в ней существует специальная функция исчерпания $\rho(z)$, удовлетворяющая условиям

а) $\rho(z) \in psh(X), \left\{z \in X : \rho \le c\right\} \subset\subset X \quad \forall c \in \mathbb{R}$;

б) вне некоторого компакта $K \subset\subset X$, функция ρ^* является максимальной функцией на $X \setminus K$. Это эквивалентно тому, что $\left(dd^c \rho^*\right)^n = 0$ на $X^0 \setminus K$, где $\dim X = n$.

Аналитическая поверхность X называется S^**-параболической,* если существует непрерывная специальная функция исчерпания $\rho(z) \in C\left(X^0\right)$.

Основным результатом этого параграфа является следующая теорема.

Теорема 7. S*-параболическая поверхность* X *является параболическим, т.е. на* S*-параболической поверхности* X *не существует ограниченной сверху плюрисубгармоническая функция* $u^*(z)$, *отличной от константы.*

Во втором параграфе третьей главы изучается функция Грина на S-параболических аналитических поверхностях.

Пусть $\left(X,\rho\right)$ является S-параболической поверхностью. Обозначим через $\mathfrak{A}_\rho(X)-$ класс плюрисубгармонических функций $u\in psh(X)$, удовлетворяющих условию

$$u(z)\le c_u+\rho^+(z), z\in X,$$

где c_u- некоторая константа, зависящая от функции u и $\rho^+(z)=\max\left\{0,\ \rho(z)\right\}$. $\mathfrak{A}_\rho(X)$ называется классом Лелона плюрисубгармонических функций на X, т.е. $\mathfrak{A}_\rho(X)=\left\{u\in psh(X):u(z)\le c_u+\rho^+(z),\ z\in X\right\}$. Для множества $K\subset\subset X$ определим

$$V_\rho(z,K)=\sup\left\{u(z):\ u\in\mathfrak{A}_\rho(X),\ u\Big|_K\le 0\right\}.$$

Тогда регуляризация $V_\rho^*(z,K)=\overline{\lim_{w\to z}}V_\rho(w,K)$ называется *ρ-функцией Грина.*

Определение 11. Множество $K\subset X$ называется L-плюриполярным, если существует функция $u(z)\in\mathfrak{A}_\rho(X),\ u^*(z)\not\equiv-\infty$, такая, что $u^*\Big|_K=-\infty$.

Лемма 1. *Если $K\subset X-$ плюриполярное множество, то оно также является L-плюриполярным множеством.*

Функция Грина $V_\rho^*(z,K)$, как и в классическом случае, обладает следующими свойствами.

1) если $K_1\subset K_2\subset X$, то тогда будет $V_\rho^*(z,K_1)\ge V_\rho^*(z,K_2)$;

2) для любого неплюриполярного компакта $K\subset X$ ρ-функция Грина $V_\rho^*(z,K)$ принадлежит классу

$$\mathfrak{A}_\rho^+(X)=\left\{u\in psh(X):c_u'+\rho^+(z)\le u(z)\le c_u+\rho^+(z),\ z\in X\right\}.$$

3) если открытое множество $E=\bigcup_{j=1}^{\infty}K_j$, где $K_j\subset\overset{\circ}{K}_{j+1}$ $(j=1,2,\ldots)$ возрастающая последовательность компактным множеством, то

$$V_\rho^*(z,K_j)\downarrow V_\rho^*(z,E).$$

4) если $E\subset X$ произвольное множество, то существует убывающая последовательность открытых множеств

$$E_j\supset E,\ E_j\supset E_{j+1},\ j=1,2,\ldots,$$

такое, что

$$\left[\lim_{j\to\infty}V_\rho^*\left(z,E_j\right)\right]^*=V_\rho^*\left(z,E\right).$$

Следующее свойство не является тривиальным из-за наличия критических точек поверхности X.

5) или $V_\rho \in \mathfrak{A}_\rho(X)$, или $V_\rho \equiv +\infty$. $V_\rho(z,K) \equiv +\infty$ тогда и только тогда когда $K-$ плюриполярное множество на X, т.е. существует функция $u^* \in psh(X):\ u^* \not\equiv -\infty,\ u^*(z) = -\infty\ \forall z \in K$.

6) пусть $K \subset\subset X-$ не плюриполярный компакт. Тогда функция Грина $V_\rho(z,K)$ является максимальной в $X \setminus K$. В частности, $\left(dd^c V_\rho^*(z,K)\right)^n = 0$ на комплексном многообразии $X^0 \setminus K$.

7) если множество $E \subset X$ плюриполярно, то $V_\rho^*(z, K \cup E) = V_\rho^*(z,K)$ для любого множества $K \subset X$.

Определение 12. Компакт $K \subset X$ называется *регулярным* в точке $z^0 \in X$, если $V_\rho^*\left(z^0,\ K\right) = 0$. Компакт $K \subset X$ называется *регулярным*, когда все его точки являются регулярными.

8) если компакт $K \subset X-$ регулярный, то открытое множество $G_\varepsilon = \left\{z \in X : V_\rho^*(z,K) < \varepsilon\right\}$ содержит K, $G_\varepsilon \supset K$.

В третьем параграфе третьей главы изучаются регулярные параболические поверхности.

Пусть $X \subset \mathbb{C}^N$ является S-параболической поверхностью и $\rho(z)$ её специальная функция исчерпания.

Определение 13. Если функция $f \in \mathcal{O}(X)$ удовлетворяет неравенству

$$\ln\left|f(z)\right| \le d_f \rho^+(z) + c_f \quad \forall z \in X, \tag{1}$$

где c_f и d_f положительные действительные числа (константы), то f называется ρ-*полиномом*. Наименьшее значение d_f удовлетворяющее условию (1), мы будем называть степенью полинома f.

Обозначим через $\mathcal{P}_\rho^d(X)$ множество всех ρ-полиномов степени меньше или равной d и через $\mathcal{P}_\rho(X)-$ объединение $\mathcal{P}_\rho(X) = \bigcup\limits_{d \ge 1} \mathcal{P}_\rho^d(X)$.

Определение 14. Если пространство всех ρ-полиномов $\mathcal{P}_\rho(X) = \bigcup\limits_{d \ge 1} \mathcal{P}_\rho^d(X)$ плотно в пространстве $\mathcal{O}(X)$, то S-параболическая поверхность X называется *регулярной*.

В третьем параграфе третьей главы доказана следующая основная теорема:

Теорема 8. *Дополнение* $X = \mathbb{C}^n \setminus A$ *произвольного чисто* $(n-1)$-*мерного алгебраического множества* $A = \left\{z \in \mathbb{C}^n : p(z) = 0\right\} \subset \mathbb{C}^n$, *является регулярным* S^*-*параболическим многообразием. Если* $p(0) \ne 0$, *то функция*

$$\rho(z) = -\frac{1}{\deg p}\ln\left|p(z)\right| + 2\ln\left\|z\right\|$$

будет специальной функцией исчерпания поверхности X.

Автор выражает глубокую благодарность академику А. Садуллаеву и доценту А.А. Атамуратову за многократные обсуждения результатов и за ценные советы при завершении этой работы, а также научному руководителю, доктору физико-математических наук, профессору Б.И. Абдуллаеву за постановку задач и постоянное внимание к работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению основ теории потенциала на аналитической поверхности, исследованию параболических поверхностей и свойств функции Грина на параболических поверхностях. Аналитическая поверхность отличается от регулярных многообразий наличием особых (критических) точек на аналитических поверхностях. В этом состоит принципиальные трудности изучения голоморфных и плюрисубгармонических функций на аналитических поверхностей. В этом отношении эти трудности в диссертации преодолены применением современных методов геометрических аспектов многомерного комплексного анализа.

Основные результаты исследования состоят из следующих:

1) доказан принцип максимума и лемма Хартогса для плюрисубгармонических функций на аналитических поверхностях;

2) введено понятие плюриполярных множеств на аналитической поверхности и доказана, счетное объединение плюриполярных множеств снова плюриполярное;

3) на аналитической поверхности вводится понятие P-меры и доказываются ряд важных его свойств;

4) доказан принцип сравнения оператора $\left(dd^c u^*\right)^n$ на аналитических поверхностях;

5) доказан критерий максимальности плюрисубгармонических функций на аналитической поверхности в терминах оператора $\left(dd^c u^*\right)^n$;

6) доказана параболичность S-параболических поверхностей;

7) введена функция Грина на S-параболических поверхностях;

8) доказана нетривиальность функции Грина $V_\rho^*\left(z, K\right)$ в терминах L-плюриполярности компакта K;

9) доказана регулярно-параболичность алгебраических поверхностей;

10) доказана регулярно параболичность дополнения алгебраической поверхности.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 URGENCH STATE UNIVERSITY

URGENCH STATE UNIVERSITY

KAMOLOV XURSANDBEK QUROLBOYEVICH

PARABOLIC ANALYTIC SURFACES

01.01.01 – Mathematical Analysis

ABSTRACT
of dissertation of the Doctor of Philosofhy on physical and matematical sciences

Urgench – 2025

The theme of dissertation of Doctor of Philosophy was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher education, science and innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2022.4.PhD/FM784.

Dissertation has been prepared at Urgench State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english(resume)) on the website (www.ik-mat.urdu.uz) and the "Ziyonet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Abdullaev Bakhrom Ismoilovich** Doctor of physical and mathematical sciences, professor
Official opponents:	**Imomkulov Sevdiyor Akramovich** Doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Atamuratov Alimardon Abdirimovich Candidate of physical and mathematical sciences, senior researcher
Leading organization:	**Karakalpak State University**

Defense will take place "01" March 2025 at 14^00 at the meeting of Scientific Council number PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 at Urgench State University. (Address: Kh.Alimdjan str. 14, Urgench, 220100, Uzbekistan, Ph.: (+99862)224-66-11, fax: (+99862)224-67-00, e-mail: info@urdu.uz)

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Urgench state University (is registered №б-764) (Address: Kh.Alimdjan str. 14, Urgench, 220100, Uzbekistan, Ph.: (+99862) 224-66-11, fax: (+99862)224-67-00), e-mail: arm@urdu.uz).

Abstract of dissertation sent out on "17" February 2025 year

(Mailing report № 2 on "17" February 2025 year)

G.U.Urazboev
Vice-chairman of Scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

A.A. Reyimberganov
Scientific secretary of Scientific council on award of scientific degrees, Candidate of Physical and Mathematical Sciences

B.A. Babajanov
Chairman of Scientific seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

INTRODUCTION (abstract of the PhD dissertation)

The aim of the research work is to develop the fundamental basis of the pluripotential theory on analytical surfaces and to study holomorphic and plurisubharmonic functions on analytical surfaces.

The object of the research work. Analytic and parabolic surfaces.

Scientific novelty of the research work consists of the followings:

methods for studying plurisubharmonic functions in the vicinity of singular points on analytic surfaces have been developed using analytic coverings, and, based on these methods, the maximum principle and an analog of Hartogs' lemma on analytic surfaces have been proven;

the concept of a pluripolar set has been introduced on analytic surfaces, and it has been shown that a countable union of pluripolar sets is also pluripolar;

the concept of P-measure has been introduced on analytic surfaces, for given pluripolar sets in complex spaces it has been proven that the P-measure of a pluripolar set is trivial using the construction of plurisubharmonic functions whose poles belong to these sets;

the comparison principle has been developed for the class of plurisubharmonic functions associated with the Monge–Ampère operator on analytic surfaces. Based on this principle, a criterion for the maximality of plurisubharmonic functions has been proven;

the classification of parabolicity, S-parabolicity, and S^*-parabolicity for analytic surfaces has been presented. The statement about two constants for the P-measure on analytic surfaces has been proven, and using this, shown, that S-parabolic surfaces are parabolic;

on S-parabolic surfaces, Green's function has been introduced, and, it has been shown that the non-triviality of Green's function is equivalent to the compact K not being L-pluripolar;

the structure of polynomials defined on algebraic surfaces and their complements has been classified, and based on this classification, their regular parabolicity has been proven.

Implementation of the research results. Obtained results in the thesis have been used in following research projects:

the continuity properties of extremal Green's functions for regular compact sets on parabolic analytic surfaces were used to obtain estimates for special functions in complex domains (reference from Mersin University, Turkey, dated July 31, 2024). Bernstein-Walsh-type inequalities associated with the extremal Green's function have been applied to problems of approximating analytic functions on compact subsets in complex domains. This made it possible to identify sequences of polynomials that converge to analytic functions with high speed and accuracy;

the criterion for the maximality of plurisubharmonic functions on analytic surfaces was applied in studies of the properties of the solution of the Monge-Ampère equation in the implementation of grant UT-OT-2020-1: "The Monge-Ampère equation and extremal plurisubharmonic functions" (Reference of the National University of Uzbekistan dated October 4, 2024). The application of the result made it possible to establish a connection between extremal plurisubharmonic functions and the class of functions satisfying the Monge-Ampère equation on an analytic surface outside singular points.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, and a list of references. The volume of the dissertation is 74 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (Часть I; Part I)

1. Камолов Х.К. Экстремальные плюрисубгармонические функции на комплексных аналитических поверхностях// Доклады АН РУз., 2022. №2, с. 3-6. (01.00.00, №7)

2. Абдуллаев Б.И., Камолов Х.К. Теория потенциала на аналитической поверхности// Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2023. Т. 33, Вып. 1, с. 3–16. (Scopus. Cite score 1.2)

3. Sadullaev A.S., Kamolov X. K. Green’s function on a parabolic analytic surface// Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2023. Vol. 16, №2, –pp. 253-264. (№59, Scopus. Cite score 0.9)

4. Kamolov X.Q. Analitik sirtlarda Xartogs lemmasining bir umumlashmasi// Ilm sarchashmalari jurnali, №3, 3-5, 2023 y. (01.00.00, №12)

II bo‘lim (Часть II; Part II)

5. Камолов Х.К. Плюрисубгармонические меры на комплексных аналитических поверхностях // Сборник материалов республиканской научно-практической конференции «Теоретические основы и прикладные задачи современной математики», Андижан, 28 марта 2022 г., с. 188-190.

6. Kamolov X.K. S-parabolic analytic surfaces// Abstracts of the 1st Al-Khorezmi International Conference on Modern problems of Mathematics, Urgench, July 25-28, 2022 y.

7. Камолов Х.К. S-параболические аналитические поверхности // Тезисы докладов научной конференции «Операторные алгебры, неассоциативные структуры и смежные проблемы», Ташкент, 14-15 сентября 2022 г., с. 142-143.

8. Камолов Х.К. Полиномы на параболических поверхностях// Тезисы докладов международной конференции «Математический анализ и его приложения в современной математической физике» (часть I), Самарканд, 23-24 сентября 2022 г., с. 134-135.

9. Камолов Х.К. Регулярные параболические поверхности// Материалы республиканской научной конференции «Современные проблемы анализа» Карши, 2-3 июня 2023 г., с. 99-101.

Dissertatsiya avtoreferati “Khwarezm publication” nashriyotida tahrir qilindi.

Bosishga ruxsat etildi: 12.02.2025-yil.
Bichimi 60x84 $^{1/16}$, “Times New Roman”
garniturada raqamli bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog‘i 2,7. Adadi: 100. Buyurtma: № 53
“Khwarezm travel” bosmaxonasida chop etildi
220502, Xorazm, Urganch tumani, Zargarlar mahallasi,
Marvarid ko‘cha 7-yo‘lak 4-uy