

**V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

**MATEMATIKA INSTITUTI,
TOSHKENT DAVLAT IQTISODIYOT UNIVERSITETI**

XASHIMOV ABDUKOMIL RISBEKOVICH

**UCHINCHI TARTIBLI QO‘SHMA TIPDAGI STATSIONAR VA
NOSTATSIONAR TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY
MASALALAR**

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika tenglamalari

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI DOKTORI (DSc)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

TOSHKENT - 2025

Doktorlik (DSc) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi
Оглавление автореферата докторской (ДСс) диссертации
Content of the of Doctoral (DSc) Dissertation Abstract

Xashimov Abdukomil Risbekovich	3
Uchinchi tartibli qo'shma tipdagi statsionar va nostatsionar tenglamalar uchun chegaraviy masalalar	
	27
Хашимов Абдукомил Рисбекович	
Краевые задачи для стационарного и нестационарного уравнения третьего порядка составного типа	
	51
Khashimov Abdukomil Risbekovich	
Boundary value problems for stationary and non-stationary equations of the third order of the composite type	
	55
E'lon qilingan ishlar ro'yxati	
Список опубликованных работ	
List of published works	

**V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

**MATEMATIKA INSTITUTI,
TOSHKENT DAVLAT IQTISODIYOT UNIVERSITETI**

XASHIMOV ABDUKOMIL RISBEKOVICH

**UCHINCHI TARTIBLI QO'SHMA TIPDAGI STATSIONAR VA
NOSTATSIONAR TENGLAMALAR UCHUN CHEGARAVIY
MASALALAR**

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI DOKTORI (DSc)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

TOSHKENT - 2025

Fizika-matematika fanlari doktori (DSc) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida №B2021.2.DSc/FM178 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya Matematika instituti va Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti da bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengashning veb-sahifasida (<http://kengash.mathinst.uz/>) “ZiyoNet” Axborot-ta’lim portalida (www.ziynet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy maslahatchi:

Jo‘raev To‘xtamurod Jo‘raevich

fizika-matematika fanlari doktori,
professor, O‘zR FA akademigi

Rasmiy opponentlar:

Ashurov Ravshan Radjabovich,
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Kozhanov Aleksandr Ivanovich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Fayazov Qudratillo Sadriddinovich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Yetakchi tashkilot:

Farg‘ona davlat universiteti

Dissertatsiya himoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli ilmiy kengashning 2025 yil « 04 » mart kuni soat 16:00 dagi majlisida bo‘lib o‘tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi 9-uy. Tel.: (+99871)-207-91-40, E-mail: uzbmath@umail.uz, website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika Institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (200-raqami bilan ro‘yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi 9-uy. Tel.: (+99871)-207-91-40).

Dissertatsiya avtoreferati 2025 yil « 10 » fevral kuni tarqatildi.
(2025 yil « 10 » fevraldagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).

U.A.Roziqov

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash
raisi, f.-m.f.d., akademik

J.K.Adashev

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash
ilmiy kotibi, f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

A.Azamov

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash
huzuridagi ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d.,
akademik

KIRISH (doktorlik dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyati. Oxirgi yillarda turli tabiat hodisalarini matematik asoslashga intilish ularning matematik modelini o'rganish bilan bog'liqdir. Masalan okeanlarda yuz beradigan sunamilar, katta amplitudali to'lqinlar, suvning yuza qismida chiziqsiz to'lqinlarning tarqalishi, sovuq plazmada gidromagnetik to'lqinlarning tarqalishi va angormonik kristallarda akustik to'lqinlarning tarqalishi kabi jarayonlarning matematik modelini tuzish toq tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar bilan bog'liqligi bu tenglamalarni o'rganish hozirgi kunning dolzarb masalalaridan biri ekanligini ko'rsatadi. Shuni alohida ta'kidlash kerakki, elastiklik nazariyasiga oid masalalarni o'rganishda Sen-Venan prinsipi alohida o'ringa ega. Tekislikda elastiklik nazariyasi tenglamalari va elastiklik nazariyasi sistemalari uchun bu muammoni O.A.Oleynik va uning izdoshlari o'zlarining bir qator ishlarida o'rganishgan. Ular tomonidan sohaning geometrik xarakteristikasini e'tiborga olgan holda o'rnatilgan energetik baholar yordamida chegaralanmagan sohada birinchi chegaraviy masalaning o'suvchi funksiyalar sinfida yechimini qurish algoritmini aniqlanishi Sen-Venan prinsipi elastik to'lqinlarning tarqalish jarayonini modellashtirishda universal prinsiplardan biri ekanligini ko'rsatib berdi. O.A.Oleynik va uning izdoshlari tomonidan o'rnatilgan energetik baholar elliptik va parabolik tenglamalar yechimlarining soha chegarasining noregulyar nuqtalari atrofidagi va cheksizlikda joylashgan nuqtalardagi xususiyatlari o'rganish imoniyatini beradi. Ammo bu usullarni faqat ma'lum tipdagi juft tartibli tenglamalar uchun qo'llash mumkin.

Hozirgi kunda toq tartibli tenglamalar orqali ifodalanuvchi to'lqinlarning sohaning noregulyar nuqtalari atrofidagi va cheksizlikda joylashgan nuqtalardagi xususiyatlari o'rganish muhim ahamiyat kasb etmoqda. Bu kabi masalalarni yechish esa uchinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning yechimlarini chegaralanmagan sohalarda o'suvchi funksiyalar sinfida qurishga olib kelinadi. Bu borada toq tartibli tenglamalarning yechimlari uchun Sen-Venan prinsipi tipidagi energetik baholarni o'rnatish va ularni chegaraviy masalalar yechimlarini qurishga tadbiiq qilish hozirgi kunning maqsadli ilmiy tadqiqotlaridan biri hisoblanadi.

Hozirgi kunga kelib mamlakatimizda fundamental fanlar va ularning amaliy tatbiqiga ega bo'lgan yo'nalishlarga e'tibor kuchaytirildi. Shu sababli matematikaning ustuvor yo'nalishlari hisoblangan differensial tenglamalar, matematik fizika tenglamalari, dinamik sistemalar nazariyasi, algebra va funksional tahlil, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, amaliy matematika va matematik modellashtirish sohalarida ilmiy tadqiqot ishlari olib borish O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi qoshidagi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutining asosiy masalalaridan biri hisoblanadi¹.

¹ O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi "Matematika ta'limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo'llab-quvvatlash shuningdek, O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida" gi № PQ-4387-son qarori

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2008 yil 15 iyuldagi PQ-916-son «Innovatsion loyihalar va texnologiyalarni ishlab chiqarishga tatbiq etishni rag‘batlantirish borasidagi qo‘shimcha chora-tadbirlar to‘g‘risida»gi, 2017 yil 17 fevraldagi PQ-2789-son «Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi Qarori va 2017 yil 8 fevraldagi PF-4947-son «O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha xarakatlar strategiyasi to‘g‘risida»gi farmoni hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy xujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishga ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlantirishning IV. «Matematika, mexanika va informatika» ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha halqaro ilmiy-tadqiqotlar sharhi. Toq tartibli tenglamalar va ularning tatbiqlari bo‘yicha tadqiqotlar dunyoning ko‘pgina ilmiy markazlarida va oliy ta‘lim muassalarida olib boriladi, jumladan: Turin politexnika institutida, Osaka universitetida, Tokio universitetida, Oldenburg universitetida, Boshqirdiston davlat universitetida, Voronej davlat universitetida, Kabardino-Bolqor davlat universitetida, Kazan federal universitetida, Moskva davlat universitetida, Rossiya Fanlar Akademiyasi matematika institutida, Novosibirsk davlat universitetida, Sibir federal universitetida, Samara davlat universitetida, Rossiya Fanlar Akademiyasi Sibir bo‘limi hisoblash matematikasi va matematik geofizika institutida, Rossiya Fanlar Akademiyasi Kabardino-Bolqor ilmiy markazi amaliy matematika va avtomatlashtirish institutida, Qozog‘iston Milliy fanlar akademiyasi matematika va matematik modellashtirish institutida.

Oxirgi yillarda toq tartibli tenglamalar uchun chegaraviy masalalar yechimlarini qurishga doir tadqiqotlar doirasida qator dolzarb masalalar yechilgan. Jumladan, uchinchi tartibli qo‘shma tipdagi tenglamalar uchun korrekt chegaraviy masalalarning klassifikatsiyasi va ularning umumlashgan yechimlarini qurish usullari ishlab chiqilgan (Novosibirsk davlat universiteti, Rossiya), Kortevega-De-Friz tenglamalari va uning umumlashgan tenglamasi Zaxarov-Kuznesov tenglamalari uchun Koshi va aralash masalalarning umumlashgan va regulyar yechimlarini qurish usullari ishlab chiqilgan (Moskva davlat universiteti, Rossiya), Psevdo-elliptik tenglamalarning regulyar yechimlarini qurish usullari ishlab chiqilgan (Torino universiteti, Italiya).

Dunyoda bugungi kunga kelib toq tartibli tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning regulyar va umumlashgan yechimlarini ko‘p o‘lchovli sohalarda qurish usullarini ishlab chiqish va bu yechimlarning xususiyatlarini cheksiz uzoqda joylashgan nuqtalarda hamda noregulyar nuqtalar atrofida tadqiq qilish va yechimning asimptotik xususiyatlarini aniqlashga doir ustivor yo‘nalishlarda ilmiy tadqiqot ishlari olib borilmoqda.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. 1855 yilda Saint-Venant elastiklik nazariyasi masalalarini o‘rganish jarayonida mazkur nazariyada juda katta ahamiyatga ega bo‘lgan va keyinchalik Sen-Venan prinsipi deb nom olgan

prinsipni ifodaladi. Keyinchalik elastik nazariyasi tenglamalari va sistemalari uchun Sen-Venan prinsipi tipidagi energetik baholar o‘rnatish kabi masalalar bilan A.E.H.Love, R.Von-Mises, Ye.Sternberg, G.Horvay kabi olimlar ishlarida o‘rganilgan bo‘lib, 1965 yilda R.A.Toupin birinchi bo‘lib Sen-Venan prinsipining aniq matematik ifodasini va isbotini berdi. U anizotrop silindrning bir tomoni o‘zaro muvozanatlashuvchi kuchlar bilan yuklangan, sirtning qolgan qismi esa yuklanishdan ozod etilgan amaliy masalani qaragan edi. Sen-Venan prinsipi uchun yanada aniqroq va umumiyroq natijalarni olish maqsadida J.K.Knowles chegaralangan yassi sohada elastiklik nazariyasining asosiy masalasini tadqiq etgan va $E(z) \leq 2E(0) \exp\left(-\frac{kz}{b}\right)$. ko‘rinishdagi muhim tengsizlik o‘rinli

bo‘lishini isbotlagan, bu yerda $k = \pi \left[2^{-1}(\sqrt{2} - 1) \right]^{\frac{1}{2}}$, $E(z)$ –energiya bo‘lib u $\Omega(z) = \Omega \cap \{x : x_1 > z\}$; $b = \max_{x_1 \geq 0} x_2$, $(x_1, x_2) \in \Omega$ sohada jamlangan. Keyinroq

J.N.Flavin tashqi kuchlar qo‘yilgan joydan uzoqlashganda jism shaklining o‘zgarishini va bu kuchlarning ikki chetga qo‘yilishi mumkinligini e‘tiborga olmagan holda k kattalikning qiymatiga yanada aniqlik kiritishga erishgan.

Tekislikdagi elastiklik nazariyasining tenglamalari va sistemalari uchun O.A.Oleynik va uning izdoshlari tomonidan topilgan baholarda sohaning geometrik xarakteristikasi e‘tiborga olingan va chegaralanmagan sohada birinchi chegaraviy masala uchun yagonalik teoremasi isbotlangan hamda o‘rnatilgan aprior baholarga asoslangan holda chegaradagi noregulyar nuqtalar va cheksizlikda joylashgan nuqtalar atrofida yechimning xususiyati o‘rganilgan. Elliptik tenglamalar yechimlarining soha chegarasining noregulyar nuqtalari atrofidagi va cheksizlikda joylashgan nuqtalardagi asimptotik xossalari V.A.Kondratev, V.G.Mazyra, B.A.Plamenskiy boshqalarning ishlarida ham o‘rganilgan.

Qo‘shma tipdagi tenglamalar yechimlari uchun soha chegarasining noregulyar nuqtalari atrofidagi va cheksizlikda joylashgan nuqtalardagi asimptotik xossalari o‘rganish kabi masalalar hozirgi kunga qadar o‘z yechimini topmagan, chunki buning zarur bo‘lgan energetik baholar o‘rnatilmagan. Xususiyl hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar yechimlarining xossalari cheksizlikda va noregulyar nuqtalar atrofida o‘rganishda muhim ahamiyatga ega bo‘lgan lokal baholarning toq tartibli qo‘shma tipdagi tenglamalarning yechimlari uchun olinmaganligi bu sohada hozirgi vaqtda ham muammolar borligini ko‘rsatadi.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy o‘quv muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiyadagi tadqiqot ishlari OT-F-4-55 “Ko‘p o‘lchovli sohalarda qo‘shma tipdagi xususiyl hosilali toq tartibli differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning yechimlari”, (2012-2016) OT-F4-16 “Optimal boshqaruv masalalari va graflarda differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar nazariyasini ishlab chiqish” (2017-2020) mavzusidagi ilmiy-tadqiqot ishlari rejasiga mos holda bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi uchinchi tartibli qo'shma tipdagi statsionar va nostatsionar tenglamalar uchun qo'yilgan chegaraviy masalalarning yechimi mavjud bo'ladigan sinflarni sohaning geometrik xarakteristikasiga bog'liq holda aniqlashdan iborat.

Tadqiqot vazifalari: Uchinchi tartibli tenglamaning fundamental yechimlarining potentsiallarining xossalarini o'rganish va ular yordamida chegaraviy masalalarning klassik yechimlarini qurish.

Chegaralanmagan sohada uchinchi tartibli qo'shma tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning yechimlarining yagonalik sinflarini sohaning geometrik xossalariga bog'liq holda aniqlash.

Uchinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalarning umumlashgan yechimlari uchun uning cheksizlikda asimptotik xossalarini o'rganishga yordam beruvchi maxsus energetik baholar o'rnatish.

Chegaralanmagan sohada uchinchi tartibli qo'shma tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning yechimlarining sohaning geometrik xarakteristikalariga bog'liq holda o'suvchi funksiyalar sinfida qurish.

Uchinchi tartibli qo'shma tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalarning umumlashgan yechimlari uchun lokal baholar o'rnatish.

Uchinchi tartibli qo'shma tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalarning umumlashgan yechimlarining va hosilalarining cheksizlikdagi asimptotik xossalarini o'rganish.

Tadqiqotning ob'ekti. Toq tartibli statsionar va nostatsionar xususiy hosilali differensial tenglamalar.

Tadqiqotning predmeti Energetik baholar o'rnatish usullari, matematik fizika tenglamalar nazariyasi, matematik va funksional tahlil nazariyasi.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiyada Galyorkin usuli, integral tengsizliklar usullari, potentsiallar usuli, funksional analiz usullari hamda chiziqli differensial operatorlar nazariyasidan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

uchinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama uchun Koshi masalasining va nolokal masalaning yechimi qurilgan;

qo'shma tipdagi uchinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning umumlashgan yechimlarining yagonalik sinflari sohaning geometrik xarakteristikasiga bog'liq holda aniqlangan;

chegaraviy masalalarning cheksizlikda o'suvchi funksiyalar sinfidagi umumlashgan yechimlari qurilgan va ular uchun energetik va lokal baholar o'rnatilgan;

uchinchi tartibli qo'shma tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalarning umumlashgan yechimlarining va hosilalarining cheksizlikdagi asimptotik xossalari aniqlangan.

Tadqiqotning amaliy natijasi sohaning geometrik xossalarini e'tiborga olgan holda toq tartibli qo'shma tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar yechimlari qurish va yechimlarning asimptotik xossalarini o'rganish usullari bayon ishlab chiqilganidan iborat.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi potentsiallarning xossalari o'rganishda, o'suvchi funksiyalar sinfidagi yechimlarni qurishda, energetik va lokal baholarni o'rnatishda matematik fizika, differensial tenglamalar, funksional va matematik tahlil usullaridan hamda maxsus funksiyalar nazariyasidan foydalanilganligi bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarning ilmiy ahamiyati ishda olingan natijalardan xususiy hosilali toq tartibli differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar nazariyasini qurishda foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati ularni xususiy hosilali toq tartibli differensial tenglamalar bilan tavsiflanadigan amaliy masalalarga tatbiq etish bilan belgilanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Uchinchi tartibli qo'shma tipdagi statsionar va nostatsionar tenglamalar bilan bog'liq bo'lgan natijalar asosida:

nostatsionar tenglamalarga doir olingan natijalar, fundamental yechim potentsialining xossalari va ularga Abel almashtirishining tatbiqlari hamda bu tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning yechimlarini topish uchun ishlab chiqilgan Grin funksiyasini qurish va yechimni potentsiallar ko'rinishida yozish usullaridan AAAA-A19-119072290002-9 raqamli "Kamchatkadagi tabiiy ofatlar - yer qimirlashlari va vulqonlarning otilishlari" mavzusidagi xorijiy loyihada matematik fizikaning nolokal masalalarini yechishda foydalanilgan (Vitus Bering nomidagi Kamchatka davlat universitetining 2021 yil 24 maydagi №267-02-sonli ma'lumotnomasi, Rossiya Federatsiyasi). Ilmiy natijalarning qo'llanishi matematik fizikaning noklassik tenglamalari uchun nolokal masalalarning bir qiymatli yechimini topish imkonini bergan;

uchinchi tartibli qo'shma tipdagi statsionar tenglamaga doir o'rnatilgan energetik va lokal baholar hamda bu tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning yechimlarini aprior baholash usullaridan "Yer haqidagi matematik modellarni yaratish, tadqiq qilish va identifikatsiyalash usullari" mavzusidagi ilmiy-tadqiqot ishlarida hamda RFFI 16-01-00729 raqamli "Qovushoq silliq muhitlarda minerallashgan aralashmalar filtratsiyasini matematik modellashtirish" mavzusidagi xorijiy loyihada anizotrop suyuqliklarda relaksion jarayonlar tajribalari natijalarini asoslashda foydalanilgan (Hisoblash matematikasi va matematik geofizika institutining 2021 yil 16-dekabrda №15301/2-01-27-sonli ma'lumotnomasi, Rossiya Federatsiyasi). Ilmiy natijalarning qo'llanilishi anizotrop suyuqliklarda relaksion jarayonlarni aprior baholash imkonini bergan;

uchinchi tartibli qo'shma tipdagi tenglama yechimlari uchun o'rnatilgan Sen-Venan tipidagi prinsip va uni o'rnatish usullaridan OT-F4-04(05) raqamli "Chiziqsiz evolyusion matritsaviy tenglamalarga spektral usullarning tatbiqi, Yurak-tomir sistemasi biomexanikasi" mavzusidagi fundamental loyihada anizotrop suyuqliklarda jarayonlarni tadqiq qilishdagi tajribalarning natijalarini asoslashda foydalanilgan (Urganch davlat universitetining 2021 yil 11-dekabrda №04-279/2-sonli ma'lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo'llanilishi anizotrop suyuqliklarda ro'y beradigan jarayonlarni to'liq asoslash imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 11 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan 7 ta xalqaro va 4 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o'tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e'lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo'yicha jami 28 ta ilmiy ishlar chop etilgan, shulardan, O'zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 17 ta maqola, jumladan, 8 tasi respublika va 9 tasi xorijiy jurnallarda nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya tarkibi kirish, to'rtta bob, xulosalar, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat. Dissertatsiyaning hajmi 151 betni tashkil etadi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Dissertatsiya kirish, to'rtta bob va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

Dissertatsiyaning kirish qismida o'rganilgan mavzuning dolzarbligi va zaruriyati asoslanib, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga mosligi ko'rsatilgan, mavzu bo'yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlarning sharhi va muammoning o'rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, ob'ekti va predmeti tavsiflagan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy tadbirlari bayon etilgan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiyaning tuzilishi bo'yicha ma'lumot berilgan.

Dissertatsiyaning birinchi bobida qo'shma tipdagi uchinchi tartibli nostatsionar tenglama fundamental yechimlarining potentsiallari o'rganilib, bu tenglama uchun chegaraviy masalalarning korrektiligi tekshirilgan hamda Koshi masalasi o'rganilgan.

Birinchi bobning birinchi paragrafda

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^3 u}{\partial x_i^3} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

tenglamaning fundamental yechimlari va potentsiallarining xossalari $D = \mathbb{R}^n \times (0, T)$ sohada o'rganilgan

$$\begin{aligned} I_{02}(x_1, \dots, x_n, t) &= \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} U_0(x_1 - x_1^0, x_2 - \xi_2, \dots, x_n - \xi_n; t - \tau) \alpha(\xi_2, \dots, \xi_n, \tau) d\xi_2 \dots d\xi_n d\tau, \\ I_{i2}(x_1, \dots, x_n, t) &= \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} U_i(x_1 - x_1^0, x_2 - \xi_2, \dots, x_n - \xi_n; t - \tau) \alpha_i(\xi_2, \dots, \xi_n, \tau) d\xi_2 \dots d\xi_n d\tau, i = \overline{1, n}, \end{aligned}$$

$$J_2(x_1, \dots, x_n, t) = \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} V_{\xi_1 \xi_1}(x_1 - x_1^0, x_2 - \xi_2, \dots, x_n - \xi_n; t - \tau) \alpha(\xi_2, \dots, \xi_n, \tau) d\xi_2 \dots d\xi_n d\tau.$$

Bu yerda

$$U_0(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n; t - \tau) = \frac{1}{(t - \tau)^{n/3}} f\left(\frac{x_1 - \xi_1}{(t - \tau)^{1/3}}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{x_n - \xi_n}{(t - \tau)^{1/3}}\right), \quad x_i \neq \xi_i, \quad t > \tau,$$

$$U_i(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n; t - \tau) = \frac{1}{(t - \tau)^{n/3}} f\left(\frac{x_1 - \xi_1}{(t - \tau)^{1/3}}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{x_{i-1} - \xi_{i-1}}{(t - \tau)^{1/3}}\right) \varphi\left(\frac{x_i - \xi_i}{(t - \tau)^{1/3}}\right) f\left(\frac{x_{i+1} - \xi_{i+1}}{(t - \tau)^{1/3}}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{x_n - \xi_n}{(t - \tau)^{1/3}}\right), \quad x_i > \xi_i, \quad x_j \neq \xi_j, \quad t > \tau, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i \neq j, \quad i + j = n,$$

$$V(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n; t - \tau) = \frac{1}{(t - \tau)^{n/3}} \varphi\left(\frac{x_1 - \xi_1}{(t - \tau)^{1/3}}\right) \cdot \dots \cdot \varphi\left(\frac{x_n - \xi_n}{(t - \tau)^{1/3}}\right), \quad x_i > \xi_i, \quad t > \tau,$$

bu yerda

$$f(z) = \int_0^\infty \cos(\lambda^3 - \lambda z) d\lambda,$$

$$\varphi(z) = \int_0^\infty [\exp(-\lambda^3 - \lambda z) + \sin(\lambda^3 - \lambda z)] d\lambda, \quad z = \frac{x - \xi}{(t - \tau)^{1/3}}$$

funksiyalar Eyri funksiyasi deb atalib, quyidagi tenglamani qanoatlantiradi

$$p''(z) + \frac{z}{3} p(z) = 0.$$

$f(z)$, $\varphi(z)$ funksiyalar uchun quyidagi munosbatlar o'rinli

$$p^{(n)}(z) \approx O\left(c_n^+ z^{\frac{n-1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}\right)\right) \text{ pri } z \rightarrow \infty,$$

$$p^{(n)}(z) \approx O\left(c_n^- |z|^{\frac{n-1}{4}} \exp\left(-\frac{2}{3} |z|^{\frac{3}{2}}\right)\right) \text{ pri } z \rightarrow -\infty,$$

c_n^+, c_n^- – const.

$$\int_{-\infty}^0 f(z) dz = \pi, \quad \int_{-\infty}^0 f(z) dz = \frac{\pi}{3}, \quad \int_0^\infty f(z) dz = \frac{2\pi}{3}, \quad \int_0^\infty \varphi(z) dz = 0,$$

1-lemma. Faraz qilamiz, $\alpha(x_2, \dots, x_n, t) \in C(\overline{K} \times (0, T))$ bo'lsin. U holda

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \rightarrow (\lambda_2 - 0, x_2, \dots, x_n, t)} I_{02}(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{\pi^n}{3} \alpha(x_2, \dots, x_n, t),$$

bu yerda $K = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 = \lambda_2, \lambda_1 \leq x_j \leq \lambda_2, j = \overline{2, n}\} \subset \mathbb{R}^{n-1}$, .

2-lemma. Faraz qilamiz, $\alpha(x_2, \dots, x_n, t) \in C^1(\overline{K} \times (0, T))$ bo'lsin. U holda

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \rightarrow (\lambda_1 + 0, x_2, \dots, x_n, t)} I_{02}(x_1, \dots, x_n, t) = -\frac{2\pi^n}{3} \alpha(x_2, \dots, x_n, t),$$

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \rightarrow (\lambda_1 + 0, x_2, \dots, x_n, t)} I_{i2}(x_1, \dots, x_n, t) = 0,$$

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \rightarrow (\lambda_1 + 0, x_2, \dots, x_n, t)} J_2(x_1, \dots, x_n, t) = 0,$$

bu yerda $K = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 = \lambda_1, \lambda_1 \leq x_j \leq \lambda_2, j = \overline{2, n}\} \subset R^{n-1}$.

Birinchi bobning ikkinchi paragrafda (1) tenglama

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = u_0(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

1-teorema. Faraz qilamiz, $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ funksiya chegaralangan ixtiyoriy $D = \{(x_1, \dots, x_n) : a \leq x_i \leq b, i = \overline{1, n}\}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ sohada uzluksiz bo'lib, variatsiyasi

chegaralangan bo'lsin. Shu bilan birga $|y|^{\frac{3}{4} + \delta_1} \psi(y)$ funksiyaning variatsiyasi ham $y < a_0$, $\forall a_0$, $a_0 = \text{const}$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha nuqtalarda chegaralangan bo'lsin. Bundan tashqari $x_i \rightarrow \infty$, $x_j < a$, $k = \overline{1, n-1}$ bo'lganda

$$u_0(x_1, \dots, x_n) \approx O\left(\prod_{j=1}^k \psi(x_j) \exp\left\{\text{const} \sum_{i=k+1}^n |x_i|^{\frac{3}{2} - \delta_2}\right\}\right) \text{ munosabat; } x_i \rightarrow \infty, i = \overline{1, n}$$

bo'lganda $u_0(x_1, \dots, x_n) \approx O\left(\exp\left\{\text{const} \sum_i |x_i|^{\frac{3}{2} - \delta_2}\right\}\right)$; $x_j < a$, $j = \overline{1, n}$ bo'lganda esa

$$u_0(x_1, \dots, x_n) \approx O\left(\prod_j \psi(x_j)\right) \text{ munosabat o'rinli bo'lsin. Bu yerda } 0 < \delta_1 < 1, 0 < \delta_2 < 1$$

. U holda

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} U(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n; t) u_0(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n \quad (2)$$

funksiya $t > 0$ sohada (1) tenglamani va

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n, t) \rightarrow (x_1^0, \dots, x_n^0, +0)} u(x_1, \dots, x_n, t) = u_0(x_1^0, \dots, x_n^0).$$

shartni qanoatlantiradi.

Birinchi bobning uchinchi paragrafda

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

tenglama $\Omega = \{(x, y, t) : 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < t \leq T\}$ sohada

$$u(x, y, 0) = \alpha u(x, y, T), \quad \alpha = \text{const}, (x, y) \in \Omega_0 \quad (4)$$

$$\alpha_1(y, t) u(0, y, t) + \alpha_2(y, t) u_{xx}(0, y, t) = \varphi_1(y, t), \quad (5)$$

$$u_x(0, y, t) = \varphi_2(y, t), \quad 0 \leq y \leq 1, 0 \leq t \leq T,$$

$$\alpha_3(y, t) u(1, y, t) + \alpha_4(y, t) u_x(1, y, t) + \alpha_5(y, t) u_{xx}(1, y, t) = \varphi_3(y, t), \quad 0 \leq y \leq 1, 0 \leq t \leq T, \quad (6)$$

$$\beta_1(x,t)u(x,0,t) + \beta_2(x,t)u_{yy}(x,0,t) = \psi_1(x,t), \quad (7)$$

$$u_y(x,0,t) = \psi_2(x,t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\beta_3(x,t)u(x,1,t) + \beta_4(x,t)u_x(x,1,t) + \beta_5(x,t)u_{xx}(x,1,t) = \psi_3(x,t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T, \quad (8)$$

chegaraviy shartlar bilan o'rganilib, quyidagi teoremlar isbotlangan:

2-teorema. Faraz qilamiz, $e^{mT} - \alpha^2 \geq 0, m < 0$ tengsizlik o'rinli bo'lib, quyidagi

$$a) \alpha_2(y,t) \neq 0, \alpha_5(y,t) \neq 0, 2\alpha_3(y,t)\alpha_5(y,t) - \alpha_4^2(y,t) \geq 0,$$

$$\frac{\alpha_3(y,t)}{\alpha_5(y,t)} + \frac{1}{2} \geq 0, \frac{\alpha_1(y,t)}{\alpha_2(y,t)} \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,;$$

$$b) \beta_2(x,t) \neq 0, \beta_5(x,t) \neq 0, 2\beta_3(x,t)\beta_5(x,t) - \beta_4^2(x,t) \geq 0,$$

$$\frac{\beta_3(x,t)}{\beta_5(x,t)} + \frac{1}{2} \geq 0, \frac{\beta_1(x,t)}{\beta_2(x,t)} \leq 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T.$$

shartlar bajarilsin. U holda (3)-(8) masala bittadan ortiq yechimga ega bo'lmaydi.

3-teorema. Faraz qilamiz,

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1(y,t), \alpha_2(y,t), \varphi_1(y,t) &\in C_{y,t}^{0,1}(\overline{\Omega}(x=0)), \\ \beta_1(y,t), \beta_2(y,t), \psi_1(x,t) &\in C_{x,t}^{0,1}(\overline{\Omega}(y=0)), \\ \alpha_3(y,t), \alpha_4(y,t), \alpha_5(y,t), \varphi_3(y,t) &\in C_{y,t}^{0,1}(\overline{\Omega}(x=1)), \\ \beta_3(x,t), \beta_4(y,t), \beta_5(x,t), \psi_3(x,t) &\in C_{x,t}^{0,1}(\overline{\Omega}(y=1)) \\ \varphi_2(y,t) &\in C(\overline{\Omega}_1), \quad \psi_2(x,t) \in C(\overline{\Omega}(y=0)). \end{aligned} \right\}$$

munosabatlar o'rinli bo'lib, 2-teoremaning shartlari bajarilsin. U holda (3)-(8) masala yagona yechimga ega bo'lib, $u(x,y,t) \in C_{x,y,t}^{3,3,1}(\Omega) \cap C_{x,y,t}^{2,2,0}(\overline{\Omega})$ bo'ladi.

Birinchi bobning to'rtinchi paragrafda A.I.Kojanov tomonidan olingan natijalar keltirilgan bo'lib, unda chegaralangan D sohada qo'shma tipdagi uchinchi tartibli

$$Lu \equiv lAu + Bu = f(x) \quad (9)$$

tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning umumlashgan yechimlarini qurish usuli ishlab chiqilgan.

$$\text{Bu yerda} \quad lu = l_0u + \alpha(x)u, \quad l_0u = \alpha^k(x)u_{x_k},$$

$$Au = a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + a^i(x)u_{x_i} + a(x)u, \quad Bu = b^{ij}(x)u_{x_i x_j} + b^i(x)u_{x_i} + b(x)u.$$

Bu yerda va keyinchalik tenglamaning barcha $a^{ij}(x), a^i(x), \dots$ koeffitsientlari $x \in \overline{D}$ nuqtalarda cheksiz marta differensiallanuvchi bo'lib, yig'indi qaytariluvchi indekslar bo'yicha amalga oshiriladi.

Ikkinchi bobda Sen-Venan prinsipi tipdagi energetik baholar yordamida qo'shma tipdagi uchinchi tartibli statsionar va nostatsionar tenglamalarning umumlashgan yechimlarining yagonalik sinflari sohaning geometrik

xarakteristikasiga bog‘liq holda aniqlangan.

Ikkinchi bobning birinchi paragrafda (9) tenglamaning

$$u|_{\sigma_1 \cup \sigma_0 \cup \sigma_2} = 0, \quad l_0 u|_{\sigma_1} = 0 \quad (10)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi masalaning umumlashgan yechimlari uchun $\Omega = \{x : x_1 > 0\}$ sohada Sen-Venan prinsipi tipidagi energetik baholar o‘rnatilgan. Bu yerda $\sigma_0 = \{x \in \Gamma : \alpha^k(x) v_k(x) = 0\}$, $\sigma_1 = \{x \in \Gamma : \alpha^k(x) v_k(x) > 0\}$, $\sigma_2 = \{x \in \Gamma : \alpha^k(x) v_k(x) < 0\}$, $\Gamma = \partial\Omega$. Bu prinsip yordamida (9), (10) chegaraviy masala yechimlarining yagonalik sinflari Ω sohaning geometrik xarakteristikasiga bog‘liq holda aniqlangan.

1-ta’rif. Agar $u(x) \in H(\Omega_\tau)$, $\Omega_\tau = \{x : 0 < x_1 < \tau\}$ funksiya va $v = 0$ $S_\tau = \Omega \cap \{x : x_1 = \tau\}$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $v(x) \in E(\Omega_\tau)$ funksiya uchun

$$a(u, v) = \int_{\Omega_\tau} f v dx$$

ayniyat o‘rinli bo‘lsa, u holda $u(x)$ funksiya (9) tenglamaning $l_0 u|_{\sigma_{1,\tau}} = 0$ i

$u|_{\sigma_{1,\tau} \cup \sigma_{0,\tau} \cup \sigma_{2,\tau}} = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi umumlashgan yechimi deb ataladi.

Bu yerda $E(\Omega_\tau) = \left\{ v : v \in C^2(\overline{\Omega_\tau}), v|_{\partial\Omega_\tau} = 0, l_0 v|_{\sigma_{0,\tau} \cup \sigma_{2,\tau} \cup \sigma_{1,\tau}^h} = 0 \right\}$;
 $\sigma_{1,\tau}^h = \sigma_{1,\tau} \setminus \sigma_{1,h,\tau}$, $\sigma_{1,h,\tau} = \left\{ x \in \sigma_{1,\tau} : \rho(x, \partial\sigma_{1,\tau}) > h \right\}$, $h > 0$,
 $\sigma_{0,\tau} = \left\{ x \in \Gamma_\tau : \alpha^k(x) v_k(x) = 0 \right\}$, $\sigma_{1,\tau} = \left\{ x \in \Gamma_\tau : \alpha^k(x) v_k(x) > 0 \right\}$,
 $\sigma_{2,\tau} = \left\{ x \in \Gamma_\tau : \alpha^k(x) v_k(x) < 0 \right\}$, $\Gamma_\tau = \Gamma \cap \{x : x_1 < \tau\}$,

$$a(u, v) = \int_{\Omega_\tau} \left[\alpha^k a^{ij} u_{x_i} v_{x_j x_k} + (\alpha^k a^{ij})_{x_j} u_{x_i} v_{x_k} - \alpha^k a^i u_{x_i} v_{x_k} - c^{ij} u_{x_i} v_{x_j} \right] dx +$$

$$+ \int_{\Omega_\tau} \left[(c_{x_j}^{ij} - \alpha^i a - c^i) u v_{x_i} + (c - c_{x_i}^i + c_{x_i x_j}^{ij}) u v \right] dx.$$

$H(\Omega_\tau) - E(\Omega_\tau)$ to‘planning

$$\|u\|_{H(\Omega_\tau)} = \left\{ \int_{\Omega_\tau} (d^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + u^2) dx + \int_{\sigma_{1,\tau}} \alpha^k v_k a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} ds \right\}^{\frac{1}{2}}$$

norma bo‘yicha ta’ldirmasi.

Bu paragrafda (9), (10) masala yechimlari uchun quyidagi teoremlar isbot qilingan

4-teorema. (Sen-Venan prinsipining analogi) Faraz qilamiz, $d_1^{ij} \xi_i \xi_j > d_{11} |\xi|^2$, $d_{11} = \text{const} > 0$, $q_1^{ij} \leq q_{10} < 0$, $\forall x \in \Omega_\tau, \forall \xi \in R^n$ bo'lsin. Agar $u(x)$ funksiya (9) tenglamaning Ω_τ sohada $u|_{\sigma_{0,\tau} \cup \sigma_{1,\tau} \cup \sigma_{2,\tau}} = 0$, $l_0 u|_{\sigma_{1,\tau}} = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi umumlashgan yechimi bo'lib, $f(x) = 0$ bo'lsa, u holda $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy τ_1 uchun

$$\int_{\Omega_{\tau_1}} E(u) dx \leq \Phi^{-1}(\tau_1, \tau_2) \int_{\Omega_{\tau_2}} E(u) dx \quad (11)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bu yerda $E(u) = d^{ij} u_{x_j} u_{x_j} - q^{ij} u^2$, $d^{ij} = c^{ij} - (\alpha^i a^{kj})_{x_k} + \alpha^i a^j + \frac{1}{2} (\alpha^k a^{ij})_{x_k}$.

$q^{ij} = c - \frac{1}{2} c_{x_i}^i + \frac{1}{2} c_{x_i x_j}^{ij} + \frac{1}{2} (\alpha^i a)_{x_i} \leq -q_0 < 0$, $d_0 |\xi|^2 \leq d^{ij} \xi_i \xi_j \leq d_1 |\xi|^2$, bunda

$\forall x \in \Omega \cup \Gamma, \forall \xi \in R^n$, $q_1^{ij} = (\alpha^1 a^{ij})_{x_i x_j} - (\alpha^1 a^i)_{x_j} - c_{x_i}^{i1} - c_{x_j}^{1j} + \alpha^1 a - c^1$,

$d_1^{ij} = \alpha^j a^{i1} - \frac{1}{2} \alpha^1 a^{ij}$, $\Phi(x_1, \tau_2)$ funksiya esa

$$\Phi' = \mu(x_1) \Phi, \tau_1 \leq x_1 \leq \tau_2, \Phi(\tau_2, \tau_2) = 1, \Phi'(\tau_2, \tau_2) = 0, \quad (12)$$

masalaning yechimi, $\mu(\tau)$

$$0 < \mu(\tau) \leq \lambda(\tau) \equiv \inf_{v \in N} \left\{ \int_{S_\tau} E(v) dx' \left| \int_{S_\tau} P(v) dx' \right|^{-1} \right\}, \quad x' = (x_2, x_3, \dots, x_n),$$

$$P(v) = \alpha^1 a^{i1} v v_{x_i} + \frac{1}{2} (c^{11} + \alpha^1 a^1 - (\alpha^1 a^{1j})_{x_j}) v^2$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy uzluksiz funksiya. Bu yerda $N - \overline{S_\tau}$ to'planning atrofida differensiallanuvchi va $\overline{S_\tau} \cap \Gamma$ to'plamda nolga teng bo'lgan funksiyalar to'plami.

5-teorema. Faraz qilamiz, $S_\tau = \Omega \cap \{x : x_1 = \tau\}$ to'plam ixtiyoriy $\tau > 0$ larda bo'sh bo'lmagan to'plam, Ω sohada $f(x) = 0$ bo'lib, 4-teorema shartlari bajarilsin va $u(x)$ funksiya (9) tenglamaning $\Omega_\tau, \forall \tau > 0$ sohada $u|_{\sigma_{0,\tau} \cup \sigma_{1,\tau} \cup \sigma_{2,\tau}} = 0$, $l_0 u|_{\sigma_{1,\tau}} = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi umumlashgan yechimi bo'lsin.

Agar $\tau_m \rightarrow \infty$ ketma-ketlik va qandaydir $d_* = \text{const} > 0$ uchun

$$\int_{\Omega_{\tau_m}} E(u) dx \leq \varepsilon(\tau_m) \Phi(d_*, \tau_m), \quad (13)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda Ω sohada $u(x) = 0$ bo'ladi. Bu yerda $\varepsilon(\tau_m) \rightarrow 0, \tau_m \rightarrow \infty$.

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafda chegaralanmagan $\Omega \subset R^n = \{x : x_1 > 0\}$ sohada

$$l_0 Au = f(x) \quad (13)$$

tenglamaning

$$u|_{\sigma_1} = 0, \quad l_0 u|_{\sigma_1 \cup \sigma_0 \cup \sigma_2} = 0, \quad (14)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi umumlashgan yechimlari uchun Sen-Venan prinsipining analogi o'rnatilgan. Bu yerda $l_0 u = \alpha^k u_{x_k}$, $Au = a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + a^i u_{x_i} + au$; a^{ij} , a^i , a , α^k , $(i, j, k = (1, 2, \dots, n))$ – o'zgaruvchi sonlar;

$$a^{ij} = a^{ji}, \quad a_0 |\xi|^2 \leq a^{ij} \xi_i \xi_j \leq a_1 |\xi|^2, \quad \forall \xi \in R^n, \quad \sum_{k=1}^n [\alpha^k]^2 \neq 0.$$

Bu prinsip yordamida (13), (14) chegaraviy masala yechimlarining yagonalik sinflari Ω sohaning geometrik xarakteristikasiga bog'liq holda aniqlangan.

2-ta'rif. Agar $u(x) \in H(\Omega_\tau)$, $\Omega_\tau = \{x : 0 < x_1 < \tau\} \subset \Omega$ funksiya va ixtiyoriy $v \in W_2^1(\Omega_\tau)$ funksiya uchun

$$p(l_0 u, v) \equiv \int_{\Omega_\tau} \left[-a^{ij} (l_0 u)_{x_i} v_{x_j} + a^i (l_0 u)_{x_i} v + a(l_0 u)v \right] dx = \int_{\Omega_\tau} f v dx \quad (15)$$

ayniyat o'rinli bo'lsa, u holda $u(x)$ funksiya (13) tenglamaning Ω_τ sohada $u|_{\sigma_{1,\tau}} = 0$ i $l_0 u|_{\sigma_{1,\tau} \cup \sigma_{0,\tau} \cup \sigma_{2,\tau}} = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi umumlashgan yechimi deb ataladi.

Bu

yerda

$$H(\Omega_\tau) = \left\{ u : l_0 u \in W_2^1(\Omega_\tau), l_0 u|_{\Gamma_\tau} = 0, u|_{\sigma_{1,\tau}} = 0 \right\}, \quad \Gamma_\tau = \Gamma \cap \partial\Omega_\tau, \quad \Gamma = \partial\Omega$$

Bu paragrafda (13), (14) masala yechimlari uchun quyidagi teoremlar isbot qilingan

6-teorema. (Sen-Venan prinsipi analogi) Faraz qilamiz, $a \leq 0$ bo'lsin. Agar $u(x)$ funksiya (13) tenglamaning Ω_τ ($\tau \leq \tau_2$) sohada $u|_{\sigma_{1,\tau}} = 0$, $l_0 u|_{\sigma_{1,\tau} \cup \sigma_{0,\tau} \cup \sigma_{2,\tau}} = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi umumlashgan yechimi bo'lib, $f(x) = 0$ bo'lsa, u holda $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy τ_1 uchun

$$\int_{\Omega_{\tau_1}} E(l_0 u) dx \leq \Phi^{-1}(\tau_1, \tau_2) \int_{\Omega_{\tau_2}} E(l_0 u) dx \quad (16)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $E(u) = a^{ij} (l_0 u)_{x_i} (l_0 u)_{x_j} - a(l_0 u)^2$, $a^{ij} = a^{ji}$,

$a_0 |\xi|^2 \leq a^{ij} \xi_i \xi_j \leq a_1 |\xi|^2$, $\forall \xi \in R^n$, $a < 0$, $\Phi(x_1, \tau_2)$ funksiya esa

$$\Phi'(x_1, \tau_2) = -\mu(x_1)\Phi(x_1, \tau_2), \quad \tau_1 \leq x_1 \leq \tau_2, \quad \Phi(\tau_2, \tau_2) = 1, \quad (17)$$

masalaning yechimi, $\mu(\tau)$

$$0 < \mu(\tau) \leq \lambda(\tau) \equiv \inf_{\nu \in N} \left\{ \int_{S_\tau} E(l_0 \nu) dx' \left| \int_{S_\tau} P(l_0 \nu) dx' \right|^{-1} \right\}, \quad x' = (x_2, x_3, \dots, x_n),$$

$$P(l_0 \nu) = -a^{i1} l_0 \nu (l_0 \nu)_{x_i} - \frac{1}{2} a^1 (l_0 \nu)^2$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy uzluksiz funksiya. Bu yerda $N - \bar{S}_\tau$ ning atrofida ikki marta differensiallanuvchi va $\bar{S}_\tau \cap \Gamma$ to'plamda $l_0 \nu = 0$ bo'lgan funksiyalar to'plami bo'lib, $l_0 \nu \in C^1(\bar{\Omega}_\tau)$, $\nu|_{\sigma_{1,\tau}} = 0$, $l_0 \nu|_{\partial\Omega} = 0$.

7-teorema. $S_\tau = \Omega \cap \{x : x_1 = \tau\}$ to'plam ixtiyoriy $\tau > 0$ larda bo'sh bo'lmagan to'plam, Ω sohada $f(x) = 0$, $\alpha^1 \geq 0$, $a \leq 0$. 6-teorema shartlari bajarilib, $u(x)$ funksiya (13) tenglamaning Ω_τ , $\forall \tau > 0$ sohada $u|_{\sigma_{1,\tau}} = 0$, $l_0 u|_{\sigma_{1,\tau} \cup \sigma_{0,\tau} \cup \sigma_{2,\tau}} = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi umumlashgan yechimi bo'lsin. Agar $\tau_m \rightarrow \infty$ ketma-ketlik va $d_* = \text{const} > 0$ uchun

$$\int_{\Omega_{\tau_m}} E(l_0 u) dx \leq \varepsilon(\tau_m) \Phi(d_*, \tau_m), \quad (18)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda Ω sohada $u(x) = 0$ bo'ladi. Bu yerda $\varepsilon(\tau_m) \rightarrow 0$, $\tau_m \rightarrow \infty$.

8-teorema. $\Omega \subset \{x : x_1 > 0\}$ soha chegaralangan, $S_\tau = \Omega \cap \{x : x_1 = \tau\}$, $\forall \tau \in (0, \tau^0)$, $\tau^0 = \text{const} > 0$ to'plam bo'sh bo'lmasin hamda $a \leq 0$, $f(x) \equiv 0$ bo'lsin. U holda (13) tenglamaning Ω_{τ^0} sohada $u|_{\sigma_{1,\tau}} = 0$, $l_0 u|_{\partial\Omega_{\tau^0} \cap \partial\Omega} = 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x)$ yechimi uchun quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi

$$\int_{\Omega_{\tau^0}} (l_0 u)^2 \Lambda(x_1) \Phi(x_1, \tau^0, \varepsilon) dx \leq \int_{\Omega_{\tau^0}} E(l_0 u) \Phi(x_1, \tau^0, \varepsilon) dx \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_{\tau^0}} E(l_0 u) dx, \quad (19)$$

gde $\varepsilon = \text{const}$, $0 < \varepsilon < 1$, $\sigma_{1,\tau^0} = \{x \in \partial\Omega_{\tau^0} \cap \partial\Omega : \alpha^k \nu_k\}$.

Bu yerda $\Phi(x_1, \tau_2)$

$$\Phi' = -(1 - \varepsilon) \mu(x_1) \Phi, \quad 0 < x_1 < \tau^0, \quad \Phi(\tau^0, \tau^0, \varepsilon) = 1, \quad (20)$$

masalaning yechimi, $\mu(\tau)$

$$0 < \mu(\tau) \leq \lambda(\tau) \equiv \inf_{\nu \in N} \left\{ \int_{S_\tau} E(l_0 \nu) dx' \left| \int_{S_\tau} P(l_0 \nu) dx' \right|^{-1} \right\},$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy uzluksiz funksiya $N - \bar{S}_\tau$ to'plam atrofida ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi va $l_0 \nu|_{\bar{S}_\tau \cap \Gamma} = 0$ bo'lgan funksiyalar to'plami. Bunda $\inf l_0 \nu \in C^1(\bar{\Omega})$, $\nu|_{\sigma_1} = 0$, $l_0 \nu|_{\partial\Omega} = 0$ shartni qanoatlantiruvchi

barcha ν funksiyalar bo'yicha olinadi.

Ikkinchi bobning uchinchi paragrafda

$$Lu \equiv lAu + Bu - u_t = f(x, t) \quad (21)$$

tenglamaning $Q = \Omega \times (0, T)$, $\Omega \subset R_+^n = \{x : x_1 > 0\}$, $0 < T < \infty$ sohada

$$u|_{t=0} = 0, \quad (22)$$

$$u|_{\sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2} = 0, \quad l_0 u|_{\sigma_1} = 0 \quad (23)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi umumlashgan yechimlari uchun Sen-Venan prinsipi tipidagi energetik baholar o'rnatilgan. Bu yerda

$$\sigma_0 = \tilde{\sigma}_0 \times [0, T], \quad \sigma_1 = \tilde{\sigma}_1 \times [0, T], \quad \sigma_2 = \tilde{\sigma}_2 \times [0, T],$$

$$\tilde{\sigma}_0 = \{(x, t) \in \Gamma : \alpha^k(x, t)v_k(x, t) = 0\}, \quad \tilde{\sigma}_1 = \{(x, t) \in \Gamma : \alpha^k(x, t)v_k(x, t) > 0\},$$

$$\tilde{\sigma}_2 = \{(x, t) \in \Gamma : \alpha^k(x, t)v_k(x, t) < 0\}, \quad \Gamma = \partial Q.$$

3-ta'rif. Agar ixtiyoriy $\tau < \infty$ uchun $u(x, t) \in H(Q_\tau)$ va ixtiyoriy $\nu(x) \in E(Q_\tau)$, $\nu|_{S_\tau} = 0$, $S_\tau = \tilde{s}_\tau \times [0, T]$, $\tilde{s}_\tau = \Omega \cap \{x : x_1 = \tau\}$ funksiyalar uchun

$$a_1(u, \nu) = \int_{Q_\tau} f \nu dx dt, \quad (24)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $u(x, t)$ funksiya (21) tenglamaning $Q_\tau = \Omega_\tau \times (0, T)$ sohada $u|_{t=0} = 0$, $u|_{\sigma_{\tau,0} \cup \sigma_{\tau,1} \cup \sigma_{\tau,2}} = 0$, $l_0 u|_{\sigma_{\tau,1}} = 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi umumlashgan yechimi deyiladi.

Bu yerda

$$a_1(u, \nu) = \int_{Q_\tau} \left[\alpha^k a^{ij} u_{x_i} \nu_{x_j x_k} + (\alpha^k a^{ij})_{x_j} u_{x_i} \nu_{x_k} - \alpha^k a^i u_{x_i} \nu_{x_k} - c^{ij} u_{x_i} \nu_{x_j} \right] dx dt +$$

$$+ \int_{Q_\tau} \left[(c_{x_j}^{ij} - \alpha^i a - c^i) u \nu_{x_i} + (c - c_{x_i}^i + c_{x_i x_j}^{ij}) u \nu - u_t \nu \right] dx dt;$$

$$Q_\tau = \Omega_\tau \times (0, T), \quad \Omega_\tau = \{x : 0 < x_1 < \tau\}, \quad \sigma_{\tau,0} = \tilde{\sigma}_{\tau,0} \times [0, T], \quad \sigma_{\tau,1} = \tilde{\sigma}_{\tau,1} \times [0, T],$$

$$\sigma_{\tau,2} = \tilde{\sigma}_{\tau,2} \times [0, T], \quad \tilde{\sigma}_{\tau,0} = \{x \in \Gamma_\tau : \alpha^k(x)v_k(x) = 0\},$$

$$\tilde{\sigma}_{\tau,1} = \{x \in \Gamma_\tau : \alpha^k(x)v_k(x) > 0\}, \quad \tilde{\sigma}_{\tau,2} = \{x \in \Gamma_\tau : \alpha^k(x)v_k(x) < 0\}; \quad E(Q_\tau)$$

$\Gamma_\tau \times [0, T]$ to'plamda $\nu = 0$ va $\sigma_{0,\tau} \cup \sigma_{2,\tau} \cup \sigma_{1,\tau}^h$, $h > 0$ to'plamda $l_0 \nu = 0$ bo'lgan $\nu \in C_{x,t}^{2,1}(\bar{Q}_\tau)$ funksiyalardan iborat to'plam.

$H(Q_\tau)$ esa $E(Q_\tau)$ to'plamning

$$\|u\|_{H(Q_\tau)} = \left\{ \int_{Q_\tau} (d^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + u_t^2 + u^2) dx dt + \int_{\sigma_{1,\tau}} \alpha^k v_k a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} ds \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

norma bo'yicha to'ldirmasi.

9-teorema. (Sen-Venan prinsipining analogi) Faraz qilamiz, $d_1^{ij} \xi_i \xi_j > d_{11} |\xi|^2$, $d_{11} = \text{const} > 0$, $q_1^{ij} \leq q_{10} < 0$, $\forall (x, t) \in Q_\tau$, $\forall \xi \in R^n$ bo'lsin. Agar $u(x, t)$ funksiya

(21) tenglamaning Q_τ sohada $u|_{t=0}=0$, $u|_{\sigma_{\tau,0} \cup \sigma_{\tau,1} \cup \sigma_{\tau,2}}=0$, $l_0 u|_{\sigma_1}=0$ shartlarni qanoatlantiruvchi umumlashgan yechimi va $f(x,t)=0$, $(x,t) \in Q_\tau$, $x_1 \leq \tau_2$ bo'lsa, u holda $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy τ_1 uchun

$$\int_{Q_{\tau_1}} E(u) dx dt \leq \Phi^{-1}(\tau_1, \tau_2) \int_{Q_{\tau_2}} E(u) dx dt \quad (25)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerda $E(u) = d^{ij} u_{x_j} u_{x_j} - q^{ij} u^2$,

$$q_1^{ij} = (\alpha^1 a^{ij})_{x_i x_j} - (\alpha^1 a^i)_{x_j} - c_{x_i}^{i1} - c_{x_j}^{1j} + \alpha^1 a - c^1 \quad d_1^{ij} = \alpha^j a^{i1} - \frac{1}{2} \alpha^1 a^{ij} \quad \text{bo'lib, } \Phi(x_1, \tau_2)$$

funksiya

$$\Phi' = \mu(x_1) \Phi, \quad \tau_1 \leq x_1 \leq \tau_2, \quad \Phi(\tau_2, \tau_2) = 1, \quad \Phi'(\tau_2, \tau_2) = 0 \quad (26)$$

masalaning yechimi, $\mu(\tau)$

$$0 < \mu(\tau) \leq \lambda(\tau) \equiv \inf_{v \in N} \left\{ \int_{S_\tau} E(v) dx' \left| \int_{S_\tau} P(v) dx' \right|^{-1} \right\}, \quad x' = (x_2, x_3, \dots, x_n),$$

$$P(v) = \alpha^1 a^{i1} v v_{x_i} + \frac{1}{2} (c^{11} + \alpha^1 a^1 - (\alpha^1 a^{1j})_{x_j}) v^2,$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy funksiya. Bu yerda $N - \overline{S_\tau}$ to'planning atrofida differensiallanuvchi va $\overline{S_\tau} \cap \Gamma = \partial Q$ to'plamda nolga teng bo'lgan funksiyalar to'plami.

Ikkinchi bobning to'rtinchi paragrafida (21) tenglama

$G \subset Q = \{(x,t) : T_0 < t < T_1\} \subset R_{x,t}^{n+1}$, sohada

$$u|_{\sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2} = 0, \quad l_0 u|_{\sigma_1} = 0, \quad (28)$$

chegaraviy shartlar bilan o'rganilgan. Bu yerda $-\infty \leq T_0 \leq t_0 \leq t_1 \leq T_1 \leq \infty$,

$$\Omega_\tau = \{(x,t) \in G : t = \tau\}, \quad \partial G = \Omega_{T_0} \cup \Omega_{T_1} \cup \Gamma, \quad \Omega_{T_0} = \{(x,t) \in \overline{G} : t = T_0\},$$

$$\Omega_{T_1} = \{(x,t) \in \overline{G} : t = T_1\}, \quad \Gamma \subset Q\text{-gipersirt. } \Omega_\tau \text{ ixtiyoriy chekli } \tau \text{ uchun}$$

chegaralangan sohadir.

Agar $T_0 = -\infty$ bo'lsa, u holda Ω_{T_0} -bo'sh to'plam, agar $T_1 = +\infty$ bo'lsa, u

holda Ω_{T_1} -bo'sh to'plam bo'ladi. Bu yerda $\sigma_0 = \{(x,t) \in \Gamma : \alpha^k(x,t) v_k(x,t) = 0\}$,

$$\sigma_1 = \{(x,t) \in \Gamma : \alpha^k(x,t) v_k(x,t) > 0\}, \quad \sigma_2 = \{(x,t) \in \Gamma : \alpha^k(x,t) v_k(x,t) < 0\}.$$

Quyidagi belgilashlar kiritamiz

$$G(t_0, t_1) = G \cap \{(x,t) : t_0 < t < t_1\}, \quad \Gamma(t_0, t_1) = \Gamma \cap \overline{G(t_0, t_1)}$$

$$\sigma_0(t_0, t_1) = \{(x,t) \in \Gamma(t_0, t_1) : \alpha^k(x,t) v_k(x,t) = 0\}$$

$$\sigma_1(t_0, t_1) = \{(x,t) \in \Gamma(t_0, t_1) : \alpha^k(x,t) v_k(x,t) > 0\}$$

$$\sigma_2(t_0, t_1) = \{(x,t) \in \Gamma(t_0, t_1) : \alpha^k(x,t) v_k(x,t) < 0\}$$

$h > 0$ uchun quyidagi to'plamlarni aniqlab olamiz

$$\sigma_{1,h}(t_0, t_1) = \left\{ (x, t) \in \sigma_1(t_0, t_1) : \rho((x, t), \partial\sigma_1(t_0, t_1)) > h \right\},$$

$$\sigma_1^h(t_0, t_1) = \sigma_1(t_0, t_1) \setminus \sigma_{1,h}(t_0, t_1)$$

Faraz qilamiz, $E(G(t_0, t_1)) \cap \Gamma(t_0, t_1)$ to'plamda $\nu=0$ va $\sigma_0(t_0, t_1) \cup \sigma_2(t_0, t_1) \cup \sigma_1^h(t_0, t_1)$ to'plamda $l_0\nu=0$ bo'lgan $\nu \in C_{x,t}^{2,1}(G(t_0, t_1))$ funksiyalardan iborat to'plam bo'lsin.

$H(G(t_0, t_1))$ esa $E(G(t_0, t_1))$ to'plamning

$$\|u\|_{H(G(t_0, t_1))} = \left\{ \int_{G(t_0, t_1)} (d^{ij}u_i u_j + u_t^2 + u^2) dxdt + \int_{\sigma_1(t_0, t_1)} \alpha^k \nu_k a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} ds \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

norma bo'yicha to'ldirmasidan iborat Gilbert fazrsi bo'lsin.

$$a_1(u, \nu) = \int_{G(t_0, t_1)} \left[\alpha^k a^{ij} u_{x_i} \nu_{x_j x_k} + (\alpha^k a^{ij})_{x_j} u_{x_i} \nu_{x_k} - c^{ij} u_{x_i} \nu_{x_j} \right] dxdt +$$

$$+ \int_{G(t_0, t_1)} \left[(c_{x_j}^{ij} - \alpha^i a) u \nu + (c - c_{x_i}^i + c_{x_j x_j}^{ij}) u \nu - u_t \nu \right] dxdt.$$

4-ta'rif. Agar ixtiyoriy t_0 va t_1 ($t_0 \neq -\infty$, $t_1 \neq +\infty$, $t_0 < t_1$) lar uchun $u(x, t) \in H(G(t_0, t_1))$ bo'lib, ixtiyoriy $\nu(x, t) \in E(G(t_0, t_1))$ funksiya uchun

$$a_1(u, \nu) = \int_{G(t_0, t_1)} f \nu dxdt \quad (29)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $u(x, t)$ funksiya G sohada (21), (28) masalaning umumlashgan yechimi deb ataladi.

10-teorema. (Sen-Venan prinsipining analogi) $u(x, t)$ funksiya G sohada (21), (28) masalaning umumlashgan yechimi va $G(t_0, t_1)$ sohada $f(x, t)=0$ bo'lsin. U holda $t_0 \leq \tau \leq t_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy τ uchun

$$\int_{G(\tau, t_1)} E(u) dxdt \leq \Phi^{-1}(\tau, t_0) \int_{G(t_0, t_1)} E(u) dxdt, \quad (30)$$

$$\int_{G(\tau, t_1)} E(u) dxdt \leq \frac{1}{2} \Phi^{-1}(\tau, t_0) \int_{\Omega_{t_0}} u^2(x, t_0) dx, \quad (31)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

$$\text{Bu yerda } E(u) = d^{ij} u_{x_j} u_{x_j} - q^{ij} u^2, \quad \Phi(t, t_0)$$

$$\Phi' = 2\mu\Phi, \quad t_0 \leq t \leq \tau, \quad \Phi(t_0, t_0) = 1 \quad (31)$$

masalaning yechimi, $\mu(t)$ $[t_0, \tau]$ oraliqda

$$0 < \mu(s) \leq \inf_{\nu \in N} \left\{ \int_{\Omega_s} E(\nu) dx \left| \int_{\Omega_s} \nu^2 dx \right|^{-1} \right\},$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy funksiya. $N - \bar{\Omega}_s$ to'plamning atrofida differensiallanuvchi va $\bar{\Omega}_s \cap \Gamma$ to'plamda nolga teng bo'lgan funksiyalar to'plami.

11-teorema. G to'plamda $f(x,t)=0$ bo'lsin. Agar $u(x,t)$ funksiya G to'plamda (21), (28) masalaning umumlashgan yechimi va $m \rightarrow \infty \Rightarrow t_m \rightarrow -\infty$ ketma-ketlik uchun

$$\int_{\Omega_{t_m}} u^2 dx \leq \varepsilon(t_m) \Phi(0, t_m), \quad (32)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda G sohada $u(x,t)=0$ bo'ladi. Bu yerda $\varepsilon(t_m) \rightarrow 0, t_m \rightarrow -\infty$.

Uchinchi bobda chegaralanmagan sohalarda (9), (10) masalaning umumlashgan yechimi qurilgan.

Uchinchi bobning birinchi paragrafda $\Omega\{x: x_1 > 0\}$ sohada (9), (10) masalaning yechimlari uchun Sen-Venan prinsipi tipidagi maxsus energetik baholar o'rnatilgan. Bu yerda $\Omega = \bigcup_{\tau \in \Pi} \Omega_\tau, \{\Omega_\tau\} - \tau \in \Pi = \{\tau: 0 \leq \tau \leq \tau_0\}, \tau_0 \leq \infty$ parametr ga bog'liq bo'lgan, chegaralangan sohalarda bo'lib, $\forall \tau$ uchun $\Omega_\tau \subset \Omega$.

5-ta'rif. Agar ixtiyoriy chegaralangan $\Omega_\tau \subset \Omega$ sohalarda uchun $u(x) \in H(\Omega_\tau)$ bo'lib, ixtiyoriy $v|_{S_\tau} = 0$ shartni qanoatlantiruvchi $u(x) \in E(\Omega_\tau)$ funksiyalar uchun

$$a(u, v) = \int_{\Omega_\tau} f v dx \quad (33)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $u(x)$ funksiya (9), (10) masalaning umumlashgan yechimi deb ataladi.

Bu yerda S_τ - bog'langan $(n-1)$ - o'lchovli $\partial\Omega$ bilan bir xil silliqlikka ega bo'lgan sirt bo'lib, $\partial S_\tau \subset \partial\Omega$

Quyidagi belgilashlar kiritamiz

$$B(x) = \max \left\{ 2^{-1} \left(\alpha^1 a^1 + c^{i1} - (\alpha^1 a^{ij})_{x_i} \right), 0 \right\}, P(\tau) = \sup_{S_\tau} B(x), k = a_1 \alpha^1 d_0^{-\frac{1}{2}},$$

$$E(u) = d^{ij} u_{x_i} u_{x_j} - q^{ij} u^2.$$

Faraz qilamiz,

$$0 < \lambda(\tau) \leq \inf_{v \in N} \left\{ \int_{S_\tau} E(v) dx' \left| \int_{S_\tau} v^2 dx' \right|^{-1} \right\}, x' = (x_1, \dots, x_n)$$

bo'lsin. Bu yerda $N - \bar{S}_\tau$ to'plamning atrofida differensiallanuvchi va $\bar{S}_\tau \cap \Gamma$ to'plamda nolga teng bo'lgan funksiyalar to'plami.

Faraz qilamiz,

$$\Phi(\tau) \geq k \lambda^{-\frac{1}{2}}(\tau) + P(\tau) \lambda^{-1}(\tau)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi musbat, absolyut uzluksiz $\Phi(\tau)$, $\tau \in \Pi$ funksiya mavjud bo'lsin.

12-teorema. Faraz qilamiz, $u(x)$ funksiya (9), (10) masalaning $\frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} \geq \varepsilon$, $\forall \tau \in \Pi$, $\frac{d\tau}{d\beta} = \frac{\Phi}{\varepsilon\tau + \Phi_\tau}$, $\tau(0) = 0$, $\varepsilon = const$, $0 < \varepsilon < 1$ shartlar bilan aniqlanuvchi Ω sohada umumlashgan yechimi bo'lib, Ω_{τ_0} , $0 < \tau \leq \tau^0$ sohada $f(x) = 0$ bo'lib,

$$\left(\alpha^1 a^{ij}\right)_{x_i} - \left(\alpha^1 a^{ij}\right)_{x_i x_j} + 3c_{x_i x_j}^{ij} - 2c^1 - 2\alpha^i a \geq 0, c^{jj} - \alpha^j a - c^1 < 0$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin. U holda $0 \leq R_0 \leq R$ tengsizlik o'rinli bo'lgan barcha R_0 , R uchun

$$\int_{\Omega_{\tau(R_0)}} E(u) dx \leq \frac{\Phi(\tau(R))}{\Phi(\tau(R_0))} \exp[-(R - R_0)] \int_{\Omega_{\tau(R)}} E(u) dx. \quad (34)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

13-teorema. Faraz qilamiz, Ω sohada $f(x) = 0$ bo'lib, 12-teoremaning shartlari o'rinli bo'lsin. Agar $u(x)$ funksiya Ω sohada (9), (10) masalaning umumlashgan yechimi bo'lib, qandaydir $\{R_l\}$ ($l \rightarrow \infty \Rightarrow R_l \rightarrow \infty$) ketma-ketlik uchun

$$\int_{\Omega_{\tau(R_l)}} E(u) dx \leq \varepsilon_1(R_l) \Phi^{-1}(\tau(R_l)) \exp\{R_l\}, \quad (35)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda Ω sohada $u(x) = 0$ bo'ladi. Bu yerda $\varepsilon_1(R_l) \rightarrow 0$, $R_l \rightarrow \infty$.

14-teorema. Faraz qilamiz, $u(x)$ funksiya (9), (10) masalaning $\frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} \leq \varepsilon$, $\forall \tau \in \Pi$, $\frac{d\tau}{d\beta} = \frac{\Phi}{\varepsilon\tau + \varepsilon}$, $\tau(0) = 0$, $\varepsilon = const$, $0 < \varepsilon < 1$ shartlar bilan aniqlanuvchi Ω sohada umumlashgan yechimi bo'lib, Ω_{τ_0} , $0 < \tau \leq \tau^0$ sohada $f(x) = 0$ bo'lib,

$$\left(\alpha^1 a^{ij}\right)_{x_i} - \left(\alpha^1 a^{ij}\right)_{x_i x_j} + 3c_{x_i x_j}^{ij} - 2c^1 - 2\alpha^i a \geq 0, c^{jj} - \alpha^j a - c^1 < 0$$

tengsizlik o'rinli bo'lsin. U holda $0 \leq R_0 \leq R$ tengsizlik o'rinli bo'lgan barcha R_0 , R uchun

$$\int_{\Omega_{\tau(R_0)}} E(u) dx \leq \frac{\tau(R) + 1}{\tau(R_0) + 1} \exp[-(R - R_0)] \int_{\Omega_{\tau(R)}} E(u) dx. \quad (36)$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

15-teorema. Faraz qilamiz, Ω sohada $f(x) = 0$ bo'lib, 14-teoremaning

shartlari o‘rinli bo‘lsin. Agar $u(x)$ funksiya Ω sohada (9), (10) masalaning umumlashgan yechimi bo‘lib, qandaydir $\{R_l\}$ ($l \rightarrow \infty \Rightarrow R_l \rightarrow \infty$) ketma-ketlik uchun

$$\int_{\Omega_{\tau(R_l)}} E(u)dx \leq \varepsilon_2(R_l)(\tau(R_l) + 1)^{-1} \exp\{R_l\}, \quad (37)$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda Ω sohada $u(x) = 0$ bo‘ladi. Bu yerda $\varepsilon_1(R_l) \rightarrow 0, R_l \rightarrow \infty$.

Uchinchi bobning ikkinchi paragrafda (9), (10) masalaning cheksizlikda o‘suvcchi funksiyalar sinfida umumlashgan yechimini qurish usuli ishlab chiqilgan.

16-teorema. Faraz qilamiz, 12- va 13-teoremlarning shartlari bajarilib, har bir $\Omega_{\tau(k)}$ soha uchun $\Lambda(\Omega_{\tau(k)}) > 0$ bo‘lsin. Agar Ω sohada aniqlangan $f(x)$ funksiya uchun

$$\int_{\Omega_{\tau(k)}} f^2 dx \leq M_3 \Lambda(\Omega_{\tau(k)}) \exp\left\{(1 - \delta) \int_0^{\tau(k)} \frac{\varepsilon s}{\Phi(s)} ds\right\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (38)$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda (9), (10) masalaning

$$\int_{\Omega_{\tau(k)}} E(u)dx \leq M_4 \exp\left\{(1 - \delta) \int_0^{\tau(k)} \frac{\varepsilon s}{\Phi(s)} ds\right\} \quad (39)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lgan yagona $u(x)$ yechimi mavjud bo‘ladi. Bu yerda $\delta = const, 0 < \delta < 1, M_3, M_4$ sonlar k ga bog‘liq emas.

17-teorema. Faraz qilamiz, 14- va 15-teoremlarning shartlari bajarilib, har bir $\Omega_{\tau(k)}$ soha uchun $\Lambda(\Omega_{\tau(k)}) > 0$ bo‘lsin. Agar Ω sohada aniqlangan $f(x)$ funksiya uchun

$$\int_{\Omega_{\tau(k)}} f^2 dx \leq M_5 \Lambda(\Omega_{\tau(k)}) \exp\{(1 - \delta)k\}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (40)$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda (9), (10) masalaning

$$\int_{\Omega_{\tau(k)}} E(u)dx \leq M_6 \exp\{(1 - \delta)k\} \quad (41)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lgan yagona $u(x)$ yechimi mavjud bo‘ladi. Bu yerda $\delta = const, 0 < \delta < 1, M_5, M_6$ sonlar k ga bog‘liq emas.

To‘rtinchi bobda (9), (10) masalaning umumlashgan yechimlari va hosilalarining cheksizlikda xususiyatlarini ko‘rsatuvchi baholar o‘rnatilgan.

To‘rtinchi bob birinchi paragrafda glavny. $\Omega_\tau = \Omega \cap \{x : x_1 > \tau\}$ sohada (9),

(10) masalaning yechimi uchun maxsus energetik baholar o‘rnatilgan. $\Gamma_\tau = \partial\Omega_\tau,$

$\Omega(\tau_1, \tau_2) = \Omega \cap \{x : \tau_1 < x_1 < \tau_2\},$

$\Gamma(\tau_1, \tau_2) = \Gamma_{\tau_1} \cap \partial\Omega(\tau_1, \tau_2),$

$S_\tau = \Omega(\tau_1, \tau_2) \cap \{x : x_1 = \tau\}$ bo‘lsin.

Faraz qilamiz, $E(\Omega(\tau_1; \tau_2))$ to'plam, $v|_{\Gamma(\tau_1, \tau_2)} = 0$ va $h > 0$ sonlar uchun $l_0 v|_{\sigma_0(\tau_1, \tau_2) \cup \sigma_2(\tau_1, \tau_2) \cup \sigma_1^h(\tau_1, \tau_2)} = 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi yest mnojestvo $v \in C^2(\overline{\Omega}(\tau_1, \tau_2))$ funksiyalar to'plamidan iborat bo'lsin. $H(\Omega(\tau_1; \tau_2))$ $E(\Omega(\tau_1; \tau_2))$ to'planning

$$\|u\|_{H(\Omega(\tau_1; \tau_2))} = \left\{ \int_{\Omega(\tau_1, \tau_2)} (d^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + u^2) dx + \int_{\sigma_1(\tau_1, \tau_2)} \alpha^k v_k a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} ds \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

norma bo'yicha to'ldirmasidan iborat Gilbert fazosi bo'lsin.

$$\theta(u, v) = \int_{\Omega(\tau_1, \tau_2)} \left[\alpha^k a^{ij} u_{x_i} v_{x_j x_k} + (\alpha^k a^{ij})_{x_i} u_{x_i} v_{x_k} - \alpha^k a^i u_{x_i} v_{x_k} - c^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + (c^{ij} - \alpha^i a - c^i) uv_{x_i} + (c - c^i_{x_i} + c^{ij}_{x_i x_j}) uv \right] dx.$$

6-ta'rif. (9) tenglamaning umumlashgan yechimi deb $u|_{\Gamma(\tau_1, \tau)} = 0$, $l_0 u|_{\sigma_1(\tau_1, \tau)} = 0$, $\forall \tau > \tau_1$ shartlarni va

$$\theta(u, v) = \int_{\Omega(\tau_1, \tau)} f v dx$$

ayniyatni qanoatlantiruvchi $u(x) \in H(\Omega(\tau_1, \tau))$ funksiyaga aytiladi.

Bu yerda $v \in E(\Omega(\tau_1, \tau))$, $v|_{\partial\Omega(\tau_1, \tau) \cap \Omega} = 0$.

(9), (10) masalalarning umumlashgan yechimlarining cheksizlikdagi xossalarni o'rganishga yordam beruvchi lokal va maxsus energetik baholar o'rnatilgan.

18-teorema. Faraz qilamiz, $d_1^{ij} \xi_i \xi_j \geq d_{11} |\xi|^2$, $d_{11} > 0$, $q_1^{ij} > 0$, Ω_{τ_1} sohada $f(x) = 0$ bo'lsin. Agar $u(x)$ (9), (10) masalaning Ω_{τ_1} sohadagi umumlashgan yechimi bo'lsa, u ixtiyoriy $\tau_2 > \tau_1$ uchun

$$\int_{\Omega_{\tau_2}} E(u) dx \leq \Phi^{-1}(\tau_2, \tau_1) \int_{\Omega_{\tau_1}} E(u) dx, \quad (42)$$

$$\int_{\Omega_{\tau_2}} \Lambda(x_1) u^2 dx \leq \Phi^{-1}(\tau_2, \tau_1) \int_{\Omega_{\tau_1}} E(u) dx \quad (43)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bu yerda

$$E(u) = d^{ij} u_{x_i} u_{x_j} - q^{ij} u^2,$$

$$q_1^{ij} = \frac{1}{2} c^1 + \alpha^1 a + (\alpha^1 a^{ij})_{x_i x_j} - c_{x_1}^{11} - (\alpha^1 a^1)_{x_i}, \quad d_1^{ij} = \frac{1}{2} \alpha^1 a^{ij} - 2\alpha^j a^{i1}.$$

$\Phi(x_1, \tau_1)$ funksiya

$$\Phi_{x_1 x_1} = \mu(x_1)\Phi, \quad \Phi(\tau_1, \tau_1) = 1, \quad \Phi_{x_1}(\tau_1, \tau_1) = 0,$$

masalaning yechimi, $\Lambda(\tau)$, $\mu(\tau)$

$$0 < \mu(\tau) \leq \inf_N \left\{ \int_{S_\tau} E(v) dx' \left| \int_{S_\tau} P(v) dx' \right|^{-1} \right\} \quad (44)$$

$$0 < \Lambda(\tau) \leq \inf_N \left\{ \int_{S_\tau} E(v) dx' \left| \int_{S_\tau} v^2 dx' \right|^{-1} \right\} \quad (45)$$

$$x' = (x_2, x_3, \dots, x_n), \quad P(v) = \alpha^1 a^{i1} v_{x_i} v + \frac{1}{2} \left(c^{11} + (\alpha^1 a^1)_{x_1} - (\alpha^1 a^{1j})_{x_j} \right) v^2$$

munosabatlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy uzluksiz funksiya. $N - \bar{S}_\tau$ to'plam atrofida uzluksiz hosilaga ega bo'lgan funksiyalar to'plami bo'lib, bu funksiyalar.

To'rtinchi bob ikkinchi paragrafda (9) tenglamaning yechimi uchun W_2^l normada lokal baho o'rnatilgan. Shu maqsadda chegaralangan $\Omega \subset R_+^n = \{x : x_1 > 0\}$ sohada (9) tenglamani quyidagi shartlar bilan

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \quad l_0 u|_{\Gamma_2} = 0, \quad \Gamma_1, \Gamma_2 = \sigma_1 \subset \partial\Omega = \Gamma, \quad (46)$$

o'rganamiz.

7-ta'rif. Agar ixtiyoriy $v(x) \in E(\Omega, \Gamma)$ funksiya uchun

$$a(u, v) = \int_{\Omega_\tau} f v dx \quad (47)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $u(x) \in H(\Omega, \Gamma_1)$ funksiya (9) tenglamaning (46) shart o'rinli bo'lgan umumlashgan yechimi deb ataladi.

Bu yerda $E(\Omega, \Gamma) - \Gamma$ to'plamda $v = 0$ va $h > 0$ uchun $\sigma_0 \cup \sigma_2 \cup \sigma_1^h$ to'plamda $l_0 v = 0$ bo'lgan $v \in C^2(\bar{\Omega})$ funksiyalar to'plamidan iborat.

Agar $u(x) \in H(\Omega, \partial\Omega)$ bo'lsa, u holda (9), (46) masalaning yechimi mavjud va yagona ekanligi A.I.Kojanov tomonidan isbotlangan, bunda $\Gamma_2 = \sigma_1$.

19-teorema. Faraz qilamiz, (9) tenglamaning koeffitsientlari va ularning $l \geq 2$ tartibgacha bo'lgan hosilalari $\bar{\Omega}''$ sohada uzluksiz bo'lsin. U holda shunday k o'zgarmas son mavjudki, (9) tenglamaning ixtiyoriy $u(x) \in W_2^{l+1}(\Omega'')$ yechimi uchun

$$\|u\|_{W_2^{l+1}(\Omega')} \leq k \|u\|_{L_2(\Omega'')} \quad (46)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerda k faqat $a_0, a_1, d_0, d_1, c_0, c_1$, kattaliklarga, (9) tenglama koeffitsientlari modullarining maksimum qiymatlariga va va ularning l -tartibli hosilalariga hamda tenglamadagi yuqori tartibli hosilalarining koeffitsientlarining modullariga bog'liq.

Bu yerda Sobolev fazosi, $\Omega \supset \Omega'' \supset \Omega'$ bo'lib, Ω' dan $\Omega \setminus \Omega''$ gacha bo'lgan masofa musbat.

To'rtinchi bob uchinchi paragrafda (9), (20) masalaning yechimlari va yechimlarining hosilalari uchun ularning cheksizlikdagi xususiyatlarini ko'rsatuvchi baholar o'rnatilgan.

Chegaralangan $K \subset R_x^n$ soha va butun $l \geq 0$ sonlar uchun silliq funksiyalar to'plamini

$$\|u\|_{p,K}^l = \sum_{0 \leq |s| \leq l} \left(\int_K |D_x^s u|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

norma bilan to'ldirmasi sifatida $W_p^l(K)$ fazoni aniqlaymiz

Quyidagicha belgilash kiritamiz

$$\begin{aligned} B^{\hat{x},\rho} &= \{x : |x - \hat{x}| < \rho\}, \quad U^{\hat{x},\rho} = B^{\hat{x},\rho} \cap \{x : x_1 > \hat{x}_1\}, \quad D^{\hat{x},\rho} = B^{\hat{x},\rho} \cap \{x : x_1 = \hat{x}_1\}, \\ K^{x,\beta_1,\beta_2,\beta_3} &= \{x : |x'| < \beta_3, x_1 \in (\beta_1 - \beta_2, \beta_1 + \beta_2), \beta_1 > \beta_2\}, \\ \Delta^{x,\beta_1,\beta_2,\beta_3} &= \{x : |x'| < \beta_3, x_1 \in (\beta_1 - \beta_2, \beta_1 + \beta_2), \beta_1 > \beta_2\}. \end{aligned}$$

Faraz qilamiz, Ω_{τ_1} sohada (9) tenglamaning koeffitsientlari uzluksiz va ular $l+2$ ($l \geq 0$) tartibli uzluksiz hosilaga ega bo'lsin.

20-teorema. Faraz qilamiz, $l \geq 0$, l —butun son, (9) tenglamaning koeffitsientlari ularning $l+2$ tartibgacha hosilalari Ω_{τ_1} sohada uzluksiz bo'lib, 4, 16, 19-teorema shartlari bajarilsin. Har bir $\tau > \tau_1 + 1$ da quyidagi shartlardan biri bajarilsin:

1) Shunday $p = p(\tau) \in (0,1]$ va $\sigma = \sigma(\tau) \in (0,1]$ lar mavjud bo'lsinki, $\Omega(\tau - \sigma, \tau + \sigma)$ to'plamni $F \in (\chi, l+2)$ almashtirish yordamida $K^{y,\delta,\frac{R}{2},p}$ silindrga akslantirish mumkin bo'lib, bunda sohaning $\partial\Omega_0$ chegarasi $K^{y,\delta,\frac{R}{2},p}$ silindrning yon sirtiga o'tadi hamda $F(S_\tau) \subset K^{y,\delta,\frac{R}{2},p}$, $R = R(\tau) \geq p(\tau)$ bo'lib χ τ ga bog'liq emas.

2) S_τ to'plamdagi har bir $x = (\tau, x')$ nuqta yoki Ω_0 sohaga tegishli $2d(\tau) \leq 1$ radiusli sharning markazi, yoki $x = (\tau, x')$ nuqta $x^0 \in \bar{S}_\tau \cap \partial\Omega_0$ nuqtaning qandaydir Q_1 atrofiga tegishli bo'ladi. $x^0 \in \bar{S}_\tau \cap \partial\Omega_0$ nuqtaning $O_2 \supset O_1$ mavjudki u $F \in (\chi, l+2)$ almashtirish natijasida $2h(\tau) \leq 1$ radiusli shar o'tadi. Bunda $O_2 \cap \Omega_0$ yarim sharga o'tib, Ω_0 —yarim sharning tekis qismi bo'lib, u $O_2 \cap \Omega_0$ ning aksi hisoblanadi. $O_1 \cap \Omega_0$ ning aksi esa yarim sharning konsentrik qismida

jaoylashadi.

U holda (9), (10) masalaning Ω_{τ_1} sohada $u|_{\Gamma_{\tau_1}} = 0, l_0 u|_{\sigma_{1,\tau_1}} = 0$ chegaraviy shartlarni va $f = 0$ shartni qanoatlantiruvchi $u(x) \in H(\Omega_{\tau_1})$ umumlashgan yechimi uchun

$$\left| D_x^s u(\tau, x') \right| \leq C \sup_{|x_1 - \tau| \leq \eta} \Lambda^{-1}(x_1) [\varphi]^{-(n+2)-2|s|} \Phi^{-1}(\tau - \eta, \tau_1) \int_{\Omega_\eta} E(u) dx, \quad (47)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bu yerda agar τ uchun 1) shart bajarilsa, u holda $|s| \leq 1; \eta = \sigma(\tau), \varphi(\tau) = \rho(\tau)$; agar τ uchun 2) shartning birinchi farazi bajarilsa, u holda $\eta = 2d(\tau), \varphi(\tau) = d(\tau)$; agar τ uchun 2) shartning ikkinchi farazi bajarilsa, u holda $\eta = \sup_{x \in O_2} |x_1 - \tau|, \varphi(\tau) = h(\tau)$. $E(u), \Phi(\tau, \tau_1), \Lambda(x_1)$ funksiyalar 18-teoremada aniqlangan va $C = C(n, l, a_0, a_1, d_0, d_1, c_0, c_1, c_2, M_i, \chi)$.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ
УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ
В.И.РОМАНОВСКОГО**

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ,
ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

ХАШИМОВ АБДУКОМИЛ РИСБЕКОВИЧ

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО И
НЕСТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА
СОСТАВНОГО ТИПА**

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и уравнения математической физики

**АВТОРЕФЕРАТ ДОКТОРСКОЙ (DSc) ДИССЕРТАЦИИ
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

ТАШКЕНТ - 2025

Тема докторской (Doctor of Science) диссертации зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за № В2021.2.DSc/FM178.

Диссертация выполнена в Институте Математики и Ташкентский государственный экономический университет.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу <http://kengash.mathinst.uz> и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу www.ziyo.net.

Научный консультант:	Джураев Тохтамурад Джураевич, доктор физико-математических наук, профессор, академик
Официальные оппоненты:	Ашуров Равшан Раджабович, доктор физико-математических наук, профессор Кожанов Александр Иванович, доктор физико-математических наук, профессор Фаязов Кудратилло Садриддинович, доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	Ферганский государственный университет

Защита диссертации состоится « 04 » марта 2025 г. в 16:00 часов на заседании научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И.Романовского (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871)-207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz.)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (регистрационный номер № 200). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9. Тел.: (+99871)-207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 10 » февраля 2025 г.
(протокол рассылки № 2 от « 10 » февраля 2025 г.).

У.А.Розиков

Председатель Научного совета по
присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.,
академик

Ж.К.Адашев

Ученый секретарь Научного совета по
присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.,
старший научный сотрудник

А.Азамов

Председатель Научного семинара при
Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.м.н., академик

Введение (аннотации докторской диссертации)

Актуальность и востребованность темы диссертации. В последнее годы стремление к математическому обоснованию природных явлений связано с изучением их математических моделей. Например, составление математических моделей распространения волны с большими амплитудами, распространения цунами в океанах, распространения нелинейных волн в мелких водах, распространения гидро-магнетических волн в холодной плазме и акустических волн в ангармонических кристаллах связано с линейными и нелинейными уравнениями нечетного порядка. Поэтому исследование уравнения нечетного порядка с различными краевыми задачами является одним из актуальных задач. Надо отметить, что в исследовании задачи теории упругости особое место занимает так называемый принцип Сен-Венана. Изучением этого вопроса, как для плоской теории упругости, так и для системы теории упругости был посвящен цикл работ О.А.Олейник и её учеников, которым удалось получить точные оценки, учитывающие геометрические характеристики области. Кроме того, ими были получены теоремы единственности решений, в классах функций растущих на бесконечности в зависимости от геометрических характеристик. На основе полученных априорных оценок типа принципа Сен-Венана было исследовано поведение решения уравнений теории упругости в окрестности нерегулярных точек границы и на бесконечности. В этих работах разработаны методы исследования поведения решений эллиптических и параболических уравнений и систем на бесконечности и в окрестности нерегулярной точки границы области. Однако предлагаемые эти методы применимы только для уравнений четного порядка, определенного типа.

В настоящее время исследование волн, описываемым уравнением нечетного порядка, в окрестности нерегулярных точек и на бесконечно удаленных точках границы приобретает особый интерес. Решение этих проблем сводится к построению решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных нечетного порядка, в классах функций растущих на бесконечности. Поэтому установление аналога типа принципа Сен-Венана для решений уравнения нечетного порядка и применение их к построению решения краевых задач является одним из целенаправленных научных исследований в области математики.

В настоящее время в нашей республике уделяется пристальное внимание актуальным аспектам фундаментальных наук, имеющих прикладное значение. Поэтому проведение научных исследований по приоритетным направлениям математических наук, а именно по дифференциальным уравнениям и математической физике, включая теорию динамических систем, алгебре и функциональному анализу, теории вероятностей и математической статистике, прикладной математике и математическому моделированию являются основными задачами и

направлениями деятельности Института математики имени В.И.Романовского Академии Наук Республики Узбекистан².

Тема и объект исследования настоящей диссертации соответствуют задачам, обозначенным в Указе Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в Постановлениях Президента Республики Узбекистан № ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», № ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», а также в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии приоритетным направлениям развития науки и технологий в Республики Узбекистан: «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации.

Исследование по уравнением нечетного порядка и их применением проводится во многих научных центрах и высших учебных заведениях мира, в частности: Туринском политехническом университете, Университете Осака, Токийском университете, университете Ольденбурга, Башкирском государственном университете, Белгородском государственном университете, Воронежском государственном университете, Кабардино-Балкарском государственном университете, Казанском (Приволжском) федеральном университете, Московском государственном университете, Математическом институте Российской академии наук, Новосибирском государственном университете, Сибирском федеральном университете, Самарском государственном техническом университете, Институте вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, Институте прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии наук, Институте математики и математического моделирования Национальной академии наук Казахстана.

В последние годы в результате научно-исследовательских работ по краевым задачам для уравнений нечетного порядка решен целый ряд актуальных задач. В том числе, для уравнений третьего порядка составного типа разработаны методы построения обобщенных решений (Новосибирский Государственный университет, Россия), разработаны методы построения регулярных и обобщенных решений уравнения Кортевега - де Фриза и

² Постановление Президента Республики Узбекистан от 9 июля 2019 года №ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И.Романовского Академии наук Республики Узбекистан»

уравнения Захарова-Кузнецова (обобщение уравнение Кортевеге-Де-Фриза), разработаны методы построения регулярных решений псевдо-эллиптического типа (Университет Турино, Италия).

В настоящее время в мире также осуществляется ряд научных исследований по таким приоритетным направлениям, как решение краевых задач для стационарного и нестационарного уравнения составного типа. В том числе построение фундаментальных решений нестационарного уравнения третьего порядка составного типа и изучение потенциалов этих фундаментальных решений; построение решения краевых задач для уравнений третьего порядка составного типа, в классах функций растущих на бесконечности; установление оценки по модулю для решений краевых задач и для их производных.

Степень изученности проблемы. 1855 году Saint-Venant в связи исследованиями задач теории упругости сформулировал принцип, который имеет исключительно большое значение в теории упругости. Далее этот принцип приобрел название принцип Сен-Венана. В этом принципе была изучена проблема деформации цилиндра под действием поверхностных нагрузок, приложенных на его плоских краях. В дальнейшем установлением энергетических оценок типа принципа Сен-Венана для уравнений эластической теории и систем занимались А.Е.Н. Love, R. Von-Mises, E. Stenberg, G. Horvay. В 1965 года R. A. Toupin впервые дал точную математическую формулировку и доказательство принципа Сен-Венана. Он рассматривал проблему анизотропного цилиндра, нагруженного самоуравновешивающимися силами на одном из его концов и свободного от нагрузок в остальной части его поверхности. Более точные и общие результаты относительно принципа Сен-Венана были получены в работе J. K. Knowles. Он рассмотрел основную задачу теории упругости в случае плоской ограниченной области. Им была установлена следующая оценка,

$$E(z) \leq 2E(0) \exp\left(-\frac{kz}{b}\right), \quad \text{где} \quad k = \pi \left[2^{-1}(\sqrt{2}-1)\right]^{\frac{1}{2}}, \quad E(z) - \text{энергия,}$$

сосредоточенная в области $\Omega(z) = \Omega \cap \{x : x_1 > z\}; b = \max_{x_1 \geq 0} x_2$ при $(x_1, x_2) \in \Omega$

получен следующий результат. Здесь на части границы $\gamma_1 = \partial\Omega \cap \{x = (x_1, x_2) : x_1 > 0\}$ действует произвольная система самоуравновешивающихся сил. Дальнейшему в работе J. N. Flavin установил оценки не учитывающий изменения формы тела при удалении от той части, где приложены внешние силы, а также не рассматривают случай, когда система сил приложена на двух концах.

Для плоской теории упругости, так и для системы теории упругости был посвящен цикл работ О.А. Олейник и её учеников, которым удалось получить точные оценки, учитывающие геометрические характеристики области. На основе полученных априорных оценок было исследовано поведение решения уравнений теории упругости в окрестности нерегулярных точек границы и на бесконечности. Кроме того, построено решение исследуемых задач в классах

функций, растущих на бесконечности, в зависимости от геометрических характеристик области. Как приложение принципа Сен-Венана доказано теорема единственности решений краевых задач для эллиптических уравнений высокого порядка в неограниченных областях. Свойства решений эллиптических уравнений в окрестности особых точек границы и на бесконечности изучались в работах В.А.Кондратьева, В.Г.Мазыи и Б.А.Пламенского и других.

В настоящее время задачи исследования уравнения третьего порядка проводилась лишь в ограниченных областях. Изучение свойств решений краевых задач для уравнений третьего составного типа в окрестности нерегулярных точек границы и бесконечно удаленных точках границы до сих пор остается не решенным, которое связано с исследованием уравнение в неограниченных областях. Известно, что в исследовании свойств решений краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных особое место занимает локальные априорные оценки решений краевых задач. Установление локальные априорные оценки для решений уравнения третьего порядка составного типа тоже относится к не решенным задачам.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего образовательного учреждения. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с планом научно-исследовательских работ ОТ-Ф-4-55 «Решения краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных нечетного порядка составного типа в многомерных областях», ОТ-Ф4-16 «Разработка теории краевых задач для дифференциальных уравнений на графах и задачи оптимального управления».

Целью исследования является выявление класс корректности решений краевых задач для стационарного и нестационарного уравнения третьего порядка составного типа в зависимости от геометрических характеристик области.

Задачи исследования, решаемые в данной работе:

изучение свойства фундаментальных решений нестационарного уравнения третьего порядка составного типа и с их помощью построить классические решение краевых задач;

выявление класс единственности решений краевых задач стационарного уравнение третьего порядка составного типа с помощью энергетических оценок типа принципа Сен-Венана;

установление специальные оценки, позволяющие изучить асимптотические свойства решений краевых задач уравнение третьего порядка составного типа на бесконечно удаленной точке границе;

построение обобщенных решений краевых задач для уравнения третьего порядка составного типа, в классах функций, растущих на бесконечности в зависимости от геометрических характеристик области.

Установление локальные оценки для решений уравнение третьего порядка составного типа.

Изучение изучить асимптотические свойства решений краевых задач третьего порядка составного типа и ее производных уравнение на бесконечно

удаленной точке границе.

Объект исследования. Стационарные и нестационарные дифференциальные уравнения в частных производных нечетного порядка.

Предмет исследования. Методика установление энергетических оценок, теория уравнений математической физики, теория математического и функционального анализа.

Методы исследования. В исследования задачи используются метод регуляризации, метод Галеркина, метод интегральных неравенств, метод потенциалов, методы функционального анализа, теория линейных дифференциальных операторов.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

построены решение задачи Коши и задачи нелокальным условиям для дифференциального уравнение третьего порядка в частных производных;

выявлены наиболее широкий класс единственности решений краевых задач для стационарного и нестационарного уравнения третьего порядка составного типа в зависимости от геометрических характеристик области;

построены обобщенные решение уравнения третьего порядка составного типа в классах функций, растущих на бесконечности, и для них установлены энергетические и локальные оценки;

установлены оценки для решений краевых задач уравнение третьего порядка составного типа и ее производных на бесконечности.

Практические результаты исследования состоит в изложение методы построение краевых задач для уравнений третьего порядка составного типа в классах функций, растущих на бесконечности в зависимости от геометрических свойств области и изучение асимптотических свойств решений на бесконечности.

Достоверность результатов исследования подтверждается строгим использованием методов математического анализа, математической физики, дифференциальных уравнений, функционального анализа и специальных функций для изучения потенциалов и построение решений в классах функций, растущих на бесконечности.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть использованы в теории дифференциальных уравнений в частных производных нечетного порядка.

Практическое значение результатов, полученных в диссертационной работе, определяется их приложениями к прикладным задача, описываемых уравнениям третьего порядка составного типа.

Внедрение результатов исследования. Результаты, связанные с нестационарным и стационарным уравнением третьего порядка составного типа, были внедрены в практику следующих исследовательских работ:

полученные результаты по нестационарным уравнением третьего порядка составного типа, т.е. свойства потенциалов фундаментальных решений и применение к ним преобразование Абеля, а также разработанные методы по построение функции Грина и разложение решение по потенциалов

использованы при исследовании нелокальных задач математической физики а рамках научно-исследовательской деятельности интегративной лаборатории «Природные катастрофы Камчатки-землетрясения и извержение вулканов» (Тема НИР ФГБОУ ВО «КамГУ им. Витуса Беринга» «Природные катастрофы Камчатки-землетрясения и извержение вулканов» № АААА-А19-119072290002-9, рук. Паровик Р.И. (справка от Государственного университета имени Витуса Беринга 24 мая 2021 №267-02, Российская Федерация). Применение результаты дала возможность построить однозначное решение нелокальных задач для неклассических уравнений математической физики.

Полученные результаты, т.е. разработанные методы по установление энергетических оценок и априорных оценок для решений краевых задач третьего порядка составного типа были использованы для обоснование экспериментальных результатов при исследовании релаксационных процессов в анизотропных жидкостях при выполнении научно-исследовательских работ по теме Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН за 2016-2018гг. «Методы создания, исследования и идентификации математических моделей о Земли», № госрегистрации 1.3.1.3 и гранта РФФИ № 16-01-00729 «Математическое моделирование фильтрации минерализованных растворов и вязкоупругих средах». (справка от Института вычислительной математики и математической геофизики СО РАН 16 декабря 2021 №15301/2-01-27, Российская Федерация). Применение результатов дала возможность априорно оценить релаксационных процессов в анизотропных жидкостях.

Полученные результаты, т.е. методы получение принципа Сен-Венана для решений краевых задач уравнения третьего порядка составного типа были использованы при обоснование экспериментальных результатов при исследовании релаксационных процессов в анизотропных жидкостях при выполнении научно-исследовательских работ по гранту РУз № ОТ-Ф4-04(05) на тему «Приложения спектрального метода к решению матричных нелинейных эволюционных уравнений; Биомеханика сердечно-сосудистой системы». (справка от Ургенчского государственного университета 11 декабря 2021 №04-279/2). Применение результатов дала возможность полностью обонать течение релаксационных процессов в жидкостях.

Апробация результатов исследования. Апробация результатов исследования произведена на 4 республиканских и 7 международных научных и научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации изданы всего 28 научных работ, из них в научных изданиях, рекомендованных для издания основных научных результатов докторских диссертаций Высшей Аттестационной Комиссии Республики Узбекистан, изданы 17 статьи, в том числе 8 из которых были изданы в республиканских и 9 в зарубежных журналах.

Структура и объем диссертации. Содержание диссертации состоит из введения, 4 глав, заключения, списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 151 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав и списка использованных литератур.

Во введение дан краткий обзор прежних результатов в данном направлении и приведены краткое содержание диссертации.

Первая глава диссертации посвящается исследованию корректности краевых задач для стационарных и нестационарных уравнений третьего порядка составного типа в ограниченных областях.

В первом параграфе первой главы изучено свойства фундаментальных решений уравнения

$$Lu \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial^3 u}{\partial x_i^3} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (1)$$

и ее потенциалов двойного слоя в области $D = \mathbb{R}^n \times (0, T)$

$$\begin{aligned} I_{02}(x_1, \dots, x_n, t) &= \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} U_0(x_1 - \lambda_1, x_2 - \xi_2, \dots, x_n - \xi_n; t - \tau) \alpha(\xi_2, \dots, \xi_n, \tau) d\xi_2 \dots d\xi_n d\tau, \\ I_{i2}(x_1, \dots, x_n, t) &= \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \frac{\partial^2}{\partial \xi_1^2} U_i(x_1 - \lambda_1, x_2 - \xi_2, \dots, x_n - \xi_n; t - \tau) \alpha_i(\xi_2, \dots, \xi_n, \tau) d\xi_2 \dots d\xi_n d\tau, \quad i = \overline{1, n}, \\ J_2(x_1, \dots, x_n, t) &= \\ &= \int_0^t \int_{\mathbb{R}^{n-1}} V_{\xi_1 \xi_1}(x_1 - \lambda_1, x_2 - \xi_2, \dots, x_n - \xi_n; t - \tau) \alpha(\xi_2, \dots, \xi_n, \tau) d\xi_2 \dots d\xi_n d\tau, \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} U_0(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n; t - \tau) &= \frac{1}{(t - \tau)^{n/3}} f\left(\frac{x_1 - \xi_1}{(t - \tau)^{1/3}}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{x_n - \xi_n}{(t - \tau)^{1/3}}\right), \quad x_i \neq \xi_i, \quad t > \tau, \\ U_i(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n; t - \tau) &= \frac{1}{(t - \tau)^{n/3}} f\left(\frac{x_1 - \xi_1}{(t - \tau)^{1/3}}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{x_{i-1} - \xi_{i-1}}{(t - \tau)^{1/3}}\right) \varphi\left(\frac{x_i - \xi_i}{(t - \tau)^{1/3}}\right) \\ &\quad f\left(\frac{x_{i+1} - \xi_{i+1}}{(t - \tau)^{1/3}}\right) \cdot \dots \cdot f\left(\frac{x_n - \xi_n}{(t - \tau)^{1/3}}\right), \quad x_i > \xi_i, \quad x_j \neq \xi_j, \quad i \neq j, \quad t > \tau, \quad i = \overline{1, n}, \quad j + i = n \\ V(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n; t - \tau) &= \frac{1}{(t - \tau)^{n/3}} \varphi\left(\frac{x_1 - \xi_1}{(t - \tau)^{1/3}}\right) \cdot \dots \cdot \varphi\left(\frac{x_n - \xi_n}{(t - \tau)^{1/3}}\right), \quad x_i > \xi_i, \quad t > \tau, \end{aligned}$$

где функции

$$f(z) = \int_0^{\infty} \cos(\lambda^3 - \lambda z) d\lambda,$$

$$\varphi(z) = \int_0^{\infty} [\exp(-\lambda^3 - \lambda z) + \sin(\lambda^3 - \lambda z)] d\lambda, \quad z = \frac{x - \xi}{(t - \tau)^{1/3}}$$

называется функциями Эйри и удовлетворяют уравнению

$$p''(z) + \frac{z}{3} p(z) = 0.$$

Для функций $f(z)$, $\varphi(z)$ справедливы следующие соотношения

$$p^{(n)}(z) \approx O\left(c_n^+ z^{\frac{n-1}{4}} \sin\left(\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}}\right)\right) \text{ при } z \rightarrow \infty,$$

$$p^{(n)}(z) \approx O\left(c_n^- |z|^{\frac{n-1}{4}} \exp\left(-\frac{2}{3} |z|^{\frac{3}{2}}\right)\right) \text{ при } z \rightarrow -\infty,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(z) dz = \pi, \quad \int_{-\infty}^0 f(z) dz = \frac{\pi}{3}, \quad \int_0^{\infty} f(z) dz = \frac{2\pi}{3}, \quad \int_0^{\infty} \varphi(z) dz = 0,$$

где $c_n^+, c_n^- - \text{const}$.

Лемма 1. Пусть $\alpha(x_2, \dots, x_n, t) \in C(\overline{K} \times (0, T))$. Тогда

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \rightarrow (\lambda_2 - 0, x_2, \dots, x_n, t)} I_{02}(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{\pi^n}{3} \alpha(x_2, \dots, x_n, t)$$

где $K = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 = \lambda_2, \lambda_1 \leq x_j \leq \lambda_2, j = \overline{2, n}\}$.

Лемма 2. Пусть $\alpha(x_2, \dots, x_n, t) \in C^1(\overline{K}' \times (0, T))$. Тогда

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \rightarrow (\lambda_1 + 0, x_2, \dots, x_n, t)} I_{02}(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{2\pi^n}{3} \alpha(x_2, \dots, x_n, t),$$

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \rightarrow (\lambda_1 + 0, x_2, \dots, x_n, t)} I_{i2}(x_1, \dots, x_n, t) = 0,$$

$$\lim_{(x_1, x_2, \dots, x_n, t) \rightarrow (\lambda_1 + 0, x_2, \dots, x_n, t)} J_2(x_1, \dots, x_n, t) = 0.$$

где $K' = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1 = \lambda_1, \lambda_1 \leq x_j \leq \lambda_2, j = \overline{2, n}\}$.

Во втором параграфе первой главы построено решение уравнения (1) с условиями Коши

$$u(x_1, x_2, \dots, x_n, 0) = u_0(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Доказано следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функция $u_0(x_1, \dots, x_n)$ на любой ограниченной области $D = \{(x_1, \dots, x_n) : a \leq x_i \leq b, i = \overline{1, n}\}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ непрерывна и имеют ограниченную вариацию, а функция $\psi(y)$ такая, что вариация $|y|^{\frac{3}{4} + \delta_1} \psi(y)$

функции ограничено при $y < a_0$ для любого $a_0 = const$. Кроме того, пусть $u_0(x_1, \dots, x_n) \approx O\left(\prod_{j=1}^k \psi(x_j) \exp\left\{const \sum_{i=k+1}^n |x_i|^{\frac{3}{2}-\delta_2}\right\}\right)$, при $x_i \rightarrow \infty, x_j < a, k = \overline{1, n-1}$;
 $u_0(x_1, \dots, x_n) \approx O\left(\exp\left\{const \sum_{i=1}^n |x_i|^{\frac{3}{2}-\delta_2}\right\}\right)$, при $x_i \rightarrow \infty$; $u_0(x_1, \dots, x_n) \approx O\left(\prod_{j=1}^n \psi(x_j)\right)$,
 при $x_j < a$, где δ_1, δ_2 – положительные малые числа. Тогда функция

$$u(x_1, \dots, x_n, t) = \frac{1}{\pi^n} \int_{\mathbb{R}^n} U(x_1 - \xi_1, \dots, x_n - \xi_n; t) u_0(\xi_1, \dots, \xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n \quad (2)$$

при $t > 0$ удовлетворяет уравнению (1) и условию

$$\lim_{(x_1, \dots, x_n, t) \rightarrow (x_1^0, \dots, x_n^0, +0)} u(x_1, \dots, x_n, t) = u_0(x_1^0, \dots, x_n^0).$$

В третьем параграфе первой главы изучено уравнения (1), при $n = 2$, т.е. уравнения

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad (3)$$

в области $\Omega = \{(x, y, z) : 0 < x < 1, 0 < y < 1, 0 < t \leq T\}$ с краевым условием

$$u(x, y, 0) = \alpha u(x, y, T), \quad \alpha = const, \quad (x, y) \in \Omega_0 \quad (4)$$

$$\alpha_1(y, t)u(0, y, t) + \alpha_2(y, t)u_{xx}(0, y, t) = \varphi_1(y, t), \quad (5)$$

$$u_x(0, y, t) = \varphi_2(y, t), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T,$$

$$\alpha_3(y, t)u(1, y, t) + \alpha_4(y, t)u_x(1, y, t) + \alpha_5(y, t)u_{xx}(1, y, t) = \varphi_3(y, t), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T \quad (6)$$

$$\beta_1(x, t)u(x, 0, t) + \beta_2(x, t)u_{yy}(x, 0, t) = \psi_1(x, t), \quad (7)$$

$$u_y(x, 0, t) = \psi_2(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T$$

$$\beta_3(x, t)u(x, 1, t) + \beta_4(x, t)u_x(x, 1, t) + \beta_5(x, t)u_{xx}(x, 1, t) = \psi_3(x, t), \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T. \quad (8)$$

Для задачи (3)-(8) доказаны следующие теоремы:

Теорема 2. Пусть $e^{mT} - \alpha^2 \geq 0, m < 0$ и выполнено следующие условия

$$a) \alpha_2(y, t) \neq 0, \alpha_5(y, t) \neq 0, 2\alpha_3(y, t)\alpha_5(y, t) - \alpha_4^2(y, t) \geq 0,$$

$$\frac{\alpha_3(y, t)}{\alpha_5(y, t)} + \frac{1}{2} \geq 0, \frac{\alpha_1(y, t)}{\alpha_2(y, t)} \leq 0; \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T;$$

$$b) \beta_2(x, t) \neq 0, \beta_5(x, t) \neq 0, 2\beta_3(x, t)\beta_5(x, t) - \beta_4^2(x, t) \geq 0,$$

$$\frac{\beta_3(x, t)}{\beta_5(x, t)} + \frac{1}{2} \geq 0, \frac{\beta_1(x, t)}{\beta_2(x, t)} \leq 0, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T.$$

Тогда задача (3)-(8) не имеет более одного решение.

Теорема 3. Пусть

$$\left. \begin{aligned} \alpha_1(y,t), \alpha_2(y,t), \varphi_1(y,t) &\in C_{y,t}^{0,1}(\overline{\Omega}(x=0)), \\ \beta_1(y,t), \beta_2(y,t), \psi_1(x,t) &\in C_{x,t}^{0,1}(\overline{\Omega}(y=0)), \\ \alpha_3(y,t), \alpha_4(y,t), \alpha_5(y,t), \varphi_3(y,t) &\in C_{y,t}^{0,1}(\overline{\Omega}(x=1)), \\ \beta_3(x,t), \beta_4(y,t), \beta_5(x,t), \psi_3(x,t) &\in C_{x,t}^{0,1}(\overline{\Omega}(y=1)) \\ \varphi_2(y,t) &\in C(\overline{\Omega_1}), \quad \psi_2(x,t) \in C(\overline{\Omega}(y=0)). \end{aligned} \right\}$$

и выполнено условия теоремы 2. Тогда задача (3)-(8) имеет единственное решение в классе $u(x,y,t) \in C_{x,y,t}^{3,3,1}(\Omega) \cap C_{x,y,t}^{2,2,0}(\overline{\Omega})$.

В четвертом параграфе первой главы приведены результаты А.И.Кожанова. В этом работе он дает методика построение обобщенного решение краевых задач для уравнений третьего порядка составного типа в ограниченной области D

$$Lu \equiv lAu + Bu = f(x). \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \text{Здесь } lu &= l_0u + \alpha(x)u, \quad l_0u = \alpha^k(x)u_{x_k}, \quad Au = a^{ij}(x)u_{x_i x_j} + a^i(x)u_{x_i} + a(x)u, \\ Bu &= b^{ij}(x)u_{x_i x_j} + b^i(x)u_{x_i} + b(x)u, \quad \sum_{k=1}^n [\alpha^k]^2 \neq 0. \end{aligned}$$

Здесь и в дальнейшем предполагается, что по повторяющимся индексам ведется суммирование, все коэффициенты уравнение $a^{ij}(x), a^i(x), \dots$ является бесконечно-дифференцируемы при $x \in \overline{D}$.

Второй главы диссертации посвящается установление принципа Сен-Венана для обобщенного решение стационарного и нестационарного уравнения третьего порядка составного типа и некоторым ее приложением.

В первом параграфе второй главы в неограниченной области $\Omega \subset R_+^n = \{x : x_1 > 0\}$ установлено аналог принципа Сен-Венана для обобщенных решений уравнения (9) удовлетворяющий краевым условием

$$u \Big|_{\sigma_{1,\tau} \cup \sigma_{0,\tau} \cup \sigma_{2,\tau}} = 0, \quad l_0u \Big|_{\sigma_{1,\tau}} = 0 \quad (10)$$

$$\text{где } \sigma_0 = \{x \in \Gamma : \alpha^k(x)v_k(x) = 0\}, \quad \sigma_1 = \{x \in \Gamma : \alpha^k(x)v_k(x) > 0\}, \\ \sigma_2 = \{x \in \Gamma : \alpha^k(x)v_k(x) < 0\}, \quad \Gamma = \partial\Omega. \text{ Как приложение этого принципа}$$

выявлены класс единственности решений краевой задачи (9), (10) в зависимости от геометрических характеристик области Ω .

Определение 1. Функцию $u(x)$ будем называть обобщенным решением уравнения (9) в ограниченной области $\Omega_\tau = \{x : 0 < x_1 < \tau\} \subset \Omega$, с граничными

условиями $l_0u \Big|_{\sigma_{1,\tau}} = 0$ и $u \Big|_{\sigma_{1,\tau} \cup \sigma_{0,\tau} \cup \sigma_{2,\tau}} = 0$, если $u(x) \in H(\Omega_\tau)$ и удовлетворяют

тождеству

$$a(u, v) = \int_{\Omega_\tau} f v dx$$

для произвольной функции $u(x) \in E(\Omega_\tau)$ такое, что $v=0$ на $S_\tau = \Omega \cap \{x: x_1 = \tau\}$.

$$\text{Здесь} \quad E(\Omega_\tau) = \left\{ v : v \in C^2(\overline{\Omega_\tau}), v|_{\partial\Omega_\tau} = 0, l_0 v|_{\sigma_{\tau,0} \cup \sigma_{2,\tau} \cup \sigma_{1,\tau}^h} = 0 \right\},$$

$$\sigma_{1,\tau}^h = \sigma_{1,\tau} \setminus \sigma_{1,h,\tau}, \quad \sigma_{1,h,\tau} = \left\{ x \in \sigma_{1,\tau} : \rho(x, \partial\sigma_{1,\tau}) > h \right\}, \quad h > 0;$$

$$\sigma_{0,\tau} = \{x \in \Gamma_\tau : \alpha^k(x) v_k(x) = 0\}, \quad \sigma_{1,\tau} = \{x \in \Gamma_\tau : \alpha^k(x) v_k(x) > 0\},$$

$$\sigma_{2,\tau} = \{x \in \Gamma_\tau : \alpha^k(x) v_k(x) < 0\}, \quad \Gamma_\tau = \Gamma \cap \partial\Omega_\tau;$$

$$a(u, v) = \int_{\Omega_\tau} \left[\alpha^k a^{ij} u_{x_i} v_{x_j x_k} + (\alpha^k a^{ij})_{x_j} u_{x_i} v_{x_k} - \alpha^k a^i u_{x_i} v_{x_k} - c^{ij} u_{x_i} v_{x_j} \right] dx +$$

$$+ \int_{\Omega_\tau} \left[(c_{x_j}^{ij} - \alpha^i a - c^i) u v_{x_i} + (c - c_{x_i}^i + c_{x_i x_j}^{ij}) u v \right] dx;$$

$H(\Omega_\tau)$ -замыкание множество $E(\Omega_\tau)$ по норме

$$\|u\|_{H(\Omega_\tau)} = \left\{ \int_{\Omega_\tau} (d^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + u^2) dx + \int_{\sigma_{1,\tau}} \alpha^k v_k a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} ds \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

В этом параграфе для краевой задачи (9), (10) доказаны следующие теоремы.

Теорема 4. (Аналог принципа Сен-Венана) Пусть $d_1^{jj} \xi_i \xi_j > d_{11} |\xi|^2$, $d_{11} = \text{const} > 0$, $q_1^{jj} \leq q_{10} < 0$, при $\forall x \in \Omega_\tau, \forall \xi \in R^n$. Если $u(x)$ является обобщенным решением уравнения (9) в Ω_τ , с граничными условиями $u|_{\sigma_{0,\tau} \cup \sigma_{1,\tau} \cup \sigma_{2,\tau}} = 0$, $l_0 u|_{\sigma_{1,\tau}} = 0$ и $f(x) = 0$ в Ω_τ , то для любого τ_1 такого, что $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$ справедлива оценка

$$\int_{\Omega_{\tau_1}} E(u) dx \leq \Phi^{-1}(\tau_1, \tau_2) \int_{\Omega_{\tau_2}} E(u) dx \quad (11)$$

$$\text{где} \quad E(u) = d^{ij} u_{x_j} u_{x_j} - q^{ij} u^2, \quad q^{ij} = c - \frac{1}{2} c_{x_i}^i + \frac{1}{2} c_{x_i x_j}^{ij} + \frac{1}{2} (\alpha^i a)_{x_i} \leq -q_0 < 0,$$

$$d^{ij} = c^{ij} - (\alpha^i a^{kj})_{x_k} + \alpha^i a^j + \frac{1}{2} (\alpha^k a^{ij})_{x_k}, \quad d_0 |\xi|^2 \leq d^{ij} \xi_i \xi_j \leq d_1 |\xi|^2, \quad \text{при} \quad \forall x \in \Omega \cup \Gamma,$$

$$\forall \xi \in R^n; \quad q_1^{jj} = (\alpha^1 a^{jj})_{x_j} - (\alpha^1 a^j)_{x_j} - c_{x_i}^{i1} - c_{x_j}^{1j} + \alpha^1 a - c^1, \quad d_1^{jj} = \alpha^j a^{i1} - \frac{1}{2} \alpha^1 a^{ij}.$$

Здесь $\Phi(x_1, \tau_2)$ является решением следующей задачи:

$$\Phi' = \mu(x_1) \Phi, \quad \tau_1 \leq x_1 \leq \tau_2, \quad \Phi(\tau_2, \tau_2) = 1, \quad \Phi'(\tau_2, \tau_2) = 0, \quad (12)$$

$\mu(\tau)$ — любая непрерывная функция такая, что

$$0 < \mu(\tau) \leq \lambda(\tau) \equiv \inf_{\nu \in N} \left\{ \int_{S_\tau} E(\nu) dx' \left| \int_{S_\tau} P(\nu) dx' \right|^{-1} \right\}, \quad x' = (x_2, x_3, \dots, x_n),$$

$$P(\nu) = \alpha^1 a^{i1} \nu \nu_{x_i} + \frac{1}{2} (c^{11} + \alpha^1 a^1 - (\alpha^1 a^{1j})_{x_j}) \nu^2$$

N – множество непрерывно дифференцируемых функций в окрестности $\overline{S_\tau}$, которые равны нулю на множестве $\overline{S_\tau} \cap \Gamma = \partial\Omega$.

Теорема 5 (единственность решение). Пусть множество $S_\tau = \Omega \cap \{x : x_1 = \tau\}$ при любом $\tau > 0$ не пусто, $f(x) = 0$ в Ω , выполняются условия теоремы 1, и $u(x)$ является обобщенным решением уравнения (9) в области Ω_τ с граничными условиями $l_0 u|_{\sigma_{1,\tau}} = 0$ и $u|_{\sigma_{1,\tau} \cup \sigma_{0,\tau} \cup \sigma_{2,\tau}} = 0$ при любом $\tau > 0$. Тогда, если для некоторой последовательности $\tau_m \rightarrow \infty$ и некоторого $d_* = const > 0$ имеем

$$\int_{\Omega_{\tau_m}} E(u) dx \leq \varepsilon(\tau_m) \Phi(d_*, \tau_m),$$

где $\varepsilon(\tau_m) \rightarrow 0$ при $\tau_m \rightarrow \infty$, то $u(x) = 0$ в Ω .

Во втором параграфе второй главы в неограниченной области $\Omega \subset R_+^n = \{x : x_1 > 0\}$ установлено аналог принципа Сен-Венана для обобщенных решений уравнения

$$l_0 Au = f(x) \quad (13)$$

удовлетворяющей краевым условием

$$u|_{\sigma_1} = 0, \quad l_0 u|_{\sigma_1 \cup \sigma_0 \cup \sigma_2} = 0, \quad (14)$$

где $l_0 u = \alpha^k u_{x_k}$, $Au = a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + a^i u_{x_i} + au$; a^{ij} , a^i , a , α^k , $(i, j, k = (1, 2, \dots, n))$ – постоянные числа, $a^{ij} = a^{ji}$, $a_0 |\xi|^2 \leq a^{ij} \xi_i \xi_j \leq a_1 |\xi|^2$, $\forall \xi \in R^n$, $\sum_{k=1}^n [\alpha^k]^2 \neq 0$. Как

приложения этого принципа выявлены класс единственности решений краевых задач в зависимости от геометрических характеристик области Ω .

Определение 2. Функцию $u(x)$ будем называть обобщенным решением уравнения (13) в области Ω_τ , с граничными условиями $u|_{\sigma_{1,\tau}} = 0$ и $l_0 u|_{\sigma_{1,\tau} \cup \sigma_{0,\tau} \cup \sigma_{2,\tau}} = 0$, если $u(x) \in H(\Omega_\tau)$ и удовлетворяют тождеству

$$p(l_0 u, \nu) \equiv \int_{\Omega_\tau} \left[-a^{ij} (l_0 u)_{x_i} \nu_{x_j} + a^i (l_0 u)_{x_i} \nu + a(l_0 u) \nu \right] dx = \int_{\Omega_\tau} f \nu dx \quad (15)$$

для произвольной функции $\nu \in W_2^1(\Omega_\tau)$.

$$\text{Здесь } H(\Omega_\tau) = \left\{ u : l_0 u \in W_2^1(\Omega_\tau), l_0 u|_{\Gamma_\tau} = 0, u|_{\sigma_{1,\tau}} = 0 \right\}, \Gamma_\tau = \Gamma \cap \partial\Omega_\tau, \Gamma = \partial\Omega$$

Для задачи (13), (14) доказаны следующие теоремы.

Теорема 6. (Аналог принципа Сен-Венана) Пусть $a \leq 0$ и $f(x) = 0$ в Ω_τ , $\tau \leq \tau_2$. Если $u(x)$ есть обобщенное решение уравнения (13) в области Ω_τ , с граничными условиями $u|_{\sigma_{1,\tau}} = 0$ и $l_0 u|_{\sigma_{1,\tau} \cup \sigma_{0,\tau} \cup \sigma_{2,\tau}} = 0$, то для любого τ_1 такого, что $0 < \tau_1 \leq \tau_2$ справедлива оценка

$$\int_{\Omega_{\tau_1}} E(l_0 u) dx \leq \Phi^{-1}(\tau_1, \tau_2) \int_{\Omega_{\tau_2}} E(l_0 u) dx, \quad (16)$$

где $E(u) = a^{ij} (l_0 u)_{x_i} (l_0 u)_{x_j} - a(l_0 u)^2$. Здесь $\Phi(x_1, \tau_2)$ является решением следующей задачи:

$$\Phi'(x_1, \tau_2) = -\mu(x_1) \Phi(x_1, \tau_2), \quad \tau_1 \leq x_1 \leq \tau_2, \quad \Phi(\tau_2, \tau_2) = 1, \quad (17)$$

$\mu(\tau)$ — любая непрерывная функция такая, что

$$0 < \mu(\tau) \leq \lambda(\tau) \equiv \inf_{v \in N} \left\{ \int_{S_\tau} E(l_0 v) dx' \left| \int_{S_\tau} P(l_0 v) dx' \right|^{-1} \right\}, \quad x' = (x_2, x_3, \dots, x_n),$$

$$P(l_0 v) = -a^{i1} l_0 v (l_0 v)_{x_i} - \frac{1}{2} a^1 (l_0 v)^2,$$

N -множество дважды непрерывно дифференцируемых функций в окрестности \bar{S}_τ , которые $l_0 v = 0$ на $\bar{S}_\tau \cap \Gamma$, причем \inf берется по всем функциям v таких, что $l_0 v \in C^1(\bar{\Omega}_\tau)$, $v = 0$ и $l_0 v = 0$ в σ_1 и $\partial\Omega$ соответственно.

Теорема 7. Пусть множество $S_\tau = \Omega \cap \{x : x_1 = \tau\}$ при любом $\tau > 0$ не пусто, $f(x) \equiv 0$ в Ω , $a^1 \geq 0$ и $a \leq 0$. Пусть $u(x)$ является обобщенным решением уравнения (13) в Ω_τ с граничными условиями $u|_{\sigma_{1,\tau}} = 0$ и $l_0 u|_{\sigma_{1,\tau} \cup \sigma_{0,\tau} \cup \sigma_{2,\tau}} = 0$ при любом $\tau > 0$. Тогда, если для некоторой последовательности $\tau_m \rightarrow \infty$ и некоторого $d_* = \text{const} > 0$ имеем

$$\int_{\Omega_{\tau_m}} E(l_0 u) dx \leq \varepsilon(\tau_m) \Phi(d_*, \tau_m), \quad (18)$$

где $\varepsilon(\tau_m) \rightarrow 0$ при $\tau_m \rightarrow \infty$, то $u(x) \equiv 0$ в Ω .

Теорема 8. Пусть $a \leq 0$, область Ω ограничена и лежит в полупространстве $\{x : x_1 > 0\}$, множество $S_{\tau^0} = \Omega \cap \{x : x_1 = \tau\}$ при любом $\tau \in (0, \tau^0)$ не пусто, $\tau^0 = \text{const} > 0$, $f(x) \equiv 0$ в $\Omega_{\tau^0} = \Omega \cap \{x_1 : x_1 < \tau^0\}$. Тогда для обобщенного решения $u(x)$ уравнения (13) в области Ω_{τ^0} с граничными условиями $u|_{\sigma_{1,\tau^0}} = 0$ и $l_0 u|_{\partial\Omega_{\tau^0} \cap \partial\Omega} = 0$ справедлива оценка

$$\int_{\Omega_{\tau^0}} (l_0 u)^2 \Lambda(x_1) \Phi(x_1, \tau^0, \varepsilon) dx \leq \int_{\Omega_{\tau^0}} E(l_0 u) \Phi(x_1, \tau^0, \varepsilon) dx \leq \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega_{\tau^0}} E(l_0 u) dx, \quad (19)$$

где $\varepsilon = const$, $0 < \varepsilon < 1$, $\sigma_{1,\tau^0} = \{x \in \partial\Omega_{\tau^0} \cap \partial\Omega : \alpha^k \nu_k > 0\}$. Здесь $\Phi(x_1, \tau_2)$ является решением следующей задачи:

$$\Phi' = -(1 - \varepsilon)\mu(x_1)\Phi, \quad 0 < x_1 < \tau^0, \quad \Phi(\tau^0, \tau^0, \varepsilon) = 1, \quad (20)$$

функция $\mu(\tau)$ — любая непрерывная функция такая, что

$$0 < \mu(\tau) \leq \lambda(\tau) \equiv \inf_{\nu \in N} \left\{ \int_{S_\tau} E(l_0 \nu) dx' \left| \int_{S_\tau} P(l_0 \nu) dx' \right|^{-1} \right\},$$

а $\Lambda(\tau)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая соотношению

$$0 < \Lambda(\tau) \leq \inf_{\nu \in N} \left\{ \int_{S_\tau} E(l_0 \nu) dx' \left| \int_{S_\tau} (l_0 \nu)^2 dx' \right|^{-1} \right\},$$

где N — множество дважды непрерывно дифференцируемых функций в окрестности \bar{S}_τ , которые $l_0 \nu = 0$ на $\bar{S}_\tau \cap \Gamma$, причем \inf берется по всем функциям ν таких, что $l_0 \nu \in C^1(\bar{\Omega})$, $\nu = 0$ и $l_0 \nu = 0$ в σ_1 и $\partial\Omega$ соответственно.

В третьем параграфе второй главы установлено аналог принципа Сен-Венана для обобщенного решения уравнения

$$Lu \equiv LAu + Bu - u_t = f(x, t) \quad (21)$$

удовлетворяющим условием

$$u|_{t=0} = 0, \quad (22)$$

$$u|_{\sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2} = 0, \quad l_0 u|_{\sigma_1} = 0 \quad (23)$$

в области $Q = \Omega \times (0, T)$, где $\Omega \subset R_+^n = \{x : x_1 > 0\}$, $0 < T < \infty$, $\sigma_0 = \tilde{\sigma}_0 \times [0, T]$, $\sigma_1 = \tilde{\sigma}_1 \times [0, T]$, $\sigma_2 = \tilde{\sigma}_2 \times [0, T]$, $\tilde{\sigma}_0 = \{(x) \in \Gamma : \alpha^k(x) \nu_k(x) = 0\}$, $\tilde{\sigma}_1 = \{(x) \in \Gamma : \alpha^k(x) \nu_k(x) > 0\}$, $\tilde{\sigma}_2 = \{(x) \in \Gamma : \alpha^k(x) \nu_k(x) < 0\}$.

Определение 3. Функцию $u(x, t)$ будем называть обобщенным решением уравнения (21) в ограниченной области Q_τ , с начальным $u|_{t=0} = 0$, и граничным условиям $u|_{\sigma_{\tau,0} \cup \sigma_{\tau,1} \cup \sigma_{\tau,2}} = 0$, $l_0 u|_{\sigma_1} = 0$, если для любого $\tau < \infty$ $u(x, t) \in H(Q_\tau)$ и удовлетворяет тождеству

$$a(u, v) = \int_{Q_\tau} f v dx dt, \quad (24)$$

для произвольной функции $v(x) \in E(Q_\tau)$ такое, $v = 0$ на множестве $S_\tau = \tilde{s}_\tau \times [0, T]$, $\tilde{s}_\tau = \Omega \cap \{x : x_1 = \tau\}$.

Здесь

$$a_1(u, v) = \int_{Q_\tau} \left[\alpha^k a^{ij} u_{x_i} v_{x_j x_k} + (\alpha^k a^{ij})_{x_j} u_{x_i} v_{x_k} - \alpha^k a^i u_{x_i} v_{x_k} - c^{ij} u_{x_i} v_{x_j} \right] dxdt + \\ + \int_{Q_\tau} \left[(c_{x_j}^{ij} - \alpha^i a - c^i) u v_{x_i} + (c - c_{x_i}^i + c_{x_i x_j}^{ij}) u v - u_t v \right] dxdt,$$

$Q_\tau = \Omega_\tau \times (0, T)$, $\Omega_\tau = \{x : 0 < x_1 < \tau\}$, $\sigma_{\tau,0} = \tilde{\sigma}_{\tau,0} \times [0, T]$, $\sigma_{\tau,1} = \tilde{\sigma}_{\tau,1} \times [0, T]$,
 $\sigma_{\tau,2} = \tilde{\sigma}_{\tau,2} \times [0, T]$, $\tilde{\sigma}_{\tau,0} = \{x \in \Gamma_\tau : \alpha^k(x) v_k(x) = 0\}$,
 $\tilde{\sigma}_{\tau,1} = \{x \in \Gamma_\tau : \alpha^k(x) v_k(x) > 0\}$, $\tilde{\sigma}_{\tau,2} = \{x \in \Gamma_\tau : \alpha^k(x) v_k(x) < 0\}$. $E(Q_\tau)$ есть множество функций $v \in C_{x,t}^{2,1}(\bar{Q}_\tau)$ таких, что $v=0$ на $\Gamma_\tau \times [0, T]$ и для некоторого числа $h > 0$ будет $l_0 v = 0$ на $\sigma_{0,\tau} \cup \sigma_{2,\tau} \cup \sigma_{1,\tau}^h$.

$H(Q_\tau)$ есть гильбертово пространство, полученное пополнением $E(Q_\tau)$ по норме

$$\|u\|_{H(Q_\tau)} = \left\{ \int_{Q_\tau} (d^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + u_t^2 + u^2) dxdt + \int_{\sigma_{1,\tau}} \alpha^k v_k a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} ds \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Для задачи (21)-(23) доказана следующая теорема.

Теорема 9. (Аналог принципа Сен-Венана) Пусть $d_1^{ij} \xi_i \xi_j > d_{11} |\xi|^2$, $d_{11} = \text{const} > 0$, $q_1^{ij} \leq q_{10} < 0$, при $\forall (x, t) \in Q_\tau$, $\forall \xi \in R^n$. Пусть $u(x, t)$ является обобщенным решением уравнения (21) в Q_τ , с начальным $u|_{t=0} = 0$, и граничным $u|_{\sigma_{\tau,0} \cup \sigma_{\tau,1} \cup \sigma_{\tau,2}} = 0$, $l_0 u|_{\sigma_1} = 0$ условиям и $f(x, t) = 0$ в при $(x, t) \in Q_\tau$, при $x_1 \leq \tau_2$. Тогда для любого τ_1 такого, что $0 \leq \tau_1 \leq \tau_2$ справедлива оценка

$$\int_{Q_{\tau_1}} E(u) dxdt \leq \Phi^{-1}(\tau_1, \tau_2) \int_{Q_{\tau_2}} E(u) dxdt \quad (25)$$

где $E(u) = d^{ij} u_{x_i} u_{x_j} - q^{ij} u^2$, $q_1^{ij} = (\alpha^1 a^{ij})_{x_i x_j} - (\alpha^1 a^i)_{x_j} - c_{x_i}^{i1} - c_{x_j}^{1j} + \alpha^1 a - c^1$

$d_1^{ij} = \alpha^j a^{i1} - \frac{1}{2} \alpha^1 a^{ij}$. Здесь $\Phi(x_1, \tau_2)$ является решением следующей задачи:

$$\Phi' = \mu(x_1) \Phi, \quad \tau_1 \leq x_1 \leq \tau_2, \quad \Phi(\tau_2, \tau_2) = 1, \quad \Phi'(\tau_2, \tau_2) = 0 \quad (26)$$

$\mu(\tau)$ — любая непрерывная функция такая, что

$$0 < \mu(\tau) \leq \lambda(\tau) \equiv \inf_{v \in N} \left\{ \int_{S_\tau} E(v) dx' \left| \int_{S_\tau} P(v) dx' \right|^{-1} \right\}, \quad x' = (x_2, x_3, \dots, x_n),$$

$$P(v) = \alpha^1 a^{i1} v v_{x_i} + \frac{1}{2} (c^{11} + \alpha^1 a^1 - (\alpha^1 a^{1j})_{x_j}) v^2,$$

N -множество непрерывно дифференцируемых функций в окрестности \bar{S}_τ , которые равен нулю на множестве $\bar{S}_\tau \cap \Gamma = \partial Q$.

В четвертом параграфе второй главы в области $G \subset Q = \{(x, t) : T_0 < t < T_1\} \subset R_{x,t}^{n+1}$, исследовано уравнения (21) с краевыми условиями

$$u|_{\sigma_0 \cup \sigma_1 \cup \sigma_2} = 0, \quad l_0 u|_{\sigma_1} = 0, \quad (28)$$

где $-\infty \leq T_0 \leq t_0 \leq t_1 \leq T_1 \leq \infty$, $\Omega_\tau = \{(x, t) \in G : t = \tau\}$, $\partial G = \Omega_{T_0} \cup \Omega_{T_1} \cup \Gamma$, $\Omega_{T_0} = \{(x, t) \in \bar{G} : t = T_0\}$, $\Omega_{T_1} = \{(x, t) \in \bar{G} : t = T_1\}$, Γ -гиперповерхность $\subset Q$. Ω_τ для любого конечного τ является ограниченной областью. Если $T_0 = -\infty$, то Ω_{T_0} -пустое, если $T_1 = +\infty$, то Ω_{T_1} -пустое. где $\sigma_0 = \{(x, t) \in \Gamma : \alpha^k(x, t)v_k(x, t) = 0\}$, $\sigma_1 = \{(x, t) \in \Gamma : \alpha^k(x, t)v_k(x, t) > 0\}$, $\sigma_2 = \{(x, t) \in \Gamma : \alpha^k(x, t)v_k(x, t) < 0\}$.

Положим

$$\begin{aligned} G(t_0, t_1) &= G \cap \{(x, t) : t_0 < t < t_1\}, \quad \Gamma(t_0, t_1) = \Gamma \cap \overline{G(t_0, t_1)} \\ \sigma_0(t_0, t_1) &= \{(x, t) \in \Gamma(t_0, t_1) : \alpha^k(x, t)v_k(x, t) = 0\} \\ \sigma_1(t_0, t_1) &= \{(x, t) \in \Gamma(t_0, t_1) : \alpha^k(x, t)v_k(x, t) > 0\} \\ \sigma_2(t_0, t_1) &= \{(x, t) \in \Gamma(t_0, t_1) : \alpha^k(x, t)v_k(x, t) < 0\} \end{aligned}$$

Для некоторого $h > 0$ определим

$$\begin{aligned} \sigma_{1,h}(t_0, t_1) &= \{(x, t) \in \sigma_1(t_0, t_1) : \rho((x, t), \partial\sigma_1(t_0, t_1)) > h\}, \\ \sigma_1^h(t_0, t_1) &= \sigma_1(t_0, t_1) \setminus \sigma_{1,h}(t_0, t_1) \end{aligned}$$

Пусть $E(G(t_0, t_1))$ есть множество функций $v \in C_{x,t}^{2,1}(G(t_0, t_1))$ таких, что $v=0$ на $\Gamma(t_0, t_1)$ и для некоторого числа $h > 0$ будет $l_0 v = 0$ на $\sigma_0(t_0, t_1) \cup \sigma_2(t_0, t_1) \cup \sigma_1^h(t_0, t_1)$.

Пусть $H(G(t_0, t_1))$ есть гильбертово пространство, полученное пополнением $E(G(t_0, t_1))$ по норме

$$\|u\|_{H(G(t_0, t_1))} = \left\{ \int_{G(t_0, t_1)} (d^{ij}u_i u_j + u_t^2 + u^2) dxdt + \int_{\sigma_1(t_0, t_1)} \alpha^k v_k a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} ds \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Определим билинейную форму

$$\begin{aligned} a_1(u, v) &= \int_{G(t_0, t_1)} \left[\alpha^k a^{ij} u_{x_i} v_{x_j} + (\alpha^k a^{ij})_{x_j} u_{x_i} v_{x_k} - c^{ij} u_{x_i} v_{x_j} \right] dxdt + \\ &+ \int_{G(t_0, t_1)} \left[(c_{x_j}^{ij} - \alpha^i a) u v + (c - c_{x_i}^i + c_{x_i x_j}^{ij}) u v - u_t v \right] dxdt. \end{aligned}$$

Определение 4. Назовем обобщенным решением задачи (21), (28) в области G функцию $u(x, t)$ такую, что для любого t_0 и t_1 таких, что $t_0 \neq -\infty$, $t_1 \neq +\infty$, $t_0 < t_1$ $u(x, t) \in H(G(t_0, t_1))$ и выполняется соотношение

$$a_1(u, v) = \int_{G(t_0, t_1)} f v dx dt \quad (29)$$

для произвольной функции $v(x, t) \in E(G(t_0, t_1))$.

Для задачи (21), (28) доказаны следующие теоремы.

Теорема 10. (Аналог принципа Сен-Венана) Пусть $u(x, t)$ является обобщенным решением задачи (21), (28) в G , и $f(x, t) = 0$ в $G(t_0, t_1)$. Тогда для любого τ такого, что $t_0 \leq \tau \leq t_1$ справедлива оценка

$$\int_{G(\tau, t_1)} E(u) dx dt \leq \Phi^{-1}(\tau, t_0) \int_{G(t_0, t_1)} E(u) dx dt, \quad (30)$$

$$\int_{G(\tau, t_1)} E(u) dx dt \leq \frac{1}{2} \Phi^{-1}(\tau, t_0) \int_{\Omega_0} u^2(x, t_0) dx, \quad (31)$$

где $E(u) = d^{ij} u_{x_j} u_{x_j} - q^{ij} u^2$. Здесь $\Phi(t, t_0)$ является решением следующей задачи:

$$\Phi' = 2\mu\Phi, \quad t_0 \leq t \leq \tau, \quad \Phi(t_0, t_0) = 1 \quad (31)$$

$\mu(t)$ — любая непрерывная на $[t_0, \tau]$ функция такая, что

$$0 < \mu(s) \leq \inf_{v \in N} \left\{ \int_{\Omega_s} E(v) dx \left| \int_{\Omega_s} v^2 dx \right|^{-1} \right\},$$

N — множество непрерывно дифференцируемых функций в окрестности $\bar{\Omega}_s$, которые равны нулю на $\bar{\Omega}_s \cap \Gamma = \partial G$.

Теорема 11. Пусть выполнено условия теоремы 8, $f(x, t) = 0$ в G . Если $u(x, t)$ является обобщенным решением задачи (21), (28) в G и для некоторой последовательности $t_m \rightarrow -\infty$, при $m \rightarrow \infty$ имеем

$$\int_{\Omega_{t_m}} u^2 dx \leq \varepsilon(t_m) \Phi(0, t_m), \quad (32)$$

где $\varepsilon(t_m) \rightarrow 0$ при $t_m \rightarrow -\infty$, то $u(x, t) = 0$ в G .

В третьем главе диссертации построено обобщенное решение задачи (9), (10) в неограниченных областях.

В первом параграфе третьей главы установлено специальные энергетические оценки типа принципа Сен-Венана для задачи (9), (10) в области $\Omega = \{x : x_1 > 0\}$. Здесь $\Omega = \bigcup_{\tau \in \Pi} \Omega_\tau$, $\{\Omega_\tau\}$ — семейство конечных подобластей области Ω , зависящее от параметра $\tau \in \Pi = \{\tau : 0 \leq \tau \leq \tau_0\}$, $\tau_0 \leq \infty$.

Определение 5. Функция $u(x)$ называется обобщенным решением задачи (9), (10) в области Ω , если для любой конечной подобласти Ω_τ области Ω имеем, $u(x) \in H(\Omega_\tau)$ и выполняется соотношение

$$a(u, v) = \int_{\Omega_\tau} f v dx \quad (33)$$

для произвольной функции $v(x) \in E(\Omega_\tau)$, удовлетворяющей условию $v=0$ на S_τ .

Здесь S_τ - связная $(n-1)$ - мерная поверхность, обладающая той же гладкостью что и $\partial\Omega$, а ее граница $\partial S_\tau \subset \partial\Omega$.

Вводим обозначение

$$B(x) = \max \left\{ 2^{-1} \left(\alpha^1 a^1 + c^{i1} - (\alpha^1 a^{ij})_{x_i} \right), 0 \right\}, \quad P(\tau) = \sup_{S_\tau} B(x), \quad k = a_1 \alpha^1 d_0^{-\frac{1}{2}},$$

$$E(u) = d^{ij} u_{x_i} u_{x_j} - q^{ij} u^2.$$

и пусть

$$0 < \lambda(\tau) \leq \inf_{v \in N} \left\{ \int_{S_\tau} E(v) dx' \left| \int_{S_\tau} v^2 dx' \right|^{-1} \right\}, \quad x' = (x_1, \dots, x_n),$$

где N - множество функций $v(x)$ непрерывно дифференцируемых в окрестности S_τ , $x \in \bar{\Omega}$, которые равны нулю на $S_\tau \cap \Gamma$.

Будем предполагать, что существует такая положительная, абсолютно непрерывная функция $\Phi(\tau)$, при $\tau \in \Pi$, такая, что будет определена неравенствам

$$\Phi(\tau) \geq k \lambda^{-\frac{1}{2}}(\tau) + P(\tau) \lambda^{-1}(\tau)$$

Теорема 12. Пусть $u(x)$ является обобщенным решением задачи (9), (10) в областях Ω , для которых $\frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} \geq \varepsilon$, $\forall \tau \in \Pi$, $\frac{d\tau}{d\beta} = \frac{\Phi}{\varepsilon\tau + \Phi_\tau}$, $\tau(0) = 0$, $\varepsilon = const$, $0 < \varepsilon < 1$, причем $f(x) = 0$ в Ω_{τ_0} , $0 < \tau \leq \tau^0$, и выполнено условия

$$\left(\alpha^1 a^{ij} \right)_{x_i} - \left(\alpha^1 a^{ij} \right)_{x_j x_j} + 3c_{x_i x_j}^{ij} - 2c^1 - 2\alpha^i a \geq 0, \quad c^{ij} - \alpha^i a - c^1 < 0 \quad \text{в } \Omega_{\tau_0}.$$

Тогда при любых R_0, R таких, что $0 \leq R_0 \leq R$, имеет место оценка

$$\int_{\Omega_{\tau(R_0)}} E(u) dx \leq \frac{\Phi(\tau(R))}{\Phi(\tau(R_0))} \exp[-(R - R_0)] \int_{\Omega_{\tau(R)}} E(u) dx. \quad (34)$$

Теорема 13. Предположим, что $f(x) = 0$ в Ω и выполняются условия теоремы 12. Тогда, если $u(x)$ является обобщенным решением задачи (9), (10) в области Ω , и для некоторой последовательности действительных чисел $\{R_l\}$, таких, что $R_l \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$ справедливы неравенства

$$\int_{\Omega_{\tau(R_l)}} E(u) dx \leq \varepsilon_1(R_l) \Phi^{-1}(\tau(R_l)) \exp\{R_l\}, \quad (35)$$

где $\varepsilon_1(R_l) \rightarrow 0$ при $R_l \rightarrow \infty$, $l \rightarrow \infty$, то $u(x) = 0$ в Ω .

Теорема 14. Пусть $u(x)$ является обобщенным решением задачи (9), (10) в области Ω , для которых $\frac{d\Phi(\tau)}{d\tau} \leq \varepsilon$, $\forall \tau \in \Pi$, $\frac{d\tau}{d\beta} = \frac{\Phi}{\varepsilon\tau + \varepsilon}$, $\tau(0) = 0$, $\varepsilon = const$, $0 < \varepsilon < 1$, причем $f(x) = 0$ в Ω_{τ_0} , $0 < \tau \leq \tau^0$, и выполнены условия

$$(\alpha^1 a^{ij})_{x_i} - (\alpha^1 a^{ij})_{x_i x_j} + 3c_{x_i x_j}^{ij} - 2c^1 - 2\alpha^k a \geq 0, \quad c^{ij} - \alpha^j a - c^1 < 0.$$

Тогда при любой R_0 и R таких, что $0 \leq R_0 \leq R$, имеет место оценка

$$\int_{\Omega_{\tau(R_0)}} E(u) dx \leq \frac{\tau(R) + 1}{\tau(R_0) + 1} \exp[-(R - R_0)] \int_{\Omega_{\tau(R)}} E(u) dx. \quad (36)$$

Теорема 15. Предположим, что $f(x) = 0$ в Ω и выполняются условия теоремы 14. Тогда, если $u(x)$ является обобщенным решением задачи (9), (10) в области Ω , и для некоторой последовательности действительных чисел $\{R_l\}$, таких, что $R_l \rightarrow \infty$ при $l \rightarrow \infty$ справедливы неравенства

$$\int_{\Omega_{\tau(R_l)}} E(u) dx \leq \varepsilon_2(R_l) (\tau(R_l) + 1)^{-1} \exp\{R_l\}, \quad (37)$$

где $\varepsilon_1(R_l) \rightarrow 0$ при $R_l \rightarrow \infty$, $l \rightarrow \infty$, то $u(x) = 0$ в Ω .

Во втором параграфе третьей главы для задачи (9), (10) доказано теоремы существование для решения задачи (9), (10) в классах функций, растущих на бесконечности в зависимости от геометрических характеристик области.

Теорема 16. Пусть выполнено условия теоремы 12, 13, для каждой из областей $\Omega_{\tau(k)}$ имеем $\Lambda(\Omega_{\tau(k)}) > 0$, и функция $f(x)$ определена в области Ω и удовлетворяет соотношениям

$$\int_{\Omega_{\tau(k)}} f^2 dx \leq M_3 \Lambda(\Omega_{\tau(k)}) \exp\left\{(1 - \delta) \int_0^{\tau(k)} \frac{\varepsilon s}{\Phi(s)} ds\right\}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (38)$$

где $\delta = const$, $0 < \delta < 1$, постоянная M_3 не зависит от k . Тогда существует единственное обобщенное решение $u(x)$ задачи (9), (10) для которого справедлива оценка

$$\int_{\Omega_{\tau(k)}} E(u) dx \leq M_4 \exp\left\{(1 - \delta) \int_0^{\tau(k)} \frac{\varepsilon s}{\Phi(s)} ds\right\}. \quad (39)$$

Теорема 17. Пусть выполнено условия теоремы 14, 15, для каждой из областей $\Omega_{\tau(k)}$ имеем $\Lambda(\Omega_{\tau(k)}) > 0$, и функция $f(x)$ определена в области Ω и удовлетворяет соотношениям

$$\int_{\Omega_{\tau(k)}} f^2 dx \leq M_5 \Lambda(\Omega_{\tau(k)}) \exp\{(1 - \delta)k\}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (40)$$

где $\delta = const$, $0 < \delta < 1$, постоянная M_5 не зависит от k . Тогда существует

единственное обобщенное решение $u(x)$ задачи (9), (10) для которого справедлива оценка

$$\int_{\Omega_{\tau(k)}} E(u) dx \leq M_6 \exp\{(1-\delta)k\}. \quad (41)$$

В четвертом главе диссертации установлено оценки для обобщенных решений задачи (9), (10) и их производных на бесконечности.

В первом параграфе четвертой главы установлены энергетические оценки специального вида для решений задачи (9), (10) в области $\Omega_{\tau} = \Omega \cap \{x: x_1 > \tau\}$. Положим $\Gamma_{\tau} = \partial\Omega_{\tau}$, $\Omega(\tau_1, \tau_2) = \Omega \cap \{x: \tau_1 < x_1 < \tau_2\}$, $\Gamma(\tau_1, \tau_2) = \Gamma_{\tau_1} \cap \partial\Omega(\tau_1, \tau_2)$, $S_{\tau} = \Omega(\tau_1, \tau_2) \cap \{x: x_1 = \tau\}$.

Пусть $E(\Omega(\tau_1; \tau_2))$ есть множество функций $v \in C^2(\overline{\Omega}(\tau_1, \tau_2))$ таких, что $v=0$ на $\Gamma(\tau_1, \tau_2)$ и для некоторого числа $h > 0$, $l_0 v = 0$ на множестве $\sigma_0(\tau_1, \tau_2) \cup \sigma_2(\tau_1, \tau_2) \cup \sigma_1^h(\tau_1, \tau_2)$. $H(\Omega(\tau_1; \tau_2))$ есть гильбертово пространство полученное замыканием $E(\Omega(\tau_1; \tau_2))$ по норме

$$\|u\|_{H(\Omega(\tau_1; \tau_2))} = \left\{ \int_{\Omega(\tau_1, \tau_2)} (d^{ij} u_{x_i} u_{x_j} + u^2) dx + \int_{\sigma_1(\tau_1, \tau_2)} \alpha^k v_k a^{ij} u_{x_i} u_{x_j} ds \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Рассмотрим билинейную форму

$$\theta(u, v) = \int_{\Omega(\tau_1, \tau_2)} \left[\alpha^k a^{ij} u_{x_i} v_{x_j x_k} + (\alpha^k a^{ij})_{x_i} u_{x_i} v_{x_k} - \alpha^k a^i u_{x_i} v_{x_k} - \right. \\ \left. - c^{ij} u_{x_i} v_{x_k} + (c^{ij} - \alpha^i a - c^i) u v_{x_i} + (c - c_{x_i}^i + c_{x_i x_j}^{ij}) u v \right] dx.$$

Определение 6. Назовем обобщенным решением уравнение (9) функция $u(x) \in H(\Omega(\tau_1, \tau))$ такую, что при любом $\tau > \tau_1$, удовлетворяет краевым условиям $u|_{\Gamma} = 0$, $l_0 u|_{\sigma_1} = 0$ соответственно на $\Gamma(\tau_1, \tau)$ и на $\sigma_1(\tau_1, \tau)$ а также интегральному тождеству.

$$\theta(u, v) = \int_{\Omega(\tau_1, \tau)} f v dx$$

для произвольной функции $v \in E(\Omega(\tau_1, \tau))$, $v=0$ на $\partial\Omega(\tau_1, \tau) \cap \Omega$

Теорема 18. Пусть $d_1^{ij} \xi_i \xi_j \geq d_{11} |\xi|^2$, $d_{11} > 0$, $q_1^{ij} > 0$. Тогда если $u(x)$ является обобщенным решением задачи (9), (10) в области Ω_{τ_1} , причем $f(x) = 0$ в Ω_{τ_1} то для любого $\tau_2 > \tau_1$ справедливы оценки

$$\int_{\Omega_{\tau_2}} E(u) dx \leq \Phi^{-1}(\tau_2, \tau_1) \int_{\Omega_{\tau_1}} E(u) dx, \quad (42)$$

$$\int_{\Omega_{\tau_2}} \Lambda(x_1) u^2 dx \leq \Phi^{-1}(\tau_2, \tau_1) \int_{\Omega_{\tau_1}} E(u) dx. \quad (43)$$

Здесь

$$E(u) = d^{ij} u_{x_i} u_{x_j} - q^{ij} u^2,$$

$$q_1^{ij} = \frac{1}{2} c^1 + \alpha^1 a + (\alpha^1 a^{ij})_{x_i x_j} - c_{x_1}^{11} - (\alpha^1 a^1)_{x_i}, \quad d_1^{ij} = \frac{1}{2} \alpha^1 a^{ij} - 2\alpha^j a^{i1}.$$

Функция $\Phi(x_1, \tau_1)$ является решением задачи

$$\Phi_{x_1 x_1} = \mu(x_1) \Phi, \quad \Phi(\tau_1, \tau_1) = 1, \quad \Phi_{x_1}(\tau_1, \tau_1) = 0,$$

$\Lambda(\tau)$, $\mu(\tau)$ – любая непрерывная функция такая, что

$$0 < \mu(\tau) \leq \inf_N \left\{ \int_{S_\tau} E(v) dx' \left| \int_{S_\tau} P(v) dx' \right|^{-1} \right\} \quad (44)$$

$$0 < \Lambda(\tau) \leq \inf_N \left\{ \int_{S_\tau} E(v) dx' \left| \int_{S_\tau} v^2 dx' \right|^{-1} \right\} \quad (45)$$

$$x' = (x_2, x_3, \dots, x_n), \quad P(v) = \alpha^1 a^{i1} v_{x_i} v + \frac{1}{2} \left(c^{11} + (\alpha^1 a^1)_{x_1} - (\alpha^1 a^{1j})_{x_j} \right) v^2$$

N – множество непрерывно дифференцируемых функций в окрестности \bar{S}_τ , которые равны нулю на $\bar{S}_\tau \cap \Gamma_\tau$,

Во втором параграфе четвертой главы установлено локальные оценки W_2^l – норм решений уравнения. С этой целью в ограниченной области $\Omega \subset R_+^n = \{x : x_1 > 0\}$ рассмотрим уравнения (9) со следующим условием

$$u|_{\Gamma_1} = 0, \quad l_0 u|_{\Gamma_2} = 0, \quad \Gamma_1, \Gamma_2 \subset \partial\Omega = \Gamma, \quad (46)$$

Определение 7. Функцию $u(x) \in H(\Omega, \Gamma_1)$ будем называть обобщенным решением уравнения (9) с граничными условиями (46), если для любой функции $v(x) \in E(\Omega, \Gamma)$ выполняется соотношение

$$a(u, v) = \int_{\Omega_\tau} f v dx. \quad (47)$$

Здесь $E(\Omega, \Gamma)$ есть множество функций $v \in C^2(\bar{\Omega})$ таких, что $v = 0$ на Γ и для некоторого числа $h > 0$ будет $l_0 v = 0$ на $\sigma_0 \cup \sigma_2 \cup \sigma_1^h$.

Отметим, что если $u(x) \in H(\Omega, \partial\Omega)$, то существования и единственность обобщенного решение задачи (9), (46) была рассмотрена в работе А.И.Кожанова, где $\Gamma_2 = \sigma_1$.

Теорема 19. Предположим, что коэффициенты в уравнения (9) и их производные до порядка $l \geq 2$, включительно, непрерывны в области $\overline{\Omega''}$. Тогда существует постоянная числа k такая, что для любого решения $u(x) \in W_2^{l+1}(\Omega'')$ уравнения (1) имеет место оценка

$$\|u\|_{W_2^{l+1}(\Omega')} \leq k \|u\|_{L_2(\Omega'')}, \quad (48)$$

причем k зависит лишь от $a_0, a_1, d_0, d_1, c_0, c_1$, максимума модулей коэффициентов уравнения (9) и их производных до порядка l включительно и от модулей непрерывности коэффициентов старших производных.

Здесь $W_2^l(\Omega)$ – пространство Соболева в обычном смысле, Ω'' такая область, что $\Omega \supset \Omega'' \supset \Omega'$ и расстояние от Ω до $\Omega \setminus \Omega''$ положительно.

В третьем параграфе четвертой главы установлено оценки для решений краевых задач (9), (10) и ее производных на бесконечности.

Для ограниченной области $K \subset R_x^n$, и целого $l \geq 0$ определим пространство $W_p^l(K)$ как замыкание множество гладких функций в норме

$$\|u\|_{p,K}^l = \sum_{0 \leq |s| \leq l} \left(\int_K |D_x^s u|^p \right)^{\frac{1}{2}}, \quad 1 \leq p \leq \infty.$$

Вводим обозначение

$$\begin{aligned} B^{\hat{x}, \rho} &= \{x : |x - \hat{x}| < \rho\}, \quad U^{\hat{x}, \rho} = B^{\hat{x}, \rho} \cap \{x : x_1 > \hat{x}_1\}, \quad D^{\hat{x}, \rho} = B^{\hat{x}, \rho} \cap \{x : x_1 = \hat{x}_1\}, \\ K^{x, \beta_1, \beta_2, \beta_3} &= \{x : |x'| < \beta_3, x_1 \in (\beta_1 - \beta_2, \beta_1 + \beta_2), \beta_1 > \beta_2\}, \\ \Delta^{x, \beta_1, \beta_2, \beta_3} &= \{x : |x'| < \beta_3, x_1 \in (\beta_1 - \beta_2, \beta_1 + \beta_2), \beta_1 > \beta_2\}. \end{aligned}$$

i) Пусть $l \geq 0$, l – целое число и коэффициенты уравнение и их производные непрерывны в Ω_{τ_1} до порядка $l + 2$ включительно.

Теорема 20. Пусть $l \geq 0$, l – целое число и коэффициенты уравнение и их производные непрерывны в Ω_{τ_1} до порядка $l + 2$ включительно и выполнено условия теоремы 4, 16 и 17. Пусть при каждом $\tau > \tau_1 + 1$ выполнено одно из условий:

1) Существует $p = p(\tau) \in (0, 1]$ и $\sigma = \sigma(\tau) \in (0, 1]$ такие, что множество $\Omega(\tau - \sigma, \tau + \sigma)$ можно с помощью преобразования $F \in (\chi, l + 2)$ отобразить на цилиндр $K^{y, \delta, \frac{R}{2}, p}$, причем, точки $\partial\Omega_0$ и, только они переходит в боковую поверхность этого цилиндра, при этом $F(S_\tau) \subset K^{y, \delta, \frac{R}{2}, p}$, постоянная χ не зависит от τ , а также $R = R(\tau) \geq p(\tau)$.

2) Каждая точка $x = (\tau, x')$ из S_τ либо является центром шара радиуса

$2d(\tau) \leq 1$, принадлежащего Ω_0 , $x = (\tau, x')$ принадлежит окрестности O_1 некоторой точки $x^0 \in \bar{S}_\tau \cap \partial\Omega_0$ и существует окрестность $O_2 \supset O_1$ точки x^0 , которая при преобразовании $F \in (\chi, l+2)$ переходит в шар радиуса $2h(\tau) \leq 1$, причем, $O_2 \cap \Omega_0$ переходит в полу-шар, Ω_0 – плоская часть границы, которого является образом $O_2 \cap \Omega_0$, образ $O_1 \cap \Omega_0$ содержится в концентрическом полу-шаре радиуса $h(\tau)$, χ не зависит от τ .

Тогда для обобщенного решения $u(x) \in H(\Omega_{\tau_1})$ задачи (9), (10) в области Ω_{τ_1} , с граничными условиями $u|_{\Gamma_{\tau_1}} = 0, l_0 u|_{\sigma_{1,\tau_1}} = 0$, причем $f = 0$ в Ω_{τ_1} , справедлива оценка

$$|D_x^s u(\tau, x')| \leq C \sup_{|x_1 - \tau| \leq \eta} \Lambda^{-1}(x_1) [\varphi]^{-(n+2)-2|s|} \Phi^{-1}(\tau - \eta, \tau_1) \int_{\Omega_\eta} E(u) dx, \quad (49)$$

где $|s| \leq 1$; $\eta = \sigma(\tau)$, $\varphi(\tau) = p(\tau)$, если для τ выполнено условие 1); $\eta = 2d(\tau)$, $\varphi(\tau) = d(\tau)$, если для τ выполнено первое предположение из 2) и $\eta = \sup_{x \in O_2} |x_1 - \tau|$, $\varphi(\tau) = h(\tau)$, если для τ выполнено второе предположение из 2).

Функции $E(u)$, $\Phi(\tau, \tau_1)$, $\Lambda(x_1)$ определены в теореме 16, $C = C(n, l, a_0, a_1, d_0, d_1, c_0, c_1, c_2, M_i, \chi)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем:

- Установлены энергетические оценки типа принципа Сен-Венана для решений первой и второй краевой задачи стационарного уравнения третьего порядка составного типа.
- Установлены энергетические оценки типа принципа Сен-Венана для решений первой краевой задачи нестационарного уравнения третьего порядка составного типа.
- Выявлены класс единственности решений краевых задач для уравнения третьего порядка составного типа в зависимости от геометрических характеристик области.
- Исследована задача безначальных условий для нестационарных уравнений третьего порядка составного типа.
- Предложены методы построения обобщенных решений первой краевой задачи стационарного уравнения третьего порядка составного типа в классах функций, растущих на бесконечности в зависимости от геометрических характеристик области.
- Построены обобщенные решения первой краевой задачи стационарного уравнения третьего порядка составного типа в классах функций, растущих на бесконечности в зависимости от геометрических характеристик области.
- Исследованы свойства потенциалов фундаментальных решений

нестационарного уравнения третьего порядка составного типа в многомерных областях.

- Установлены локальные оценки для обобщенных решений стационарного уравнения третьего порядка составного типа.
- Установлены оценки производных любого порядка для решений первой краевой задачи стационарного уравнения третьего порядка составного типа.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES
DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 AT V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF
MATHEMATICS**

**INSTITUTE OF MATHEMATICS AND
TASHKENT STATE UNIVERSITY OF ECONOMICS**

KHASHIMOV ABDUKOMIL RISBEKOVICH

**BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR STATIONARY AND NON-
STATIONARY EQUATIONS OF THE THIRD ORDER OF COMPOSITE
TYPE**

01.01.02 – Differential equations and mathematical physics

**DISSERTATION ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc) ON PHYSICAL
AND MATHEMATICAL SCIENCES**

TASHKENT – 2025

The theme of dissertation of doctor of science (DSc) was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number B2021.2.DSc/FM178.

Dissertation has been prepared at Institute of Mathematics and Tashkent state university of economics.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website <http://kengash.mathinst.uz> and in the website of “ZiyoNet” Information and educational portal <http://www.ziynet.uz/>.

Scientific consultant:

Djuraev Tukhtamurad Djuraevich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor, Academician

Official opponents:

Ashurov Ravshan Radjabovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

Kozhanov Aleksandr Ivanovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

Fayazov Qudratillo Sadriddinovich

Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor

Leading organization:

Fergana State University

Defense will take place « 04 » March 2025 at 16:00 at the meeting of Scientific council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics (Address: University str., Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)- 207-91-40). E-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz.

Doctoral dissertation is possible to review in Information-resource centre of V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics (is registered № 200) (Address: 9, University str., Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (+99871)- 207-91-40). E-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Abstract of dissertation sent out on « 10 » February 2025 year.
(mailing report № 2 on « 10 » February 2025 year).

U.A.Rozikov

Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., Academician

J.K.Adashev

Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., Senior researcher

A.Azamov

Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, DSc., Academician

INTRODUCTION (abstract of DSc thesis)

The aim of the research is to determine the classes of boundary value problems for stationary and nonstationary equations of the third order combined type, depending on the geometric characteristics of the domain.

Object of research. Stationary and non-stationary partial differential equations of odd order.

The subject of the study. Methodology for establishing energy estimates, theory of equations of mathematical physics, theory of mathematical and functional analysis.

The scientific novelty consists in the followings:

the solutions of the Cauchy problem and the nonlocal condition problem for the third-order partial differential equation have been constructed;

the broadest class of uniqueness solutions of boundary value problems for the stationary and non-stationary equation of the third order of the composite type depending on the geometric characteristics of the region has been revealed;

we constructed the generalized solutions of the third-order equation of composite type in the classes of functions growing at infinity and established the energy and local estimates for them;

established estimates for the solutions of boundary value problems of the third-order equation of composite type and its derivatives at infinity.

Implementation of the research results. The results related to the non-stationary and stationary equation of the third order of the composite type have been introduced in the following research papers:

the obtained results on non-stationary third-order equations of the composite type, i.e. properties of the potentials of fundamental solutions and the application of the Abel transform to them, as well as the developed methods for constructing the Green's function and expanding the solution in potentials were used in the study of non-local problems of mathematical physics within the framework of the research activities of the integrative laboratory "Natural disasters of Kamchatka - earthquakes and volcanic eruptions" (Research topic of the Federal State Budgetary Educational Institution of Higher Education "Vitus Bering KamSU" "Natural disasters of Kamchatka - earthquakes and volcanic eruptions" No. AAAA-A19-119072290002-9, supervisor R.I. Parovik (certificate from Vitus Bering State University dated May 24, 2021 No. 267-02, Russian Federation). The application of the results made it possible to construct an unambiguous solution to non-local problems for non-classical equations of mathematical physics.

the obtained results and the developed methods for establishing energy estimates and a priori estimates for solutions of third-order boundary value problems of composite type were used to substantiate the experimental results in the study of relaxation processes in anisotropic fluids when performing research work on the topic of the Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS for 2016-2018. "Methods for creating, researching and identifying mathematical models of the Earth", state registration number 1.3.1.3 and the Russian Foundation for Basic Research grant No. 16-01-00729

"Mathematical modeling of filtration of mineralized solutions and viscoelastic media". (certificate from the Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS dated December 16, 2021 No. 15301 / 2-01-27, Russian Federation). The application of the results made it possible to a priori estimate the relaxation processes in anisotropic fluids.

the obtained results, i.e. methods for obtaining the Saint-Venant principle for boundary value problems of a third-order composite equations were used to substantiate the experimental results in the study of relaxation processes in anisotropic liquids when performing research work under the grant of the Republic of Uzbekistan No. OT-F4-04 (05) on the topic "Applications of the spectral method to solving matrix nonlinear evolutionary equations; Biomechanics of the cardiovascular system." (certificate from Urgench State University dated December 11, 2021 No. 04-279/2). The application of the results made it possible to fully substantiate the course of relaxation processes in liquids.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, four chapters, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation is 151 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

І бўлим (I часть; I part)

1. Кадыров Р.Р., Хашимов А.Р. О классах единственности решение задачи без начальных условий для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Узбекский математический журнал. № 1, 2000. С. 26-30. (01.00.00; № 6)
2. Кадыров Р.Р., Хашимов А.Р. О классах единственности решений уравнения третьего порядка составного типа в неограниченных областях. Узбекский математический журнал. № 5-6, 2000. С. 78-82. (01.00.00; № 6)
3. Джураев Т.Д., Хашимов А.Р. О существовании решений первой краевой задачи для уравнений третьего порядка составного типа в неограниченных областях. Вест. Сам. Техн. Ун-та, Сер. Физ.-мат. наук. № 9, 2003. С. 5-7. (англ.вар.: On the existence of value boundary problem first solutions for equations of third order compound type in an unbounded region. J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci., 2003, 19, pp. 5-7.) (3. SCOPUS, IF=0.529)
4. Khashimov A.R. An analog of the Saint-Venants principle and the uniqueness of asolution of the first boundary-value problem for a third-order equation of combined type in unbounded domains. Nonlinear Oscillations. Vol. 9, No. 1, 2006. pp. 115-124. (3. SCOPUS, IF=0.279)
5. Хашимов А.Р. О единственности решений второй краевой задачи для уравнения третьего порядка составного типа в неограниченных областях. Вест. Сам. Техн. Ун-та, Сер. Физ.-мат. наук. № 2(27), 2012. С. 18-25. (англ.вар.: On uniqueness of the second boundary value problem solutions for the third order composite type equation in unbounded domains. J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci., 2012, 2(27), pp. 18-25.) (3. SCOPUS, IF=0.37)
6. Хашимов А. Энергетические оценки для решений уравнения третьего порядка составного типа в неограниченных областях. Узбекский математический журнал. № 1, 2012. С. 156-161. (01.00.00; № 6)
7. Khashimov A.R. On the existence of solutions of the composite type third order equation in an unlimited domain. Journal of Pure and Applied Mathematics. Vol. 4, No. 1, 2013. pp. 29-37. (2. Journal IF=0.55)
8. Хашимов А., Якубов С. О некоторых свойствах решений задачи Коши для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа. Уфимский математический журнал. Т. 6, № 4, 2014. С. 139-148. (англ.вар.: On some properties of Cauchy problem for non-stationary third order composite type equation. Ufa Mathematical Journal, 2014, 6(4), pp. 135-144.) (3. SCOPUS, IF=0.488)
9. Хашимов А.Р. Об оценках W_2^l -норм решений уравнения третьего

- порядка составного типа. Узбекский математический журнал. № 1, 2015. С. 127-135. (01.00.00; № 6)
10. Хашимов А.Р. Оценка производных любого порядка решений краевых задач для уравнения третьего порядка составного типа на бесконечности. Узбекский математический журнал. № 2, 2016. С. 140-148. (01.00.00; № 6)
 11. Хашимов А.Р. Энергетические оценки для решений краевых задач уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Узбекский математический журнал. № 4, 2017. С. 168-177. (01.00.00; № 6)
 12. Хашимов А.Р. Вторая краевая задача для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа. Математические заметки СВФУ. Т. 24, № 4 (96), 2017. С. 76-87. (англ.вар.: On the second boundary value problem for nonstationary third-order equations of mixed type. Mathematical notes of NEFU, 2017, 24(4), pp. 76-86) (2. SCOPUS, Journal IF=0.178)
 13. Хашимов А.Р. Вторая краевая задача для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа с нелокальным начальным условием. Бюллетень института Математики. № 4, 2018. С. 46-54. (01.00.00; № 17)
 14. Хашимов А.Р. Задача для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа с общим краевым условием. Бюллетень института Математики. № 3, 2019. С. 41-50. (01.00.00; № 17)
 15. Хашимов А.Р. Нелокальная задача для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа с общим краевым условием. Вест. Сам. Техн. Ун-та, Сер. Физ.-мат. наук. № 1 (24), 2020. С. 187-198. (англ.вар.: The nonlocal problem for a non-stationary third order composite type equation with general boundary condition. J. Samara State Tech. Univ., Ser. Phys. Math. Sci., 2020, 24(1), pp. 187-198) (3. SCOPUS, IF=0.529)
 16. Khashimov A.R. and Dana Smetanova. On the Uniqueness Classes of Solutions of Boundary Value Problems for Third-Order Equations of the Pseudo-Elliptic Type. Axioms. 9, 80, 2020. (3. SCOPUS, IF=2.11)
 17. Khashimov A.R. and Dana Smetanova. Nonlocal Problem for a Third-Order Equation with Multiple Characteristics with General Boundary Conditions. Axioms. 10, 110, 2021. (3. SCOPUS, IF=2.11)

II бўлим (II часть; II Part)

18. Djuraev T.D. Khashimov A.R. On the existence of the solutions of the first boundary value problem for the third order equation of the composite type in an unlimited domain. Международной конференции «III-posed and non-classical problems of mathematical physics and analysis». Samarkand, 2000. 25 май-1 июнь, (Netherlands 2003). pp. 19-26.
19. Джураев Т.Д., Хашимов А.Р. О некоторых асимптотических свойствах потенциалов фундаментальных решений уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Международный Российско-Казахский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик, 28 мая – 1 июня 2004 г. С. 67-70.

20. Джураев Т.Д., Хашимов А.Р. О некоторых свойствах потенциалов фундаментальных решений уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Труды межд. науч. конф. «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики». Т. I., Ташкент, 20-26 октября 2004 г. С. 72-73.
21. Хашимов А.Р. О локальных оценках обобщенных решений уравнений третьего порядка составного типа. Труды межд. семинара «Неклассические уравнения математической физики». Новосибирск. 20-27 мая, 2005. С. 285-291.
22. Джураев Т.Д., Хашимов А.Р. О классах единственности решений одной краевой задачи для уравнения третьего порядка псевдоэллиптического типа в неограниченной области. Межд. Росс.-Азерб. симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик. 28 май-2 июнь, 2008. С. 60-62.
23. Хашимов А.Р., Тургинов А. Об одной нелокальной задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками. Материалы второй международной Российско-Узбекский симпозиум «Уравнения смешанного типа и родственные проблемы анализа и информатики». Нальчик, 28 мая – 1 июня 2012 г. С. 270-272.
24. Khashimov A.R. Some properties of the fundamental solutions of non-stationary third order composite type equation in multidimensional domains. Journal of Nonlinear Evolution Equations and Applications. No. 1, 2013. pp. 1-9.
25. Хашимов А.Р. О некоторых свойствах решений уравнения третьего порядка составного типа на бесконечности. Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием ученых из стран СНГ «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения». Ташкент, 21-23 ноября, 2013 г. С. 198-201.
26. Khashimov A.R. On some nonlocal problems for third order equations with multiple characteristics. Mathematical Notes of Sakha Yakutia January-March. Vol. 21, No. 1, 2014. pp. 53-58.
27. Хашимов А.Р. О некоторых задачах для нестационарного уравнения третьего порядка составного типа. VII Международная конференция по математическому моделированию. Якутск, 30 июня – 4 июля 2014 г. С. 2.
28. Хашимов А.Р. A general boundary value problem for a non-stationary third – order equation of composite type. Тезисы международной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий – Аль-Хорезми 2018». Ташкент, 13-15 сентября 2018 г. С. 215-216.

Avtoreferat “O‘zbekiston matematika jurnali” tahririyatida 2025 yil 20-yanvarda tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.