

**URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

QALANDAROVA DILDORA ABDULLAYEVNA

$(A)sh_m$ VA $(B)sh_m$ FUNKSIYALARNING EKVIVALENTLIGI

01.01.01 – Matematik analiz

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Urganch shahri – 2025 yil

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации
доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on
physical-mathematical sciences**

Qalandarova Dildora Abdullayevna

$(A)sh_m$ va $(B)sh_m$ funksiyalarning ekvivalentligi..... 3

Каландарова Дилдора Абдуллаевна

Эквивалентность функций $(A)sh_m$ и $(B)sh_m$ 19

Kalandarova Dildora Abdullayevna

Equivalence of functions $(A)sh_m$ and $(B)sh_m$ 35

E'lon qilingan ishlar ro'yxati

Список опубликованных работ

List of published works..... 38

**URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

QALANDAROVA DILDORA ABDULLAYEVNA

$(A)sh_m$ VA $(B)sh_m$ FUNKSIYALARNING EKVIVALENTLIGI

01.01.01 – Matematik analiz

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Urganch shahri – 2025 yil

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida №B2024.2.PhD/FM1048 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Urganch Davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (www.ik-mat.urdu.uz) va "Ziyonet" Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:

Abdullayev Baxrom Ismoilovich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Rasmiy opponentlar:

Shoimqulov Baxodir Allaberdiyevich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Atamuratov Alimardon Abdirimovich
fizika-matematika fanlari nomzodi, katta ilmiy xodim

Yetakchi tashkilot:

Qoraqalpoq davlat universiteti

Dissertatsiya himoyasi Urganch Davlat universiteti huzuridagi PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 raqamli Ilmiy kengashning 2025-yil "01" mart soat 16 : 00 dagi majlisida bo'lib o'tadi (Manzil: 220100, Urganch sh., H.Olimjon ko'chasi, 14-uy. Tel.: (998 62) 224-66-11, faks: (998 62) 224-67-00, e-mail: ik-mat.urdu@umail.uz)

Dissertatsiya bilan Urganch Davlat universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (D-765 raqami bilan ro'yxatga olingan). Manzil: Manzil: 220100, Urganch sh., H.Olimjon ko'chasi, 14-uy. Tel.: (998 62) 224-66-11, faks: (998 62) 224-67-00. e-mail: arm@urdu.uz

Dissertatsiya avtoreferati 2025-yil "17" fevral kuni tarqatildi.

(2025-yil "17" fevral dagi 2 raqamli reyestr bayonnomasi).



G'.O'. O'razboyev

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, o'rinbosari, fizika-matematika fanlari doktori

A.A. Reyimberganov

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, fizika-matematika fanlari nomzodi

B.A. Babajanov

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi, fizika-matematika fanlari doktori

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida matematik analiz, mexanika va fizika sohalarida olib borilayotgan ko'plab ilmiy va amaliy tadqiqotlar potentsiallar va plyuripotentsiallar nazariyasi masalalariga keltiriladi. Potentsiallar va plyuripotentsiallar nazariyasida kompleks o'zgaruvchili funksiyalar, m -subgarmonik funksiyalar, $\mathbb{C}^n$ kompleks fazodagi kuchli m -subgarmonik $\left((B)sh_m\right)$ funksiyalar va n o'zgaruvchili haqiqiy Evklid fazosidagi m -qavariq funksiyalar muhim ahamiyat kasb etadi. Ayniqsa $(B)_m$ -subgarmonik funksiyalar nazariyasi kompleks analizning muhim va tez rivojlanayotgan qismlaridan biri, m -qavariq funksiyalar esa qavariq geometriyaning muhim qismi hisoblanadi. Plyuripotentsiallar nazariyasi kompleks tekislik va ko'p o'lchovli kompleks fazoda qurilib, kompleks dinamik sistemalar, funksiyalar nazariyasi, mexanika va matematik fizika masalalarini hal qilishda muhim rol o'ynaydi. Bu nazariyaning asosiy tushunchalari kuchli m -subgarmonik $\left((B)sh_m\right)$ funksiyalar, m -polyar to'plamlar, Dirixle masalasi, Grin funksiyasi kabilar mos ravishda, klassik analitik funksiyalar, garmonik funksiyalar nazariyasidagi kabi aniqlanadi, ammo ularning umumlashmasi bo'lganligi va ko'p o'lchovli kompleks fazoning murakkab tuzilishi tufayli ulardan tubdan farq qiladi hamda zamonaviy matematikada dolzarb masalalarni hal qilishda muhim ahamiyatga ega hisoblanadi. Shu sababli $(B)_m$ -subgarmonik va m -qavariq $(m - cv)$ funksiyalar sinflarini yanada chuqur o'rganish ushbu sohadagi muhim vazifalardan biri bo'lib qolmoqda.

Hozirgi kunda jahonda kompleks tekislik hamda ko'p o'lchamli kompleks fazoda m -subgarmonik va $(B)_m$ -subgarmonik funksiyalar bilan bog'liq masalalarni yechishda, $(A)_m$ -subgarmonik $\left((A)sh_m\right)$ va $(A)_m$ -qavariq $\left((A)_m - cv\right)$ funksiyalar sinfini aniqlash hamda ularning muhim xossalarini o'rganishga bog'liq muammolarni tadqiq qilish muhim ahamiyat kasb etmoqda. m -subgarmonik $(m - sh)$ funksiyalar asosida $(A)_m$ -subgarmonik funksiyalar sinfini tadqiqi ko'p o'lchamli kompleks analizda plyuripotentsiallar nazariyasining m -subgarmonik va $(B)_m$ -subgarmonik funksiyalar bilan bog'liq muammolarni o'rganishda maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda amaliy tatbiqqa ega bo'lgan fundamental fanlarga, xususan plyuripotentsiallar nazariyasida subgarmonik funksiyalar sinflarini o'rganishga e'tibor kuchaydi. Bu borada amaliy tadbiqqa ega bo'lgan plyuripotentsiallar nazariyasining zamonaviy muammolariga, jumladan ko'p o'lchamli kompleks fazoda m -subgarmonik va $(B)_m$ -subgarmonik funksiyalar bilan bog'liq masalalarni tadqiq

qilishga alohida e'tibor qaratildi. Buning natijasida $(A)_m$ -subgarmonik va $(A)_m$ -qavariq funksiyalar sinflarini qurish, bunday funksiyalarning muhim xossalarini o'rganishdashda bir qator muhim natijalarga erishildi. Matematika, fizika va tadbqiqiy matematika sohalarida xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish oliy ta'lim muassasalari faoliyatining asosiy vazifalaridan biri etib belgilandi¹. Ushbu qaror ijrosini ta'minlashda subgarmonik funksiyalar nazariyasini, $(A)_m$ -subgarmonik va $(B)_m$ -subgarmonik funksiyalar nazariyasi rivojlantirish muhim ahamiyatga ega.

Ushbu dissertatsiya ishida olib borilgan tadqiqotlar O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 29-oktabrdagi "Ilm-fanni 2030-yilgacha rivojlantirish Konsepsiyasi" tasdiqlash to'g'risidagi PF-6097-son Farmoni, 2020-yil 6-noyabrdagi "O'zbekistonning yangi taraqqiyot davrida ta'lim-tarbiya va ilm-fan sohalarini rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi PF-6108-son Farmoni, 2022-yil 28-yanvardagi "2022 - 2026 - yillarga mo'ljallangan Yangi O'zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to'g'risida"gi PF-60-son Farmoni hamda 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son "Matematika ta'limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo'llab-quvvatlash, shuningdek, O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi va 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son "Matematika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi Qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga mosligi. Dissertatsiya respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. "Matematika, mexanika va informatika" ustuvor yo'nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o'rganilganlik darajasi. Jahonda subgarmonik va plyurisubgarmonik funksiyalar sinfi ko'pgina mamlakat olimlari E.Bedford, B.A.Teylor, Z.Bloskiy, P.Lelon, A.Sadullaev, Y.Sichyak, M.A.Alan va boshqalar tomonidan bir qancha tadqiqotlar olib borilgan. 2000-yilning boshlarida B.Abdullayev m -subgarmonik sinfidan kichikroq $(A)_m$ -subgarmonik funksiyalar sinfini qarab, bu sinfda potentsiallar nazariyasini qurish g'oyasini ilgari surdi. 2005 yilda Z.Bloskiy tomonidan esa $(B)_m$ -subgarmonik funksiyalar sinfi o'rganilgan va bu sinfning bir qator muhim xossalarini isbotlagan. Shundan keyin $(B)_m$ -subgarmonik funksiyalar sinfida potentsiallar nazariyasi Sadullaev va

¹ O'zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi "Matematika sohasida ta'lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi PQ-4708-son qarori.

Abdullayevlar tomonidan qurilgan. Keyinroq bu nazariya S. Dinev va S. Kolodzey, S.Y. Li, X.Ch. Lu, N.C. Nguyenlar tomonidan juda yaxshi rivojlantirilgan.

A.Sadullaev $m = 2$ da $(B)_m$ -subgarmonik va $(A)_m$ -subgarmonik funksiyalar sinflari ustma-ust tushishini isbotlagan va ixtiyoriy $1 \leq m \leq n$ larda ham bu sinflar ustma-ust tushadimi, degan muammoni qo'yadi.

S.Dinev tomonidan A.Sadullaev gipotezasi $n \leq 7$ va ixtiyoriy m lar uchun ijobiy ekani isbotlangan va $n \geq 11$, $m = 3$ bo'lgan hollar uchun bu gipoteza o'rinli bo'lmasligi ko'rsatilgan. Ammo $n = 8, n = 9, n = 10$ bo'lgan hollarda yuqoridagi gipoteza o'rinli bo'lishi yoki o'rinli bo'lmasligi ko'rsatilmagan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta'lim muassasasining ilmiy tadqiqot ishlari rejalari bilan bog'liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Urganch davlat universiteti Matematik tahlil kafedrasining "Kompleks potentsiallar nazariyasi" mavzusidagi ilmiy tadqiqot rejalari bo'yicha amalga oshirildi.

Tadqiqotning maqsadi $(A)_m$ -subgarmonik va $(B)_m$ -subgarmonik funksiyalarning, shuningdek m -qavariq va $(A)_m$ -qavariq funksiyalarning ustma-ust tushish shartlarini o'rganishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari quyidagilardan iborat:

yuqoridan yarim uzluksiz funksiyalar uchun $(A)_m$ -subgarmonik sinfini aniqlash va ularning ba'zi muhim xossalarini o'rganish;

$(A)_m$ -subgarmonik va $(B)_m$ -subgarmonik funksiyalar sinflarining ustma-ust tushish shartlarini o'rganish;

$(A)_m$ -qavariq funksiyalar sinfini aniqlash;

$(A)_m$ -qavariq va $(A)_m$ -subgarmonik funksiyalar sinflari orasidagi bog'liqlikni o'rnatish;

$(A)_m$ -qavariq va m -qavariq funksiyalar sinflarining ustma-ust tushish shartlarini o'rganish.

Tadqiqotning obyekti $(A)_m$ -subgarmonik funksiyalar, $(B)_m$ -subgarmonik funksiyalar, m -qavariq funksiyalar, $(A)_m$ -qavariq funksiyalar hisoblanadi.

Tadqiqotning predmeti A.Sadullaev gipotezasi, Dekart teoremasi, m -subgarmonik funksiyalar, m -plyurisubgarmonik funksiyalar, Gessianlardir.

Tadqiqotning usullari Dissertatsiya ishida chiziqli algebra usullari, potentsiallar nazariyasi, $(B)_m$ -subgarmonik funksiyalar nazariyasi uslublaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar sinfida $n = 10$, $m = 3$ holda $(A)_m$ -subgarmonik va $(B)_m$ -subgarmonik funksiyalar sinflarining ustma-ust

tushmasligi; $n = 9, m = 3$ va $n = 8, m = 3$ bo'lgan hollarda esa bu sinflarining ustma-ust tushishi isbotlangan;

yuqoridan yarim uzluksiz funksiyalar sinfida $(A)_m$ -subgarmonik funksiyalarni aniqlash imkonini beruvchi chiziqlilik xossasining o'rinli emasligi ko'rsatilgan;

lokal integrallunuvchi funksiyalar sinfida $(A)_m$ -subgarmonik va $(B)_m$ -subgarmonik funksiyalar sinflarining ustma-ust tushishi haqidagi teoremlar isbotlangan;

m -plyurisubgarmonik funksiyalarga asoslangan holda ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi $(A)_m$ -qavariq funksiya ta'rif kiritilgan;

ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi $(A)_m$ -qavariq va $(A)_m$ -subgarmonik funksiyalar ta'riflaridan foydalanib, bunday funksiyalar sinflari orasidagi bog'liqlikni ifodalovchi teorema isbotlangan;

ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi funksiyalar sinfida $n = 9, m = 3$ va $n = 8, m = 3$ bo'lgan hollarda $(A)_m$ -qavariq va m -qavariq funksiyalar sinflarining ustma-ust tushishi isbotlangan;

ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi funksiyalar sinfida $n = 10, m = 3$ bo'lgan holda $(A)_m$ -qavariq va m -qavariq funksiyalar sinflarining ustma-ust tushmasligi, ya'ni $n \geq 10$ holda bu sinflarning turlicha ekanligi ko'rsatilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari. Dissertatsiya ishida isbotlangan $(A)_m$ -subgarmonik va $(B)_m$ -subgarmonik funksiyalarning tengligi haqidagi teoremlardan potentsiallar nazariyasida va matematik fizikada qo'llash imkoniyati mavjud.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Dissertatsiya natijalarini isbotlashda matematik fizika, potentsiallar nazariyasi, plyuripotentsiallar nazariyasi va ko'p kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi uslublaridan foydalanilganligi matematik qat'iyatlikni ifodalaydi. Bundan tashqari, dissertatsiyada olingan natijalarning nufuzli ilmiy nashrlarda, shu jumladan impakt faktorli ilmiy jurnallarda nashr qilinganligi va ilmiy seminarlarda ishning muhokamadan o'tkazilganligi dissertatsiya natijalarining ishonchliligini tasdiqlaydi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati dissertatsiyada $(A)_m$ -subgarmonik va $(B)_m$ -subgarmonik funksiyalar sinflarining ustma-ust tushadigan holatlari ko'rsatilganligi, hamda $(A)_m$ -subgarmonik va $(A)_m$ -qavariq funksiyalar sinflarining orasidagi bog'liqlik aniqlanganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati $(A)_m$ -subgarmonik va $(B)_m$ -subgarmonik funksiyalar sinflarining tengligi haqidagi natijalardan ko'p kompleks

o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasida $(B)_{sh_m}$ funksiyalarni baholashda, matematik fizikadagi Monje-Amper tenglamasini qanoatlantiruvchi funksiyalar sinflarini solishtirish imkonini berishi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Dissertatsiyada olingan natijalar quyidagi ilmiy tadqiqot loyihalarida foydalanilgan:

dissertatsiyada taklif qilingan $(A)_m$ -subgarmonik va $(B)_m$ -subgarmonik funksiyalarning tengligi haqidagi teoremdan Krakovdagi Yagiellonian universiteti tomonidan bajarilgan "Estimates for Monge-Ampere type equations in geometric context" nomli ilmiy loyihasida $(B)_{sh_m}$ funksiyalarni baholashda foydalanilgan (Krakovdagi Yagiellonian universitetining 2024 yil 4-sentabrdagi ma'lumotnomasi, Polsha). Ilmiy natijalarning qo'llanilishi, $(B)_{sh_m}$ funksiyalarning nostandart xossalarini isbotlash imkonini bergan.

$(A)_m$ -subgarmonik va $(B)_m$ -subgarmonik funksiyalarning tengligi haqidagi teoremdan UT-OT-2020-1 raqamli "Monje-Amper tenglamasi va ekstremal plyurisubgarmonik funksiyalar" mavzusidagi fundamental loyihasi doirasida Monje-Amper tenglamasi yechimining xossalarini o'rganishda qo'llanilgan (O'zbekiston milliy universitetining 2024 yil 23-sentabrdagi 04/11-7545-sonli ma'lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo'llanilishi, Monje-Amper tenglamasini qanoatlantiruvchi funksiyalar sinflarini solishtirish va ularning ba'zi xossalarini isbotlash imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining approbatsiyasi. Dissertatsiya tadqiqoti natijalari Urganch davlat universitetining Matematik tahlil kafedrası va V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti Xorazm bo'linmasining "Kompleks potentsiallar nazariyasi va uning qo'llanilishi" birlashgan ilmiy seminarida tizimli ravishda va Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universiteti Matematik analiz kafedrası huzuridagi "Kompleks analizning zamonaviy muammolari" Respublika ilmiy seminarida muhokama qilingan. Bundan tashqari, ushbu natijalar ikkita xalqaro va uchta respublika ilmiy-amaliy konferensiyalarida taqdim etilib, muhokama qilingan.

Tadqiqot natijalarining e'lon qilinishi. Dissertatsiya mavzusi bo'yicha jami 11 ta ilmiy ish chop etilgan bo'lib, shulardan, O'zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining falsafa doktorlik dissertatsiyalarining asosiy ilmiy natijalarini chop etish uchun tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 6 ta maqola, jumladan, 1 tasi xorijiy (Scopus) va 5 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qism, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning hajmi 70 betni tashkil qiladi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismda dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma‘lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning **“Dastlabki ma‘lumotlar”** deb nomlanuvchi birinchi bobida dissertatsiya uchun zarur bo‘lgan umumlashgan funksiyalar, differensial forma va oqimlar, gessianlar, plyurigarmonik va plyurisubgarmonik funksiyalarning xossalari, ta’riflar va teoremlar keltirib o‘tilgan.

Dissertatsiyaning **“(A)sh_m va (B)sh_m funksiyalar sinfi”** deb nomlanuvchi ikkinchi bobi (A)_m-subgarmonik va (B)_m-subgarmonik funksiyalar sinflarining ustma-ust tushish shartlarini o‘rganishga bag‘ishlangan bo‘lib, birinchi paragrafida (B)_m-subgarmonik funksiya hamda m-subgarmonik funksiyalarning ta’rifi va ularning xossalari keltirilgan. Mazkur bobning ikkinchi paragrafi ikki marta silliq (A)_m-subgarmonik funksiyalar va ularning ba’zi xossalarini o‘rganishga bag‘ishlangan. Uchinchi paragrafda (A)_m-subgarmonik va (B)_m-subgarmonik funksiyalarning tengligi haqidagi teoremlar isbotlangan. Xususan, ikki marta silliq kamayuvchi funksiyalar ketma-ketligidan foydalanib, yuqoridan yarim uzluksiz funksiyalar uchun (A)_m-subgarmonik funksiyalar sinfi kiritilgan.

1-ta’rif. Agar ikki marta silliq $u \in C^2(D)$ ($D \subset \mathbb{C}^n$) funksiya uchun (har bir tayinlangan $z^0 \in D$ nuqtada)

$$(dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k} \geq 0, \forall k = 1, 2, \dots, n - m + 1. \quad (1)$$

tengsizliklar bajarilsa, u holda bu funksiya D sohada $(B)sh_m$ ($1 \leq m \leq n$) funksiya deyiladi.

Z.Bloskiy quyidagi teoremani isbotlagan:

1-teorema. Agar ikki marta silliq u funksiya va ixtiyoriy $v_1, \dots, v_{n-m} \in (B)sh_m(D) \cap C^2(D)$ funksiyalar uchun

$$dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1} \geq 0$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $u \in (B)sh_m$ bo‘ladi.

Bu teorema $(B)sh_m$ funksiyalarni $(B)sh_m \cap L_{loc}^1$ sinfida aniqlash imkonini bergan.

2-ta’rif. Agar berilgan $u \in L_{loc}^1(D)$ funksiya D sohada yuqoridan yarim uzluksiz bo‘lib, har qanday ikki marta silliq $v_1, \dots, v_{n-m} \in (B)sh_m(D)$ funksiyalarni olganimizda ham hosil qilingan $dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1}$ oqim:

$$\begin{aligned} & \left[dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1} \right](\omega) = \\ & = \int u dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1} \wedge dd^c \omega, \quad \omega \in F^{0,0} \end{aligned} \quad (2)$$

butun D sohada musbat, ya’ni

$$\int u dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1} \wedge dd^c \omega \geq 0, \quad \forall \omega \in F^{0,0}, \quad \omega \geq 0$$

bo‘lsa, u holda u funksiya D sohada $(B)sh_m$ deyiladi.

3-ta’rif. $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada yuqoridan yarim uzluksiz $u(z)$ funksiyaning $u|_{\Pi}$, $\dim_{\mathbb{C}} \Pi = m$ qisqartmasi $D \cap \Pi$ da subgarmonik funksiya dan iborat bo‘lsa, u holda bu funksiya D sohada m -subgarmonik $(m-sh)$ funksiya deyiladi.

Ikki marta silliq funksiyalar uchun $m-sh$ funksiya ta’rifini quyidagicha ta’riflash mumkin:

Ikki marta silliq $u(z) \in C^2(D)$ funksiya $D \subset \mathbb{C}^n$ sohaning har bir nuqtasida $(dd^c u) \wedge \beta^{m-1} \geq 0$ tengsizlikni qanoatlantirsa, ya’ni D sohaning har bir $o \in D$ nuqtasida

$$\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + \dots + \lambda_{j_m} \geq 0, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n$$

tengsizliklar bajarilsa, u funksiya D sohada $m-sh$ ($1 \leq m \leq n$) funksiya deyiladi.

4-ta’rif. Agar ikki marta silliq $u(z) \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{C}^n$ funksiya uchun D sohaning har bir nuqtasida

$$(dd^c u) \wedge \beta^{m-1} \geq 0, \quad (dd^c u)^{n-m+1} \wedge \beta^{m-1} \geq 0,$$

tengsizliklar bajarilsa, ya’ni har bir $o \in D$ nuqtada

$$\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + \dots + \lambda_{j_m} \geq 0, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n \quad \text{va} \quad H_o^{n-m+1}(u) \geq 0.$$

tengsizliklar bajarilsa, u holda $u(z)$ funksiya D sohada $(A)sh_m$, ($1 \leq m \leq n$) deyiladi.

2-teorema. $u \in C^2(D) \cap m-sh(D)$ bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $v \in C^2 \cap (A)sh_m$ funksiya uchun $dd^c u \wedge (dd^c v)^{n-m} \wedge \beta^{m-1} \geq 0$ tengsizlik bajarilsa, u holda $u \in (A)sh_m$ bo‘ladi.

2-teoremaning teskarisi o‘rinli emas, ya’ni shunday $u \in C^2 \cap (A)sh_m$ va $v \in C^2 \cap (A)sh_m$ funksiyalar mavjudki, $dd^c u \wedge (dd^c v)^{n-m} \wedge \beta^{m-1} < 0$ bo‘ladi.

A.Sadullaev $m = 2$ da $(B)sh_m(D)$ va $(A)sh_m(D)$ funksiyalar sinflari ustma-ust tushishini isbotlagan va ixtiyoriy $m, (1 \leq m \leq n)$ larda ham $(B)sh_m(D) = (A)sh_m(D)$ bo‘ladimi, degan muammoni qo‘yadi.

S.Dinev tomonidan A.Sadullaev gipotezasi $n \leq 7$ va ixtiyoriy m lar uchun ijobiy ekani isbotlangan va $n \geq 11, m = 3$ bo‘lgan hollar uchun o‘rinli bo‘lmashligi ko‘rsatilgan.

2.3 paragrafning asosiy natijasi quyidagi teoremda o‘z aksini topadi:

3-teorema. $D \subset \mathbb{C}^n$ bo‘lsin. U holda

1) Sadullaev gipotezasi $n = 10, m = 3$ uchun noto‘g‘ri;

2) Sadullaev gipotezasi $n = 9, m = 3$ uchun to‘g‘ri;

3) Sadullaev gipotezasi $n = 8, m = 3$ uchun to‘g‘ri;

Shuningdek mazkur paragrafda yuqoridan yarim uzluksiz $(A)sh_m$ funksiyalar sinfi kiritilgan va ularning ba’zi xossalari isbotlangan.

5-ta’rif. Agar $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada berilgan $u(z)$ funksiya:

1) yuqoridan yarim uzluksiz, ya’ni $\overline{\lim_{w \rightarrow z}} u(w) \leq u(z) \quad \forall z \in D$;

2) ixtiyoriy kompakt $G \subset\subset D$ soha uchun shunday monoton $u_j(z) \in (A)sh_m \cap C^2(G)$ ketma-ketlik mavjudki, $u_j(z) \downarrow u(z)$.

shartlarni qanoatlantirsa, u holda bu funksiya $D \subset \mathbb{C}^n$ sohada $(A)sh_m$ deyiladi.

$u(z) \equiv -\infty$ funksiya odatdagidek, $(A)sh_m(D)$ sinfga kiritiladi.

$(A)sh_m$ funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

1. $(A)sh_m(D) \subset m - sh(D) \subset sh(D)$. Bundan agar $u(z) \not\equiv -\infty$ bo‘lsa, u holda $u(z) \in L_{loc}^1(D)$ bo‘lishi kelib chiqadi.

2. $psh(D) = (A)sh_1(D)$, $(A)sh_n(D) = sh(D)$.

3. $(A)sh_m \subset L_{loc}^1$, bundan esa $u(z) \not\equiv -\infty$ funksiya uchun $\{u(z) = -\infty\}$ to‘plamning Lebeg o‘lchovi nolga tengligi kelib chiqadi. Lekin $(A)sh_m \subset m - sh \subset sh$ ekanligidan ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $\{u(z) = -\infty\}$ to‘plamning $\mathcal{H}_{2n-2+\varepsilon}$ – Hausdorff o‘lchovi ham nolga tengligi kelib chiqadi.

$(A)sh_m$ funksiyalarning yig'indisi har doim ham $(A)sh_m$ sinfga tegishli bo'lavermaydi.

Mazkur bobda $u(z) \in L^1_{loc}(D)$ funksiyalar uchun S.Dinev va A.Sadullaev teoremlari hamda 3-teoremaning analoglari isbotlangan.

4-teorema. $D \subset \mathbb{C}^n$, $1 \leq m \leq n \leq 7$ bo'lsin. U holda

$(A)sh_m(D) = (B)sh_m(D)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

5-teorema. Ixtiyoriy $n > 2$, $m = 2$ uchun $(A)sh_m(D) = (B)sh_m(D)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

6-teorema. $D \subset \mathbb{C}^n$ bo'lsin. U holda $n = 9$ va $n = 8$ lar uchun $(A)sh_3(D) = (B)sh_3(D)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Dissertatsiyaning uchinchi bobi " **m -qavariq funksiyalar.** $(A)m - cv$ funksiyalar sinfi" deb nomlangan bo'lib, unda m -qavariq $(m - cv)$ va $(A)m - cv$ funksiyalar hamda ularning mos ravishda $(B)sh_m$ va $(A)sh_m$ funksiyalar bilan bog'liqligi o'rganilgan. Undan tashqari 3.3 paragrafda $(A)m - cv = m - cv$ va $(A)m - cv \neq m - cv$ bo'lgan holatlar o'rganilgan.

m -qavariq funksiyalar. $D \subset \mathbb{R}^n$ va $u(x) \in C^2(D)$ bo'lsin. U holda $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_t} \right)$

matrisa simmetrik bo'ladi, ya'ni $\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_t \partial x_k}$. Ortonormal almashtirishlardan keyin bu matrisa quyidagi diagonal ko'rinishga keladi:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_t} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

bu yerda $\lambda_j = \lambda_j(x) \in \mathbb{R}$ soni $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_t} \right)$ matrisaning xos qiymatlari.

$H^k(u) = H^k(\lambda) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_k}$ ga $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$ xos qiymatlarning k

o'lchamli gessian vektori deyiladi.

6-ta'rif. Agar ikki marta silliq $u \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ funksiyaning

$\lambda = \lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x))$ xos qiymatlari vektori

$$H^k(\lambda(x)) \geq 0, \forall x \in D, k = 1, \dots, n - m + 1$$

tengsizliklarni qanoatlantirsa, u holda bu funksiya $D \subset \mathbb{R}^n$ sohada $m - qavariq$ ($u \in m - cv(D)$) deyiladi.

Ravshanki, $1 - cv(D) \subset m - cv(D) \subset n - cv(D) = sh(D)$. Hozirgi vaqtda $m - cv$ funksiyalar yangi yondashuv asosida, ya'ni ularni $(B)sh_m$ funksiyalar bilan bog'lanishidan foydalanib o'rganilmoqda. $\mathbb{R}_x^n$ kompleks $\mathbb{C}_z^n$ fazosining haqiqiy n o'lchovli qism fazosi, ya'ni $\mathbb{R}_x^n \subset \mathbb{C}_z^n = \mathbb{R}_x^n + i\mathbb{R}_y^n (z = x + iy)$ bo'lsin.

7-teorema. Ikki marta silliq $u(x) \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}_x^n$ funksiya D sohada $m - cv$ bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, qachonki $y \in \mathbb{R}_y^n$ o'zgaruvchiga bog'liq bo'lmagan $u^c(z) = u^c(x + iy) = u(x)$ funksiya $D \times \mathbb{R}_y^n$ sohada $(B)sh_m$ funksiyadan iborat bo'lsa.

$m - psh$ funksiyalar. $(A)m - qavariq$ funksiyalar sinfini ta'riflashda m o'lchovli $\forall \Pi \subset \mathbb{R}^n$, $\dim_{\mathbb{R}} \Pi = m$ tekisliklardagi qisqartmasi subgarmoniklik xossasiga ega bo'lgan $m - plyurisubgarmonik$ funksiyalar deb nomlanuvchi funksiyalar sinfi kerak bo'ladi.

7-ta'rif. $u(x)$ funksiya $D \subset \mathbb{R}^n$ sohada berilgan bo'lsin. Agar bu funksiya quyidagi

$$1) D \text{ sohada yuqoridan yarim uzluksiz, ya'ni } \overline{\lim_{x \rightarrow x^0}} u(x) \leq u(x^0);$$

$$2) \text{ Har bir } m - \text{o'lchovli haqiqiy } \Pi \subset \mathbb{R}^n (\dim_{\mathbb{R}^n} \Pi = m) \text{ tekislik uchun } u|_{\Pi} \in sh(\Pi \cap D)$$

shartlarni qanoatlantirsa, u holda $u(x)$ funksiya D sohada $m - plyurisubgarmonik(m - psh)$ ($m - \text{o'lchovli haqiqiy tekisliklarda subgarmonik, bunda } 1 \leq m \leq n$) deyiladi.

$m - psh(D)$ funksiyalar subgarmonik bo'ladi va shuning uchun bunday funksiyalar subgarmonik funksiyalarning barcha xossalarini qanoatlantiradi.

$m - psh$ funksiya ta'rifidan quyidagi tasdiq kelib chiqadi:

Agar ikki marta silliq $u \in C^2(D)$ funksiyaning $\lambda = \lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x))$ xos qiymatlari vektori $\lambda_{j_1}(x) + \lambda_{j_2}(x) + \dots + \lambda_{j_m}(x) \geq 0$, $1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n$ tengsizliklarni qanoatlantirsa, u holda u funksiya $m - psh$ funksiyadan iborat bo'ladi.

$(A)m - cv$ funksiyalar.

8-ta'rif. Agar ikki marta silliq $u \in C^2(D)$ funksiyaning $\lambda = \lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x))$ xos qiymatlari vektori $\lambda_{j_1}(x) + \lambda_{j_2}(x) + \dots + \lambda_{j_m}(x) \geq 0, 1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n$ va $H^{n-m+1}(\lambda(x)) \geq 0, \forall x \in D$ tengsizliklarni qanoatlantirsa, u holda bu funksiya $D \subset \mathbb{R}^n$ sohada $(A)m - cv$ qavariq ($u \in (A)m - cv(D)$) deyiladi.

Shunday qilib, $(A)m - cv$ funksiya bu $H^{n-m+1}(\lambda(x)) \geq 0$ qo'shimcha shartga ega bo'lgan m -plyurisubgarmonik funksiya ekan. Ta'rifdan ko'rinadiki, $(A)1 - cv$ funksiya qavariq funksiyalar sinfi bilan, $(A)n - cv$ funksiyalar esa subgarmonik funksiyalar sinfi bilan ustma-ust tushadi

$(A)m - cv$ funksiyalar bilan $(A)sh_m$ funksiyalar orasidagi bog'liqlikni ifodalash uchun $\mathbb{C}_z^n, z = x + iy, \mathbb{C}_z^n = \mathbb{R}_x^n \times i\mathbb{R}_y^n$ kompleks fazodagi haqiqiy $\mathbb{R}_x^n$ fazo qaraladi. U holda quyidagi teorema o'rinli:

8-teorema. Ikki marta silliq $u(x) \in C^2(D), D \subset \mathbb{R}_x^n$ funksiya D sohada $(A)m - cv$ bo'ladi, faqat va faqat shu holdaki, qachonki $y \in \mathbb{R}_y^n$ o'zgaruvchiga bog'liq bo'lmagan $u^c(z) = u^c(x + iy) = u(x)$ funksiya $D \times \mathbb{R}_y^n$ sohada $(A)sh_m$ funksiyadan iborat bo'lsa.

3.2-paragrafda $u(x) = \ln(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$ funksiya $(A)m - cv$ likka tekshiriladi va quyidagi xulosaga kelinadi:

1-tasdiq. $u(x) = \ln(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$ funksiya $n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq m \leq n, n \geq 2$

bo'lganda $m - cv$ va $(A)m - cv$ funksiyadan iborat. $m < n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, n \geq 2$

bo'lganda esa bu funksiya $m - cv$ ham, $(A)m - cv$ ham bo'la olmaydi.

3.3 paragrafda oldingi bobdagi kabi $m - cv$ va $(A)m - cv$ funksiyalar sinflari ustma-ust tushishi haqidagi savol qaraladi va quyidagi teoremlar isbotlanadi:

9-teorema. $D \subset \mathbb{R}^n$ bo'lsin. U holda

$$(A)2 - cv(D) \cap C^2(D) = 2 - cv(D) \cap C^2(D)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

10-teorema. $D \subset \mathbb{R}^n, 1 \leq m \leq n \leq 7$ bo'lsin. U holda

$$(A)m - cv(D) = m - cv(D) \cap C^2(D)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

11-teorema. $D \subset \mathbb{R}^n$ bo'lsin. U holda $n = 9$ va $n = 8$ uchun $(A)3 - cv(D) = 3 - cv(D) \cap C^2(D)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

$n = 10, m = 3$ bo'lgan holda $(A)m - cv$ va $m - cv$ funksiyalar sinflari ustma-ust tushmaydi, ya'ni $n \geq 10$ larda bu sinflar turli xil bo'ladi.

XULOSA

Dissertatsiya ishi $(A)sh_m$, $(B)sh_m$ hamda $(A)m - cv$ va $m - cv$ funksiyalar sinflarini o'rganishga bag'ishlangan.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1) $n = 10, m = 3$ da $(A)sh_m(D) \cap C^2(D)$ va $(B)sh_m(D) \cap C^2(D)$ sinflar ustma-ust tushmasligi ko'rsatilgan;

2) $n = 9, n = 8, m = 3$ bo'lgan hollarda bu sinflar ustma-ust tushishi isbotlangan va Dinev teoremasi natijalari to'ldirilgan;

3) Yuqoridan yarim uzluksiz funksiyalar uchun $u \in (A)sh_m(D)$ sinf o'rganilgan. Bunday funksiyalarning ba'zi muhim xossalari isbotlangan;

4) $(A)sh_m$ funksiyalar sinfi chiziqlilik xossasiga ega emasligi misol yordamida, ya'ni ikkita $(A)sh_m$ funksiyalar yig'indisi hamma vaqt ham $(A)sh_m$ funksiyadan iborat bo'lmasligi ko'rsatilgan;

5) $(A)sh_m \subset (A)sh_{m+1}$ munosabat $n = 11, m = 3$ uchun noto'g'riligi ko'rsatilgan;

6) S.Dinev teoremasining analogi, ya'ni $1 \leq m \leq n \leq 7$ bo'lgan hollarda $(A)sh_m(D) = (B)sh_m(D)$ tenglik o'rinli ekanligi isbotlangan;

7) A.Sadullaev teoremasining analogi, ya'ni ixtiyoriy $n > 2, m = 2$ lar uchun $(A)sh_m(D) = (B)sh_m(D)$ tenglikning to'g'riligi isbotlangan;

8) $n = 9, n = 8$ va $m = 3$ bo'lgan hollarda $(A)sh_m(D) = (B)sh_m(D)$ tenglikning o'rinliligi isbotlangan;

9) $m - psh$ funksiyalar yordamida $(A)m - qavariq ((A)m - cv)$ funksiyalar aniqlangan va ularning muhim xossasi isbotlangan;

10) $(A)m - cv$ funksiyalar bilan $(A)sh_m$ funksiyalar orasida bog'liqlik o'rnatilgan;

11) $u(x) = \ln(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$ funksiya misolida $n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq m \leq n, n \geq 2$ bo'lganda bu funksiyaning $(A)m - cv$ va $m - cv$ funksiya bo'lishi, $m < n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, n \geq 2$ bo'lganda esa bu funksiya $m - cv$ ham, $(A)m - cv$ ham bo'lmasligi isbotlangan;

12) $m = 2$ uchun $(A)m - cv(D) \cap C^2(D) = m - cv(D) \cap C^2(D)$ tenglik to'g'riligi haqidagi A.Sadullayev teoremasining analogi isbotlangan;

13) $1 \leq m \leq n \leq 7$ bo'lganda

$$(A)m - cv(D) \cap C^2(D) = m - cv(D) \cap C^2(D)$$

tenglik o'rinli bo'lishi haqidagi S.Dinev teoremasining analogi isbotlangan;

14) $n = 9$ va $n = 8$ uchun $(A)3 - cv(D) = 3 - cv(D) \cap C^2(D)$ tenglik o'rinli bo'lishi haqidagi teorema isbotlangan;

$$15) \quad u(x_1, x_2, \dots, x_{10}) = -\sum_{j=1}^2 x_j^2 + 2\sum_{j=3}^{10} x_j^2 \text{ funksiya} \quad \text{misolida} \quad n = 10, m = 3$$

uchun $(A)m - cv$ va $m - cv$ funksiyalar sinflari turlicha ekanligi ko'rsatilgan.

Umuman olganda, olingan natijalar dissertatsiya tadqiqotining belgilangan maqsadiga erishilganligini, $(A)sh_m(D)$ va $(B)sh_m(D)$ sinflar, shuningdek, $(A)m - cv(D)$ va $m - cv(D)$ sinflarining ustma-ust tushishi yoki tushmasligi har tomonlama aniqlanganligini ko'rsatadi. Natijalar tegishli misollar yordamida to'liq o'rganildi.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.12.2019.FM.55.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
УРГЕНЧСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

УРГЕНЧСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

КАЛАНДАРОВА ДИЛДОРА АБДУЛЛАЕВНА

ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ ФУНКЦИЙ $(A)sh_m$ И $(B)sh_m$

01.01.01 – Математический анализ

**АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим
наукам**

Ургенч – 2025 г.

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при министерстве Высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за № B2024.2.PhD/FM1048.

Диссертация выполнена в Ургенчском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-mat.urdu.uz) и на информационно образовательном портале «Ziynet» (www.ziynet.uz).

Научный руководитель:

Абдуллаев Бахром Исмаилович
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Шоимкулов Баходир Аллабердиевич
доктор физико-математических наук, профессор
Атамуратов Алимардон Абдиримович
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Ведущая организация:

Каракалпакский государственный университет

Защита диссертации состоится « 01 » Март 2025 года в 16 : 00 на заседании Научного совета PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 Ургенчском государственном университете. (Адрес: 220100, г. Ургенч, ул. Х. Алимджана, 14. Тел.: (+998 62) 224 66 11, факс: (+998 62) 224 67 00, e-mail: ik-mat.urdu@umail.uz

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Ургенчского государственного университета. (зарегистрирована за № D-765). (Адрес: 220100, г. Ургенч, ул. Х. Алимджана, 14. Тел.: (+998 62) 224 66 11, факс: (+998 62) 224 67 00). e-mail: arm@urdu.uz

Автореферат диссертации разослан « 17 » сентября 2025 года.

(протокол рассылки № 2 от « 17 » сентября 2025 года).



Г.У. Уразбоев

Заместитель председателя Научного совета
по присуждению ученых степеней, д.ф-м.н.

А.А. Реймбергенов

Ученый секретарь Научного совета по
присуждению ученых степеней, к.ф-м.н.

Б.А. Бабажанов

Председатель Научного семинара при
научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф-м.н.

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научно-практические исследования в области математического анализа, механики и физики, проводимые во всем мире, приводятся к задачам теории теории потенциала и плюрипотенциала. В теории потенциала и теории плюрипотенциала играет важную роль функций комплексной переменной, m -субгармонических функций, сильно m -субгармонических $((B)sh_m)$ функций в комплексном пространстве $\mathbb{C}^n$ и m -выпуклых функций в действительном евклидовом пространстве n -переменных. Теория $(B)sh_m$ функций является одной из важных и быстро развивающихся частей комплексного анализа, а теория m -выпуклых функций является важной частью выпуклой геометрии. Теория плюрипотенциала построенная как на комплексной плоскости, так и в многомерном комплексном пространстве, играет важную роль при решении актуальных задач комплексных динамических систем, теории функций, механики и математической физики. Основные понятия этой теории – сильно m -субгармонические $((B)sh_m)$ функции, m -полярные множества, задача Дирихле, функция Грина и др. вводятся также как понятия классической теории аналитических и гармонических функций, однако они отличаются друг от друга в связи с тем, что они являются обобщениями классических понятий и со сложной структурой многомерного комплексного пространства. Поэтому углубленное исследование классов $(B)m$ -субгармонических и m -выпуклых $(m-cv)$ функций является одной из важных задач в этой области.

В настоящее время во всем мире проводятся научные исследования по решению проблем, связанных с m -субгармоническими и $(B)m$ -субгармоническими функциями в комплексной плоскости и многомерном комплексном пространстве и для внедрения этих результатов на практических задач. $(B)m$ -субгармонические функции широко используются при решении актуальных задач комплексных динамических систем, теории функций, механики и математической физики. Также, устанавливая связь между $(B)m$ -субгармоническими функциями и классами m -выпуклых функций, доказывается ряд свойств m -выпуклых функций. В связи с этим уделяется особое внимание получению новых научных результатов при помощи $(B)m$ -субгармонических функций и их свойств, а также применению полученных результатов к решению актуальных задач теории функций.

В нашей стране, в последние годы, уделяется особое внимание актуальным научным направлениям фундаментальных наук. В частности, интенсивно изучаются теория функций, многомерный комплексный анализ, теория плюрипотенциалов, теория приближений и теория сложных динамических систем. Проведение научных исследований на уровне международных

стандартов по приоритетным направлениям математики, физики и прикладной математики². Проведение научных исследований по $(A)sh_m$ и $(B)sh_m$ функций считается важным в обеспечении реализации данного решения.

Данная диссертация, в определенной степени, служит осуществлению задач, обозначенных в Указах №УП-6097 «Об утверждении концепции развития науки до 2030 года» от 29 октября 2020 года, указах №УП-6108 «О мерах по развитию сфер образования и воспитания, и науки в новый период развития Узбекистана» от 6 ноября 2020 года, №УП-60 «О стратегии развития нового Узбекистана на 2022-2026 годы» от 28 января 2022 года, Постановлениях Президента Республики Узбекистан №-ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан» от 9 июля 2019 года, №-ПП-4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 7 мая 2020 года, а также в других нормативно-правовых актах по данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. В мире класс субгармонических и плюрисубгармонических функций изучался учёными многих стран, среди которых Э. Бедфорд, Б. А. Тейлор, З. Блоцки, П. Лелон, А. Садуллаев, Ю. Сичяк, М. А. Алан и др. В начале 2000-х Б.Абдуллаев рассмотрел класс функций $(A)sh_m$, который меньше класса $m - sh$, и выдвинул идею построения теории потенциала в этом классе. В 2005 г. З. Блоцким был изучен класс $(B)sh_m$ и доказан ряд важных свойств этого класса. После этой работы теория потенциала в классе $(B)sh_m$ была построена Садуллаевым-Абдуллаевым. Эта теория в настоящее время стала хорошо развитым предметом исследований ряда авторов, таких как С. Динев и С. Колодзей, С.Ю. Ли, Х.Ч. Лу, Н.С.Нгуен.

А.Садуллаев доказал, что классы $(A)sh_m(D)$ и $(B)sh_m(D)$ совпадают при $m = 2$, и поставил вопрос о том, будет ли $(B)sh_m(D) = (A)sh_m(D)$ в произвольном $1 \leq m \leq n$.

С.Динев доказал, что гипотеза А.Садуллаева положительна при $n \leq 7$ для произвольного m , и показал, что она неверна при $n \geq 11$, $m = 3$. Однако не

² Постановление Президента Республики Узбекистан “О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики” №ПП-4708 от 7 мая 2020 г.

было показано, верна или нет приведенная выше гипотеза при $n = 8, n = 9, n = 10$.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения, где выполнялась диссертация. Исследование выполнено в соответствии с планом научных исследований по теме «Комплексная теория потенциала» кафедры Математического анализа Ургенчского государственного университета.

Целью исследования является изучение возможности совпадения классов $(A)t$ -субгармонических и $(B)t$ -субгармонических функций, а также классов $(A)t$ -выпуклых и t -выпуклых функций.

Задачи исследования, решаемые в данной работе:

изучать класс $(A)t$ -субгармонических для полунепрерывных сверху функций и исследовать некоторые важные свойства этих функций;

исследовать условия совпадения классов $(A)t$ -субгармонических и $(B)t$ -субгармонических функций;

определить класс $(A)t$ -выпуклых функций;

установить связь между классами $(A)t$ -выпуклых и $(A)t$ -субгармонических функций;

исследовать условия совпадения классов $(A)t$ -выпуклых и t -выпуклых функций.

Объект исследования. $(A)t$ -субгармонические функции, $(B)t$ -субгармонические функции, t -выпуклые функции, $(A)t$ -выпуклые функции.

Предмет исследования. Гипотеза А.Садуллаева, теорема Декарта, t -субгармонические функции, t -плюрисубгармонические функции, гессианы.

Методика исследования. В диссертационной работе используются методы линейной алгебры, теории потенциала, теория $(B)t$ -субгармонических функций.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

в случае $n = 10, t = 3$ доказано, что для дважды гладких функций классы $(A)t$ -субгармонических и $(B)t$ -субгармонических не совпадают, в случаях, когда $n = 9, n = 8$ и $t = 3$, было доказано, что эти классы совпадают;

показано, что $(A)t$ -субгармонические функции не обладают свойствами линеризации, позволяющими определить их в классе полунепрерывных сверху функций;

доказаны теоремы о совпадении классов $(A)t$ -субгармонических и $(B)t$ -субгармонических функций из класса локально интегрируемые функции;

введено определение дважды гладкой $(A)t$ -выпуклой функции, основанной на t -плюрисубгармонических функциях;

доказана теорема, выражающая связь между классами дважды гладких $(A)t$ -выпуклых и $(A)t$ -субгармонических функций;

в случаях, когда $n = 9$, $n = 8$ и $t = 3$, было доказано, что для дважды гладких функций классы $(A)t$ -выпуклых и t -выпуклых совпадают;

в случае $n = 10$, $t = 3$ доказано, что для дважды гладких функций классы $(A)t$ -выпуклых и t -выпуклых не совпадают, то есть эти классы функций различны при $n \geq 10$.

Практические результаты исследования заключаются в возможности применения полученной в диссертации теоремы о равенстве $(A)t$ -субгармонических и $(B)t$ -субгармонических функций, $(A)t$ -выпуклых и t -выпуклых функций, в теории потенциала и в математической физике.

Достоверность результатов исследования обоснована строгими математическими доказательствами теорем, применением известных методов математической физики, классической теории потенциала и теории функций многих комплексных переменных. Кроме того, публикацией результатов диссертации в авторитетных научных журналах, в частности с импакт-факторами и апробациями работы на научных семинарах, на республиканских и международных конференциях. Все это доказывают достоверность результатов диссертации.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования объясняется в том, что доказаны теоремы о равенстве классы $(A)t$ -субгармонических и $(B)t$ -субгармонических функций, доказана теорема, выражающая связь между классами дважды гладких $(A)t$ -выпуклых и $(A)t$ -субгармонических функций.

Практическая значимость результатов исследования объясняется в том, что полученные научные результаты могут быть применены в теории функций многих комплексных переменных при исследовании нестандартных свойств $(B)sh_m$ функций и позволяет сравнить классы функций, удовлетворяющих уравнению Монжа-Ампера в математической физике.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Предложенная в диссертации теорема о равенстве $(A)t$ -субгармонических и $(B)t$ -субгармонических функций была использована для

оценки $(B)_m$ -субгармонических функций в научном проекте «Оценки уравнений типа Монжа-Ампера в геометрическом контексте», выполненном Ягеллонским Университетом в Кракове (справка Ягеллонского Университета в Кракове от 4 сентября 2024 г., Польша). Применение научных результатов позволило доказать нестандартные свойства $(B)sh_m$ функций.

Теорема о равенстве $(A)_m$ -субгармонических и $(B)_m$ -субгармонических функций применен в исследованиях свойств решения уравнения Монжа-Ампера при выполнении гранта УТ-ОТ-2020-1: «Уравнение Монжа-Ампера и экстремальные плюрисубгармонические функции» (справка №04/11-7545 Национального университета Узбекистана от 23 сентября 2024 года). Применение научных результатов позволило сравнить классы функций, удовлетворяющих уравнению Монжа-Ампера, и доказать некоторые их свойства.

Апробация результатов исследования. Полученные результаты диссертационного исследования были обсуждены на объединенном научном семинаре «Комплексная теория потенциала и ее применения» Хорезмского отдела Математического института им. В.И. Романовского и кафедры математического анализа Ургенчского государственного университета, а также на семинаре «Современные проблемы комплексного анализа» при кафедре Математического анализа Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека. Кроме того, они были представлены и обсуждены на нескольких научно-практических конференциях, включая 2 международных и 3 республиканскую.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 11 статей, из них 6 в научных изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики, в том числе 1 опубликована в зарубежном журнале, индексируемом в базе Scopus и 5 в республиканских научных изданиях.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Нумерации теорем, предложений, определений, формул сквозные, отдельно для каждой главы. Общее число страниц диссертационной работы – 70 стр.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **“Предварительные сведения”**, упоминаются обобщенные функции, дифференциальные формы и потоки, гессианы, свойства плюригармонических и плюрисубгармонических функций, необходимые для диссертации определения и теоремы.

Вторая глава диссертации, названная **“Класс $(A)sh_m$ и $(B)sh_m$ функций”**, изучаются условия перекрытия $(A)sh_m$ и $(B)sh_m$ классов функций. В первом параграфе дано определение $(B)_m$ -субгармонических и m -субгармонических функций и их свойств. Второй параграф этой главы посвящен изучению дважды гладких $(A)sh_m$ функций и некоторых их свойств. В третьем параграфе доказываются теоремы о равенстве функций $(A)sh_m$ и $(B)sh_m$. В частности, при помощи убывающей последовательности дважды гладких функций введен класс $(A)sh_m$ для полунепрерывных сверху функций.

Определение 1. Дважды гладкая функция $u \in C^2(D)$, где $D \subset \mathbb{C}^n$, называется $(B)sh_m$ в D , $(1 \leq m \leq n)$, если оператор

$$(dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k} \geq 0, \forall k = 1, 2, \dots, n - m + 1. \quad (1)$$

3. Блоцкий доказал следующую теорему:

Теорема 1. Если дважды гладкая функция u , удовлетворяет

$$dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1} \geq 0$$

для всех $v_1, \dots, v_{n-m} \in (B)sh_m(D) \cap C^2(D)$, то u непременно является $(B)sh_m$ функцией.

Это обстоятельство позволило определить $(B)sh_m$ функции в классе $(B)sh_m \cap L^1_{loc}$.

Определение 2. Функция $u \in L^1_{loc}(D)$ называется $(B)sh_m(D)$, если она полунепрерывна сверху и для любых дважды гладких $(B)sh_m(D)$ функций $v_1, \dots, v_{n-m}$ поток $dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1}$, определяемый как

$$\begin{aligned} & \left[dd^c u \wedge dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1} \right](\omega) = \\ & = \int u dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1} \wedge dd^c \omega, \quad \omega \in F^{0,0} \end{aligned} \quad (2)$$

положителен, то есть

$$\int u dd^c v_1 \wedge \dots \wedge dd^c v_{n-m} \wedge \beta^{m-1} \wedge dd^c \omega \geq 0, \quad \forall \omega \in F^{0,0}, \quad \omega \geq 0.$$

Определение 3. Полунепрерывная сверху функция $u(z)$ в области $D \subset \mathbb{C}^n$, называется $m-sh$ функцией, если сужение $u|_{\Pi}$, $\dim_{\mathbb{C}} \Pi = m$, является субгармонической функцией в $D \cap \Pi$.

Отметим, что дважды гладкая функция $u(z) \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{C}^n$, является $m-sh$ ($1 \leq m \leq n$), тогда и только тогда, когда в каждой точке области D имеет место неравенство

$$(dd^c u) \wedge \beta^{m-1} \geq 0,$$

т.е. если в каждой точке $o \in D$ выполняются неравенства

$$\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + \dots + \lambda_{j_m} \geq 0, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n.$$

$m-sh$ функция в области $D \subset \mathbb{C}^n$ в то же время является субгармонической в $D \subset \mathbb{R}^{2n}$.

Определение 4. Дважды гладкая функция $u(z) \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{C}^n$, называется $(A)sh_m$ ($1 \leq m \leq n$), если в каждой точке области D имеет места неравенства

$$(dd^c u) \wedge \beta^{m-1} \geq 0, \quad (dd^c u)^{n-m+1} \wedge \beta^{m-1} \geq 0,$$

т.е. если в каждой точке $o \in D$ выполняются неравенства

$$\lambda_{j_1} + \lambda_{j_2} + \dots + \lambda_{j_m} \geq 0, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n \text{ и } H_o^{n-m+1}(u) \geq 0.$$

Теорема 2. Пусть $u \in C^2(D) \cap m-sh(D)$. Если для любой функции $v \in C^2(D) \cap (A)sh_m(D)$ выполнено неравенство $dd^c u \wedge (dd^c v)^{n-m} \wedge \beta^{m-1} \geq 0$, то $u \in (A)sh_m(D)$.

Обратное утверждение теоремы 2 неверно, т. е. существуют функции $u \in C^2(D) \cap (A)sh_m(D)$ и $v \in C^2(D) \cap (A)sh_m(D)$ такие, что неравенство $dd^c u \wedge (dd^c v)^{n-m} \wedge \beta^{m-1} \geq 0$ не выполняется, т.е. $dd^c u \wedge (dd^c v)^{n-m} \wedge \beta^{m-1} < 0$.

А.Садуллаев доказал, что классы $(A)sh_m(D) \cap C^2(D)$ и $(B)sh_m(D) \cap C^2(D)$ совпадают при $m = 2$, и поставил вопрос о том, будет ли $(A)sh_m(D) \cap C^2(D) = (B)sh_m(D) \cap C^2(D)$ при произвольном $1 \leq m \leq n$.

С.Динев показал, что при $n \leq 7$ эти классы действительно совпадают, однако при $n = 11$, $m = 3$ эти классы различные.

Следующая теорема является основным результатом раздела 2.3.

Теорема 3. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$. Тогда

- 1) Гипотеза Садуллаева неверна для $n = 10$, $m = 3$;
- 2) Гипотеза Садуллаева верна для $n = 9$, $m = 3$;
- 3) Гипотеза Садуллаева верна для $n = 8$, $m = 3$.

Также в этом параграфе вводится класс $(A)sh_m$ функций и доказываются некоторые их свойства.

Определение 5. Функция $u(z)$, заданная в области $D \subset \mathbb{C}^n$, называется $(A)sh_m$ в области $D \subset \mathbb{C}^n$, если она

- 1) полунепрерывна сверху, т.е. $\overline{\lim}_{w \rightarrow z} u(w) \leq u(z)$, $\forall z \in D$;
- 2) для любой компактной области $G \subset\subset D$ существует монотонная последовательность $u_j(z) \in (A)sh_m \cap C^2(G) : u_j(z) \downarrow u(z)$.

Функция $u(z) \equiv -\infty$, как обычно, тоже включается в $(A)sh_m(D)$.

Имеют место следующие свойства $(A)sh_m$ функций.

1. $(A)sh_m(D) \subset m - sh(D) \subset sh(D)$. Поэтому, если $u(z) \not\equiv -\infty$, то $u(z) \in L_{loc}^1(D)$.
2. $psh(D) = (A)sh_1(D)$, $(A)sh_n(D) = sh(D)$.
3. $(A)sh_m(D) \subset L_{loc}^1(D)$, поэтому для $u(z) \not\equiv -\infty$ множество $\{u(z) = -\infty\}$ имеет Лебегова меру ноль. Но из включения $(A)sh_m \subset m - sh \subset sh$ следует также, что Хаусдорфова $\mathcal{H}_{2n-2+\varepsilon}$ -мера множества $\{u(z) = -\infty\}$ тоже равна нулю для любого $\varepsilon > 0$.

Сумма функций $(A)sh_m(D)$ не всегда является функцией из класса $(A)sh_m(D)$.

В этой главе доказываются теоремы Динева и Садуллаева, а также аналоги теоремы 3 для функций $u(z) \in L_{loc}^1(D)$.

Теорема 4. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$, $1 \leq m \leq n \leq 7$. Тогда справедливо равенство $(A)sh_m(D) = (B)sh_m(D)$.

Теорема 5. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$. Для любых $n > 2$, $m = 2$ справедливо равенство $(A)sh_m(D) = (B)sh_m(D)$.

Теорема 6. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$. Тогда для $n = 9$ и $n = 8$ справедливо равенство $(A)sh_3(D) = (B)sh_3(D)$.

Третья глава диссертации названная “ **m -выпуклые функции. Класс $(A)m - cv$ функций**”, изучает m -выпуклые $(m - cv)$ и $(A)m - cv$ функции и их связь с функциями $(B)sh_m$ и $(A)sh_m$ соответственно. Кроме того, в п. 3.3 рассмотрены случаи, когда $(A)m - cv = m - cv$ и $(A)m - cv \neq m - cv$.

m -выпуклые функции. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$ область и $u(x) \in C^2(D)$. Ясно, что матрица $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_t} \right)$ является симметрической, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_t \partial x_j}$. Поэтому после подходящего ортонормального преобразования она преобразуется в диагональную форму:

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_t} \right) \rightarrow \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

где $\lambda_j = \lambda_j(x) \in \mathbb{R}$ – собственные значения матрицы $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j \partial x_t} \right)$. Положим

$H^k(u) = H^k(\lambda) = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_k \leq n} \lambda_{j_1} \dots \lambda_{j_k}$ – гессиан степени k вектора собственных значений $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n)$.

Определение 6. Дважды гладкая функция $u \in C^2(D)$ называется m -выпуклой в $D \subset \mathbb{R}^n$, $u \in m - cv(D)$, если ее вектор собственных значений

$\lambda = \lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x))$ удовлетворяет условиям

$$H^k(\lambda(x)) \geq 0, \forall x \in D, k = 1, \dots, n - m + 1.$$

Ясно, что $1 - cv(D) \subset m - cv(D) \subset n - cv(D) = sh(D)$.

Мы изучаем $m - cv(D)$ функций основываясь на новых подходах, а именно при помощи их связи с хорошо известными $(B)sh_m$ функциями: Вложим $\mathbb{R}_x^n$ в $\mathbb{C}_z^n$, $\mathbb{R}_x^n \subset \mathbb{C}_z^n = \mathbb{R}_x^n + i\mathbb{R}_y^n$ ($z = x + iy$), как вещественное n -мерное подпространство комплексного пространства $\mathbb{C}_z^n$.

Теорема 7. Дважды гладкая функция $u(x) \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}_x^n$, является $m - cv$ в D тогда и только тогда, когда функция $u^c(z) = u^c(x + iy) = u(x)$ которая не зависит от переменных $y \in \mathbb{R}_y^n$, является $(B)sh_m$ функцией в области $D \times \mathbb{R}_y^n$.

$m - psh$ функции. Для определения класса $(A)m - cv$ функций нам понадобится класс так называемых $m - psh$ функций, которые определяются свойством субгармоничности сужения на m -мерных плоскостях, $\forall \Pi \subset \mathbb{R}^n$, $\dim_{\mathbb{R}} \Pi = m$.

Определения 7. Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^n$ дана функция $u(x)$. Если эта функция удовлетворяет следующим двум условиям:

- 1) в области D полунепрерывна сверху, т.е., $\overline{\lim_{x \rightarrow x^0}} u(x) \leq u(x^0)$;
- 2) для каждой m -мерной действительной плоскости $\Pi \subset \mathbb{R}^n$
 $(\dim_{\mathbb{R}^n} \Pi = m) \quad u|_{\Pi} \in sh(\Pi \cap D)$,

то функция $u(x)$ называется m -плурисубгармонической $(m - psh)$ в области D (субгармонической в m -мерных действительных плоскостях, $1 \leq m \leq n$).

$m - psh(D)$ функции будут субгармоническими, следовательно, такие функции удовлетворяют всем свойствам субгармонических функций.

Из определения функции $m - psh$ вытекает следующее утверждение:

Дважды гладкая функция $u \in C^2(D)$ является $m - psh$ функцией, если ее вектор собственных значений $\lambda = \lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x))$ удовлетворяет условиям

$$\lambda_{j_1}(x) + \lambda_{j_2}(x) + \dots + \lambda_{j_m}(x) \geq 0, \quad 1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n.$$

$(A)m - cv$ функции.

Определение 8. Дважды гладкая функция $u \in C^2(D)$ называется $(A)m -$ выпуклой $\left((A)m - cv\right)$ в $D \subset \mathbb{R}^n$, если ее вектор собственных значений $\lambda = \lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_n(x))$ удовлетворяет условиям

$$\lambda_{j_1}(x) + \lambda_{j_2}(x) + \dots + \lambda_{j_m}(x) \geq 0, 1 \leq j_1 < \dots < j_m \leq n \text{ и } H^{n-m+1}(\lambda(x)) \geq 0, \forall x \in D.$$

Таким образом, $(A)m - cv$ функции — это m -плюрисубгармонические функции, с дополнительным условием $H^{n-m+1}(\lambda(x)) \geq 0$. Ясно, что $(A)1 - cv$ совпадает с классом выпуклых функций, а $(A)n - cv$ совпадает с классом субгармонических функций.

Чтобы установить связь $(A)m - cv$ функций с $(A)sh_m$ функциями, мы как обычно вложим действительное пространство $\mathbb{R}_x^n$ в комплексное пространство $\mathbb{C}_z^n$, $z = x + iy$, $\mathbb{C}_z^n = \mathbb{R}_x^n \times i \mathbb{R}_y^n$. Тогда справедлива

Теорема 8. Дважды гладкая функция $u(x) \in C^2(D)$, $D \subset \mathbb{R}_x^n$, является $(A)m - cv$ в D тогда и только тогда, когда функция $u^c(z) = u^c(x + iy) = u(x)$, которая не зависит от переменных $y \in \mathbb{R}_y^n$, является $(A)sh_m$ функцией в области $D \times \mathbb{R}_y^n$.

В пункте 3.2 функция $u(x) = \ln(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$ проверяется на $(A)m - cv$ и делается следующий вывод:

Предложение 1. $u(x) = \ln(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$ функция является $m - cv$ и $(A)m - cv$ функцией при $n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq m \leq n, n \geq 2$. Когда

$m < n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, n \geq 2$, эта функция не является ни $m - cv$ и ни $(A)m - cv$.

Случаи $(A)m - cv = m - cv$. В пункте 3.3, как и в предыдущей главе, рассматривается вопрос о перекрытии классов функций $m - cv$ и $(A)m - cv$ и доказываются следующие теоремы:

Теорема 9. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$. Тогда справедливо равенство $(A)2 - cv(D) = 2 - cv(D) \cap C^2(D)$.

Теорема 10. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq m \leq n \leq 7$. Тогда справедливо равенство $(A)m - cv(D) = m - cv(D) \cap C^2(D)$.

Теорема 11. Пусть $D \subset \mathbb{R}^n$. Тогда для $n = 9$ и $n = 8$ справедливо равенство

$$(A)3 - cv(D) = 3 - cv(D) \cap C^2(D).$$

Случаи $(A)m - cv \neq m - cv$. В случае $n = 10, m = 3$ классы $(A)m - cv$ и $m - cv$ не совпадают, то есть при $n \geq 10$ эти классы различны.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Данная диссертационная работа посвящена изучению классов $(A)sh_m$, $(B)sh_m$, а также $(A)m - cv$ и $m - cv$. Основные результаты исследования состоят из следующего:

1) показано, что классы $(A)sh_m(D) \cap C^2(D)$ и $(B)sh_m(D) \cap C^2(D)$ не совпадают при $n = 10, m = 3$;

2) доказано, что при $n = 9, n = 8, m = 3$ эти классы совпадают. Тем самым дополнена Теорема Динева;

3) изучен класс $u \in (A)sh_m(D)$ для полунепрерывных сверху функций. Доказаны некоторые важные свойства этих функций;

4) в примерах было показано, что класс $(A)sh_m$ не обладает свойством линеризации, т.е. сумма двух $(A)sh_m$ -функций не обязана быть $(A)sh_m$ -функцией;

5) было показано, что стандартное включение $(A)sh_m \subset (A)sh_{m+1}$ не верно при $n = 11, m = 3$;

6) доказан аналог теоремы Динева о том, для $1 \leq m \leq n \leq 7$ справедливо равенство $(A)sh_m(D) = (B)sh_m(D)$;

7) доказан аналог теоремы Садуллаева, что для любого $n > 2, m = 2$ справедливо равенство $(A)sh_m(D) = (B)sh_m(D)$;

8) доказано, что при $n = 9, n = 8, m = 3$ эти классы совпадают, $(A)sh_m(D) = (B)sh_m(D)$;

9) при помощи $m - psh$ функций определены $(A)m -$ выпуклые $((A)m - cv)$ функции, доказаны их важные свойства;

10) установлена связь $(A)m - cv$ функций с $(A)sh_m$ функциями;

11) в примере функции $u(x) = \ln(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)$ доказано, что она является $(A)m - cv$ функцией при $n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq m \leq n, n \geq 2$ и не принадлежит ни $m - cv$, ни $(A)m - cv$, когда $m < n - \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1, n \geq 2$;

12) доказан аналог теоремы А.Садуллаева о совпадении классов $(A)m - cv(D) \cap C^2(D) = m - cv(D) \cap C^2(D)$ для $m = 2$;

13) показана справедливость аналога теоремы С. Динева о равенстве $(A)m - cv(D) \cap C^2(D) = m - cv(D) \cap C^2(D)$ при $1 \leq m \leq n \leq 7$;

14) доказана теорема о равенстве $(A)3 - cv(D) = 3 - cv(D) \cap C^2(D)$ при $n = 9$ и $n = 8$;

15) в примере функции $u(x_1, x_2, \dots, x_{10}) = -\sum_{j=1}^2 x_j^2 + 2\sum_{j=3}^{10} x_j^2$ показано, что при $n = 10, m = 3$ классы $(A)m - cv$ и $m - cv$ различны.

В целом, полученные результаты позволяют говорить о достижении поставленной цели исследования диссертации, поскольку всесторонне выяснены совпадения или различия классов $(A)sh_m(D)$ и $(B)sh_m(D)$, а также классов $(A)m - cv(D)$ и $m - cv(D)$. Результаты дополнены соответствующими примерами.

URGANCH STATE UNIVERSITY

KALANDAROVA DILDORA ABDULLAYEVNA

EQUIVALENCE OF FUNCTIONS $(A)sh_m$ AND $(B)sh_m$

01.01.01-Mathematical analysis

ABSTRACT

**of dissertation of the doctor of philosophy on physical and
mathematical sciences**

Urgench - 2025

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher education, science and innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2024.2.PhD/FM1048.

Dissertation has been prepared at Urganch State University .

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council (www.ik-mat.urdu.uz) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (www.ziynet.uz).

Scientific supervisor: **Abdullaev Bakhrom Ismoilovich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Official opponents: **Shoimqulov Baxodir Allaberdiyevich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Atamuratov Alimardon Abdirimovich
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior researcher

Leading organization: **Karakalpak State University**

Defense will take place on "01" March 2025 at 16 : 00 at the meeting of Scientific Council PhD. 03/30.12.2019.FM.55.01 at Urganch State University . (Address: 14 Kh, Olimjan str, Urgench city, 220100, Uzbekistan, Ph: (+998 62) 224 66 11, Fax: (+998 62) 224 67 00, e-mail: ik-mat.urdu@umail.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Urganch state university (registered for No. D-765). (Address: 14 Kh, Olimjan str, Urgench city, 220100, Uzbekistan, Ph: (+998 62) 224 66 11, Fax: (+998 62) 224 67 00, e-mail: arm@urdu.uz).

Abstract of dissertation sent out on "17" February 2025.

(Mailing report No. 2 on "17" February 2025).



G.U. Urazboev
Vice-chairman of Scientific council on award of scientific degrees, Dr.ph.-m.s

A.A. Reyimberganov
Scientific secretary of Scientific council on award of scientific degrees, c.ph.-m.s.

B.A. Babajanov
Chairman of Scientific seminar under scientific council on award of scientific degrees, Dr.ph.-m.s.

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research is to investigate the possibility of equality of functions $(A)sh_m$ and $(B)sh_m$, as well as functions $(A)m-cv$ and $m-cv$.

The object of research. $(A)sh_m$ functions, $(B)sh_m$ functions, $m-cv$ functions, $(A)m-cv$ functions.

The scientific novelty of the research work is as follows:

in the case $n=10, m=3$ it was proven that the classes of functions $(A)sh_m \cap C^2$ and $(B)sh_m \cap C^2$ do not coincide, in the cases when $n=9, n=8$ and $m=3$ it was proven that these classes coincide;

it is shown that $(A)sh_m$ functions do not have linearization properties that allow them to be defined in the class of upper semicontinuous functions;

theorems on the coincidence of classes of $(A)sh_m$ and $(B)sh_m$ (functions from class L^1_{loc} are proved;

the definition of a twice smooth $(A)m-cv$ function is introduced;

a theorem expressing the relationship between classes of functions $(A)m-cv$ and $(A)sh_m$ has been proven;

an analogue of the theorem on the equality of functions $(A)m-cv$ and $m-cv$ has been proven;

it is proven that classes of functions $(A)m-cv$ and $m-cv$ are different for $n \geq 10$.

Implementation of research results. The results obtained in the thesis were used in the following research projects:

The theorem on the equality of $(A)m$ -subharmonic and $(B)m$ -subharmonic functions proposed in the dissertation was used to estimate $(B)m$ -subharmonic functions in the scientific project “Estimates for Monge-Ampere type equations in a geometric context” carried out by the Jagiellonian University in Krakow (reference from Jagiellonian University in Krakow, Poland, dated September 4, 2024). The application of the results made it possible to prove the non-standard properties of $(B)sh_m$ functions.

The theorem on the equality of $(A)m$ -subharmonic and $(B)m$ -subharmonic functions was applied in studies of the properties of the solution of the Monge-Ampere equation in the implementation of grant UT-OT-2020-1: “The Monge-Ampere equation and extremal plurisubharmonic functions” (Reference of the National University of Uzbekistan dated September 23, 2024). The application of scientific results made it possible to compare the classes of functions satisfying the Monge-Ampere equation and prove some of their properties.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion and a list of references. The numbering of theorems, propositions, definitions, formulas is end-to-end, separately for each chapter. The total number of pages of the thesis is 70.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I бўлим (1 часть; part 1)

1. Б. Абдуллаев., Д. Каландарова., Класс $(A)sh_m$ и $(B)sh_m$ функций // Доклады академии наук Республики Узбекистан, 3(2023), с. 3-10. (01.00.00; №7).
2. Д. Каландарова., Некоторые свойства $(A)sh_m$ функций // Доклады академии наук Республики Узбекистан, 6(2023), с. 20-24. (01.00.00; №7).
3. Д. Каландарова., О равенстве функций $(A)sh_m$ и $(B)sh_m$ // Доклады академии наук Республики Узбекистан, 2(2024), с. 15-19. (01.00.00; №7).
4. D. Kalandarova, On plurisubharmonicity of $(B)sh_m$ functions // NamDU ilmiy axborotnomasi, 8(2023), pp.53-57. (01.00.00; №14).
5. B. Abdullaev., D. Qalandarova., The classes of $(A)sh_m$ and $(B)sh_m$ functions // Annales Polonici Mathematici, 132.2(2024), pp.101-108. (№3, Scopus IF=0.7).
6. Б. Абдуллаев., Д. Каландарова., О равенстве функций $(A)m-cv$ и $m-cv$ // Ilm sarchashmalari, 6(2024), с. 7-12. (01.00.00; №12).

II бўлим (2 часть; part 2)

7. B. Abdullaev., D. Qalandarova, An analogue of the Sadullaev-Dinev theorem for the class of m -convex functions/ XI International Scientific Conference Modern Problems of Mathematics and Mechanics, July 03-06, 2024 y, Baku, Azerbaijan, 283-285.
8. Д. Каландарова., О равенстве функций $(A)sh_m$ и $(B)sh_m$ / Современные проблемы и перспективы прикладной математики. Материалы Республиканской научно-практической конференции, 24-25 мая 2024 г., Карши, Узбекистан, 505-506.
9. Д. Каландарова, Некоторые свойства $(A)sh_m$ функций/ Научная конференция молодых ученых «Актуальные проблемы и приложения современной математики», 14-15 марта 2024 г., Ташкент, Узбекистан, 219-220.
10. D. Qalandarova, Equivalence of functions $(A)sh_m$ and $(B)sh_m$ / Abstracts of the II republican scientific and practical conference of young scientists, 28-29 march, 2023 y, Tashkent, Uzbekistan, 69-70.
11. D. Qalandarova, On plurisubharmonicity and pluriharmonicity of $(B)sh_m$ functions/ Abstracts of the international scientific and practical conference "Actual problems of mathematical modeling and information technology", Том № 1, Nukus, may 2-3, 2023 y, 127-128.

Dissertatsiya avtoreferati “Khwarezm publication” nashriyotida tahrir qilindi.

Bosishga ruxsat etildi: 12.02.2025-yil.
Bichimi 60x84 ^{1/16}, “Times New Roman”
garniturada raqamli bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog‘i 2,5. Adadi: 100. Buyurtma: № 54
“Khwarezm travel” bosmaxonasida chop etildi
220502, Xorazm, Urganch tumani, Zargarlar mahallasi,
Marvarid ko‘cha 7-yo‘lak 4-uy

