FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MUHAMMAD AL-XORAZMIY NOMIDAGI TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI FARG‘ONA FILIALI

TULAKOVA ZIYODAXON RIVOJIDINOVNA

KO‘P O‘ZGARUVCHILI GIPERGEOMETRIK FUNKSIYALAR VA ULARNING SINGULYAR KOEFFITSIYENTLI ELLIPTIK TENGLAMA UCHUN CHEKLI VA CHEKSIZ SOHALARDA CHEGARAVIY MASALALAR YECHISHGA TATBIQLARI

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi

AVTOREFERATI

Farg‘ona – 2025

UDK: 517.95

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical – mathematical sciences

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MUHAMMAD AL-XORAZMIY NOMIDAGI TOSHKENT AXBOROT TEXNOLOGIYALARI UNIVERSITETI FARG‘ONA FILIALI

TULAKOVA ZIYODAXON RIVOJIDINOVNA

KO‘P O‘ZGARUVCHILI GIPERGEOMETRIK FUNKSIYALAR VA ULARNING SINGULYAR KOEFFITSIYENTLI ELLIPTIK TENGLAMA UCHUN CHEKLI VA CHEKSIZ SOHALARDA CHEGARAVIY MASALALAR YECHISHGA TATBIQLARI

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

FIZIKA - MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi

AVTOREFERATI

Farg‘ona – 2025

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2024.2.PhD/FM1059 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Farg'ona filialida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengashning veb-sahifasida (www.fdu.uz) va «Ziyonet» Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Ergashev Tuxtasin Gulamjanovich** fizika-matematika fanlari doktori, dotsent
Rasmiy opponentlar:	**Djamalov Sirojiddin Zuxriddinovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Irgashev Baxrom Yusupxanovich fizika-matematika fanlari nomzodi
Yetakchi tashkilot:	**Urganch davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi Farg'ona davlat universiteti huzuridagi PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 raqamli Ilmiy kengashning 2025-yil «20» 03 soat 13:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 150100, Farg'ona shahar, Murabbiylar ko'chasi, 19-uy. Tel.:(+99873) 244-44-02, faks: (+99873) 244-44-93, ye-mail: fardu_info@umail.uz).

Dissertatsiya bilan Farg'ona davlat universitetining Axborot - resurs markazida tanishish mumkin (470 raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 150100, Farg'ona shahar, Murabbiylar ko'chasi, 19-uy. Tel.:(+99873) 244-44-94.

Dissertatsiya avtoreferati 2025 «7» 03 kuni tarqatildi.

(2025-yil «7» 03 dagi 5 raqamli reyestr bayonnomasi).

Sh.T. Karimov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash raisi o'rinbosari, f.-m.f.d., dotsent

I.U. Xaydarov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.n., dotsent

Y.P. Apakov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi o'rinbosari, f.-m.f.d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiya annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida olib borilayotgan koʻplab amaliy masalalarni tatqiq etish differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishga olib kelinadi. Xususan, mexanika, gidrodinamika, elastiklik dinamikasi, elektromagnetizm va akustika jarayonlarini matematik modellari singulyar koeffitsiyentli xususiy hosilali differensial tenglamalarga keltiriladi. Masalan, biologiya va gaz dinamikasining fundamental qonunlarini elliptik tipdagi singulyar koeffitsiyentli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun qoʻyilgan chegaraviy masalalarga olib kelinadi. Bundan koʻrinadiki, singulyar elliptik tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni tadqiq etish yuqoridagi amaliy masalalar haqida toʻla tasavvur hosil qilganligi tufayli, xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining dolzarb yoʻnalishlaridan biri sifatida muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

Dunyoda koʻp oʻzgaruvchili gipergeometrik funksiyalar oʻzgaruvchilarining maxsus nuqtalardagi qiymatlarini va koʻp karrali xosmas integrallarni hisoblashning yangi formulalarini topish masalalariga oid ilmiy tadqiqot ishlari olib borilmoqda. Bu borada, koʻp oʻzgaruvchili gipergeometrik funksiyalarning yangi xossalarini tadqiq etish va koʻp karrali umumlashgan xosmas integralni hisoblash formulasini isbotlash hamda olingan yangi natijalarni singulyar koeffitsiyentli koʻp oʻlchovli elliptik tenglama uchun cheksiz sohalarda chegaraviy masalalarning oshkor koʻrinishdagi yechimlarini qurishga va aralash masalani potensiallar nazariyasi yordamida yechishga tatbiq etish borasida maqsadli ilmiy tadqiqotlarga alohida e’tibor berilmoqda.

Respublikamizda fundamental tadqiqotlarga, xususan, matematik biologiya va gaz dinamikasida ilmiy va amaliy tatbiqlarga ega boʻlgan keng qamrovli chora-tadbirlar amalga oshirilib, muayyan natijalarga erishilmoqda. Jumladan, soʻnggi yillarda Laurichella gipergeometrik funksiyalari uchun rekurrentlikdan holi boʻlgan yoyilma formulalar isbotlandi va xususiy hosilali singulyar fazoviy elliptik tenglamalar uchun chekli sohalarda chegaraviy masalalarni yechishda salmoqli natijalarga erishildi. “Differensial tenglamalar va matematik fizika, dinamik sistemalar nazariyasi” fanlarining ustivor yoʻnalishlarida xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish matematika fanining asosiy vazifalari va faoliyat yoʻnalishlari etib belgilandi[1]. Bu qarorning ijrosini ta’minlashda muhim vazifalar belgilab berilgan, jumladan ilmiy natijalardan ilm-fanning turdosh sohalarida foydalanish maqsadida singulyar fazoviy elliptik tenglamalar uchun chekli va cheksiz sohalarda, mos ravishda, asosiy chegaraviy masalalarni yechish va potensiallar nazariyasini qurish muhim ahamiyat kasb etmoqda.

Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-son «Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qoʻllab-quvvatlash, shuningdek, Oʻzbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining

[1] Oʻzbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017 yil 18 maydagi «Oʻzbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy-tadqiqot institutlari faoliyatini tashkil etish chora-tadbirlari toʻgʻrisida»gi 292-son qarori

V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi va 2020 yil 7 maydagi PQ-4708-son «Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida»gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ–huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. «Matematika, mexanika va informatika» ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Ma’lumki, elliptik tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishda tenglamaning fundamental yechimlari muhim ahamiyatga ega. Elliptik tenglamalarning fundamental yechimlarini topish har doim ham oson kechavermaydi. Ayniqsa, bu muammo buziladigan yoki singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglamalarda o‘ziga xos murakkabliklarni keltirib chiqaradi. Bugungi kunga qadar buziladigan yoki singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglamalarning fundamental yechimlarini topish va ularni chegaraviy masalalarga tatbiq etish bo‘yicha ko‘plab tadqiqotchilar tomonidan bir qancha natijalar olingan. Xususan, ikki o‘lchovli bitta buzilish chizig‘iga ega bo‘lgan (bitta singulyar koeffitsiyentli) model elliptik tenglama uchun fundamental yechimni dastlab F.Trikomi oshkor ko‘rinishda yozib olgan, A.Weinstein esa ikki o‘lchovli ikkita buzilish chizig‘iga ega bo‘lgan (ikkita singulyar koeffitsiyentli) tenglama fundamental yechimlarining integral tasvirini topgan. Keyinchalik bunday tenglamalarning turli hollari uchun fundamental yechimlar qurish bilan R.J.Weinacht, R.Gilbert J.J.Barros-Neto, I.M.Gelfand, J.D.Cole, E.T.Copson, M.Itagaki, O.I.Marichev, N.Radjabov, A.K.Urinov, A.Xasanov va E.T.Karimov shug‘ullangan. T.G.Ergashev esa ko‘p o‘lchovli singulyar elliptik tenglamaning fundamental yechimlarini o‘zgaruvchilari soni tenglamadagi singulyar koeffisientlar soniga teng bo‘lgan Laurichella funksiyasi yordamida topgan hamda fundamental yechimlarning xossalarini o‘rgangan.

Aralash elliptik-giperbolik model tenglama uchun chegaraviy masalalarni o‘rganish Trikomi ishlaridan boshlangan bo‘lsada, Holmgren birinchi bo‘lib umumlashgan Trikomi tenglamasi uchun elliptik sohada hozirgi kunda uning nomi bilan ataladigan chegaraviy masalaning yechimini oshkor ko‘rinishda topgan. Buziladigan elliptik tenglamalar uchun chegaraviy masalalar nazariyasi I.N.Vekua, F.I.Frankl, L.Wolfersdorf va S.P.Pulkin tomonidan rivojlantirilgan. Keyinchalik, A.Xasanov, E.T.Karimov va A.Ryskanlar tomonidan ikkita, uchta va to‘rtta singulyar koeffitsientga ega bo‘lgan elliptik tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning yechimlari Appell va Laurichella gipergeometrik funksiyalari yordamida ifodalangan. T.G.Ergashev ko‘p o‘lchovli bir necha singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglama uchun chekli sohalarda qo‘yilgan chegaraviy masalalarning yechimlarini o‘zgaruvchilari soni tenglamadagi singulyar koeffisiyentlar sonidan bittaga kam bo‘lgan Laurichella gipergeometrik funksiyasi orqali ifodalagan.

O‘zgaruvchilarni ajratish va Grin funksiyasi usullari yordamida sodda tuzilishdagi standart sohalardagina chegaraviy masalalarni yechish mumkin bo‘lganligi sababli, chegaraviy masalalarni umumiyroq sohalarda yechish maqsadida, S.Gellerstedt ikki o‘lchovli bitta buzilish chizig‘iga ega bo‘lgan model tenglama uchun potensiallar nazariyasini qurib, uni Dirixle va Holmgren masalalarini yechishga tatbiq qilgan. So‘nggi yillarda S.Gellerstedt o‘rgangan masalalarni T.G.Ergashev bitta singulyar koeffitsiyentli fazoviy elliptik tenglamaga umumlashtirdi. Bundan tashqari, M.M.Smirnov va T.G.Ergashevning ilmiy natijalarida ikki va uch o‘lchovli singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglama uchun qo‘yilgan aralash masalalarni yechish uchun potensiallar nazariyasi qurilgan. Yuqoridan ko‘rinadiki, ixtiyoriy ko‘p o‘lchovli singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglama uchun aralash masalani potensiallar nazariyasi yordamida yechish muhim ahamiyatga ega. Mazkur dissertatsiya ishi yuqoridagi ishlarning mantiqiy davomi bo‘lib, bunda ko‘p o‘lchovli singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglama uchun Dirixle va Neyman tipidagi masalalarni Evklid fazosining qismi bo‘lgan cheksiz sohada, aralash masalani esa yarim fazoda joylashgan chekli sohada yechishga bag‘ishlangan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti Farg‘ona filiali ilmiy tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq “Murakkab fizik va texnologik jarayonlarni matematik modellashtirish” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi ikkinchi tartibli singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglama uchun cheksiz sohada asosiy chegaraviy masalalarning yechimlarini oshkor ko‘rinishlarda topish va chekli sohada aralash masalani potensiallar nazariyasi usulida yechishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari quyidagilardan iborat:

bir nechta singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglama uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalar yechimlarini oshkor ko‘rinishlarda qurishda foydalanish uchun Laurichella gipergeometrik funksiyasining xossalarini isbotlash;

chegaraviy masalalarning oshkor topilgan yechimlari xossalarini isbotlashda zarur bo‘ladigan ko‘p karrali xosmas integralni hisoblash formulasini topish;

cheksiz sohada bir necha singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglama uchun Dirixle va Neyman masalalari hamda aralash shartlar bilan berilgan chegaraviy masalaning bir qiymatli yechilishini isbotlash;

ko‘p o‘lchovli bitta singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglama uchun qo‘yilgan aralash masalaning potensiallar nazariyasi usulidan foydalanib bir qiymatli yechilishini isbotlash.

Tadqiqotning ob’yekti. Ko‘p o‘zgaruvchili gipergeometrik funksiyalar va bir nechta singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglama.

Tadqiqotning predmeti. Chekli va cheksiz sohalarda singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglama uchun chegaraviy masalalar.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiya ishida matematik analiz, maxsus funksiyalar nazariyasi va integral tenglamalar nazariyasi hamda Riman, ekstremum prinsipi va energiya integrallari usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

bir nectha singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglama uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalarning oshkor ko‘rinishlardagi yechimlarini qurishda zarur bo‘ladigan Laurichella gipergeometrik funksiyalarining xossalari maxsus funksiyalar nazariyasidan foydalanib isbotlangan;

chegaraviy masalalarning oshkor topilgan yechimlari xossalarini isbotlash imkonini beradigan ko‘p karrali xosmas integralni hisoblash formulasi o‘zgaruvchilarni almashtish usuli va maxsus funksiyalar nazariyasidan foydalanib asoslangan;

bir nechta singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglama uchun cheksiz sohada Dirixle va Neyman masalalari hamda aralash shartlar bilan berilgan masalaning bir qiymatli yechilishi maxsus funksiyalar nazariyasi, ekstremum prinsipi usuli va energiya integrallari usulidan foydalanib isbotlangan;

ko‘p o‘lchovli bitta singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglama uchun potensiallar nazariyasi qurilgan va bu nazariya yordamida mazkur tenglama uchun qo‘yilgan aralash masalaning bir qiymatli yechilishi isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijasi quyidagilardan iborat: ko‘p o‘zgaruvchili gipergeometrik funksiyalarning xossalarini tadqiq etish uchun funksiyaning argumentlari nolga intilgandagi qiymatini ifodalovchi formulani topish algoritmi taklif qilingan hamda chekli va cheksiz sohalarda singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglama uchun qo‘yilgan asosiy chegaraviy masalalarni yechish usuli bayon qilingan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglamaning fundamental yechimlarini qurishda, bu tenglama uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalarning yechimlarini oshkor ko‘rinishlarda topishda va potensiallar nazariyasini tadqiq etishda matematik tahlil, matematik fizika va maxsus funksiyalar nazariyalari usullaridan qat’iy foydalanilganligi bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati ishda olingan natijalardan singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglamalar nazariyasida foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

Dissertatsiya tadqiqotining amaliy ahamiyati shundan iboratki, undan fazali o‘tish masalalari va kritik hodisalarning tenglamalarini matematik jihatlarini tadqiq etishda, gidrotexnik inshootlarda suyuqliklar oqimining tezligini va kompozit materiallardan tayyorlangan gaz quvurlarida gazlarning harakatini aniqlashda, qavariq qobiqli jismlardagi hajm o‘zgarishi va deformatsiya orasidagi bog‘lanishni topishda, tovush tezligidan yuqori va tovush tezligiga yaqin tezliklardagi gazlarning holat tenglamalarini qurishda, ko‘p karrali xosmas integrallarda qatnashadigan Laurichella gipergeometrik funksiyasining integral tasvirini isbotlashda, tanadagi kapilyar to‘qimalar hamda hujayralarning deformatsiyasi va o‘rganuvchi biomexanikada, optik muhitda kuchli yorug‘lik to‘lqinlarining tarqalishini tavsiflash kabi bir qator mexanik jarayonlarni modellashtirishda, shuningdek fanning boshqa sohalarida tegishli jarayonlarni matematik modellashtirishda, shuningdek, fanning boshqa sohalariga tegishli jarayonlarni matematik modellashtirishda qo’llash mumkinligi bilan belgilanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Ko‘p o‘zgaruvchili gipergeometrik funksiyalar va ularning singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglama uchun chekli va cheksiz sohalarda chegaraviy masalalar yechishga tatbiqlari bo‘yicha olingan natijalar asosida:

Laurichella gipergeometrik funksiyasining maxsus nuqtalardagi logarifmik va darajali maxsusliklarni aniqlash usulidan №374874-2022 raqamli «Fazali o‘tish masalalari va kritik hodisalar. Tenglamalarning matematik jihatlari, tezkor o‘tishlar va asimptotika» mavzusidagi xorijiy loyihada fazali o‘tish masalalari va kritik hodisalarning tenglamalarini matematik jihatlarini tadqiq etishda foydalanilgan (Qirg‘iziston Respublikasi O‘sh davlat universitetining 2024-yil 17-sentabrdagi №1210 sonli ma’lumotnomasi). Natijada, cheksiz sohalarda buziladigan xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun yangi masalalarning bir qiymatli yechilishini isbotlash va qo‘yilgan masalalar shartlarining bajarilishini tekshirishga imkon bergan.

chegaraviy masalalarning yechimlarini tadqiq etishda zarur bo‘ladigan ko‘p karrali xosmas integralni hisoblash formulasidan AR14972818 raqamli «Matematik fizika yuqori tartibli noklassik tenglamalarining fundamental yechimlarini qurish usullarini ishlab chiqish» mavzusidagi xorijiy loyihada Laurichella gipergeometrik funksiyasining integral tasvirini isbotlashda foydanilgan (Abay nomidagi Qozog‘iston Milliy universitetining 2024-yil 18-sentabrdagi №15-15-09-02-20/1818 sonli ma’lumotnomasi, Qozog‘iston). Natijada, ikkinchi tartibli buziladigan elliptik tenglama uchun aralash chegaraviy masalaning yagona yechimi mavjudligini asoslashga imkon bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 11 ta xalqaro va 3 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 24 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining dissertatsiyalar asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 10 ta ilmiy maqola, jumladan, 4 tasi xorijiy va 6 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Dissertatsiyaning hajmi 99 betni tashkil etgan.

DISSERTASIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi va muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, ob’yekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiyaning tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar berilgan.

Dissertatsiyaning **“Ko‘p o‘zgaruvchi gipergeometrik funksiyalarning chegaraviy masalalarni tadqiq etishda zarur bo‘lgan yangi xossalari”** deb nomlangan birinchi bobida ikkita Laurichella gipergeometrik funksiyalari o‘zgaruvchilarining chetki qiymatlaridagi xossalari o‘rganilgan va bitta Laurichella funksiyasining logarifmik va darajali maxsuslikka ega bo‘lish shartlari aniqlangan, bundan tashqari, keyingi boblarda tadqiq etiladigan chegaraviy masalalar yechimlari xossalarini tekshirishda zarur bo‘ladigan bitta ko‘p karrali xosmas integralni hisoblash formulasi topilgan.

Mazkur bobning 1.1-paragrafi yordamchi xarakterda bo‘lib, bu yerda Gauss, Appel va Laurichella gipergeometrik funksiyalari nazariyasidan dissertatsiyaning asosiy natijalarini bayon qilishda zarur bo‘lgan ma’lumotlar keltirilgan.

Bir o‘zgaruvchili $F(a,b;c;z)$ Gauss gipergeometrik funksiyasi nazariyasini o‘rganishda erishilgan ulkan muvaffaqiyatlar ikki va undan ko‘p o‘zgaruvchili gipergeometrik funksiyalar nazariyasining rivojlanishiga turtki bo‘ldi. 1893 yilda Laurichella $F_A^{(n)}\left(a,\mathbf{b};\mathbf{c};\mathbf{x}\right)$ va $F_B^{(n)}\left(\mathbf{a},\mathbf{b};c;\mathbf{x}\right)$ ko‘rinishlardagi ko‘p o‘zgaruvchili birinchi va ikkinchi gipergeometrik funksiyalarni kiritdi. Bu yerda $\mathbf{a}:=\left(a_1,...,a_n\right)$, $\mathbf{b}:=\left(b_1,...,b_n\right)$, $\mathbf{c}:=\left(c_1,...,c_n\right)$; $\mathbf{x}:=\left(x_1,...,x_n\right)$.

Ko‘p o‘zgaruvchili gipergeometrik funksiyalarni singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglamalar uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalarni ychishda mazkur funksiyalar uchun yoyilma formulalar muhim ahamiyatga ega ekanligini e’tiborga olib, 2020 yilda T.G.Ergashev tomonidan Laurichella funksiyalari uchun qulay yoyilma formulalarini isbotlandi va chegaraviy masalalarning yechimlarini chekli sohalarda oshkor ko‘rinishlarda topishga muvaffaqiyatli qo‘llanildi. Lekin cheksiz sohalarda qo‘yilgan chegaraviy masalalarni yechish jarayonida Laurichella gipergeometrik funksiyalarining boshqa xossalarinini ham qo‘shimcha tadqiq etish zarurati paydo bo‘ldi.

1.2-paragrafda $F_A^{(n)}$ va $F_B^{(n)}$ Laurichella funksiyalarining o‘zgaruvchilarning chetki qiymatlaridagi muhim xossalari tadqiq etilgan hamda $F_A^{(n)}$ Laurichella funksiyasining logarifmik va darajali maxsuslikka ega bo‘lish shartlari aniqlangan va olingan natijalar bir necha teoremalar ko‘rinishida berilgan.

1-teorema. *Aytaylik* a, b_k, c_k – *haqiqiy sonlar bo‘lib,* a, c_k, $c_k-b_k\neq$ $\neq 0,-1,-2,...\left(k=\overline{1,n}\right)$ *va* $a>b_1+...+b_n$ *bo‘lsin. U holda* $n=1,2,...$ *bo‘lganda quyidagi limit munosabatlar o‘rinli bo‘ladi:*

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0}\left\{x_1^{-b_1}...x_n^{-b_n}F_A^{(n)}\left(a,\mathbf{b};\mathbf{c};1-\frac{1}{x_1},...,1-\frac{1}{x_n}\right)\right\}=\frac{\Gamma\left(a-b_1-...-b_n\right)}{\Gamma(a)}\prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma\left(c_k\right)}{\Gamma\left(c_k-b_k\right)},$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0}\left\{x_1^{-b_1}...x_n^{-b_n}F_B^{(n)}\left(\mathbf{a};\mathbf{b};c;1-\frac{1}{x_1},...,1-\frac{1}{x_n}\right)\right\}=\frac{\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(c-b_1-...-b_n\right)}\prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma\left(a_k-b_k\right)}{\Gamma\left(a_k\right)},$$

bu yerda va bundan keyin $\Gamma\left(z\right)$ *gamma funksiyani anglatadi.*

2-teorema. *$x_1>0,...,\ x_n>0$ bo'lsin. Agar $c_1>b_1>0$, ..., $c_n>b_n>0$ va $a+b_1+...+b_n=c_1+...+c_n$ bo'lsa, u holda $X:=x_1+...+x_n\to 1-0$ bo'lganda $F_A^{(n)}$ Laurichella funksiyasi*

$$F_A^{(n)}\left(a,\mathbf{b};\mathbf{c};\mathbf{x}\right)\sim-\frac{1}{\Gamma(a)}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma\left(c_j\right)}{\Gamma\left(b_j\right)}x_j^{b_j-c_j}\cdot\ln(1-X)$$

ko'rinishdagi logarifmik maxsuslikka ega;

agar $c_1>b_1>0$, ..., $c_n>b_n>0$ va $a+b_1+...+b_n>c_1+...+c_n$ bo'lganda esa

$$F_A^{(n)}\left(a,\mathbf{b};\mathbf{c};\mathbf{x}\right)\sim\frac{\Gamma\left(a+b_1+...+b_n-c_1-...-c_n\right)}{\Gamma(a)}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma\left(c_j\right)}{\Gamma\left(b_j\right)}x_j^{b_j-c_j}\cdot(1-X)^{|\mathbf{c}|-|\mathbf{b}|-a}$$

ko'rinishdagi darajali maxsuslikka ega.

1.3-paragrafda ko'p karrali bir xosmas integralni hisoblash formulasi isbotlangan bo'lib, bu formula keyingi boblarda cheksiz sohalarda ko'p o'lchovli elliptik tenglamalar uchun chegaraviy masalalar yechimlarining xossalarini tadqiq etishda muhim ahamiyatga ega bo'ladi.

1-lemma. *Agar p_j,q_j,r_j,s,t – haqiqiy sonlar bo'lib,*

$$p_j>0,\ q_j>0,\ r_j>0,\ s>0,\ 0<\frac{p_1}{q_1}+...+\frac{p_n}{q_n}-t<s,\ j=\overline{1,n},$$

bo'lsa, u holda quyidagi tenglik o'rinli:

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}...\int_0^{+\infty}\frac{x_1^{p_1-1}...x_n^{p_n-1}dx_1...dx_n}{\left[\left(r_1x_1\right)^{q_1}+...+\left(r_nx_n\right)^{q_n}\right]^t\left[1+\left(r_1x_1\right)^{q_1}+...+\left(r_nx_n\right)^{q_n}\right]^s}=$$

$$=\frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{q_1}\right)...\Gamma\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\Gamma\left(\frac{p_1}{q_1}+...+\frac{p_n}{q_n}-t\right)\Gamma\left(s+t-\frac{p_1}{q_1}-...-\frac{p_n}{q_n}\right)}{q_1q_2...q_nr_1^{p_1q_1}...r_n^{p_nq_n}\Gamma\left(\frac{p_1}{q_1}+...+\frac{p_n}{q_n}\right)\Gamma\left(s\right)}.$$

Dissertatsiyaning **"Bir necha singulyar koeffitsiyentli fazoviy elliptik tenglama uchun cheksiz sohada chegaraviy masalalar"** deb nomlangan ikkinchi bobida $F_A^{(n)}$ Laurichella funksiyasining birinchi bobda isbotlangan yangi xossalaridan va ko'p karrali bir xosmas integralni hisoblash formulasidan foydalanib,

$$L_\alpha^{(m,n)}(u)\equiv\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial^2u}{\partial x_i^2}+\sum_{j=1}^{n}\frac{2\alpha_j}{x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}=0,\ 0<2\alpha_j<1,\ j=\overline{1,n}\qquad(1)$$

ko'rinishdagi singulyar elliptik tenglama uchun m-o'lchovli Evklid fazosining 2^{-n}-qismida Dirixle va Neyman masalalari hamda aralash shartlar bilan berilgan masala tadqiq etilgan. Bu yerda va bundan keyin $\alpha=\left(\alpha_1,...,\alpha_n\right)$, $|\alpha|=\alpha_1+...+\alpha_n$ deb qabul qilamiz.

$\mathbb{R}_m$ – m-o‘lchovli Evklid fazosi $(m \geq 2)$ va $(x_1,...,x_m)$ – undagi ixtiyoriy nuqta bo‘lib, n – natural son va $n \leq m$ bo‘lsin. $\mathbb{R}_m$ fazoning cheksiz 2^{-n}-qismini quyidagicha aniqlaymiz:

$$\Omega \equiv \Omega_m^{n+} = \left\{(x_1,...,x_m): x_i > 0,\ i = \overline{1,n};\ -\infty < x_j < +\infty,\ j = \overline{n+1,m}\right\}.$$

$x = (x_1,...,x_m)$ va $\xi = (\xi_1,...,\xi_m)$ – $\mathbb{R}_m$ dagi vektorlarni, $\tilde{x}_k$ va $\tilde{\xi}_k$ esa k-komponentasi qatnashmayotgan vektorlarni belgilaydi;

$$x^{(2\alpha)} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{2\alpha_i}; \quad \tilde{x}_k^{(2\alpha)} = \prod_{i=1, i\neq k}^{n} x_i^{2\alpha_i}; \quad R = \sqrt{x_1^2 + .. + x_m^2}, \quad X_k = \sqrt{1 + R^2 - x_k^2}.$$

Ushbu $S_j = \left\{x : x_1 > 0,..., x_{j-1} > 0, x_j = 0, x_{j+1} > 0,..., x_n > 0,\ -\infty < x_{n+1},..., x_m < +\infty\right\}$ cheksiz sohalar Ω sohaning yon yoqlari deyiladi. $D_k = \bigcup_{j=k+1}^{n} S_j,\ k = \overline{0, n-1}.$

Ikkinchi bobning dastlabki ikkita boblarida (1) tenglama uchun Ω cheksiz sohada Dirixle va Neyman masalalari tadqiq etilgan va qo‘yilgan masalalar yechimlarining mavjud va yagonaligi isbotlangan.

Dirixle masalasi (D^{∞} masala.) (1) tenglamaning $u(x) \in C(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ sinfga tegishli bo‘lgan va $u(x)\big|_{x_k=0} = \tau_k(\tilde{x}_k), \tilde{x}_k \in S_k$,

$$\lim_{R\to\infty} u(x) = 0,\ m > 2 \tag{2}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi regulyar yechimi topilsin, bu yerda $\tau_k(\tilde{x}_k)$ – berilgan funksiyalar bo‘lib, $\tau_k(\tilde{x}_k) = \dfrac{\tilde{\tau}_k(\tilde{x}_k)}{X_k^{2\varepsilon_k}}$, $\tilde{\tau}_k(\tilde{x}_k) \in C(\overline{S}_k)$, $\varepsilon_k > 0$ ko‘rinishda tasvirlanadi. Bundan tashqari, $\tau_k(\tilde{x}_k)$ funksiyalar kelishish shartlarini qanoatlantiradi: $\tau_k(\mathbf{0}) = \tau_j(\mathbf{0}),\ \tau_k(\tilde{x}_k)\big|_{x_j=0} = \tau_j(\tilde{x}_j)\big|_{x_k=0},\ k \neq j, k, j = \overline{1,n}.$ Bu yerda $\mathbf{0} = (0,...,0)$ – $(m-1)$ ta komponentali nol-vektor.

3-teorema. *(1) tenglama uchun D^{∞} masalasi cheksiz Ω sohada bittadan ortiq yechimga ega bo‘lishi mumkin emas.*

4-teorema. *α_1, ..., α_n – haqiqiy sonlar bo‘lib, $0 < 2\alpha_k < 1$ bo‘lsin. $m \geq 2$ bo‘lganda (1) tenglama uchun Ω cheksiz sohada D^{∞} masalasi yechimi*

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{S_k} \tau_k(\tilde{\xi}_k)\, \tilde{\xi}_k^{(2\alpha)} \left(\xi_k^{2\alpha_k} \frac{\partial q_n(x,\xi)}{\partial \xi_k} \right)\Bigg|_{\xi_k=0} dS_k$$

formula bilan yoziladi, bu yerda $q_n(x,\xi)$ – (1) tenglamaning fundamental yechimi:

$$q_n(x,\xi) = \gamma_n \prod_{k=1}^{n} (x_k \xi_k)^{1-2\alpha_k} r^{-2\beta_n} F_A^{(n)} \left[\begin{matrix} \beta_n, 1-\alpha_1, ..., 1-\alpha_n; \\ 2-2\alpha_1, ..., 2-2\alpha_n; \end{matrix} \sigma \right], \quad \beta_n = \frac{m-2}{2} + n - |\alpha|,$$

γ_n *- ma’lum son;*

$$\sigma=\left(-\frac{4x_1\xi_1}{r^2},...,-\frac{4x_n\xi_n}{r^2}\right),\ \ r=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}(x_i-\xi_i)^2}. \qquad (3)$$

Bu yerda va bundan keyin $\int\limits_{S_k}...dS_k$ deganda $\Omega\cap\{x_k=0\}$ soha bo‘yicha olingan $(m-1)$-karrali xosmas integral tushuniladi:

$$\int\limits_{S_k}...dS_k=\underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty}...\int\limits_{-\infty}^{+\infty}}_{m-n}\underbrace{\int\limits_{0}^{+\infty}...\int\limits_{0}^{+\infty}}_{n-1}...d\xi_1...d\xi_{k-1}d\xi_{k+1}...d\xi_n d\xi_{n+1}...d\xi_m.$$

Neyman masalasi (N^∞ **masala.)** (1) tenglamaning $u(x)\in C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^1\left(\Omega\cup D_0\right)\cap C^2(\Omega)$ sinfga tegishli bo‘lgan, $\left.\left(x_k^{2\alpha_k}\frac{\partial u(x)}{\partial x_k}\right)\right|_{x_k=0}=\nu_k\left(\tilde{x}_k\right)$, $\tilde{x}_k\in S_k$ va (2) shartlarni qanoatlantiruvchi regulyar yechimi topilsin, bu yerda $\nu_k\left(\tilde{x}_k\right)$ – berilgan funksiyalar bo‘lib, $\left|\nu_k\left(\tilde{x}_k\right)\right|\le\frac{\tilde{\nu}_k(\tilde{x}_k)}{X_k^{1-2\alpha_k+\varepsilon_k}}$, $\tilde{\nu}_k(\tilde{x}_k)\in C(S_k)$, $\varepsilon_k>0$ – ko‘rinishda tasvirlanadi. Bundan tashqari, koordinatalar boshida $\nu_k\left(\tilde{x}_k\right)$ funksiyalar $m-1-2|\alpha|+2\alpha_k$dan kichik tartibli cheksizlikka intilishi mumkin; $k=\overline{1,n}$.

5-teorema. *(1) tenglama uchun N^∞ masalasi cheksiz Ω sohada bittadan ortiq yechimga ega emas.*

6-teorema. *α_1, ..., α_n – haqiqiy sonlar bo‘lib, $0<2\alpha_k<1$ bo‘lsin. $m\ge 2$ bo‘lganda (1) tenglama uchun Ω cheksiz sohada N^∞ masalasi yechimi $u(x)=-\sum\limits_{k=1}^{n}\int\limits_{S_k}\nu_k\left(\tilde{\xi}_k\right)\tilde{\xi}_k^{(2\alpha)}\left.q_0(x;\xi)\right|_{\xi_k=0}dS_k$ formula bilan topiladi, bu yerda $q_0(x,\xi)$ – (1) tenglamaning fundamental yechimi:*

$$q_0(x,\xi)=\gamma_0 r^{-2\beta_0}F_A^{(n)}\begin{bmatrix}\beta_0,\ \alpha_1,...,\alpha_n; \\ 2\alpha_1,...,2\alpha_n;\end{bmatrix}\sigma_1,...,\sigma_n\Bigg],\quad \beta_0=|\alpha|+\frac{m+2}{2},$$

σ_k va r ifodalar (3) da aniqlangan, γ_0 esa ma’lum son.

Ikkinchi bobning uchinchi paragrafida (1) tenglama uchun Ω cheksiz sohada aralash shartlar bilan berilgan masala yechimining mavjud va yagonaligi isbotlangan.

Aralash shartlar bilan berilgan masala ($(D^kN^{n-k})^\infty$ **shartli masala).**

(1) tenglamaning $u(x)\in C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^1\left(\Omega\cup D_k\right)\cap C^2(\Omega)$ sinfga tegishli bo‘lgan,

$$\left.u(x)\right|_{x_p=0}=\tau_p(\tilde{x}_p),\ p=\overline{1,k},\qquad \left.\left(x_p^{2\alpha_p}\frac{\partial u(x)}{\partial x_p}\right)\right|_{x_p=0}=\nu_p\left(\tilde{x}_p\right),\ p=\overline{k+1,n},$$

va (2) shartlarni qanoatlantiruvchi $u_k(x)$ regulyar yechimi topilsin, bu yerda $\tau_p(\tilde{x}_p)$ va $\nu_p(\tilde{x}_p)$ berilgan funksiyalar bo‘lib, quyidagi tasvirlarga ega:

$$\tau_p(\tilde{x}_p)=\frac{\tilde{\tau}_p(\tilde{x}_p)}{X_p^{m-2+|\alpha|}},\ \ \tilde{\tau}_p(\tilde{x}_p)\in C\left(\bar{S}_p\right);\ \nu_p(\tilde{x}_p)=\frac{\tilde{\nu}_p\left(\tilde{x}_p\right)}{X_p^{m-1+|\alpha|-2\alpha_p}},\tilde{\nu}_p(\tilde{x}_p)\in C(S_p).$$

Bundan tashqari, $\tau_p(\tilde{x})\,(p=\overline{1,k})$ funksiyalar Ω sohaning dastlabki k ta $S_1,...,\ S_k$ yon yoqlarida va koordinatalar boshida kelishuv shartlarini qanoatlantiradi:
$\tau_1\big|_{x_2=0}=\tau_2\big|_{x_1=0},\tau_2\big|_{x_3=0}=\tau_3\big|_{x_2=0},...,\tau_{k-1}\big|_{x_k=0}=\tau_k\big|_{x_{k-1}=0};\ \tau_1(\mathbf{0})=...=\tau_k(\mathbf{0});\ 0\le k\le n.$

7-teorema. *Agar yetarlicha katta* R *larda quyidagi tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa:* $|u|\le\dfrac{C_k}{R^{m-2+|\alpha|}};\ \left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right|\le\dfrac{C_k}{R^{m-1+|\alpha|}},\ i=\overline{1,m},$ *u holda* $(D^kN^{n-k})^\infty$ *masala* Ω *cheksiz sohada bittadan ortiq yechimga ega bo‘lishi mumkin emas, bu yerda* $C_k=const>0\ (k=\overline{0,n})$.

8-teorema. $\alpha_1,\ ...,\ \alpha_n$ *– haqiqiy sonlar bo‘lib,* $0<2\alpha_k<1$ *bo‘lsin.* $m\ge 2$ *bo‘lganda (1) tenglama uchun* Ω *cheksiz sohada aralash shartlar bilan berilgan* $(D^kN^{n-k})^\infty$ *masalaning yechimi*

$$u(\xi)=\sum_{p=1}^{k}\int\limits_{S_p}\tau_p(\tilde{x}_p)\tilde{x}_p^{(2\alpha)}\left(x_p^{2\alpha_p}\frac{\partial q_k(x,\xi)}{\partial x_p}\right)\Bigg|_{x_p=0}dS_p-\sum_{p=k+1}^{n}\int\limits_{S_p}\nu_p(\tilde{x}_p)\tilde{x}_p^{(2\alpha)}q_k(x,\xi)\big|_{x_p=0}dS_p,$$

formula bilan topiladi, bu yerda $q_k(x,\xi)$ *– (1) tenglamaning fundamental yechimi:*

$$q_k(x;\xi)=\gamma_k r^{-2\beta_k}\prod_{i=1}^{k}\left(x_i\xi_i\right)^{1-2\alpha_i}F_A^{(n)}\left(\beta_k,\mathrm{A}_k;2\mathrm{A}_k;\sigma_1,...,\sigma_n\right),k=\overline{0,n},$$

$$\beta_k=\frac{m-2}{2}+k-\sum_{i=1}^{k}\alpha_i+\sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i,\ \mathrm{A}_k=\left(1-\alpha_1,...,1-\alpha_k,\alpha_{k+1},...,\alpha_n\right),k=\overline{0,n},$$

σ_k *va* r *ifodalar (3) da aniqlangan,* γ_k *esa ma’lum son.*

“Singulyar fazoviy elliptik tenglama uchun chekli sohada aralash va Neyman masalalari” deb nomlangan uchinchi bobda ikkilangan va oddiy qatlam potensiallari tadqiq etiladi va olingan natijalar ko‘p o‘lchovli singulyar elliptik tenglama uchun yarim fazoda chegaralangan sohada qo‘yilgan chegaraviy masalalarni yechishga qo‘llaniladi.

Potensiallar nazariyasi elliptik tenglamalar uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalarni yechishda juda muhim ahamiyatga ega, chunki o‘zgaruvchilarga ajratish va Grin funksiyasi usullarida chegaraviy masalaning yechimini ancha sodda sohalardagina oshkor ko‘rinishda topish imkoniyati bor. Shu munosabat bilan chegaraviy masalalarni ikkilangan va oddiy qatlam potensiallari yordamida integral tenglamalarga keltirish, bir tomondan, chegaraviy masala yechimining mavjud va yagonaligini tekshirish nuqtai nazaridan ancha qulay, boshqa tomondan esa, chegaraviy masalani murakkabroq sohalarda sonli yechish imkonini beradi.

Uchinchi bobning 3.1-paragrafi (1) ko‘rinishdagi singulyar elliptik tenglama uchun aralash va Neyman masalalarining qo‘yilishiga va bu masalalar yechimlarining yagonaligi masalalariga bag‘ishlangan. Ikkinchi bobda ta’riflangan Ω sohaning S_1, ..., S_n yon yoqlari va m-o‘lchovli $R_m^n = \{x: 0 < x_i < a_i, i = \overline{1,n};$ $-b_i < x_i < c_i, i = \overline{n+1,m}\}$ parallelepipedda joylashgan va Ox_i $(i = \overline{1,m})$ koordinata o‘qlari bilan A_i $(i = \overline{1,n})$, B_i va C_i $(i = \overline{n+1,m})$ nuqtalarda kesishadigan S Lyapunov sirti bilan chegaralangan sohani D bilan belgilaymiz, bu yerda m – R_m Evklid fazosining o‘lchami va n – (1) tenglamaning singulyar koeffisiyentlari soni, $m \geq 2$, $n \geq 1$, $n \leq m$; a_i, b_i va c_i – musbat sonlar; A_i, B_i va C_i – Ox_i o‘qdagi nuqtalar bo‘lib, bu nuqtalarning i-koordinatalari, mos ravishda, a_i, $-b_i$ va c_i ga teng, qolgan koordinatalari esa nolga teng.

Elliptik tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishda, shu jumladan, potensiallar nazariyasini qurishda berilgan tenglamaning fundamental yechimlari muhim ahamiyatga ega. Hozirgi kunda (1) tenglama kabi bir necha singulyar koeffitsiyentli fazoviy elliptik tenglamalarning fundamental yechimlari qurilgan bo‘lsada, yaqin vaqtlargacha potensiallar nazariyasini qurish ikki o‘lchovli bitta yoki ikkita singulyar koeffitsiyentli tenglamalar bilangina cheklanib qoldi.

S sirtga o‘tkazilgan N tashqi normal bo‘yicha olingan hosilani

$$B_{Nx}^{\alpha}[f] = x^{(2\alpha)}\left(\frac{\partial[f]}{\partial x_1}\cos(N, x_1) + ... + \frac{\partial[f]}{\partial x_m}\cos(N, x_m)\right)$$

ko‘rinishda aniqlaymiz.

Aralash masala ($D^k N^{n-k} M$). (1) tenglamaning D sohada quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x)$ regulyar yechimini toping:

$$\left.\left(x_p^{2\alpha_p}\frac{\partial u}{\partial x_p}\right)\right|_{x_p=0} = \nu_p(\tilde{x}_p),\ p = \overline{k+1,n},\ \ u|_{x_p=0} = \tau_p(\tilde{x}_p),\ p = \overline{1,k},$$

$B_{Nx}^{\alpha}[u(x)]\big|_S = \varphi_k(x)$, bu yerda τ_p, ν_p va φ_k – yetarlicha silliq funksiyalar, $\tau_i(0) = \tau_j(0)$, $\tau_i(\tilde{x}_{iq}^0) = \tau_j(\tilde{x}_{jq}^0)$, $i \neq q, j \neq q$, $\tau_p(\tilde{x}_p)\big|_{x_p=0} = \varphi_k|_{x_p=0}$, $i, j, p, q = \overline{1,k}$;

koordinatalar boshida $\nu_p(\tilde{x})$ $(p = \overline{k+1,n})$ funksiyalar $m - 1 - 2|\alpha| + 2\alpha_p$ dan kam tartibli cheksizlikka intilishi mumkin; $k = \overline{1,n}$; $\tilde{x}_{pq}^0 = \tilde{x}_p\big|_{x_q=0}$, $p \neq q$.

Neyman masalasi. (1) tenglamaning D sohada

$$B_{Nx}^{\alpha}[u]\big|_S = \varphi(x),\ x \in S,\ \left.\left(x_p^{2\alpha_p}\frac{\partial u}{\partial x_p}\right)\right|_{x_p=0} = \nu_p(\tilde{x}_p), \tilde{x}_p \in D_p,\ p = \overline{1,n}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $u(x)$ regulyar yechimini toping, bu yerda ν_p va φ – berilgan yetarlicha silliq funksiyalar bo‘lib, $\nu_p(\tilde{x})$ funksiyalar koordinatalar boshida $m-1-2|\alpha|+2\alpha_p$ dan kam tartibli cheksizlikka intilishi mumkin.

9-teorema. *Agar $D^k N^{n-k} M$ masala yechimga ega bo‘lsa, bu yechim yagonadir. Agar Neyman masalasi yechimga ega bo‘lsa, u holda bu yechim o‘zgarmas qo‘shiluvchi aniqligida yoziladi.*

3.2-paragrafda $R_m^+ = \{x : x_1 > 0\}$ yarim fazoda

$$H_\alpha^m(u) \equiv \sum_{k=1}^{m} u_{x_k x_k} + \frac{2\alpha}{x_1} u_{x_1} = 0 \ \left(0 < 2\alpha < 1,\ m > 2\right) \qquad (4)$$

bitta singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglamaga mos kelgan ikkilangan va oddiy qatlam potensiallari tadqiq etilgan.

$\Gamma - R_m^+$ dagi Lyapunov sirti bo‘lsin, Γ_1– markazi koordinatalar boshida bo‘lgan va $x_1 = 0$ gipertekislikda yotgan a radiusli $(m-1)$-o‘lchovli bo‘lsin. D– Γ sirt va Γ_1 shar bilan chegaralangan chekli soha bo‘lsin. Γ sirt va Γ_1 sharning umumiy chegarasini γ bilan belgilaymiz.

Ushbu $w(x) = \int\limits_\Gamma \mu(\xi) B_{N\xi}^\alpha [q(\xi;x)] d_\xi \Gamma$ va $v(x) = \int\limits_\Gamma \rho(\xi) q(\xi;x) d_\xi \Gamma$ integrallar, mos ravishda, ikkilangan va oddiy qatlam potensiallari deyiladi, bu yerda $\mu(x)$ va $\rho(x)$ – $C(\bar{\Gamma})$ da uzluksiz funksiyalar. $w(x)$ va $v(x)$ potensiallar Γ sirt va $x_1 = 0$ gipertekislik bilan umumiy nuqtaga ega bo‘lmagan va $x_1 > 0$ yarim fazoda joylashgan ixtiyoriy sohada (4) tenglamaning regulyar yechimi bo‘ladi, bu yerda $q(\xi;x) = k \dfrac{(x_1\xi_1)^{1-2\alpha}}{r^{m-2\alpha}} F\left(\dfrac{m}{2} - \alpha, 1-\alpha; 2-2\alpha; -\dfrac{4x_1\xi_1}{r^2}\right)$ – (4) ning fundamental yechimi, r masofa (3) da aniqlangan, k - ma’lum son.

$\mu(\xi) = 1$ bo‘lganda ikkilangan qatlam potensialini $w_1(x)$ bilan belgilaymiz.

10-teorema. *Quyidagi formulalar o‘rinli:*

$$w_1(x) \equiv \int\limits_\Gamma B_{N\xi}^\alpha [q(\xi;x)] d_\xi \Gamma = \begin{cases} i(x) - 1, & x \in \Omega \cup \Gamma_1, \\ i(x) - \dfrac{1}{2}, & x \in \Gamma \cup \gamma, \\ i(x), & x \notin \bar{\Omega}, \end{cases}$$

bu yerda $i(x) = (1-2\alpha)\kappa x_1^{1-2\alpha} \int\limits_{\Gamma_1} \left[x_1^2 + \sum\limits_{k=2}^{m} \left(\xi_k - x_k\right)^2 \right]^{\alpha - \frac{m}{2}} d_\xi \Gamma_1.$

11-teorema. *Agarsli x nuqtalar Γ Lyapunov sirtida yotsa, u holda*

$$\left| B_{N\xi}^\alpha \left[q(\xi;x) \right] \right| \le \frac{C_1}{r_1^{2-2\alpha} r^{m-2}},$$

bu yerda C_1– o‘zgarmas son.

12-teorema. *Agar Γ – Lyapunov sirti bo‘lsa,u holda*

$$\int\limits_{\Gamma}\left|B_{N\xi}^{\alpha}\left[q\left(\xi;x\right)\right]\right|d_{\xi}\Gamma\le C_2,\ k=1,2,$$

bu yerda C_2 *– o‘zgarmas son.*

13-teorema. *x nuqta Γ sirtdagi x_0 nuqtaga ichkaridan va tashqaridan intilganda $w(x)$ ikkilangan qatlam potensiali limit qiymatlarga ega. Agar $w(x)$ ning ichkaridan limit qiymatlarini $w_i(x_0)$ bilan, tashqaridan limit qiymatlarini esa $w_e(x_0)$ bilan belgilasak, u holda*

$$\begin{aligned} w_i(x_0) &= -\frac{1}{2}\mu(x_0)+\int\limits_{\Gamma}\mu(\xi)K(x_0;\xi)d_{\xi}\Gamma,\\ w_e(x_0) &= \frac{1}{2}\mu(x_0)+\int\limits_{\Gamma}\mu(\xi)K(x_0;\xi)d_{\xi}\Gamma, \end{aligned} \qquad (5)$$

formulalar o‘rinli, bu yerda $K(x_0;\xi)=B_{N\xi}^{\alpha}\left[q(\xi;x_0)\right],\quad x_0:=(x_{10},...,x_{m0})$.

14-teorema. *Uzluksiz $\rho(\xi)$ zichlik uchun ushbu formulalar o‘rinli:*

$$\begin{aligned} B_{Nx}^{\alpha}\left[v(x)\right]_i &= \frac{1}{2}\rho(x)+\int\limits_{\Gamma}\rho(\xi)K(\xi;x)d_{\xi}\Gamma,\\ B_{Nx}^{\alpha}\left[v(x)\right]_e &= -\frac{1}{2}\rho(x)+\int\limits_{\Gamma}\rho(\xi)K(\xi;x)d_{\xi}\Gamma. \end{aligned} \qquad (6)$$

(5) va (6) tenglamalar zichliklar uchun integral tenglamalar ko‘rinishida yozilishi mumkin:

$$\mu(x)-\lambda\int\limits_{\Gamma}K(x;\xi)\mu(\xi)d_{\xi}\Gamma=f(x),\quad \rho(x)-\lambda\int\limits_{\Gamma}K(\xi;x)\rho(\xi)d_{\xi}\Gamma=g(x), \qquad (7)$$

bu yerda $\lambda=2$, $f(x)=-2w_i(x)$, $g(x)=-2B_{nx}^{\alpha}\left[v(x)\right]_e$, $\lambda=-2$, $f_k(x)=2w_e(x)$, $g(x)=2B_{nx}^{\alpha}\left[v(x)\right]_i$.

(7) tenglamalar o‘zaro qo‘shma tenglamalardir va 12-teoremaga binoan ularga Fredgolm nazariyasini qo‘llash mumkin.

3.3-paragrafda potensiallar nazariyasida olingan natijalar D sohada (4) tenglama uchun qo‘yilgan aralash va Neyman masalalarini yechishga qo‘llaniladi.

Aralash masala. (4) tenglamaning D sohada regulyar bo‘lgan hamda $B_{nx}^{\alpha}[u]\big|_{\Gamma}=\varphi(x), x\in\Gamma,\quad u(0,x_2,...,x_m)=\tau(\tilde{x}), \tilde{x}\in\overline{\Gamma}_1$ shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini toping, bu yerda $\varphi(x)$ va $\tau(\tilde{x})$ – Γ va $\overline{\Gamma}_1$ da berilgan funksiyalar.

Qo‘yilgan masalalarni yechishda Grin funksiyasi usulidan foydalanamiz. Avvalo (4) tenglamaga qo‘yilgan aralash masalaning Grin funksiyasini $x_1>0$ bo‘lgandagi ixtiyoriy sirt va $x_1=0$ bo‘lgandagi yopiq soha bilan chegaralangan sohada quramiz va maxsus yarim sferik sohada aralash masalaning yechimi soddaroq ko‘rinishni olishini ko‘rsatamiz.

15-teorema. *Agar Γ sirt Γ_1 ga to‘g‘ri burchak ostida yaqinlashsa, u holda*

$$u(\xi)=\int\limits_{\Gamma_1}\tau\left(\tilde{x}\right)x_1^{2\alpha}\left.\frac{\partial G\left(x;\xi\right)}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}d_{\tilde{x}}\Gamma_1-\int\limits_{\Gamma}\varphi(x)G\left(x;\xi\right)d_x\Gamma,$$

$$u(\xi)=C-\int\limits_{\Gamma_1}\nu\left(\tilde{x}\right)\cdot\left.G\left(x;\xi\right)\right|_{x_1=0}d_{\tilde{x}}\Gamma_1-\int\limits_{\Gamma}\varphi(x)G\left(x;\xi\right)d_x\Gamma$$

funksiyalar D sohada (4) tenglama uchun, mos ravishda, aralash va Neyman masalalarining yechimlari bo'ladi, bu yerda $G\left(x;\xi\right)$– Grin funksiyasi, C esa ixtiyoriy o'zgarmas son.

XULOSA

Dissertatsiya ishi ko'p o'zgaruvchili gipergeometrik funksiyalarning xossalarini isbotlashga va o'rganilgan xossalarni singulyar koeffitsiyentli ko'p o'lchovli elliptik tenglama uchun cheksiz va chekli sohalarda chegaraviy masalalarni yechishga bag'ishlangan.

Birinchi bobda ko'p o'zgaruvchili gipergeometrik funksiyalarning chegaraviy masalalarni yechishda zarur bo'ladigan xossalari tadqiq etilgan, ikkinchi bobda bir necha singulyar koeffitsiyentli ko'p o'lchovli elliptik tenglama uchun cheksiz sohada Dirixle, Neyman va aralash shartli masalalarning yechimlari oshkor ko'rinishlarda topilgan, uchinchi bobda esa ko'p o'lchovli singulyar elliptik tenglama uchun yarim fazoda chegaralangan sohada aralash va Neyman masalalari potensiallar nazariyasi yordamida yechilgan.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagicha:

Laurichella gipergeometrik funksiyasining qiymatini o'zgaruvchilarning maxsus nuqtasida hisoblash haqidagi limit teorema isbotlandi;

Laurichella gipergeometrik funksiyasining o'zgaruvchilar yig'indisi 1 ga teng bo'lgandagi gipertekislikda logarifmik va darajali maxsuslikka ega bo'lish shartlari aniqlangan;

chegaraviy masalalar yechimlarini tadqiq etishda zarur bo'ladigan ko'p karrali bir xosmas integralni hisoblash formulasi topilgan;

singulyar koeffitsiyentli fazoviy elliptik tenglama uchun Evklid fazosining cheksiz giperoktantida qo'yilgan Dirixle, Neyman va aralash shartli masalalar yechimlarining yagonaligi isbotlangan va masalalarning yechimlari Laurichella gipergeometrik funksiyasi orqali oshkor ko'rinishlarda topilgan;

ko'p o'lchovli bir necha singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglama uchun chekli sohada qo'yilgan aralash masalaning yechimi yagona bo'lishi va Neyman masalasining yechimi cheksiz ko'p bo'lib, bu masalaning ixtiyoriy ikkita yechimlari bir-birlaridan o'zgarmas qo'shiluvchiga farq qilishi isbotlangan;

ko'p o'lchovli bitta singulyar koeffitsiyentli elliptik tenglamaning fundamental yechimiga mos kelgan ikkilangan va oddiy qatlam potensiallari kiritilib, bu potensiallarning xossalari tadqiq etilgan va potensiallar nazariyasi bo'yicha olingan natijalar shu tenglama uchun aralash va Neyman masalalarini yechishda qo'llanilgan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ФЕРГАНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

ФЕРГАНСКИЙ ФИЛИАЛ ТАШКЕНТСКОГО УНИВЕРСИТЕТА ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ИМЕНИ МУХАММАДА АЛ-ХОРАЗМИЙ

ТУЛАКОВА ЗИЕДАХОН РИВОЖИДИНОВНА

ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРИМЕНЕНИЯ К РЕШЕНИЮ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ СИНГУЛЯРНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯ В КОНЕЧНОЙ И БЕСКОНЕЧНОЙ ОБЛАСТЯХ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Фергана – 2025

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико – математическим наукам зарегистрирована в Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за №B 2024.2.PhD/FM1059.

Диссертация выполнена в Ферганском филиале Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб – странице Научного совета (www.fdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Эргашев Тухтасин Гуламжанович** доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Джамалов Сирожиддин Зухриддинович** доктор физико-математических наук, профессор
	Иргашев Бахром Юсупханович кандидат физико-математических наук
Ведущая организация:	**Ургенчский государственный университет**

Защита диссертации состоится «20» 03 2025 года в 13:00 часов на заседании Научного совета PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 при Ферганском государственном университете. (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, дом 19. Тел: (+99873) 244-44-02, факс: (+99873) 244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно–ресурсном центре Ферганского государственного университета (зарегистрирована за №470). (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, дом 19). Тел.: (+99873) 244-44-94.

Автореферат диссертации разослан «7» 03 2025 года.
(протокол рассылки №5 от «7» 03 2025 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI FARG'ONA DAVLAT UNIVERSITETI
O'ZBEKISTON

Ш.Т. Каримов
Заместитель председателя научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф-м.н., доцент

И.У. Хайдаров
Ученый секретарь научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф-м.н., доцент

Ю.П. Апаков
Заместитель председатель научного семинара при научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Исследования многих практических задач, проводимые на мировом уровне, приводят к решению краевых задач для дифференциальных уравнений. В частности, математические модели механики, гидродинамики, динамики упругости, электромагнетизма и акустических процессов сводятся к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами. Например, основные законы биологии и газовой динамики сведены к краевым задачам для дифференциальных уравнений эллиптического типа с сингулярными коэффициентами. Видно, что исследование краевых задач для сингулярных эллиптических уравнений важно как одно из современных направлений теории уравнений в частных производных в связи с тем, что оно создает полную картину рассмотренных выше практических задач.

В мире ведутся научные исследования по вопросам поиска новых формул вычисления значений гипергеометрических функций многих переменных в особых точках и кратных несобственных интегралах. В связи с этим особое внимание уделяется целенаправленным научным исследованиям по установлению новых свойств гипергеометрических функций многих переменных и доказательству формулы вычисления многократного обобщенного несобственного интеграла, а также применению полученных новых результатов к построению явных решений краевых задач в бесконечных областях и решению смешанной задачи с помощью теории потенциалов в конечной области для многомерного сингулярного эллиптического уравнения.

В нашей республике реализуются комплексные мероприятия, имеющие научное и практическое применение в фундаментальных исследованиях, в частности в математической биологии и газовой динамике, и достигаются определенные результаты. В частности, в последние годы доказаны нерекуррентные формулы разложения для гипергеометрических функций Лауричелла и достигнуты значительные результаты при решении краевых задач в конечных областях для сингулярных пространственных эллиптических уравнений. В качестве основных задач и направлений деятельности математики определено проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Дифференциальные уравнения и математическая физика, теория динамических систем».[1] В целях использования научных результатов в смежных областях науки важными считаются решение основных краевых задач и построение теории потенциала для многомерного сингулярного эллиптического уравнения, соответственно, в бесконечных и конечных областях.

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года № 292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит выполнению задач, предусмотренных в Указах Президента Республики Узбекистан № УП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан», № УП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых документах, принятых в этой сфере.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование проводилось в рамках приоритетного направления IV. «Математика, механика и информатика» республиканского развития науки и техники.

Степень изученности проблемы. Известно, что фундаментальные решения уравнения играют важную роль при решении краевых задач для дифференциальных уравнений эллиптического типа. Построение фундаментальных решений уравнений эллиптического типа не всегда легко. Особенно эта проблема вызывает особые сложности в дифференциальных уравнениях эллиптического типа с вырождениями или сингулярными коэффициентами. К настоящему времени многими исследователями получен ряд результатов по построению фундаментальных решений вырождающихся уравнений эллиптического типа или уравнений с сингулярными коэффициентами и их применению к краевым задачам. В частности, фундаментальное решение модельного двумерного эллиптического уравнения с одной линией вырождения (с одним сингулярным коэффициентом) было впервые опубликовано Ф.Трикоми, а A.Weinstein нашел интегральное представление фундаментального решения для двумерных уравнений с двумя линиями вырождения (с двумя сингулярными коэффициентами). Позднее, построением фундаментальных решений для различных случаев таких уравнений занимались R.J.Weinacht, R.Gilbert, J.J.Barros-Neto, И.М.Гельфанд, J.D.Cole, E.T.Copson, M.Itagaki, О.И. Маричев, Н. Раджабов, А.К.Уринов, А.Хасанов и Э.Т.Каримов. Т.Г.Эргашев нашел фундаментальные решения многомерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами с помощью функции Лауричелла, число переменных которой равно числу сингулярных коэффициентов в уравнении, и изучил свойства фундаментальных решений.

Хотя исследование краевых задач для смешанного эллиптико-гиперболического модельного уравнения началось с работ Трикоми, Хольмгрен был первым, кто в явном виде решил краевую задачу для обобщенного уравнения Трикоми в эллиптической области, носящую теперь его имя. Теория решения краевых задач для вырождающихся эллиптических уравнений была развита И.Н.Векуа, Ф.И.Франклом, Л.Вольферсдорфом, С.П. Пулкиным, а в работах А.Хасанова, Э.Т.Каримова и А.Рыскан решения краевых задач для эллиптических уравнений с двумя, тремя и четыремя сингулярными коэффициентами записаны с помощью гипергеометрических функций Аппеля и Лауричелла. Т.Г Эргашев выразил решения краевых задач в конечных областях для многомерных эллиптических уравнений с несколькими сингулярными коэффициентами с помощью функции Лауричелла, число переменных которой равно числу сингулярных коэффициентов уравнения.

Поскольку методами разделения переменных и функции Грина краевые задачи можно решить только в стандартных областях простой структуры, С.Геллертедт разработал теорию потенциалов для двумерного модельного уравнения с одной линией вырождения и применил свой к решения задач Дирихле и Холмгрена. Задачи, изучавшиеся С.Геллерстедтом, в последние годы были обобщены Т.Г.Эргашевым в пространственное эллиптическое уравнение с одним сингулярным коэффициентом. Кроме того, в работах М.М.Смирнова и Т.Г.Эргашева построены теории потенциалов для решения смешанной задачи, поставленной для двух- и трехмерного сингулярного эллиптического уравнения, поэтому имеет важное значение разработка теории потенциалов для многомерного сингулярного эллиптического уравнения. Таким образом, данная диссертационная работа посвящена решению задач типа Дирихле и Неймана для многомерных эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами в бесконечной области, являющейся частью евклидова пространства, и смешанной задачи в конечной области, расположенной в полупространстве.

Связь темы диссертации с научно – исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в рамках темы «Математическое моделирование сложных физических и технологических процессов» плана научно – исследовательских работ Ферганского филиала Ташкентского университета информационных технологий им. Мухаммада аль-Хорезми.

Целью исследования является построение явных формул решений основных краевых задач в бесконечной области и решение смешанной задачи методом теории потенциала в конечной области для сингулярного эллиптического уравнения второго порядка.

Задачи исследования, решаемые в данной работе:

доказательство свойств гипергеометрической функции Лауричелла для использования при построении решений краевых задач для эллиптического уравнения с несколькими сингулярными коэффициентами;

найти формулу вычисления многократного несобственного интеграла, необходимую для доказательства свойств явных решений краевых задач;

доказательство однозначной разрешимости задач Дирихле и Неймана, а также задачи со смешанными условиями для пространственного эллиптического уравнения с несколькими сингулярными коэффициентами в бесконечной области;

построение теории потенциала и её применение к решению смешанной задачи для эллиптического уравнения с сингулярным коэффициентом.

Объект исследования. Гипергеометрические функции многих переменных и эллиптическое уравнение с сингулярными коэффициентами.

Предмет исследования. Краевые задачи для эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами в конечной и бесконечной областях.

Методы исследования. Использованы методы математического анализа, теории специальных функций и теории интегральных уравнений, а также методы Римана, принципа экстремума и интегралов энергии.

Научная новизна исследования

доказаны свойства функций Лауричелла, необходимые при построении явных решений краевых задач для эллиптического уравнения с несколькими сингулярными коэффициентами, с помощью теории специальных функций;

установлена формула вычисления многократного несобственного интеграла, позволяющая доказать свойства полученных решений краевых задач в бесконечной области, с использованием метода замены переменных и теории специальных функций;

доказана однозначная разрешимость задач Дирихле и Неймана, а также задачи со смешанными условиями для эллиптического уравнения с несколькими сингулярными коэффициентами в бесконечной области, с помощью теории специальных функций, методов принципа экстремума и интегралов энергии;

построена теория потенциала и решена смешанная задача для многомерного эллиптического уравнения с сингулярным коэффициентом.

Практические результаты исследования состоят в следующем: Для исследования свойств гипергеометрических функций многих переменных предложен алгоритм нахождения формулы, выражающей значения функции при аргументах, стремящихся к нулю, и изложен метод построения явных решений основных краевых задач для сингулярного эллиптического уравнения в бесконечной области.

Достоверность результатов исследования подтверждается строгим использованием методов математического анализа, математической физики, теории специальных функций для построения явных решений краевых задач и исследования вопросов теории потенциала для сингулярного эллиптического уравнения.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научное значение результатов исследования заключается в том, что полученные в работе результаты могут быть использованы в теории многомерных эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами.

Практическая ценность диссертационного исследования состоит в том, что оно может быть использовано при изучении математических аспектов задач фазовых переходов и уравнений критических явлений, определении скорости течения жидкостей в гидротехнических сооружениях и движения газов в газопроводах из композиционных материалов, установлении связи между изменением объема и деформацией в телах с выпуклыми оболочками, изучении скорости звука, при доказательстве интегрального представления гипергеометрической функции Лауричелла, которая участвует в многократных интегралах, таких как построение уравнений состояния газов при высоких и околозвуковых скоростях, в биомеханике, которая изучает деформацию и движение капиллярных тканей и клеток в организме, при моделировании ряда механических процессов, таких как описание распространения сильных световых волн в оптической среде; и определяется возможностью применения соответствующих процессов математического моделирования в других областях науки.

Внедрение результатов исследования. Результаты, связанные с предельными значениями многомерных гипергеометрических функций и явными решениями краевых задач для многомерных эллиптических уравнений с сингулярными коэффициентами в бесконечной области были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

способ вычисления значения гипергеометрической функции Лауричелла при предельных значениях её аргументов и метод определения логарифмической и степенной особенностей были использованы в зарубежном проекте №374874-2022 «Задачи фазовых переходов и критические явления. Математические аспекты их уравнений, быстрые переходы и асимптотика» при исследовании математических аспектов уравнений задач фазовых переходов и критических явлений (Справка Ошского государственного университета за номером №1210 от 17 сентября 2024 г., Кыргызская Республика). Использование научных результатов позволило доказать однозначную разрешимость новых задач для вырождающихся дифференциальных уравнений с частными производными в бесконечных областях и проверить выполнение условий поставленных задач.

формула вычисления одного многократного несобственного интеграла была использована в зарубежном проекте AP14972818 «Разработка методов построения фундаментальных решений неклассических уравнений математической физики высокого порядка» (Справка Казахского Национального педагогического университета имени Абая за номером №15-15-09-02-20/1818 от 18 сентября 2024 г., Казахстан). Использование научного результата позволило обосновать существование единственного решения смешанной краевой задачи для четырехмерного вырождающегося уравнения эллиптического типа второго порядка.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационного исследования обсуждалась на 11 международных и 3 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертационной работы опубликованы 24 научных работ, из них 10 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций доктора наук, в том числе, из них 4 опубликованы в зарубежных журналах и 6 в республиканских журналах.

Объем и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 99 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность и необходимость темы диссертации, освещается совместимость исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий республики Узбекистан. Указывается уровень изученности проблемы, цель, описываются задачи, объект и предмет исследования, описываются научная новизна и практические результаты исследования, раскрывается теоретическая и практическая значимость полученных результатов, информация о внедрении результатов исследования, сведения об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной "**Новые свойства гипергеометрических функций многих переменных, необходимые при исследовании краевых задач**", установлены свойства гипергеометрических функций Лауричелла при предельных значениях переменных и выяснены условия логарифмической и степенной особенностей первой функции Лауричелла, кроме того, найдена формула вычисления одного многократного несобственного интеграла, необходимого при исследовании свойств решений краевых задач, исследуемых в следующих главах.

Первый параграф этой главы носит вспомогательный характер: здесь приводятся известные факты из теории функций Аппеля и Лауричелла, которые понадобятся при изложении основных результатов диссертации.

Большие успехи в изучении теории гипергеометрической функции одного переменного $F(a,b;c;z)$ стимулировали развитие соответствующих теорий для функций от двух или более переменных. В 1893 г. Лауричелла определил гипергеометрические функции вида $F_A^{(n)}\left(a,\mathbf{b};\mathbf{c};\mathbf{x}\right)$ и $F_B^{(n)}\left(\mathbf{a},\mathbf{b};c;\mathbf{x}\right)$. Здесь и далее $\mathbf{a}=\left(a_1,...,a_n\right)$, $\mathbf{b}=\left(b_1,...,b_n\right)$, $\mathbf{c}=\left(c_1,...,c_n\right)$; $\mathbf{x}=\left(x_1,...,x_n\right)$.

Учитывая важность формул разложения для гипергеометрических функций многих переменных при исследовании краевых задач, 2020 г. Т.Г.Эргашев доказал удобные формулы разложения для функций Лауричелла и применил их к нахождению явных решений краевых задач в конечных областях. Однако в процессе решения краевых задач для сингулярных эллиптических уравнений в бесконечных областях требовалось дополнительно исследовать свойства функций Лауричелла при предельных значениях переменных.

Во втором параграфе исследуются важные свойства функций Лауричелла $F_A^{(n)}$ и $F_B^{(n)}$ при предельных значениях их переменных, а также установливаются условия на числовые параметры функции Лауричелла $F_A^{(n)}$, при выполнении которых эта функция имеет логарифмическую или степенную особенность. Полученные результаты сформулированы в виде нескольких теорем.

Пусть $\Gamma\left(z\right)$ обозначает гамма функцию, а $(a)_n$ - символ Похгаммера.

Теорема 1. *Пусть* a, b_k, c_k *– действительные числа,* a, c_k, $c_k - b_k \neq \neq 0,-1,-2,... \left(k=\overline{1,n}\right)$ *и* $a > b_1 + ... + b_n$. *Тогда имеют место следующие предельные отношения при* $n = 1, 2, ...$*:*

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0}\left\{x_1^{-b_1}...x_n^{-b_n}F_A^{(n)}\left(a,\mathbf{b};\mathbf{c};1-\frac{1}{x_1},...,1-\frac{1}{x_n}\right)\right\} = \frac{\Gamma\left(a-b_1-...-b_n\right)}{\Gamma(a)}\prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma\left(c_k\right)}{\Gamma\left(c_k-b_k\right)},$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to 0}\left\{x_1^{-b_1}...x_n^{-b_n}F_B^{(n)}\left(\mathbf{a};\mathbf{b};c;1-\frac{1}{x_1},...,1-\frac{1}{x_n}\right)\right\} = \frac{\Gamma\left(c\right)}{\Gamma\left(c-b_1-...-b_n\right)}\prod_{k=1}^{n}\frac{\Gamma\left(a_k-b_k\right)}{\Gamma\left(a_k\right)}.$$

Теорема 2. *Пусть* $x_1 > 0, ..., x_n > 0$. *Если* $c_1 > b_1 > 0$, ..., $c_n > b_n > 0$ *и* $a + b_1 + ... + b_n = c_1 + ... + c_n$, *то при* $X = x_1 + ... + x_n \to 1 - 0$ *гипергеометрическая функция Лауричелла* $F_A^{(n)}$ *имеет логарифмическую особенность*

$$F_A^{(n)}\left(a,\mathbf{b};\mathbf{c};\mathbf{x}\right) \sim -\frac{1}{\Gamma(a)}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma\left(c_j\right)}{\Gamma\left(b_j\right)}x_j^{b_j-c_j}\cdot\ln(1-X);$$

если же $c_1 > b_1 > 0$, ..., $c_n > b_n > 0$ *и* $a + b_1 + ... + b_n > c_1 + ... + c_n$, *то*

$$F_A^{(n)}\left(a,\mathbf{b};\mathbf{c};\mathbf{x}\right) \sim \frac{\Gamma\left(a+b_1+...+b_n-c_1-...-c_n\right)}{\Gamma(a)}\prod_{j=1}^{n}\frac{\Gamma\left(c_j\right)}{\Gamma\left(b_j\right)}x_j^{b_j-c_j}\cdot(1-X)^{|\mathbf{c}|-|\mathbf{b}|-a}.$$

В третьем параграфе первой главы доказывается явная формула вычисления одного многократного несобственного интеграла, значение которого очень важно при исследовании свойств решений рассматриваевых в следующих главах.

Лемма 1. *Если* p_j, q_j, r_j, s, t *– действительные числа и*

$$p_j > 0,\ q_j > 0,\ r_j > 0,\ s > 0,\ 0 < \left(p_1/q_1\right) + ... + \left(p_n/q_n\right) - t < s,\ j = \overline{1,n},$$

то справедливо следующее равенство:

$$\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty}...\int_0^{+\infty}\frac{x_1^{p_1-1}...x_n^{p_n-1}dx_1...dx_n}{\left[\left(r_1x_1\right)^{q_1}+...+\left(r_nx_n\right)^{q_n}\right]^t\left[1+\left(r_1x_1\right)^{q_1}+...+\left(r_nx_n\right)^{q_n}\right]^s} =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{p_1}{q_1}\right)...\Gamma\left(\frac{p_n}{q_n}\right)\Gamma\left(\frac{p_1}{q_1}+...+\frac{p_n}{q_n}-t\right)\Gamma\left(s+t-\frac{p_1}{q_1}-...-\frac{p_n}{q_n}\right)}{q_1q_2...q_nr_1^{p_1q_1}...r_n^{p_nq_n}\Gamma\left(\frac{p_1}{q_1}+...+\frac{p_n}{q_n}\right)\Gamma\left(s\right)}.$$

Во второй главе диссертации, названной "**Краевые задачи для пространственного эллиптического уравнения с несколькими сингулярными коэффициентами в бесконечной области**" применяя новые свойства гипергеометрической функции Лауричелла $F_A^{(n)}$ и формулу вычисления одного многократного несобственного интеграла, которые были доказаны в первой главе, исследуются задачи Дирихле и Неймана, а также задача со смешанными условиями для сингулярного эллиптического уравнения вида

$$L_{\alpha}^{(m,n)}(u) \equiv \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} + \sum_{j=1}^{n} \frac{2\alpha_j}{x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} = 0, \;\; 0 < 2\alpha_j < 1, \;\; j = \overline{1,n} \tag{1}$$

в бесконечной 2^{-n}-ой части m-мерного евклидова пространства. Здесь и далее $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$, а $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.

Пусть $\mathbb{R}_m$ – m-мерное евклидово пространство $(m \geq 2)$ и $(x_1, ..., x_m)$ – произвольная точка в нём и n – натуральное число, причем $n \leq m$. Бесконечную 2^{-n}-ую часть пространства $\mathbb{R}_m$ определим следующим образом:

$$\Omega \equiv \Omega_m^{n+} = \left\{ (x_1, ..., x_m) : x_i > 0, \; i = \overline{1,n}; \; -\infty < x_j < +\infty, \;\; j = \overline{n+1,m} \right\}.$$

Пусть $x = (x_1, ..., x_m)$ и $\xi = (\xi_1, ..., \xi_m)$ – векторы в $\mathbb{R}_m$; $\tilde{x}_k$ и $\tilde{\xi}_k$ обозначают векторы, у каждого из которых отсутствует k-ая компонента;

$$x^{(2\alpha)} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{2\alpha_i}; \quad \tilde{x}_k^{(2\alpha)} = \prod_{i=1, i \neq k}^{n} x_i^{2\alpha_i}; \;\; R = \sqrt{x_1^2 + .. + x_m^2}, \;\; X_k = \sqrt{1 + R^2 - x_k^2}.$$

Бесконечные области

$$S_k = \left\{ x : x_1 > 0, ..., x_{j-1} > 0, x_j = 0, x_{j+1} > 0, ..., x_n > 0, \; -\infty < x_{n+1}, ..., x_m < +\infty \right\}$$

называются баковыми гранями области Ω.

$$D_k = \bigcup_{j=k+1}^{n} S_j, \; k = \overline{0, n-1}$$

В первых двух параграфах второй главы исследуются задачи Дирихле и Неймана для уравнения (1) в бесконечной области Ω и доказываются теоремы единственности и существования решений поставленных задач.

Задача Дирихле D^{∞}. Найти регулярное решение $u(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^2(\Omega)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям:

$$u(x,\xi)\Big|_{x_k=0} = \tau_k(\tilde{x}_k), \tilde{x}_k \in S_k,$$

$$\lim_{R \to \infty} u(x) = 0, \;\; m > 2 \tag{2}$$

где $\tau_k(\tilde{x}_k)$ – такие заданные функции, что

$$\tau_k(\tilde{x}_k) = \frac{\tilde{\tau}_k(\tilde{x}_k)}{X_k^{2\varepsilon_k}}, \;\; \tilde{\tau}_k(\tilde{x}_k) \in C\left(\overline{S}_k\right), \;\; \varepsilon_k > 0.$$

Кроме того, функции $\tau_k(\tilde{x}_k)$ удовлетворяют условиям согласования:

$$\tau_k(\mathbf{0}) = \tau_j(\mathbf{0}), \quad \tau_k(\tilde{x}_k)\Big|_{x_j=0} = \tau_j(\tilde{x}_j)\Big|_{x_k=0}, \quad k \neq j, \;\; k, j = \overline{1,n}.$$

Здесь $\mathbf{0} := (0, ..., 0)$ – ноль-вектор с $(m-1)$ компонентами.

Теорема 3. *Задача D^{∞} для уравнения (1) в неограниченной области Ω может иметь не более одного решения.*

Теорема 4. *Пусть* α_1, ..., α_n – *действительные числа, причем* $0 < 2\alpha_k < 1$. *Решение задачи* D^∞ *для уравнения (1) при* $m \geq 2$ *в неограниченной области* Ω *определяется формулой*

$$u(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_{S_k} \tau_k\left(\tilde{\xi}_k\right) \tilde{\xi}_k^{(2\alpha)} \left(\xi_k^{2\alpha_k} \frac{\partial q_n(x,\xi)}{\partial \xi_k} \right)\Bigg|_{\xi_k=0} dS_k$$

где $q_n(x,\xi)$ – *фундаментальное решение уравнения (1):*

$$q_n(x,\xi) = \gamma_n \prod_{k=1}^{n} \left(x_k \xi_k\right)^{1-2\alpha_k} r^{-2\beta_n} F_A^{(n)} \left[\begin{matrix} \beta_n, 1-\alpha_1, ..., 1-\alpha_n; \\ 2-2\alpha_1, ..., 2-2\alpha_n; \end{matrix} \sigma \right],$$

$\beta_n = \dfrac{m-2}{2} + n - |\alpha|$, γ_n - *определенное число;*

$$\sigma = \left(-\frac{4x_1\xi_1}{r^2}, ..., -\frac{4x_n\xi_n}{r^2} \right), \quad r = \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^{m} (x_i - \xi_i)^2}. \qquad (3)$$

Здесь и далее под обозначением интеграла $\int\limits_{S_k} ...dS_k$ понимается $(m-1)$-кратный интеграл по бесконечной области $\Omega \cap \{x_k = 0\}$:

$$\int_{S_k} ...dS_k = \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} ... \int_{-\infty}^{+\infty}}_{m-n} \underbrace{\int_{0}^{+\infty} ... \int_{0}^{+\infty}}_{n-1} ...d\xi_1 ... d\xi_{k-1} d\xi_{k+1} ... d\xi_n d\xi_{n+1} ... d\xi_m.$$

Задача Неймана (Задача N^∞**).** Найти регулярное решение $u(x)$ уравнения (1) из класса функций $u(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right) \cap C^1\left(\Omega \cup D_0\right) \cap C^2(\Omega)$, удовлетворяющее условиям

$$\left(x_k^{2\alpha_k} \frac{\partial u(x)}{\partial x_k} \right)\Bigg|_{x_k=0} = \nu_k\left(\tilde{x}_k\right), \quad \tilde{x}_k \in S_k$$

и условию (2), где $\nu_k\left(\tilde{x}_k\right)$ –такие заданные функции, что

$$\left|\nu_k\left(\tilde{x}_k\right)\right| \leq \frac{\tilde{\nu}_k(\tilde{x}_k)}{X_k^{1-2\alpha_k+\varepsilon_k}}, \quad \tilde{\nu}_k(\tilde{x}_k) \in C(S_k),$$

где $\varepsilon_k > 0$ – достаточно малые положительные числа. Кроме того, в начале координат функции $\nu_k\left(\tilde{x}_k\right)$ могут обращаться в бесконечность порядка меньше $m - 1 - 2|\alpha| + 2\alpha_k$; $k = \overline{1,n}$.

Теорема 5. *Задача* N^∞ *для уравнения (1) в бесконечной области* Ω *имеет не более одного решения.*

Теорема 6. *Пусть* α_1, ..., α_n– *действительные числа, причем* $0 < 2\alpha_k < 1$. *Решение задачи* N^∞ *для уравнения (1) при* $m \geq 2$ *в области* Ω *определяется формулой*

$$u(x)=-\sum_{k=1}^{n}\int_{S_k}\nu_k\left(\tilde{\xi}_k\right)\tilde{\xi}_k^{(2\alpha)}q_0(x;\xi)\big|_{\xi_k=0}dS_k,$$

где $q_0(x,\xi)$ *– фундаментальное решение уравнения (1):*

$$q_0(x,\xi)=\gamma_0 r^{-2\beta_0}F_A^{(n)}\begin{bmatrix}\beta_0,\alpha_1,...,\alpha_n; \\ 2\alpha_1,...,2\alpha_n;\end{bmatrix}\sigma,\ \ \beta_0:=\frac{m-2}{2}+|\alpha|,$$

выражения σ *и* r *определены в (3),* γ_0 *- определенное число.*

Третий параграф второй главы посвящается доказательству однозначной разрешимости задачи со смешанными условиями для уравнения (1) в неограниченной области Ω.

Задача со смешанными условиями $\left(D^kN^{n-k}\right)^{\infty}$**.** Найти регулярное решение $u(x)\in C\left(\overline{\Omega}\right)\cap C^1\left(\Omega\cup D_k\right)\cap C^2(\Omega)$ уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x)\big|_{x_p=0}=\tau_p(\tilde{x}_p),\ p=\overline{1,k},\ ...,$$

$$\left(x_p^{2\alpha_p}\frac{\partial u(x)}{\partial x_p}\right)\Bigg|_{x_p=0}=\nu_p\left(\tilde{x}_p\right),\ p=\overline{k+1,n},$$

и условию (2), где $\tau_p(\tilde{x}_p)$ и $\nu_p(\tilde{x}_p)$ – такие заданные функции, что

$$\tau_p(\tilde{x}_p)=\frac{\tilde{\tau}_p(\tilde{x}_p)}{X_p^{m-2+|\alpha|}},\ \ \tilde{\tau}_p(\tilde{x}_p)\in C\left(\overline{S}_p\right);$$

$$\nu_p(\tilde{x}_p)=\frac{\tilde{\nu}_p\left(\tilde{x}_p\right)}{X_p^{m-1+|\alpha|-2\alpha_p}},\tilde{\nu}_p(\tilde{x}_p)\in C(S_p).$$

Кроме того, функции $\tau_p(\tilde{x})\,(p=\overline{1,k})$ удовлетворяют условиям согласования на первых k боковых гранях $S_1,...,\ S_k$ области Ω и в начале координат:

$$\tau_1\big|_{x_2=0}=\tau_2\big|_{x_1=0},\tau_2\big|_{x_3=0}=\tau_3\big|_{x_2=0},...,\tau_{k-1}\big|_{x_k=0}=\tau_k\big|_{x_{k-1}=0};$$
$$\tau_1(\mathbf{0})=...=\tau_k(\mathbf{0});\ 0\le k\le n.$$

Теорема 7. *Если при достаточно больших значениях* R *выполняются неравенства*

$$|u|\le\frac{C_k}{R^{m-2+|\alpha|}};\qquad \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|\le\frac{C_k}{R^{m-1+|\alpha|}},\ i=\overline{1,m},$$

то задача $(D^kN^{n-k})^{\infty}$

может иметь не более одного решения, где $C_k=const>0\ (k=\overline{0,n})$.

Теорема 8. *Пусть* $\alpha_1,\ ...,\ \alpha_n$*– действительные числа, причем* $0<2\alpha_k<1$. *Решение задачи задачи со смешанными условиями* $(D^kN^{n-k})^{\infty}$ *для* *уравнения (1) при* $m \geq 2$ *в неограниченной области* Ω *определяется формулой*

$$u(\xi) = \sum_{p=1}^{k} \int_{S_p} \tau_p(\tilde{x}_p)\tilde{x}_p^{(2\alpha)} \left(x_p^{2\alpha_p} \frac{\partial q_k(x,\xi)}{\partial x_p} \right)\Bigg|_{x_p=0} dS_p -$$

$$- \sum_{p=k+1}^{n} \int_{S_p} \nu_p(\tilde{x}_p)\tilde{x}_p^{(2\alpha)} q_k(x,\xi)\Big|_{x_p=0} dS_p,$$

где $q_k(x,\xi)$ *– фундаментальное решение уравнения (1):*

$$q_k(x;\xi) = \gamma_k r^{-2\beta_k} \prod_{i=1}^{k} \left(x_i\xi_i\right)^{1-2\alpha_i} F_A^{(n)}\left(\beta_k, \mathrm{A}_k; 2\mathrm{A}_k; \sigma_1,...,\sigma_n\right), \quad k = \overline{0,n},$$

$$\beta_k = \frac{m-2}{2} + k - \sum_{i=1}^{k}\alpha_i + \sum_{i=k+1}^{n}\alpha_i,\ \mathrm{A}_k := \left(1-\alpha_1,...,1-\alpha_k, \alpha_{k+1},...,\alpha_n\right),$$

выражения σ *и* r *определены в (3), а* γ_k *- определенное число.*

В третьей главе диссертации, названной "**Смешанная задача и задача Неймана для пространственного сингулярного эллиптического уравнения в конечной области**", исследуются потенциалы двойного и простого слоев и применяются к решению краевых задач для многомерного сингулярного эллиптического уравнения в области, ограниченной в полупространстве.

Теория потенциала играет важную роль при решении краевых задач для эллиптических уравнений, потому что, метод разделения переменных и метод функции Грина позволяют получить явное выражение для краевых задач только в случае областей простейшего вида. В связи с чем сведение краевых задач с помощью потенциалов двойного и простого слоев к интегральным уравнениям, с одной стороны, удобно для теоретического исследования вопросов разрешимости и единственности решения краевых задач, с другой стороны, дает возможность эффективного численного решения краевых задач для областей сложной формы.

Первый параграф третьей главы посвящен постановке смешанной задачи и задачи Неймана, а также доказательству теоремы единственности для сингулярного эллиптического уравнения вида (1) в области D, ограниченной боковыми гранями S_1, ..., S_n области Ω и ляпуновской поверхностью S, содержащейся в m-мерном параллелепипеде $R_m^n = \{x : 0 < x_i < a_i, i = \overline{1,n};$ $-b_i < x_i < c_i, i = \overline{n+1,m}\}$ и пересекающейся с координатными осями Ox_i $(i = \overline{1,m})$ в точках A_i $(i = \overline{1,n})$, B_i и C_i $(i = \overline{n+1,m})$, где m – размерность евклидова пространства R_m и n – число сингулярных коэффициентов уравнения (1), $m \geq 2$, $n \geq 1$, $n \leq m$; a_i, b_i и c_i – положительные числа; A_i, B_i и C_i – точки в Ox_i, i-ые координаты которых соответственно равны a_i, $-b_i$ и c_i, а остальные равны нулю.

При решении всякой краевой задачи, в том числе, при построении теории потенциала, для эллиптических уравнений важную роль играют фундаментальные решения данного уравнения. Несмотря на то, что в настоящее время известны фундаментальные решения для многомерного (более двумерного) уравнения, как уравнение (1), построение теории потенциала до недавного времени ограничивалось лишь двумерными уравнениями с одним и двумя сингулярными коэффициентами.

Определим производную по внешней нормали N к поверхности S следующим образом:

$$B_{Nx}^{\alpha}[f]=x^{(2\alpha)}\left(\frac{\partial[f]}{\partial x_1}\cos\left(N,x_1\right)+...+\frac{\partial[f]}{\partial x_m}\cos\left(N,x_m\right)\right).$$

Смешанная задача $D^k N^{n-k} M$. Найти регулярное решение $u(x)$ уравнения (1) в области D, удовлетворяющее условиям

$$u\big|_{x_p=0}=\tau_p\left(\tilde{x}_p\right),\ \ p=\overline{1,k},$$

$$\left.\left(x_p^{2\alpha_p}\frac{\partial u}{\partial x_p}\right)\right|_{x_p=0}=\nu_p\left(\tilde{x}_p\right),\ \ p=\overline{k+1,n},$$

$$B_{Nx}^{\alpha}[u(x)]\Big|_S=\varphi_k\left(x\right),$$

где τ_p, ν_p и φ_k – заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\tau_i\left(0\right)=\tau_j\left(0\right),\ \ \tau_i\left(\tilde{x}_{iq}^0\right)=\tau_j\left(\tilde{x}_{jq}^0\right),\ \ i\neq q, j\neq q,$$

$$\tau_p\left(\tilde{x}_p\right)\Big|_{x_p=0}=\varphi_k\big|_{x_p=0},\ \ i,j,p,q=\overline{1,k};$$

в начале координат функции $\nu_p(\tilde{x})$ ($p=\overline{k+1,n}$) могут обращаться в бесконечность порядка меньше $m-1-2|\alpha|+2\alpha_p$; $k=\overline{1,n}$; $\tilde{x}_{pq}^0=\tilde{x}_p\big|_{x_q=0}, p\neq q.$

Задача Неймана. Найти регулярное решение $u(x)$ уравнения (1) в области D, удовлетворяющее условиям

$$B_{Nx}^{\alpha}[u]\Big|_S=\varphi(x),\ x\in S,$$

$$\left.\left(x_p^{2\alpha_p}\frac{\partial u}{\partial x_p}\right)\right|_{x_p=0}=\nu_p\left(\tilde{x}_p\right),\tilde{x}_p\in D_p,$$

где φ – непрерывная функция в S, а функции $\nu_p(\tilde{x})$ непрерывны в D_p и в начале координат они могут обращаться в бесконечность порядка меньше $m-1-2|\alpha|+2\alpha_p$; $p=\overline{1,n}$.

Теорема 9. *Если смешанная задача $D^k N^{n-k} M$ имеет решение, то оно единственно. Если существует решение задачи Неймана для уравнения (1), то оно определяется с точностью до постоянного слагаемого.*

Во втором параграфе третьей главы исследованы потенциалы двойного и простого слоев, соответствующие эллиптическому уравнения с одним сингулярным коэффициентом вида

$$H_\alpha^m(u) \equiv \sum_{k=1}^{m} u_{x_k x_k} + \frac{2\alpha}{x_1} u_{x_1} = 0 \ \left(0 < 2\alpha < 1,\ m > 2\right) \tag{4}$$

в полупространстве $R_m^+ = \left\{x : x_1 > 0\right\}$.

Пусть Γ – ляпуновская поверхность, лежащая в R_m^+ и Γ_1–$(m-1)$-мерный шар радиуса a с центром в начале координат, лежащий на гиперплоскости $x_1 = 0$, а Ω – конечная область, ограниченная поверхностью Γ и шаром Γ_1, общую границу которых обозначим через γ.

Интегралы $w(x) = \int\limits_\Gamma \mu(\xi) B_{N\xi}^\alpha [q(\xi;x)] d_\xi \Gamma$ и $v(x) = \int\limits_\Gamma \rho(\xi) q(\xi;x) d_\xi \Gamma$ называются потенциалами двойного и простого слоев, соответственно, где $\mu(x)$ и $\rho(x)$–непрерывные функции в $C\left(\overline{\Gamma}\right)$. Потенциалы двойного и простого слоев $w(x)$ и $v(x)$ есть регулярные решения уравнения (4) в любой области, лежащей в полупространстве $x_1 > 0$, не имеющей общих точек ни с поверхностью Γ, ни с гиперплоскостью $x_1 = 0$;

$q(\xi;x) = k \dfrac{(x_1\xi_1)^{1-2\alpha}}{r^{m-2\alpha}} F\left(\dfrac{m}{2} - \alpha, 1-\alpha; 2-2\alpha; -\dfrac{4x_1\xi_1}{r^2}\right)$–фундаментальное решение уравнения (4), расстояние r определено в (3), k – известное число.

Когда $\mu(\xi) = 1$, потенциалы двойного слоя обозначим через $w_1(x)$.

Введем обозначение**:** $i(x) = (1-2\alpha)\kappa x_1^{1-2\alpha} \int\limits_{\Gamma_1} \left[x_1^2 + \sum\limits_{k=2}^{m} \left(\xi_k - x_k\right)^2\right]^{\alpha - \frac{m}{2}} d_\xi \Gamma_1.$

Теорема 10. *Справедливы следующие формулы:*

$$w_1(x) \equiv \int\limits_\Gamma B_{N\xi}^\alpha [q(\xi;x)] d_\xi \Gamma = \begin{cases} i(x) - 1, & x \in \Omega \cup \Gamma_1, \\ i(x) - \dfrac{1}{2}, & x \in \Gamma \cup \gamma, \\ i(x), & x \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Теорема 11. *Если точка x лежит на ляпуновской поверхности Γ, то*

$$\left|B_{N\xi}^\alpha \left[q(\xi;x)\right]\right| \le \frac{C_1}{r_1^{2-2\alpha} r^{m-2}}, \quad C_1 = const.$$

Теорема 12. *Если Γ – ляпуновская поверхность, то*

$$\int\limits_\Gamma \left|B_{N\xi}^\alpha \left[q(\xi;x)\right]\right| d_\xi \Gamma \le C_2,\ k = 1,2, \quad C_2 = const.$$

Теорема 13. *Потенциал двойного слоя $w(x)$ имеет пределы при стремлении точки x к точке x_0 поверхности Γ извне или изнутри. Если предел значений $w(x)$ изнутри обозначить через $w_i(x_0)$, а предел извне –*

через $w_e(x_0)$, то имеют место формулы

$$w_i(x_0) = -\frac{1}{2}\mu(x_0) + \int_\Gamma \mu(\xi) K(x_0;\xi) d_\xi \Gamma,$$
$$w_e(x_0) = \frac{1}{2}\mu(x_0) + \int_\Gamma \mu(\xi) K(x_0;\xi) d_\xi \Gamma, \quad (5)$$

где $K(x_0;\xi) = B^\alpha_{N\xi}\left[q(\xi;x_0)\right], \quad x_0 := (x_{10},...,x_{m0})$.

Теорема 14. *Для непрерывной плотности $\rho(\xi)$ имеют место формулы:*

$$B^\alpha_{Nx}\left[v(x)\right]_i = \frac{1}{2}\rho(x) + \int_\Gamma \rho(\xi) K(\xi;x) d_\xi \Gamma,$$
$$B^\alpha_{Nx}\left[v(x)\right]_e = -\frac{1}{2}\rho(x) + \int_\Gamma \rho(\xi) K(\xi;x) d_\xi \Gamma. \quad (6)$$

Формулы (5) и (6) могут быть написаны как интегральные уравнения для плотностей:

$$\mu(x) - \lambda \int_\Gamma K(x;\xi)\mu(\xi) d_\xi \Gamma = f(x),$$
$$\rho(x) - \lambda \int_\Gamma K(\xi;x)\rho(\xi) d_\xi \Gamma = g(x), \quad (7)$$

где

$$\lambda = 2, \qquad f(x) = -2w_i(x), \qquad g(x) = -2B^\alpha_{nx}\left[v(x)\right]_e,$$
$$\lambda = -2, \qquad f_k(x) = 2w_e(x), \qquad g(x) = 2B^\alpha_{nx}\left[v(x)\right]_i$$

Уравнения (7) сопряженные и в силу теоремы 12 к ним применима теория Фредгольма.

Третий параграф третьей главы посвящается применениям полученных результатов теории потенциала к решению краевых задач для уравнения (4) в области Ω, поставленных в п.1 настоящей главы.

Смешанная задача. Найти в области Ω регулярное решение уравнения (4), непрерывное в замкнутой области $\overline{\Omega}$ и удовлетворяющее краевому условию

$$B^\alpha_{nx}[u]\Big|_\Gamma = \varphi(x), x \in \Gamma, \; u(0,x_2,...,x_m) = \tau(\tilde{x}), \tilde{x} \in \overline{\Gamma}_1,$$

где $\varphi(x)$ и $\tau(\tilde{x})$ - непрерывные функции в Γ и $\overline{\Gamma}_1$.

Для решения поставленной задачи воспользуемся методом функций Грина. Сначала построим функцию Грина для решения смешанной задачи для уравнения (4) в области, ограниченной произвольной поверхностью при $x_1 > 0$ и плоской замкнутой областью при $x_1 = 0$. В конце этого параграфа мы покажем, что благодаря функции Грина решение смешанной задачи в специальной полусферической области принимают более простые формы.

Теорема 15. *Пусть ляпуновская поверхность Γ подходит под прямым углом к Γ_1. Тогда функции*

$$u(\xi)=\int_{\Gamma_1}\tau\left(\tilde{x}\right)x_1^{2\alpha}\left.\frac{\partial G\left(x;\xi\right)}{\partial x_1}\right|_{x_1=0}d_{\tilde{x}}\Gamma_1-\int_{\Gamma}\varphi(x)G\left(x;\xi\right)d_x\Gamma,$$

$$u(\xi)=C-\int_{\Gamma_1}\nu\left(\tilde{x}\right)\cdot G\left(x;\xi\right)\Big|_{x_1=0}d_{\tilde{x}}\Gamma_1-\int_{\Gamma}\varphi(x)G\left(x;\xi\right)d_x\Gamma,$$

соответственно, является решениями смешанной задачи и задачи Неймана для уравнения (4) в области Ω*, где* $G\left(x;\xi\right)$ *– функция Грина.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению свойств гипергеометрических функций многих переменных и их применению к решению краевых задач для многомерного эллиптического уравнения с сингулярными коэффицииентами в бесконечной и конечной областях.

В первой главе исследуются свойства гипергеометрических функций Лауричелла, необходимые при решении краевых задач, рассматриваемых следующих двух главах, во второй главе решения задач Дирихле и Неймана, а также задачи со смешанными условиями выписываются в явных формах, а в третьей главе смешанная задача и задача Неймана для пространственного сингулярного эллиптического уравнения в области, ограниченной в полупространстве, решена методом теории потенциала.

Результаты исследования следующие:

исследовано поведение функций Лауричелла при предельных значениях переменных;

выяснены условия для логарифмической и других особенностей первой функции Лауричелла на гиперплоскости, где сумма переменных равна 1;

найдена формула вычисления одного многократного несобственного интеграла, имеющего применение при исследовании свойств решений краевых задач.

доказаны теоремы единственности и найдены явные формулы решений, выписанные через функцию Лауричелла задач Дирихле и Неймана, а также задачи со смешанными условиями для эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами в бесконечном гипероктанте;

доказана теорема о единственности решения смешанной задачи и неединственности решения задачи Неймана для сингулярного эллиптического уравнения в конечной области с утверждением, о том, что любые две решения задачи Неймана определяются с точностью до постоянного слагаемого;

введены и исследованы потенциалы двойного и простого слоев, соответствующие фундамантальному решению пространственного эллиптического уравнения с сингулярным коэффициентом и полученные результаты теории потенциала применены к решению смешанной задачи и задачи Неймана для данного уравнения.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 FERGANA STATE UNIVERSITY

FERGANA BRANCH OF TASHKENT UNIVERSITY OF INFORMATION TECHNOLOGIES NAMED AFTER MUHAMMAD AL-KHWARIZMI

TULAKOVA ZIYODAXON RIVOJIDINOVNA

HYPERGEOMETRIC FUNCTIONS OF MANY VARIABLES AND THEIR APPLICATIONS TO SOLVING BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR SINGULAR ELLIPTIC EQUATION IN FINITE AND INFINITE DOMAINS

01.01.02 – Differential Equations and Mathematical Physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Fergana – 2025

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number №B 2024.2.PhD/FM1059.

Dissertation has been prepared at Fergana branch of Tashkent university of information technologies named after Muhammad al-Khwarizmi.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website (www.fdu.uz) and the "ZiyoNet" information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisors:	**Ergashev Tuxtasin Gulamjanovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, docent
Official opponents:	**Djamalov Sirojiddin Zuxriddinovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Irgashev Bakhrom Yusupkhanovich Candidate of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Urganch State University**

Defense will take place «20» 03 2025 at 13:00 at the meeting of Scientific Council number PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 at Fergana State University. (Address: Murabbiylar str. 19, Fergana, Uzbekistan, 150100, Phone: (+99873)244-44-02, fax: (+99873)244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Fergana State University (is registered № 470). (Address: Murabbiylar str. 19, Fergana, Uzbekistan, 150100, Phone: (+99873)244-44-94.

Abstract of dissertation sent out on « 7 » 03 2025 year.
(Mailing report № 5 on « 7 » 03 2025 year).

Sh.T. Karimov
Deputy chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S., Dotsent

I.U. Khaydarov
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, C.Ph.M.S., Dotsent

Y.P. Apakov
Deputy chairman of the Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research is to construct of explicit formulas for the solutions of a basic boundary value problems in an infinite domain and solve of a mixed problem in a finite domain for multidimensional singular elliptic equations of the second order.

Object of the research: Multiple hypergeometric functions and multidimensional singular differential equations of elliptic type.

The scientific novelty of the research work is as follows:

a formula for calculating the limit values of the multiple hypergeometric functions is found, which is applied to the study of the properties of solutions to boundary value problems;

conditions for logarithmic and power singularities of the first Lauricella function on the hyperplane where the sum of the variables is equal to 1 are determined;

a formula for calculating a multiple improper integral is established, which makes it possible to verify the truth of the obtained solutions to boundary value problems in an infinite domain;

an uniqueness and existence theorems to the Dirichlet and Neumann problems, as well as problems with mixed conditions for a multidimensional elliptic equation with several singular coefficients in an infinite domain, are proven;

a theorem on the uniqueness of the solution of a mixed problem and the non-uniqueness of the solution of the Neumann problem for an elliptic equation with several singular coefficients in a finite domain is proved with the assertion that any two solutions of the Neumann problem are determined up to a constant term;

potentials of double and simple layers corresponding to the fundamental solution of a spatial elliptic equation with a singular coefficient are introduced and investigated, and the obtained results of potential theory are applied to the solution of the mixed problem and the Neumann problem for this equation.

Implementation of research results. The results obtained from the study of the limit values of multiple hypergeometric functions and explicit solutions of boundary value problems for multidimensional elliptic equations with singular coefficients in an infinite domain were used in the following research projects:

A method for calculating the value of the Lauricella hypergeometric function at the limiting values of its arguments and the method for determining logarithmic and power singularities were used in the foreign project №374874-2022 “Problems of phase transitions and critical phenomena. Mathematical aspects of their equations, fast transitions and asymptotics” in the study of mathematical aspects of equations of problems of phase transitions and critical phenomena (Reference of the Osh State University, Republic of Kyrgystan, dated September 17, 2024, No. 1210). The application of these results made it possible to prove the unique solvability of new problems for degenerate partial differential equations in infinite domains and to verify the fulfillment of the conditions of the problems.

A formula for calculating one multiple improper integral was used in the foreign project AR14972818 "Establishment of methods for constructing fundamental solutions of non-classical equations of high-order mathematical physics" (Reference of Abai Kazakh National Pedagogical University under the number №15-15-09-02-20/1818 of September 18, 2024, Kazakhstan). The use of the scientific result made it possible to substantiate the existence of a unique solution to a mixed boundary value problem for a four-dimensional degenerate second-order elliptic equation.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and titles of used literature. The full volume of the thesis is 99 pages.

E’lon qilingan ishlar ro‘yxati
Список опубликованных работ
List of published works

I bo‘lim (I часть; part I)

1. Ergashev T.G., Tulakova Z.R. The Dirichlet Problem for an Elliptic Equation with Several Singular Coefficients in an Infinite Domain // Russian Mathematics, 2021, Vol. 65, No. 7, pp. 71–80.
DOI: 10.3103/S1066369X21070082 (IF-0.9)

2. Ergashev T.G., Tulakova Z.R. The Neumann problem for a multidimensional elliptic equation with several singular coefficients in an infinite domain. // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2022, Vol. 43, №1. 199-206. DOI: 10.1134/S19950802220401026 (01.00.00; №3, IF-1.5)

3. Ergashev T.G., Tulakova Z.R. A Problem with Mixed Boundary Conditions for a Singular Elliptic in an Infinite Domain // Russian Mathematics, 2022, Vol. 66, No. 7, pp. 51–63. DOI: 10.3103/S1066369X22070039 (IF-0.9)

4. Ergashev T.G., Tulakova Z.R. Application of the potential theory to solving a mixed problem for a multidimensional elliptic equation with one singular coefficient. // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Sciences. 2024, №3(123). pp. 33-47. (IF-0.4)

5. Тулакова З.Р. Смешанная задача для трехмерного сингулярного эллиптического уравнения // Научный вестник Наманганского государственного университета 2023. № 7. с. 44-50. (01.00.00; №14)

6. Tulakova Z.R. Mixed problem for the three-dimensional elliptic equation with the two singular coefficients // Scientific bulletin of Namangan state university. 2023. №11. pp. 43-48. (01.00.00; №14)

7. Тулакова З.Р. Внутренняя задача Неймана для эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами // Научный вестник Бухарского государственного университета 2024. № 1. с. 42-48. (01.00.00 №3)

8. Tulakova Z.R. Appell hypergeometric function with applications to the boundary value problems for the three-dimensional bi-axially symmetric singular //

O‘zbekiston Milliy universiteti xabarlari, ACTA NUUz, 2024, №1. pp. 98-110. https://journalsnuu.uz/index.php/1/issue/current (01.00.00; №8)

9. Тулакова З.Р. Смешанные задачи для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами. // Бюллетень Института Математика 2024, №7(2), с. 92-104. (01.00.00 №17)

10. Tulakova Z.R. Boundary value problems of dirichlet-neumann type for the three-dimensional elliptic equation with two singular coefficients. // Scientific reports of Bukhara State University 2024, № 6, p. 23-28. (01.00.00 №3)

II bo‘lim (II часть; part II)

1. Ergashev T.G., Tulakova Z.R. Lauricella hypergeometric function and its application to the solution of the Neumann problem for a multidimensional elliptic equation with several singular coeffisiyents in an infinite domain, ArXiv: 2108.02691v1Math.AP., 5 Aug 2021. 11 p.

2. Komilova N.J., Tulakova Z.R. Dirichlet problem for multidimensional Helmholtz equation with two singular coefficients. // Abstracts of the International Online Conference Frointed in mathematics and computer science. October 12-15, 2020. National University of Uzbekistan. pp. 84

3. Tulakova Z.R. The Neymann problem for a multimedimensional elliptic equation with several singular coefficients in an infinite domain. // Тезисы докладов республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых Сарымсаковские чтения 16–18 сентября 2021. Ташкент, Узбекистан, Национальный университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека. ст. 284-286

4. Tulakova Z.R. Lauricella hypergeometric function and its application to the solution of the Neumann problem for a singular elliptic equation in an infinite domain. // International Conference «Differential Equations, Mathematical Modeling and Computational Algorithms» Belgorod, October 25-29, 2021 pp. 3-5

5. Tulakova Z.R. Formula for calculating one multiple improper integral and its application to the solution of boundary balue problems. // Abstracts of the VII International Scientific Conference Modern problems of applied mathematics and information technologies al-Khwarizmi 2021 dedicated to the 100th anniversary of the academician Vasil Kabulov 15-17 November, 2021, Fergana, Uzbekistanю pp.156

6. Тулакова З.Р. Задача Неймана для эллиптического уравнения с несколькими сингулярными коэффициентами. // VI Международная научная конференция "Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики" 5-9 декабря 2021. Нальчик. ст.180

7. Тулакова З.Р. Задача Дирихле-Неймана для эллиптического уравнения с сингулярными коэффициентами в бесконечной области. // Тезисы докладов международной научной конференции на тему “Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения” 23-25 ноября, 2023 год. Ташкент, Узбекистан. ст. 128-130

8. Tulakova Z.R. Lauricella function and its application to the exterior Neumann problem for a multidimensional singular elliptic equation. // VII international conference “Non-local boundary value problems and related problems of mathematics and physics proceedings” Desember 4-8, 2023. Nalchik, pp. 376-377

9. Тулакова З.Р. О явном решении смешанной задачи для многомерного сингулярного эллиптического уравнения в гипероктанте шара. // Институт математики и математического моделирования Механико-математический факультет Казахского национального университета имени аль-Фараби, Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки Республики Казахстан, Тезисы докладов, Алматы-2024, ст.124-125

10. Тулакова З.Р. Смешанные задачи для трехмерного эллиптического уравнения с тремя сингулярными коэффициентами. // Международная конференция по дифференциальным уравнениям и динамическим системам."Моделирование и оптимизация сложных систем" 28 июня-3 июля, 2024. Суздаль. ст. 275-276

11. Tulakova Z.R. Boundary value problems of Dirichlet-Neumann type for the three-dimensional elliptic equation with two singular coefficients. // “Amaliy matematikaning zamonaviy muammolari va istiqbollari” Respublika ilmiy-amaliy konferensiya materiallari. 2024 yil 24-25 may. Qarshi. c. 482-483

12. Tulakova Z.R. Application of the potential theory to solving a mixed problem for a multidimensional elliptic equation with one singular // “Zamonaviy analiz va matematik fizika masalalari” respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari to‘plami. 2024-yil 16-17-sentabr. Samarqand. c.198-200

13. Tulakova Z.R. Multiple hypergeometric Lauricella function with the application to the solving of boundary value problems for a singular multidimensional elliptic equation in an infinite domain // Abstracts of the international scientific conference “Actual problems of applied mathematics and information technologies - Al-Khwarizmi 2024”. 22-23 October 2024, Tashkent. p. 196-197

14. Тулакова З.Р., Эргашев Т.Г. Формулы разложения для гипергеометрических функций Лауричелла и их применения к решению краевых задач // “Неклассические уравнения математической физики и их приложения“. Тезисы докладов Международной научной конференции, посвященной 90 летию со дня рождения академика Т.Д.Джураева. 24–26 октября, 2024 г., Ташкент. с. 228.

Avtoreferat Farg‘ona davlat universiteti «FarDU. Ilmiy xabarlar – Научный вестник. ФерГУ» ilmiy – metodik jurnal tahririyatida tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

FDU "Nusxa ko‘paytirish bo‘limi"da chop etildi. 2025-yil.
Bosishga ruxsat etildi: 2025-y.
Bichimi 60/84 1/16. Ofest qog‘ozi
Nashriyot bosma tabog‘i-2,75
Shartli bosma tabog‘i-1,375
Adadi 50 nusxa.
150100. Farg‘ona shahri Murabbiylar ko‘chasi, 19-uy