

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI
MATEMATIK ANALIZ VA ALGEBRA KAFEDRASI

Muqimov Asqar Hamzayevichning

“5460100 – Matematika” ta’lim yo‘nalishi bo‘yicha

bakalavr darajasini olish uchun

Fur‘ye almashtirishi haqida

**CHEGIRMALAR NAZARIYASINING EGRI CHIZIQLI
INTEGRALLARNI HISOBLASHGA TADBIQLARI**

mavzusida yozgan

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar: M. Rustamova

“Himoyaga tavsiya etilsin”

Fizika –matematika fakulteti

dekani:_____ prof. A. Tashatov

“ _____ ” 2014 yil

Qarshi -2014

MAVZU: CHEGIRMALAR NAZARIYASINING EGRI CHIZIQLI INTEGRALLARNI HISOBLASHGA TADBIQLARI

Reja:

Kirish.....	4
I bob Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning chegirmasi va uning xossalari.....	7
1.1 Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning chegirmasi tushunchasi.....	7
1.2 Kompleks o'zgaruvchili funksiya chegirmasi haqidagi Koshi teoremasi....	27
1.3 Jordan lemmasi.....	29
II bob Chegirmalar nazariyasining egri chiziqli integrallarni hisoblashga tadbiqlari.....	32
2.1 Kasr ratsional hamda trigonometrik funksiylarning ko'paytmasidan iborat bo'lgan funksiylarning integralini hisoblash.....	32
2.2 Tarkibida ko'rsatkichli funksiya bo'lgan integrallarni hisoblash.....	34
2.3 Tarkibida ko'p qiymatli funksiya bo'lgan integrallarni hisoblash.....	38
Xulosa.....	40
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yhati.....	41

KIRISH

Chegirmalar kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasining eng muhim tushunchalaridan bo'lib, juda keng amaliy tadbiqlarga ega.

Chegirmalar nazariyasining muhimligi shundaki, chegirmalar yordamida "global" masala bo'lgan yopiq kontur bo'yicha integrallarni hisoblash masalasi "lokal" masala bo'lgan differentsial miqdorni ya'ni chegirmani hisoblashga keltiriladi.

Ma'lumki, "global" miqdorni "lokal" miqdorlar yordamida o'rganish analizning an'anaviy usullaridan hisoblanadi.

Ushbu bitiruv malakaviy ishi xosmas integrallarni hisoblashga chegirmalar nazariyasining tadbiqiga bag'ishlangan. Bitiruv malakaviy ishi kirish, ikkita bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yhatidan iborat.

Birinchi bobda kompleks o'zgaruvchili funksiyaning chegirmasi, uni xossalari, chegirmalar haqidagi Koshi teoremasi va Jordan lemmasi keltirilgan.

Ikkinchi bob chegirmalar nazariyasining integrallarni hisoblashga tadbiqlariga bag'ishlangan bo'lib, unda kasr-ratsional hamda trigonometrik funksiyalarning ko'paytmasi bo'lgan funksiyalarni integrallarini hisoblash, tarkibida ko'rsatkichli funksiya bo'lgan integrallarni hisoblash, tarkibida ko'p qiymatli funksiyalar bo'lgan integrallarni hisoblash o'rganilgan va misollar bilan to'liq yoritilgan.

Yuqorida o'rganilganlar bo'yicha chegirmalar nazariyasining integrallarni hisoblashga tatbiqlari bo'yicha xulosa qilingan.

Mavzuning dolzarbligi. Ma'lumki, kompleks analiz kursida golomorf funksiyalar keng tadbiqlarga ega bo'lib, kompleks o'zgaruvchili funksiyaning golomorf bo'lmaydigan nuqtalarda o'rganish masalasi muhim ahamiyatga ega. Bunday nuqtalar maxsus nuqtalar bo'lib, bu nuqtalarda funksiyalarning xossalari

ularning chegirmalari orqali xarakterlanadi. Ayniqsa bu kompleks o'zgaruvchili funksiyaning maxsus nuqtalari integral hisoblanishi talab qilinayotgan sohada bo'lganda shu integralni hisoblashni kompleks o'zgaruvchili funksiyaning maxsus nuqtalaridagi chegirmalarini hisoblashga keltirish ancha qulaylik tug'diradi. Bu bitiruv malakaviy ish hisoblash murakkab bo'lgan ana shunday integrallarni chegirmalar orqali hisoblashga keltirishni o'rganishga bag'ishlanganligi bilan ham nazariy, ham amaliy jihatdan dolzarb hisoblanadi.

Bitiruv malakaviy ishning maqsadi. “Chegirmalar nazariyasining egri chiziqli integrallarni hisoblashga tadbirlari“ mavzusidagi ushbu bitiruv malakaviy ishining maqsadi kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasida muhim o'rin tutadigan kompleks o'zgaruvchili funksiyaning maxsus nuqtalari integral hisoblanishi talab qilinayotgan sohada bo'lganda shu integralni hisoblashni kompleks o'zgaruvchili funksiyaning maxsus nuqtalaridagi chegirmalarini hisoblashga keltirish masalasini o'rganishdan iborat.

Bitiruv malakaviy ishning vazifalari. Ushbu bitiruv ishini bajarishda quyidagi vazifalarni amalga oshiriladi:

- Kompleks o'zgaruvchili funksiya;
- Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning golomorfligi;
- Kompleks o'zgaruvchili funksiyaning maxsus nuqtalari;
- kompleks o'zgaruvchili funksiyaning chegirmasi;
- Chegirmalar haqidagi teoremlar va Jordan lemmasi

Bitiruv malakaviy ishning ilmiyligi va ahamiyati. Ushbu bitiruv malakaviy ish “Chegirmalar nazariyasining egri chiziqli integrallarni hisoblashga tadbirlari“ mavzusini yoritishga bag'ishlangan. Mavzuga oid barcha adabiyotlardan foydalanib kompleks o'zgaruvchili funksiya, kompleks o'zgaruvchili funksiyaning differensiallanuvchiligi, Koshi–Riman shartlari va golomorf funksiyalar, kompleks o'zgaruvchili funksiyaning chegirmasi, kompleks o'zgaruvchili funksiyaning chegirmasi haqidagi Koshi

teoremasi, Jordan lemmasi, kasr-ratsional hamda trigonometrik funksiyalar ko'paytmasi bo'lgan funksiyalarning integrallarini, tarkibida ko'rsatkichli funksiya bo'lgan integrallarni, tarkibida ko'p qiymatli funksiya bo'lgan integrallarni chegirmalar nazariyasini tadbiq qilish yordamida hisoblash o'rganildi va shu o'rganishlar asosida bitiruv malakaviy ish yozildi. Shu sababli ushbu mavzu amaliy ahamiyatga egadir.

Ushbu bitiruv malakaviy ishi talabalarda bilim olishga intilish hissining shakllanishiga xizmat qiladi hamda bu bitiruv malakaviy ishi talabalarga va kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi bo'yicha izlanuvchilarga 'Kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi' fanining keltirilgan mavzulari bo'yicha o'rganishga qulay bo'lib, ularga bilimlarini oshirishda yordam beradi.

I BOB
KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING CHEGIRMASI
VA UNING XOSSALARI

1.1. KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING
CHEGIRMASI TUSHUNCHASI

Kompleks sonlar tekisligi J da biror E to'plam berilgan bo'lsin: $E \subset J$.

Ta'rif-1.1.1. Agar E to'plamdagi har bir z kompleks songa biror f qoidaga yoki qonunga ko'ra bitta w kompleks son mos qo'yilgan bo'lsa, E to'plamda funksiya berilgan deb ataladi va u

$$f : z \in E \rightarrow w \quad \text{yoki} \quad w = f(z)$$

kabi belgilanadi. Bunda E funksiyaning aniqlanish to'plami, z -erkli o'zgaruvchi yoki funksiya argumenti, w esa z o'zgaruvchining funksiyasi deyiladi.

Aytaylik, har bir

$$z = x + iy \in E$$

kompleks songa bitta

$$w = u + iv \quad (u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R})$$

kompleks son mos qo'yilgan bo'lsin. Demak,

$$w = u + iv = f(x + iy)$$

Keyingi tenglikdan

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, E to'plamda $w = f(z)$ funksiyaning berilishi shu to'plamda x va y haqiqiy o'zgaruvchilarning

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y)$$

funksiyalarining berilishidek ekan.

Odatda $u = u(x, y)$ funksiya $f(z)$ funksiyaning haqiqiy qismi, $v = v(x, y)$ esa $f(z)$ ning mavhum qismi deyiladi:

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(z),$$

$$v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$$

Erkli z o'zgaruvchi E to'plamda o'zgarganda $w = f(z)$ funksiyaning mos qiymatlaridan iborat to'plam

$$F = f(z) = u + iv : z = x + iy \in E$$

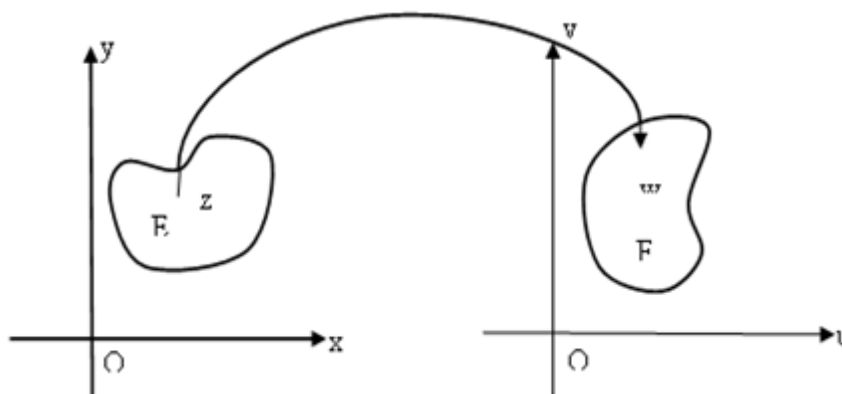
bo'lsin. Odatda bu to'plam funksiya qiymatlari to'plami deyiladi.

Demak, E to'plamda $E \subset \mathbb{C}$ $w = f(z)$ funksiyaning berilish oxy - kompleks tekislikdagi E to'plamni (to'plam nuqtalarini) ouv - kompleks tekislikdagi F to'plamga (to'plam nuqtalariga) aks ettirishdan iborat, (1-chizma).

Shu sababli $w = f(z)$ funksiyaning E to'plamning F to'plamga akslantirish deb ham yuritiladi.

Faraz qilaylik, $w = f(z)$ funksiya E to'plamda $E \subset \mathbb{C}$ berilgan bo'lib, $F = \{f(z) : z \in E\}$ bo'lsin. So'ng F to'plamda $F \subset \mathbb{C}$ o'z navbatida biror $x = j(w)$ funksiya berilgan bo'lsin. Natijada, E to'plamdan olingan har bir z ga F to'plamdan bitta w son $f : z \in E \rightarrow w \in F$ va F to'plamdan olingan bunday w songa bitta ξ son $(\varphi : w \rightarrow \xi)$ mos qo'yiladi:

$$z \xrightarrow{f} w \xrightarrow{j} \xi.$$



1-rasm

Demak, E to'plamdan olingan har bir z ga bitta ξ son ($\xi \in \mathbb{C}$) mos qo'yilib, $z \rightarrow x$ funksiya hosil bo'ladi. Bunday funksiya murakkab funksiya deyiladi va

$$x = j(f(z))$$

kabi yoziladi.

$w = f(z)$ funksiya E to'plamda berilgan bo'lib, F esa shu funksiya qiymatlaridan iborat to'plam bo'lsin:

$$F = f(z) = u + iv : z = x + iy \in E .$$

F to'plamdan olingan har bir w songa E to'plamda bitta z son mos qo'yilishini ifodalovchi funksiya $w = f(z)$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya deyiladi va

$$z = f^{-1}(w)$$

kabi belgilanadi.

Faraz qilaylik, $w = f(z)$ funksiya E to'plamda $F \subset \mathbb{C}$ berilgan bo'lsin.

Ta'rif-1.1.2. Agar argument z ning E to'plamdan olingan turli qiymatlarida $f(z)$ funksiyaning mos qiymatlari ham turlicha bo'lsa, boshqacha aytganda $f(z_1) = f(z_2)$ tenglikdan $z_1 = z_2$ tenglik ($z_1, z_2 \in E$) kelib chiqsa, $f(z)$ funksiya E to'plamda bir yaproqli (yoki bir varaqli) funksiya deyiladi.

Masalan, ushbu

$$f(z) = \frac{1}{z-1}$$

funksiya $E = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ to'plamda bir yaproqli funksiya.

Faraz qilaylik, $w = f(z)$ funksiya $E(E \subset \mathbb{C})$ to'plamda berilgan bo'lib, z_0 nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Ta'rif-1.1.3. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, argument z ning $0 < |z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in E$ qiymatlarida

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A kompleks son $f(z)$ funksiyaning $z \rightarrow z_0$ dagi limiti deb ataladi va

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

kabi belgilanadi.

Ta'rif-1.1.4. Agar $\forall M > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(M) > 0$ son topilsaki, argument z ning $0 < |z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in E$ qiymatlarida

$$|f(z)| > M$$

tengsizlik bajarilsa, $z \rightarrow z_0$ dagi $f(z)$ funksiyaning limiti ∞ deyiladi.

Aytaylik $z = \infty$ nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Ta'rif-1.1.5. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $p = p(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, argument z ning $|z| > p$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in E$ qiymatlarida

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, A kompleks son $f(z)$ funksiyaning $z \rightarrow \infty$ dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = A$$

kabi belgilanadi.

Endi z, z_0 hamda A kompleks sonlarni

$$z = x + iy, z_0 = x_0 + iy_0, A = a + ib$$

deb, so'ng

$$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

ekanligini e'tiborga olib, $z \rightarrow z_0$ da $f(z)$ funksiyaning A limitga ega bo'lishi $x \rightarrow x_0, y \rightarrow y_0$ da $u = u(x,y)$ hamda $v = v(x,y)$ funksiyalarning mos ravishda α va β limitlarga ega bo'lishiga ekvivalent ekanligini ifodalovchi teoremani keltiramiz.

Teorema-1.1.1. $w = f(z)$ funksiyaning $z \rightarrow z_0$ da A limitga,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

ega bo'lish uchun

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x,y) = a, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x,y) = b$$

bo'lishi zarur va etarli.

Isbot. Zarurligi. Aytaylik,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$$

bo'lsin. Limit ta'rifiga ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topiladiki, z argumentning $0 < |z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in E$ qiymatlarida

$$|f(z) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Ravshanki,

$$|z - z_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$
$$f(z) - A = [u(x,y) - a] + i[v(x,y) - b]$$

bo'lib,

$$|z - z_0| < \delta$$

bo'lishidan

$$|x - x_0| < d, \quad |y - y_0| < d$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ikkinchi tamondan quyidagi

$$\begin{aligned} |u(x,y) - a| &= \operatorname{Re}(f(z) - A) \text{ J } |f(z) - A| < e, \\ |v(x,y) - b| &= \operatorname{Im}(f(z) - A) \text{ J } |f(z) - A| < e \end{aligned}$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Demak, $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday

$\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topiladiki $|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta$ bo'lganda

$$|u(x,y) - a| < e, \quad |v(x,y) - b| < e$$

tengsizliklar bajariladi. Bu esa

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x,y) = a, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x,y) = b$$

ekanligini bildiradi.

Yetarliligi. Aytaylik,

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x,y) = a, \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x,y) = b$$

bo'lsin.

Limit ta'rifiga ko'ra $\forall \varepsilon > 0$ son olinganda ham, $\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ ga ko'ra shunday $\delta_0 > 0$

son topiladiki

$$|x - x_0| < d, \quad |y - y_0| < d$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x, y da

$$|u(x,y) - a| < \frac{e}{\sqrt{2}}, \quad |v(x,y) - b| < \frac{e}{\sqrt{2}}$$

tengsizliklar bajariladi. Bu tengsizliklardan foydalanib, topamiz:

$$\begin{aligned} |f(z) - A| &= |u(x,y) + iv(x,y) - (a + ib)| = |(u(x,y) - a) + i(v(x,y) - b)| = \\ &= \sqrt{(u(x,y) - a)^2 + (v(x,y) - b)^2} < \sqrt{\frac{e^2}{2} + \frac{e^2}{2}} = e \end{aligned}$$

Demak, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$. Teorema isbotlandi.

Yuqorida keltirilgan teorema kompleks o'zgaruvchili funksiyaning limitini o'rganishni haqiqiy o'zgaruvchili funksiyaning limitini o'rganishga keltirilishini ifodalaydi. Ma'lumki, «Matematik analiz» kursida haqiqiy o'zgaruvchili funksiya limiti batafsil o'rganilgan. Shuni e'tiborga olib, kompleks o'zgaruvchili funksiyalar limiti haqidagi teoremlarning ayrimlari keltirish bilan kifoyalanamiz.

Aytaylik, $f(z)$ hamda $g(z)$ funksiyalar E to'plamda berilgan bo'lib, z_0 nuqta E to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

Agar

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = B$$

bo'lsa, u holda

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \pm g(z)) &= A \pm B, \\ \lim_{z \rightarrow z_0} (f(z) \cdot g(z)) &= A \cdot B, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{A}{B} \quad (B \neq 0) \end{aligned}$$

bo'ladi.

Faraz qilaylik, $w = f(z)$ funksiya E to'plamda $E \subset \mathbb{C}$ berilgan bo'lib, z_0 nuqta ($z_0 \in E$) shu E to'plamning nuqtasi bo'lsin.

Ta'rif-1.1.6. Agar $\forall \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topilsaki, argument z ning $|z - z_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $z \in E$ qiymatlarida

$$|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz deb ataladi.

(Ravshanki, bu holda

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

bo'ladi).

Odatda, $z - z_0$ ayirma funksiya argumentining orttirmasi deyilib, uni Δz kabi belgilanadi:

$$\Delta z = z - z_0.$$

Ushbu

$$f(z) - f(z_0)$$

ayirma esa, funksiya orttirmasi deyiladi. Uni Δf kabi belgilanadi:

$$\Delta f = f(z) - f(z_0).$$

Shu tushunchalardan foydalanib, funksiyaning z_0 nuqtada uzluksizligini quyidagicha ham ta'riflash mumkin.

Ta'rif-1.1.7. Agar $\Delta z \rightarrow 0$ da Δf ham nolga intilsa,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta f = 0$$

$f(z)$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Ta'rif-1.1.8. Agar $f(z)$ funksiya E to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, $f(z)$ funksiya E to'plamda uzluksiz deb ataladi.

Masalan, ushbu

$$f(z) = \frac{1}{z} \quad (z \neq 0)$$

funksiya ixtiyoriy $z_0 \in \mathbb{C} \setminus 0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Aytaylik, $w = f(z)$ funksiya z_0 nuqtada uzluksiz bo'lsin:

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

va

$$z = x + iy, \quad z_0 = x_0 + iy_0,$$

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

deylik.

Teorema 1.1.1. ga ko'ra

$$\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$$

munosabat

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = u(x_0, y_0), \quad \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = v(x_0, y_0)$$

munosabatlarga ekvivalent bo'ladi. Bundan esa quyidagi teorema kelib chiqadi.

Teorema-1.1.2. $w = f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi uchun

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y), \quad \operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$$

funksiyalarning (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz bo'lishi zarur va yetarli.

Demak, kompleks o'zgaruvchili $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtada uzluksiz bo'lishi, ikkita haqiqiy o'zgaruvchili

$$\operatorname{Re} f(z) = u(x, y), \quad \operatorname{Im} f(z) = v(x, y)$$

funksiyalarning (x_0, y_0) nuqtada uzluksiz bo'lishiga ekvivalent bo'lar ekan. Bundan, haqiqiy o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalar haqidagi tasdiqlar kompleks o'zgaruvchili uzluksiz funksiyalarda ham o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

Aytaylik $w = f(z)$ funksiya E to'plamda $E \subset \mathbb{C}$ berilgan bo'lib, $z_0 + \Delta z \in E$ bo'lsin. Natijada $f(z)$ funksiya ham z_0 nuqtada

$$\Delta w = \Delta f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

orttirmaga ega bo'ladi.

Ta'rif-1.1.9. Agar $\Delta z \rightarrow 0$ da $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ nisbatning limiti

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} \quad (1.1.1)$$

mavjud va chekli bo'lsa, bu limit kompleks o'zgaruvchili $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtadagi hosilasi deb ataladi va $f'(z_0)$ kabi belgilanadi:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}.$$

Ta'rif-1.1.10. Agar $f(z)$ funksiya $z_0 \in E$ nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lsa, funksiya z_0 nuqtada differensiallanuvchi deyiladi.

Agar $f(z)$ funksiya E to'plamning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo'lsa, funksiya E to'plamda differensiallanuvchi deyiladi.

Biz yuqorida kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosila hamda differensiallanuvchi bo'lishi tushunchalarining kiritilishi haqiqiy o'zgaruvchili funksiyaning hosila hamda differensiallanuvchi bo'lishi tushunchalarining kiritilishi kabi ekanini ko'rdik.

Demak, kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilalarini hisoblashda haqiqiy o'zgaruvchili funksiyaning hosilalarini hisoblashdagi ma'lum qoida va jadvallardan foydalanish mumkin.

Garchi kompleks hamda haqiqiy o'zgaruvchili funksiya hosilalari tushunchalarining kiritilishi bir xil bo'lsa ham kompleks o'zgaruvchili funksiyaning hosilasiga ega bo'lsin deyilishi (binobarin, differensiallanuvchi bo'lsin deyilishi) talabi ancha og'ir talab hisoblanadi. Bitta sodda misol qaraylik.

Ushbu

$$f(z) = x$$

funksiyani qaraylik. Agar bu funksiya haqiqiy o'qda joylashgan E to'plamda ($E \subset \mathbb{R}$) qaralsa, ravshanki, u hosilaga ega bo'lib, $f'(z) = 1$ bo'ladi.

Endi $f(z) = x$ funksiyaning kompleks tekislik $\mathbb{C}$ da qaraylik. Ravshanki, bu funksiya uchun

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0 + i(y - y_0)}$$

bo'ladi. Bu nisbat $z \rightarrow z_0$ da limitga ega emas, chunki, $x = x_0, y \neq y_0$ da nisbat 0 ga teng, $x \neq x_0, y = y_0$ da esa 1 ga teng. Demak, $f(z) = x$ funksiya differensiallanuvchi emas.

Faraz qilaylik,

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

funksiya biror D sohada ($D \subset \mathbb{C}$) berilgan bo'lib, $z_0 = x_0 + iy_0 \in D$ bo'lsin.

Teorema-1.1.3. $f(z)$ funksiyaning z_0 nuqtada $f'(z_0)$ hosilaga ega bo'lishi uchun $u = u(x, y)$ va $v = v(x, y)$ funksiyalarning (x_0, y_0) nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi va shu nuqtada ushbu

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \quad (1.1.2)$$

tengliklarning bajarilishi zarur va yetarli.

Teoremada keltirilgan (1.1.2) shartlar Koshi-Riman shartlari deyiladi.

Kompleks analizda hosilaga ega bo'lgan funksiyalar C - differensiallanuvchi funksiyalar deyiladi.

Qutb koordinatalar sistemasida $f(z) = u + iv$ funksiya uchun Koshi-Riman shartlari

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \\ \frac{\partial v}{\partial \rho} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} \end{cases} \quad (1.1.3)$$

ko'rinishida bo'ladi.

Faraz qilaylik, $w = f(z)$ funksiya biror D sohada ($D \subset \mathbb{C}$) berilgan bo'lsin.

Ta'rif-1.1.11. Agar $f(z)$ funksiya z_0 ($z_0 \in E$) nuqtaning biror $U(z_0, \varepsilon)$ atrofida $U(z_0, \varepsilon) \subset D$ $\square$ -differensiallanuvchi bo'lsa, $f(z)$ funksiya z_0 nuqtada golomorf (yoki analitik) deb ataladi.

Ta'rif-1.1.12. Agar $f(z)$ funksiya D sohaning har bir nuqtasida golomorf bo'lsa, funksiya D sohada golomorf deyiladi. Odatda D sohada golomorf bo'lgan funksiyalar sinfi $\mathcal{G}_D$ kabi belgilanadi.

Ta'rif-1.1.13. Agar $g(x) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ funksiya $z = 0$ nuqtada golomorf bo'lsa, $f(z)$ funksiya « ∞ » nuqtada golomorf deyiladi.

Aytaylik, $\square^2$ fazodagi E sohada ($E \subset \square^2$) $F = F(x, y)$ funksiya berilgan bo'lib, u shu sohada ikkinchi tartibli uzluksiz xususiy hosilalar

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} \quad (1.1.3)$$

ga ega bo'lsin.

Ta'rif-1.14. Agar E sohaning har bir nuqtasida

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad (1.1.4)$$

tenglik bajarilsa, $F(x, y)$ funksiya E sohada garmonik funksiya deyiladi. Odatda, (1.1.4) Laplas tenglamasi deyiladi. Bu tenglama ushbu

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

Laplas operatori yordamida quyidagicha yoziladi:

$$\Delta F = 0. \quad (1.1.5)$$

Aytaylik, $a \in \square$ nuqtada $f(z)$ funksiyaning golomorf bo'lishi sharti bajarilmasa, u holda funksiya shu nuqta atrofida o'rganiladi. Odatda bunday nuqtani $f(z)$ funksiyaning maxsus nuqtasi deb qaraladi.

Ta'rif-1.1.15. Agar $f(z)$ funksiya ushbu

$$z \in \square : 0 < |z - a| < r$$

sohada (a nuqtaning o'yilgan atrofida) golomorf bo'lsa, u holda a nuqta $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi deyiladi.

Masalan, ushbu

$$f(z) = \frac{1}{z + i}$$

funksiya uchun $a = -i$ nuqta yakkalangan maxsus nuqtasi bo'ladi.

Ta'rif-1.1.16. Agar $f(z)$ funksiya ushbu

$$z \in \square : R < |z| < +\infty$$

sohada golomorf bo'lsa, u holda $a = \infty$ nuqta $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi deyiladi.

Masalan, ushbu

$$f(z) = e^z$$

funksiya uchun $a = \infty$ nuqta yakkalangan maxsus nuqtasi bo'ladi.

Aytaylik a nuqta $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus nuqtasi bo'lsin.

Unda $f(z)$ funksiya

$$z \in \square : 0 < |z - a| < r$$

sohada (a nuqtaning o'yilgan atrofida) golomorf $f(z)$ funksiyaning $z \rightarrow a$ dagi limitining xarakteriga qarab yakkalangan maxsus nuqtalar turlarga ajraladi.

Ta'rif-1.1.17. Agar $z \in \mathbb{C}$ da $f(z)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lib,

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = A \quad (A\text{-chekli})$$

bo'lsa, u holda a nuqta $f(z)$ funksiyaning bartaraf qilinadigan (chetlatilishi mumkin bo'lgan) maxsus nuqtasi deyiladi.

Ta'rif-1.1.18. Agar $z \in \mathbb{C}$ da $f(z)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lib,

$$\lim_{z \rightarrow a} f(z) = \infty$$

bo'lsa, u holda a nuqta $f(z)$ funksiyaning qutb maxsus nuqtasi deyiladi.

Ta'rif-1.1.19. Agar $z \in \mathbb{C}$ da $f(z)$ funksiyaning limiti mavjud bo'lmasa, u holda a nuqta $f(z)$ funksiyaning o'ta (muhim) maxsus nuqtasi deyiladi.

Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya

$$K = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z - a| < R\} \quad (1.1.6)$$

sohada holomorff bo'lib, a nuqta bu funksiya yakkalanuvchi maxsus nuqtasi bo'lsin. U holda $f(z)$ funksiya K da ushbu Loran qatoriga yoyiladi.

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n + c_{-1} (z - a)^{-1} + c_{-2} (z - a)^{-2} + \dots + c_{-n} (z - a)^{-n} + \dots \quad (1.1.7)$$

Maxsus nuqtalar bilan Loran qatorlari orasidagi bog'lanishlar mavjud. Ular quyidagi teoremlar bilan ifodalanadi.

Teorema-1.1.4. $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus $a \in \mathbb{C}$ nuqtasi uning bartaraf etiladigan maxsus nuqta bo'lishi uchun funksiyaning Loran qatoriga yoyilmasi (1.1.7) da $z-a$ ayirmasi manfiy darajali hadlari qatnashmasligi zarur va etarli.

Teorema-1.1.5. $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus $a \in \mathbb{C}$ nuqtasi uning qutb nuqtasi bo'lishi uchun funksiyaning Loran qatoriga yoyilmasi (1.1.7) da $z-a$ ayirmaning manfiy darajali hadlaridan chekli sondagisining bo'lishi zarur va yetarli.

Teorema-1.1.6. $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus $a \in \mathbb{C}$ nuqtasi uning o'ta (muxim) maxsus nuqtasi bo'lishi uchun funksiyaning Loran qatoriga yoyilmasi (1.1.7) da $z-a$ ayirmaning manfiy darajali hadlaridan cheksiz ko'p sondagisining bo'lishi zarur va yetarli.

Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya

$$K = \{z \in \mathbb{C} : 0 < |z-a| < R\} \quad (1.1.8)$$

sohada holomorfl bo'lib, a nuqta bu funksiya yakkalanuvchi maxsus nuqtasi bo'lsin. U holda $f(z)$ funksiya K da ushbu Loran qatori

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n + c_{-1} (z-a)^{-1} + \\ + c_{-2} (z-a)^{-2} + \dots + c_{-n} (z-a)^{-n} + \dots$$

ni $\gamma_\rho = \{z \in \mathbb{C} : |z-a| = \rho; 0 < \rho < R\}$

aylana bo'yicha hadlab integrallash mumkin:

$$\oint_{g_r} f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \oint_{g_r} (z-a)^n dz + c_{-1} \oint_{g_r} (z-a)^{-1} dz + \\ + c_{-2} \oint_{g_r} (z-a)^{-2} dz + c_{-n} \oint_g (z-a)^{-n} dz + \dots$$

Bu yerda g_r da musbat yo'nalish olgan.

Ma'lumki,

$$\oint_{g_r} (z-a)^m dz = \begin{cases} 0, & \text{agar } m \neq -1 \text{ bo'lsa,} \\ 2\pi i, & \text{agar } m = -1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

bo'ladi. Shuni e'tiborga olib

$$\oint_{g_r} f(z) dz = C_{-1} 2\pi i$$

ya'ni

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{g_r} f(z) dz = c_{-1}$$

bo'lishini topamiz.

Ta'rif-1.1.20. Ushbu

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{g_r} f(z) dz$$

miqdor, ya'ni $f(z)$ funksiyaning Loran qatoriga yoyilmasidagi C_{-1} koeffitsenti $f(z)$ funksiyaning yakkalangan maxsus a nuqtasidagi chegirmasi deyiladi va $\operatorname{res}_{z=a} f(z)$ kabi belgilanadi:

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{g_r} f(z) dz, \quad (1.1.9)$$

(*res*—frantsuzcha *Residu* so'zining qisqacha yozilishi bo'lib, u “chegirma” degan ma'noni anglatadi).

Misol-1.1.1 Ushbu

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}$$

funksiyani qaraylik. Bu funksiya $z = 0$ nuqtaning o'yilgan atrofi $z \in \square : 0 < |z| < R$ da holomorf va uning uchun $z = 0$ nuqta yakkalangan maxsus nuqta bo'ladi. Bu funksiyaning

$$z \in \square : 0 < |z| < R$$

dagi Loran qatori

$$\frac{\sin z}{z} = 1 + \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} + \dots$$

bo'ladi. Ravshanki, bu holda $C_{-1} = 0$ bo'ladi. Demak, $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ funksiyaning $z = 0$ nuqtadagi chegirmasi

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \operatorname{res}_{z=0} \frac{\sin z}{z} = 0$$

bo'ladi.

Endi funksiyaning 1 dagi chegirmasi tushunchasini keltiramiz.

Aytaylik, $f(z)$ funksiya $\{z \in \mathbb{C} : 0 < |z| < R\}$ sohada holomorff va $a = 1$ nuqta uning uchun yakkaalangan maxsus nuqta bo'lsin.

Ta'rif-1.1.21. Ushbu

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(z) dz$$

miqdor, ya'ni $f(z)$ funksiyaning Loran qatoriga yoyilmasi (1.1.7) dagi C_{-1} koeffitsientni manfiy ishora bilan olingan qiymati $f(z)$ funksiyaning yakkaalangan maxsus $a = 1$ nuqtadagi chegirmasi deyiladi va $\operatorname{res}_{z=1} f(z)$ kabi belgilanadi:

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_R} f(z) dz$$

Yuqoridagidek, $f(z)$ funksiyaning $z \in \mathbb{C} : R_0 < |z| < \infty$ dagi Loran qatorini

$$f(z) = c_0 + c_{-1}z^{-1} + c_{-2}z^{-2} + \dots + c_{-n}z^{-n} + \dots$$

$$\dots + c_1z^1 + c_2z^2 + \dots + c_nz^n + \dots$$

$$\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R, R_0 < R\}$$

aylana bo'yicha hadlab integrallab

$$\oint_{\gamma_R} f(z) dz = \frac{1}{2\pi i} (-C_{-1})$$

ya'ni

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma_R} f(z) dz = -C_{-1}$$

bo'lishini topamiz.

a) Faraz qilaylik a nuqta $f(z)$ funksiyaning oddiy (bir karrali) qutb nuqtasi bo'lsin. Ma'lumki, bu holda $f(z)$ funksiyaning a nuqta atrofidagi Loran qatori ushbu

$$f(z) = C_{-1} (z - a)^{-1} + \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - a)^n$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Keyingi munosabatdan

$$C_{-1} = (z - a)f(z) - \sum_{n=0}^{\infty} C_n (z - a)^{n+1}$$

bo'lishi kelib chikadi. Bu tenglikda $z \rightarrow a$ da limitga o'tib

$$C_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$$

bo'lishini topamiz.

Demak, $f(z)$ funksiyaning a nuqtadagi chegirmasi

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} (z - a)f(z)$$

bo'ladi.

Xususan, $f(z) = \frac{f(z)}{y(z)}$ bo'lib, $f(z)$ va $y(z)$ funksiyalar a nuqtada

golomorf, $f(a) \neq 0$, $y(a) = 0$, $y'(a) \neq 0$ bo'lsa, a nuqta $f(z)$ funksiyaning oddiy qutb nuqtasi bo'lganda

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{(z-a)f(z)}{y(z)} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{f(z)}{\frac{y(z)-y(a)}{z-a}} = \frac{f(a)}{y'(a)}$$

bo'ladi. Demak,

$$\operatorname{res}_{z=a} \frac{f(z)}{y(z)} = \frac{f(a)}{y'(a)}$$

b) Faraz qilaylik, a nuqta $f(z)$ funksiyaning m karrali qutb nuqtasi bo'lsin.

Bu holda $f(z)$ funksiyaning a nuqta atrofidagi Loran qatori ushbu

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z-a)^{m-1}} + \dots + \frac{c_{-1}}{z-a} + c_0 + c_1(z-a) + \\ + c_2(z-a)^2 + \dots + c_n(z-a)^n + \dots$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

yuqoridagi tenglikning har ikki tomonini $(z-a)^m$ ga ko'paytirib quyidagi

$$f(z)(z-a)^m = c_{-m} + c_{-m+1}(z-a) + \dots + c_{-1}(z-a)^{m-1} + \\ + c_0(z-a)^m + c_1(z-a)^{m+1} + c_2(z-a)^{m+2} + \dots + c_n(z-a)^{m+n} + \dots$$

tenglikka kelaymiz.

$m-1$ marta differentsiallash natijasida

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^m f(z) = (m-1)!c_{-1} + \\ + \frac{m!}{1!}c_0(z-a) + \frac{(m+1)!}{2!}c_1(z-a)^2 + \dots$$

bo'ladi.

Keyingi tenglikda $z \rightarrow a$ da limitga o'tib topamiz:

$$\lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^m f(z) = (m-1)!c_{-1}$$

Bundan esa

$$C_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^m f(z)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, bu holda $f(z)$ funksiyaning $z = a$ nuqtadagi chegirmasi

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^m f(z)$$

bo'ladi.

Xususan, $f(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^m}$ bo'lib, $f(z)$ funksiya a nuqtada holomorff va

$f(a) \neq 0$ bo'lsa, unda yuqoridagi munosabatdan

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \operatorname{res}_{z=a} \frac{f(z)}{(z-a)^m} = \frac{1}{(m-1)!} f^{(m-1)}(a)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Misol-1.1.2. Ushbu

$$f(z) = \frac{z^2}{z+2}$$

funksiyani qaraylik. Ravshanki, $z = -2$ nuqta bu funksiyaning oddiy qutb nuqtasi bo'ladi. Berilgan funksiyaning $z = -2$ qutb nuqtasidagi chegirmasini topamiz.

$$\operatorname{res}_{z=-2} \frac{z^2}{z+2} = \lim_{z \rightarrow -2} (z+2) \frac{z^2}{z+2} = \lim_{z \rightarrow -2} z^2 = 4$$

1.2. KOMPLEKS O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING CHEGIRMASI

HAQIDAGI KOSHI TEOREMASI

Aytaylik $f(z)$ funksiya bir bog'lamli D sohada berilgan bo'lsin.

Teorema 1.2.1. (Koshi) Faraz qilaylik $f(z)$ funksiya bir bog'lamli D sohada berilgan bo'lib, shu sohaga tegishli chekli sondagi maxsus $z_1, z_2, \dots, z_n$ nuqtalardan boshqa barcha nuqtalarda golomorf bo'lsin. Bu yakkalangan maxsus $z_1, z_2, \dots, z_n$ nuqtalar D sohada yotuvchi silliq yopiq g chiziq ichida joylashsin. U holda

$$\oint_g f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z)$$

bo'ladi. Bunda g yopiq chiziq musbat yo'nalishda olingan.

Isbot. Markazlari z_k ($k = 1, 2, \dots, n$) nuqtalarda, yetarlicha kichik radiusli shunday g_k ($k = 1, 2, \dots, n$) aylanalarni olamizki, bu aylanalar g yopiq chiziq ichida yotsin va

$$g_k \cap g_i = \emptyset, (k \neq i, k, i = 1, 2, \dots, n)$$

bo'lsin.

U holda Koshining ko'p bog'lamli sohalar haqidagi teoremasiga ko'ra

$$\oint_g f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{g_k} f(z)dz$$

bo'ladi, bunda g_k aylanalarda soat strekasi yo'nalishiga qarshi yo'nalish olingan.

Agar

$$\oint_{c_k} f(z)dz = 2\pi i \operatorname{res}_{z=z_k} f(z)$$

ekanligini e'tiborga olsak, unda

$$\oint_g f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa teoremani isbotlaydi.

Bu teoremadan funksiyalarning integrallarini hisoblashda foydalaniladi.

Teorema 1.2.2. Faraz qilaylik, $f(z)$ funksiya kengaytirilgan kompleks tekislikning chekli sondagi maxsus $z_1, z_2, \dots, z_n$ nuqtalaridan boshqa barcha nuqtalarda holomorf bo'lsin. U holda bu funksiyaning $z_1, z_2, \dots, z_n$ nuqtalardagi hamda $z = \infty$ nuqtadagi chegirmalari yig'indisi nolga teng bo'ladi:

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

Isbot. Tekislikda R radiusli shunday

$$\gamma_R = \{z \in \mathbb{C} : |z| = R\}$$

aylanani olamizki, $z_1, z_2, \dots, z_n$ yakkalangan maxsus nuqtalar shu aylana ichida joylashsin. Bu aylanada yo'nalishni musbat qilib olamiz.

Yuqorida isbot etilgan 1.2.1-teoremaga ko'ra

$$\oint_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z)$$

bo'ladi.

Ikkinchi tomondan

$$\oint_{\gamma_R} f(z)dz = -2\pi i \operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$$

bo'ladi. Yuqoridagi tengliklarni hadlab ayirib quyidagini topamiz.

$$0 = \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z)$$

Demak,

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z) + \operatorname{res}_{z=\infty} f(z) = 0$$

Teorema isbot bo'ldi.

1.3. JORDAN LEMMASI

Haqiqiyo'zgaruvchili $f(x)$ funksiyadan OX o'qining biror chekli yoki cheksiz (a, b) oralig' bo'yicha integralni hisoblash talab qilingan bo'lsin. Bu integralni hisoblash uchun (a, b) oraliqni u bilan birga D sohani chegarasi bo'lgan biror C egri chiziq bilan to'ldirib $f(x)$ funksiyani D sohaga davom ettiramiz.

Hosil bo'lgan $f(x)$ funksiyaga esa D sohada chegirmalar haqidagi Koshi teoremasini qo'llaymiz va

$$\int_a^b f(x)dx + \int_C f(z)dz = \sum_{n=1}^n \operatorname{res}_{z=z_n} f(z)$$

ni hosil qilamiz.

Agar C bo'yicha integralni hisoblashga erishilsa yoki uni $\int_a^b f(x)dx$ orqali ifodalash mumkin bo'lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx$ integralni hisoblash masalasi yechiladi.

Ayrim hollarda yordamchi $f(z)$ funksiya (a, b) oraliqda shunday tanlanadiki, (a, b) da berilgan $f(x)$ funksiya uning haqiqiy yoki mavhum qismi bo'ladi. Unda qidirilayotgan integralni haqiqiy va mavhum qismlari ajratilib hisoblanadi.

Cheksiz $f(x)$ oraliqlar bo'yicha integrallarni hisoblash talab etilganda, ko'pincha cheksiz kengayuvchi C_R konturlar bo'yicha integrallar qaraladi. Bu

konturlar shunday quriladiki, $R \in \Gamma$ da limitga o'tish natijasida (a, b) bo'yicha integral hisoblanadi.

Hisoblash talab etiladigan ko'p misollarda C_R kontur bo'yicha integralni hisoblamasdan, faqat uning limitini hisoblash yetarli. Ko'p hollarda bu limit nolga teng.

Ko'pgina misollarda esa C_R kontur bo'yicha integralni quyidagi lemma yordamida baholash mumkin.

Bizga $f(z)$ funksiya yuqori yarim tekislik $\{Im z \geq 0\}$ da berilgan bo'lib, unda chekli sondagi maxsus nuqtalar: $a_n; n = 1, 2, j, n$ ga ega bo'lsin.

Lemma-1. Farazqilaylik $f(z)$ funksiya

$$\{Im z \geq 0\}, \bigcup_{n=1}^n (a_n)$$

da holomorf bo'lsin, $M(R) = \max_{|z|=R} |f(z)|$ yuqori yarim aylana

$g_R = \{z \mid |z| = R, Im z \geq 0\}$ da $R \in \Gamma$ nolga intilsin. U holda ixtiyoriy $l > 0$ uchun

$$\lim_{R \rightarrow 0} \int_{g_R} f(z) e^{ilz} dz = 0$$

bo'ladi.

Isbot: Yuqori yarim aylana g_R ning o'ng qismini $D_{R\gamma}$ orqali belgilaymiz:

$$D_{R\gamma} = \{z \in \mathbb{H} : 0 \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2}, |z| \leq R\}$$

Sinusning j o'rtacha qiymatidan $\sin j$ ni $\frac{2}{p}j$ ga ega bo'lamiz.

Demak, $g_{R\check{y}}$ da

$$\left| e^{ilz} \right| = e^{-lR \sin j} \int_0^{\frac{2l}{p}} R dj = M(R) \frac{p}{2l} (1 - e^{-lR})$$

Bu bahodan kelib chiqadiki, $R \in \Gamma$ da g_R bo'yicha integral nolga intiladi.

Qolgan yarim aylana $g_{R''} = g_R$, $g_{R\check{y}}$ uchun ham baho xuddi shunday olinadi.

Jordan lemmasining ma'nosi quyidagidan iborat. $M(R)$ miqdor $R \in \Gamma$ da

har qancha sekin nolga yaqinlashishi mumkin, shunga ko'ra $f(z)$ dan g_R

bo'yicha olingan integralni nolga intilishi shart emas. Bu yerda integralni nolga

intilishini ko'paytirilgan eksponenta e^{ilz} , $l > 0$ tezlashtiradi.

II BOB

CHEGIRMALAR NAZARIYASINING EGRI CHIZIQLI INTEGRLARNI HISOBLASHGA TADBIQLARI

2.1. KASR-RATSIONAL HAMDA TRIGONOMETRIK FUNKSIYALARNING KO'PAYTMASIDAN IBORAT BO'LGAN FUNKSIYALARNING INTEGRALINI HISOBLASH.

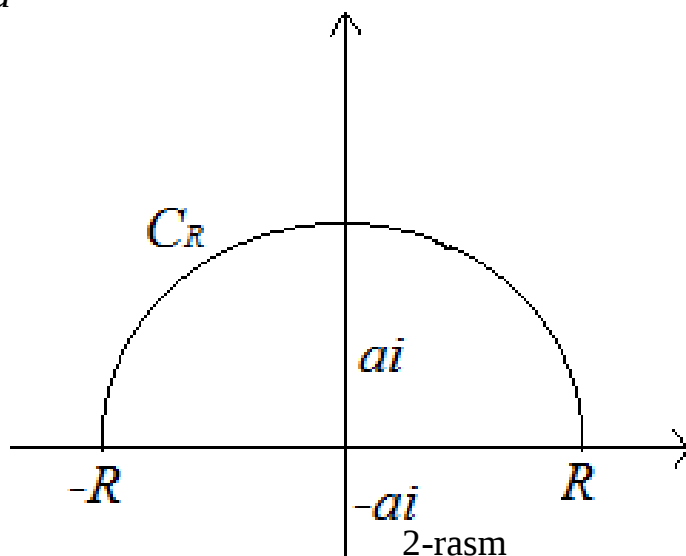
Integrallar nazariyasida xosmas integrallar, ularning yaqinlashishi va ularni hisoblash masalasi muhimdir. Ana shunday integrallardan biri kasr-ratsional hamda trigonometrik funksiyalarning ko'paytmasidan iborat bo'lgan funksiyalarning integralini hisoblash talab qilingan bo'lsin. Bunday integralni hisoblash usulini aniq misolda ko'raylik.

Aytaylik, Laplas integrali

$$J = \int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2}$$

ni hisoblash talab qilingan bo'lsin. Bu integralni hisoblash uchun yordamchi

$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$ funksiyani va C_R yarim aylanani olamiz. (2-rasm)



Ma'lumki $g(z) = \frac{1}{x^2 + a^2}$ funksiya C_R da $|g(z)| < \frac{1}{R^2 - a^2}$ tengsizlikni qanoatlantiradi, bundan $g(z)$ ning $R \rightarrow \infty$ da nolga tekis yaqinlashishi kelib chiqadi. U holda Jordan lemmasiga ko'ra $R \rightarrow \infty$ da

$$\oint_{C_2} f(z) dz = \oint_{C_n} g(z) e^{iz} dz \rightarrow 0$$

Har qanday $R > 0$ uchun chegirmalar haqidagi teorema asosan

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix} dx}{x^2 + a^2} + \oint_{C_R} \frac{e^{iz} dz}{x^2 + a^2} = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2ai}$$

ga ega bo'lamiz, chunki integrallash chizig'i ichida yotuvchi yagona maxsus nuqta $z = ai$ qaralayotgan $f(z)$ funksiya uchun 1-tartibli qutb nuqta bo'lganligi sababli 1-tartibli qutb nuqtadagi chegirmani hisoblash formulasi

$$\operatorname{res}_{z=a} f(z) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{j(z)}{y(z)} (z - a) = \lim_{z \rightarrow a} \frac{j(z)}{\frac{y(z) - y(a)}{z - a}} = \frac{j(a)}{y'(a)}$$

ga asosan yuqoridagi natijaga kelamiz.

Endi $R \rightarrow \infty$ da limitga o'tsak

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix} dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{ae^a}$$

ni hosil qilamiz. Haqiqiy va mavhum qismlarini ajratib qidirilayotgan integralni

topamiz.

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos x dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2ae^a}$$

2.2. TARKIBIDA KO'RSATKICHLI FUNKSIYA BO'LGAN INTEGRALLARNI HISOBLASH.

Misol-2.2.1. S. Puasson integrali

$$J = \int_0^{\Gamma} e^{-ax^2} \cos bxdx$$

bu yerda $a, b \in \mathbb{R}$.

Yordamchi funksiya $f(z) = e^{-az^2}$ ni qaraymiz. Bu yordamchi funksional haqiqiy o'q bo'yicha olingan integral analiz kursida Puasson integrali deyiladi

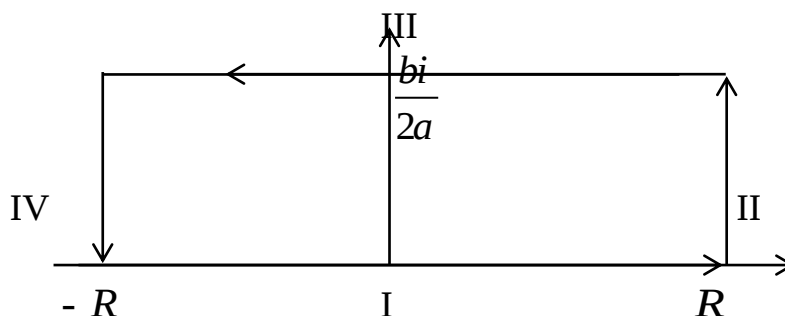
va u

$$\operatorname{erf} \Gamma = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\Gamma} e^{-x^2} dx = 1$$

Ekanligiga asosan hisoblanadi. Yordamchi funksiyamiz $y = h$ to'g'ri chiziqda

$$e^{-(a(x+ih))^2} = e^{ah^2} e^{-ax^2} (\cos 2ahx - i \sin 2ahx)$$

ko'rinishga ega bo'lib, uning haqiqiy qismi $h = b(2+a)$ bo'lganda biz hisoblamoqchi bo'layotgan integral ostidagi funksiyadan o'zgarmas ko'paytuvchiga farq qiladi. Shunga asosan integrallash konturini quyidagicha olamiz (3-rasm).



3-rasm

Koshi integraliga ko'ra

$$\int_I e^{-x^2} dx + \int_{II} e^{-x^2} dx + \int_{III} e^{-x^2} dx + \int_{IV} e^{-x^2} dx = 0 \quad (*)$$

Bu yerda

$$\int_I^R e^{-ax^2} dx = \frac{2}{\sqrt{a}} \int_0^{2\sqrt{a}} e^{-t^2} dt \quad (2.2.1)$$

$$\int_{II} e^{-\frac{b^2}{4a} - ax^2} e^{-ibx} dx \quad (2.2.2)$$

bo'lib, $x = \pm R$ bo'lgan I va II kesmalarda

$$\left| e^{-az^2} \right| = e^{-a(R^2 - y^2)} J e^{\frac{b^2}{4a}} e^{-aR^2}$$

bo'ladi. Shuning uchun agar $a > 0$ bo'lsa $R \in \Gamma$ da (2.2.1) va (2.2.2) integrallar nolga intiladi. Yuqoridagi (*) integralda $R \in \Gamma$ da limitga o'tib, hamda $\operatorname{erf} \Gamma = 1$ ekanidan foydalanib

$$\frac{\sqrt{p}}{a} - e^{\frac{b^2}{4a}} \int_{-\Gamma}^{\Gamma} e^{-ax^2} e^{-bx} dx = 0$$

ekanini topamiz.

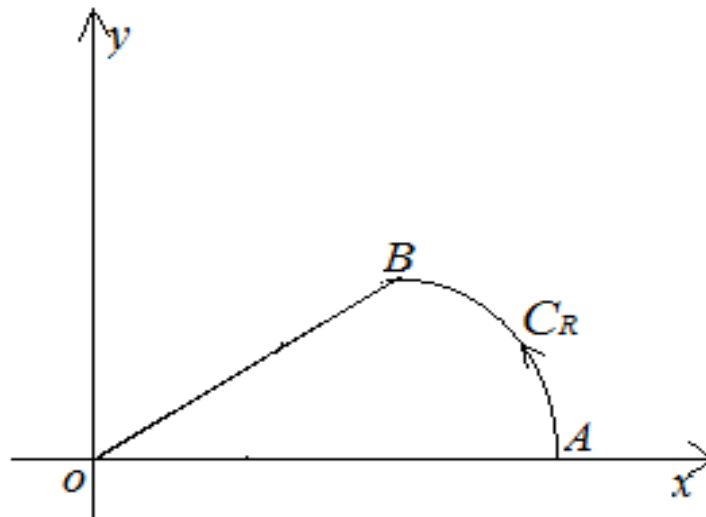
Bu tenglikdan haqiqiy qismlarini tenglab natijani hosil qilamiz:

$$\int_0^{\Gamma} e^{-ax^2} \cos bx dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}, a > 0$$

Misol-2.2.2. A. Eyler integrallarini qaraylik:

$$J_1 = \int_0^{\Gamma} \cos x^2 dx \text{ va } J_2 = \int_0^{\Gamma} \sin x^2 dx$$

Bu integrallarni hisoblashda yordamchi funktsiyani $f(z) = e^{iz^2}$ ko'rinishda tanlaymiz. Integrallash konturini esa quyidagicha olamiz. (4-rasm).



4-rasm

C_R konturda $z^2 = h$ almashtirishdan keyin

$$\int_{C_R} f(z) dz = \frac{1}{2} \int_{C_{R^2}} \frac{e^{ih} dh}{\sqrt{h}}$$

ga ega bo'lamiz, bu yerda C_{R^2} bilan R radiusli aylananing to'rttdan bir qismini belgiladik. Jordan lemmasiga ko'ra bu integral $R \rightarrow \infty$ da nolga intiladi. Agar OA ga $z = x$ OB ga $x = z\sqrt{i}$ desak, Koshi teoremasiga ko'ra

$$\int_0^R e^{ix^2} dx + \int_{C_R} e^{iz^2} dz + \int_R^0 \sqrt{i} e^{-t^2} dt = 0$$

Bu yerda $R \rightarrow \infty$ limitga o'tib va $\operatorname{erf} \Gamma = 1$ ekanidan foydalanib,

$$\int_0^\Gamma e^{ix^2} dx = \sqrt{i} \frac{\sqrt{p}}{2}$$

ni topamiz.

Bu tenglikda haqiqiy va mavhum qismlarini ajratib:

$$\int_0^{\Gamma} e^{ix^2} dx = \int_0^{\Gamma} \frac{\cos x^2 - i \sin x^2}{2} dx = \int_0^{\Gamma} \cos x^2 dx + i \int_0^{\Gamma} \sin x^2 dx = \sqrt{i} \frac{p}{2}$$

ni hosil qilamiz.

Ma'lumki,

$$\int_0^{\Gamma} \cos x^2 dx \text{ va } \int_0^{\Gamma} \sin x^2 dx$$

bu integrallar quyidagiga teng:

$$\int_0^{\Gamma} \cos x^2 dx = \int_0^{\Gamma} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{p}{2}} \quad (**)$$

Bu integrallar quyidagi maxsus funksiyalarni aniqlaydi:

$$S(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{2pt}} dt, C(x) = \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{2pt}} dt$$

Haqiqatan ham, $t = t^2$ almashtirish qilsak, natijada

$$S(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^{\sqrt{x}} \sin t^2 dt, C(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} \int_0^{\sqrt{x}} \cos t^2 dt$$

larni hosil qilamiz. Endi (**) tenglamalarni

$$S(\Gamma) = C(\Gamma) = \frac{1}{2}$$

ko'rinishida ifodalash mumkin.

Bu integrallar birinchi bo'lib 1781-yilda Eyler tomonidan hisoblangan.

2.3. TARKIBIDA KO'P QIYMATLI FUNKSIYALAR BO'LGAN INTEGRALLARNI HISOBLASH

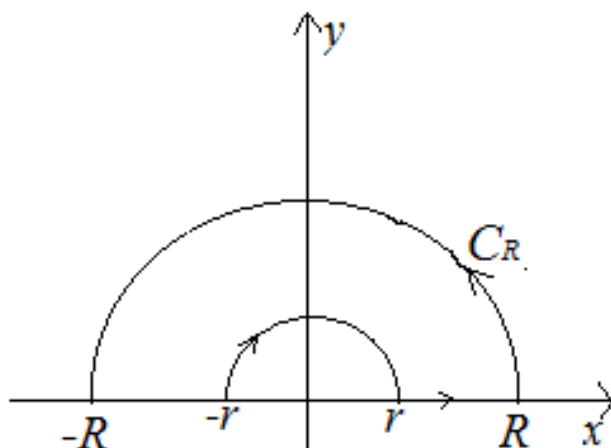
Kompleks argumentli funksiyalar nazariyasida golomorf funksiya teskari bo'lgan funksiyani o'rganish masalasi ham muhim o'rin tutadi. Aksariyat hollarda bunday funksiyalar bir qiymatli bo'lmaydi. Argumentning bitta qiymatiga bir nechta (ba'zi hollarda cheksiz ko'p) kompleks son mos qo'yiladi. Bunday funksiyalarni qat'iy matematik asosda berish uchun kompleks analizda Riman sirtlari kiritiladi. Ana shunday funksiyalardan biri $w = \ln z$ funksiyasidir.

Integral ostidagi funksiya tarkibida ko'p qiymatli funksiyalar qatnashgan integrallarni hisoblashda ham chegirmalar nazariyasidan foydalanish ancha qulaydir.

Misol-2.3. $\int_0^r \frac{\ln x dx}{(x^2 + 1)^2}$ integralni qaraylik. Bu integralni hisoblash uchun

yordamchi funksiya $f(z) = \frac{\ln z}{(z^2 + 1)^2}$ ko'rinishida olamiz. Integrallash

konturini esa $f(z)$ funksiyaning maxsus nuqtasi $z = 0$ nuqtani kichik C_r yarim aylana bilan aylanib o'tamiz.



Bu konturning ichida logarifmik funksiya dan bir qiymatli yaproq ajratish mumkin: $\ln z$ orqali $0 < \arg z < p$ tengsizlik bilan aniqlanadigan yaproqni belgilaymiz. Yordamchi $f(z)$ funksiya $z = i$ nuqtada ikkinchi tartibli qutbga ega bo'lib, $f(z)$ funksiyaning bu nuqtadagi chegirmasi

$$C_{-1} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{d}{dz} f(z) (z-1)^2 = \frac{d}{dz} \frac{\ln z}{(z+i)^2} = \frac{p+2i}{8}$$

ga teng. Chegirmalar haqidagi teorema ga asosan:

$$\mathbf{T}_{-R}^r + \mathbf{T}_{C_r}^R + \mathbf{T}_r^R + \mathbf{T}_{C_R}^R = \frac{p^2 i}{4} - \frac{p}{2}$$

Bu tenglikdagi $\mathbf{T}_{C_R}$ integral uchun $z = Re^{ij}$, $0 < j < p$ bo'lganda yetarlicha

katta R larda $|\ln z| = \sqrt{\ln^2 R + j^2} \sim 2 \ln R$ bo'ladi, bundan

$$\left| \mathbf{T}_{C_R} \frac{\ln z}{(z^2 + 1)^2} dz \right| \sim \frac{2 \ln R}{(R^2 - 1)^2} p R$$

ekanligi kelib chiqadi, hamda $R \rightarrow 0$ da $\mathbf{T}_{C_R} \frac{\ln z}{(z^2 + 1)^2} dz \rightarrow 0$. Xuddi

shuningdek, $z = re^{ij}$, $0 < j < p$ bo'lganda, yetarlicha kichik r lar uchun

$|\ln z| \sim 2 \ln \frac{1}{r}$ bo'ladi, bundan

$$\left| \mathbf{T}_{C_r} \frac{\ln z}{(z^2 + 1)^2} dz \right| \sim \frac{2 \ln \frac{1}{r}}{(1 - r^2)^2} p r$$

bo'lib, bu integral ham $r \rightarrow 0$ da nolga intiladi:

$$\oint_{C_r} \frac{\ln z}{(z^2 + 1)^2} dz \rightarrow 0.$$

Birinchi $\int_{-R}^R$ integralda $z = -x$ almashtirishdan keyin quyidagicha ega bo'lamiz:

$$\int_{-R}^{-r} \frac{\ln z}{(z^2 + 1)^2} dz = \int_r^R \frac{\ln x + \pi i}{(x^2 + 1)^2} dx$$

Hosil bo'lgan bu tenglikda $r \rightarrow 0$ da $R \rightarrow \Gamma$ da limitga o'tsak

$$2 \int_0^{\Gamma} \frac{\ln x}{(x^2 + 1)^2} dx + \pi i \int_0^{\Gamma} \frac{dx}{(x^2 + 1)^2} = \frac{p^2 i}{4} - \frac{p}{2}$$

ni hosil qilamiz. Bu tenglikning haqiqiy qismlarini tenglashtirib, qidirilayotgan integralning qiymatini hosil qilamiz:

$$\int_0^{\Gamma} \frac{\ln x}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{p}{4}.$$

Xulosa

Bitiruv malakaviy ishini yozish jarayonida quyidagi xulosalar olindi:

1. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyaning chegirmasi o'rganildi.
2. Kompleks o'zgaruvchili funktsiya chegirmasi haqidagi Koshi teoremasi va Jordan lemmasi o'rganildi.
3. Koshi teoremasi va Jordan lemmasidan foydalanib chegirmalar nazariyasining egri chiziqli integrallarni hisoblashga tatbiqlari o'rganildi.

Kompleks o'zgaruvchili funktsiyaning maxsus nuqtalari integral hisoblanishi talab qilinayotgan sohada bo'lganda shu integralni hisoblashni kompleks o'zgaruvchili funktsiyaning maxsus nuqtalaridagi chegirmalarini hisoblashga keltirish o'rganildi.

4. Kasr-ratsional hamda trigonometrik funktsiyalarning ko'paytmasidan iborat bo'lgan integrallarni, tarkibida ko'rsatkichli funktsiya bo'lgan integrallarni, tarkibida ko'p qiymatli funktsiyalar bo'lgan integrallarni hisoblash o'rganildi va misollar bilan to'liq yoritildi. Xususan, Laplas, Puasson, Eyler integrallari o'rganildi.

O'rganilganlarga doir misollar keltirildi. Shularga asosan aytish mumkinki yuqorida keltirilgan integrallarni hisoblashda chegirmalar nazariyasini tatbiq etish bunday integrallarni hisoblashni osonlashtiradi.

Foydalanilagan adabiyotlar ro'yxati.

1. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. Т.1, М. Наука, 1985
2. Xudoyberganov G., Vorisov A.K., Mansurov X.T., Komleks analiz. T. Universitet. 1998
3. Sa'dullayev A., Xudoyberganov G., Mansurov X.T., Vorisov A.K., To'ychiev T. Matematik analiz kursidan misol va masalalar to'plami (kompleks analiz). 3 qism. «O'zbekiston» 2000y.
4. Волковысский Л.И., Лунц Г.А., Арамонович И.Г. Сборник задач по теории функций комплексного переменного. М., «Наука» 1975.
5. А. Саъдуллаев. Голоморфные функции многих переменных. Ургенч. Изд. отдел. УрГУ. 2005.
6. Sirajiddinov S.X., Saloxitdinov M.S., Maksudov Sh. Kompleks o'zgaruvchili funktsiyalar nazariyasi. T. «O'qituvchi» 1979.
7. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М. «Наука». 1977.
8. Сидоров Ю.В., Федорюк И.В., Шабунин М.И. Лекция по ТФКП. М. Наука. 1984
9. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М. Наука. 1972.
10. Евграфов М.А., Сидоров Ю.В., Федорюк И.В., Шабунин М.И., Бежанов К.А. Сборник задач по теории аналитических функций. М. Наука. 1972
11. www.book.ru
12. www.ziyonet.ru
13. www.exponent.ru
14. www.studentbank.ru
15. www.mexmat.ru