MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

SIROJITDINOV ABDULXAMID ALIMOVICH

BOG‘LIQSIZ TASODIFIY MIQDORLAR YIG‘INDILARINING TAQSIMOTLARI UCHUN BA’ZI LIMIT TEOREMALAR

01.01.05– Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika

fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (phd) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2025

УДК: 519.21

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

SIROJITDINOV ABDULXAMID ALIMOVICH

BOG‘LIQSIZ TASODIFIY MIQDORLAR YIG‘INDILARINING TAQSIMOTLARI UCHUN BA’ZI LIMIT TEOREMALAR

01.01.05– Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika

fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (phd) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2025

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida №B2022.4.PhD/FM796 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya V.I. Romanovskiy nomidagi matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (http://ik-fizmat.nuu.uz) va "ZiyoNet" Axborot ta'lim portalida (http://www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Formanov Shakir Kasimovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor, akademik
Rasmiy opponentlar:	**Xamdamov Isakjon Mamasaliyevich** fizika-matematika fanlari doktori, professor.
	Mamurov Igamnazar Narbayevich fizika-matematika fanlari falsafa nomzodi,dotsent
Yetakchi tashkilot:	**Namangan muhandislik-qurilish instituti**

Dissertatsiya himoyasi O'zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 raqamli Ilmiy kengashning 2025-yil "15" aprel soat 14⁰⁰ dagi majlisida bo'lib o'tadi (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.: (+998 71) 227-12-24, faks: (+998 71) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (45 raqami bilan ro'yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.: (+998 71) 246-02-24).

Dissertatsiya avtoreferati 2025-yil "1" aprel kuni tarqatildi.
(2025-yil "1" aprel dagi 2 raqamli reyestr bayonnomasi).

A.Sadullayev
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., professor, akademik

R.M.Jo'rayev
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.f.d.(PhD)

O.Sh.Sharipov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash huzuridagi ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyati. Jahonda ilmiy va amaliy xususiyatga ega bo‘lgan ayrim matematik modellarni o‘rganish, ko’plab bog’liqsiz tasodifiy miqdorlarning katta sondagi yig’indisini tadqiq qilishga olib keladi. Ma’lumki, Bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar yig’indilari taqsimotlarining normal taqsimotga yaqinlashishini tadqiq qilish va ularni o‘rganish ilmiy tadqiqotlarda yetakchi o‘rinlardan birini egallamoqda. Ayniqsa, hozirgi vaqtda jahonning aksariyat ilmiy maktablarida bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar yig’indisi uchun Markaziy Limit Teorema (MLT) o’rinli bo’lishini tekshirish hamda MLTda yaqinlashish tezligini baholash masalalari zamonaviy matematikaning dolzarb yo‘nalishlaridan biri bo‘lib hisoblanmoqda. Birinchi marta A.M.Lyapunov 1901-yilda MLTda yaqinlashish tezligini o’rnatdi, bunda baholash qo’shiluvchilar soni va ularning birinchi momentlari orqali ifodalangan. Bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar yig’indilari taqsimotlarining normal taqsimotga yaqinlashishi masalalari iqtisodiyot, tibbiyot, axborot texnologiyalari va tabiiy fanlarning ko‘plab dolzarb masalalarini hal etishda muhim ahamiyatga ega.

Jahon amaliyotida limit teoremalarni tadqiq etish borasida qator ilmiy tadqiqotlar olib borilgan. Ta’kidlash joizki, matematik modellarni qurishda ba’zida tasodifiy sonli omillar bilan shug’ullanishga to’g’ri keladi. Rivojlangan mamlakatlarning ilmiy-tadqiqot institutlari zamonaviy kompyuter texnologiyalaridan foydalangan holda bunday modellarni tahlil qilish va ulardan samarali foydalanish borasida yangi yondashuvlar ishlab chiqmoqda. Ayniqsa, sun’iy intellekt va katta hajmdagi ma’lumotlar bilan ishlashda bunday modellarning qo‘llanilishi dolzarb ilmiy yutuqlardan biri hisoblanmoqda. Bundan tashqari, bunday jarayonlarni o‘rganish zamonaviy fanda katta amaliy ahamiyatga ega bo‘lib, u iqtisodiyot va ijtimoiy jarayonlarning barqarorligini ta’minlashda hal qiluvchi rol o‘ynamoqda. Ushbu jarayonlarni tadqiq etish zamonaviy ilmiy yo‘nalishlarda katta ahamiyat kasb etmoqda.

Mamlakatimizda muhim nazariy ahamiyatga ega bo‘lishi bilan birga ko‘plab amaliy tatbiqlarga ham ega bo’lgan Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika kabi fundamental fanlarga alohida e’tibor qaratilmoqda. “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” mutaxassisligining ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha yuqori matematik qat’iylik bilan ilmiy tadqiqotlar olib borish fundamental tadqiqotlarning asosiy vazifasi hisoblanadi[1]. Bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar yig‘indilarining taqsimotlarini oldindan ma’lum bo’lgan limitik taqsimot qonunlariga yaqinlashtirish masalalarini tadqiq qilish nafaqat fanlarning yanada rivojlanishi uchun katta ahamiyatga ega, balki fanning deyarli barcha sohalarida ko‘plab tatbiq etilishiga erishiladi. Natijada, bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar yig’indilarining taqsimotlari approksimatsiyalarini tatqiq qilishda erishiladigan asosiy natijalar muhim ahamiyat kasb etadi. Bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar yig’indilarining

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta`lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-son qarori

taqsimotlarini o’rganish shubhasiz, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika rivojlanishining hozirgi bosqichidagi asosiy vazifalardan biri hisoblanadi.

Mazkur dissertatsiya ishining mavzusi va tadqiqot ob’ekti O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-4947-son Farmonida, 2017-yil 17-fevraldagi “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2789 sonli va 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish choratadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708 sonli Qarorlarda, shuningdek, fundamental fanga oid boshqa me’yoriy-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarga mos keladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur dissertatsiya Respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. «Matematika, mexanika va informatika» ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi.

XX asr o‘rtalarida P. Levi, A.Ya. Xinchin, A.N. Kolmogorov, B.V. Gnedenko, G. Kramer, K.-G. Esseen kabi taniqli matematik olimlarning sa’y-harakatlari natijasida yaratilgan bog’liqsiz tasodifiy miqdorlarni yig‘ish nazariyasi, zamonaviy ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistikaning jadal rivojlanayotgan asosiy yo’nalishlaridan biri hisoblanadi. Bu yo’nalishda muhin natijalar Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika sohasidagi taniqli olimlar V. Feller, G. Bergstrom, A.A. Borovkov, V.M. Zolotarev va boshqalar tomonidan olingan. Keyinchalik bu nazariya mashhur olimlar V.V. Petrov, V.I. Rotar, E.L. Presman hamda Sh.K. Formanov, Sh.A. Mirahmedov va boshqa o‘zbek matematiklarining ilmiy izlanishlari natijasida rivojlantirildi. Ehtimollar nazariyasi rivojlanishining hozirgi bosqichida bog’liqsiz tasodifiy miqdorlarni yig’ish nazariyasi mustaqil yo’nalish hisoblanib, uning natijalari matematik statistika, moliyaviy va sug’urta matematikasi, optimal qaror chiqarish nazariyasi va matematikaning boshqa sohalarida yanada ko’proq foydalanilmoqda..

2019 yilda E.L. Presman va Sh.K. Formanovlar tomonidan noklassik tipdagi, qo’shiluvchilarning cheksiz kichiklik sharti bajarilmagan holda MLT uchun natijalar olingan. Ular tomonidan Lindeberg shart ε ga bog’liq bo’lmagan (Rotarning o’zgartirilgan shartida) holda Rotar xarakteristikasi uchun baho keltirilgan. Rotar tomonidan Lindeberg xarakteristikasining analogi bo’lgan xarakteristikasi kiritilgan bo’lib, qo’shiluvchilarning dispersiyalari chekli bo’lgan holda bu xarakteristikaning nolga intilishi markaziy limit teorema o’rinli bo’lishi uchun zaruriy va yetarli shart hisoblanadi.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan Oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi.

Dissertatsiya O‘zbekiston Fanlar Akademiyasi V. I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti “Stoxastik analiz” laboratoriyasi va O’zbekiston Milliy Universitetining “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” kafedrasi ilmiy tadqiqot ishlari rejasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi quyidagilardan iborat:

bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar yig’indisining taqsimoti va standart normal taqsimot orasidagi farqni baholash uchun Lindeberg va Rotar sonli xarakteristikalarining aniq bahosini qurish va $2+\delta$ $\left(0<\delta<1\right)$ tartibli moment mavjud bo’lganda Berri-Esseen tengsizligini analogini isbotlashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari quyidagilardan iborat**:**

bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar yig’indisi uchun Lindeberg-Feller tipidagi markaziy limit teoremasini isbotlash;

moment shartlari mavjud bo’lmaganda markaziy limit teoremada yaqinlashish tezligini o’rnatish;

bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar seriyasi uchun markaziy limit teorema o’rinli bo’lishi uchun yangi umumlashgan Rotar sonli xarakteristikasini keltirish;

bog’liqsiz tasodifiy vektorlar yig’indisi uchun asimptotik baholarni olish;

Tadqiqotning ob’yekti bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar yig’indisi va tasodiy vektorlar yig’indisi hisoblanadi.

Tadqiqotning predmeti. Taqsimot funksiya, xarakteristik funksiya, Rotar sonli xarakteristikasi va Ibragimov-Osipov sonli xarakteristikasi.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiya ishida ehtimollar nazariyasining metodlari, hamda tasodifiy miqdorlarning kesimlari kabi analitik metodlardan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar yig'indisi uchun Lindeberg-Feller tipidagi markaziy limit teorema isbotlangan;

moment shartlari mavjud bo’lmagandagi Feller teoremasi uchun markaziy limit teoremada yaqinlashish tezligi bahosi olingan;

bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar seriyasi uchun markaziy limit teorema o’rinli bo’lishi uchun hech qanday parametrga bog’liq bo’lmagan umumlashgan Rotar sonli xarakteristikasi keltirilgan;

bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar yig’indisi uchun olingan asimptotik baholarni bog’liqsiz tasodifiy vektorlar yig’indisi uchun umumlashtirilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

Dissertatsiyada markaziy limit teoremadagi olingan yaqinlashish tezligi iqtisodiy jarayonlarning matematik modelini tuzishda ishlatish mumkin.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi bog’liqsiz tasodifiy miqdorlarni yig’ish nazariyasining zamonaviy metodlaridan foydalanish orqali matematik mulohazalar va isbotlarning qat’iyligi bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati ushbu ishda olingan ilmiy natijalardan zamonaviy Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikada limit teoremalarni tadqiq qilishda foydalanishdan iborat.

Dissertatsiya ishida olingan natijalarning amaliy ahamiyati, ilmiy natijalarni iqtisodiy masalalarda va aktuar matematikada jarayonlar matematik modelini o‘rganishda tatbiq etilishi mumkinligi bilan asoslanadi.

Tadqiqot ishlarning joriy qilinishi. Bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar yig’indilarining taqsimotlari uchun ba’zi limit teoremalarni tadqiq qilish bo‘yicha olingan natijalar asosida:

Markaziy limit teoramada olingan yaqinlashish tezligidan 2017-2020-yillarga mo‘ljallangan “O‘lchovli funksiyalar sinfida indekslangan integral empirik prosesslarning asimptotik xossalarini tadqiq etish” mavzusidagi №OT-Ф4-40-sonli loyihada foydalanilgan (Mirzo Ulug’bek nomidagi O‘zbekiston Milliy Universiteti, 2024-yil 27-iyuldagi 04/11-5900-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, Indekslangan integral emperik jarayonlarning siljimagan va asosliligini isbotlash imkonini bergan;

Lindeberg-Feller tipidagi MLTini isbotlash metodidan 2017-2020-yillarga mo‘ljallangan “Ikkinchi va yuqori tartibli aralash tipdagi tenglamalar uchun to‘g‘ri va teskari masalalarning tadqiqi” mavzusidagi №OT-Ф4-88-sonli loyihada aralash tipdagi tenglamalar uchun lokal va nolokal chegaraviy masalalarni yechishda foydalanilgan (O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti, 2024-yil 26-iyuldagi 2/296-sonli ma’lumotnomasi). Ushbu natijaning qo‘llanilishi ikkinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun lokal va nolokal chegaraviy masalalarining yechimi yagona ekanligini isbotlash imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari O’zbekiston Milliy Universiteti universiteti “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” bo’yicha shahar seminarida, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V. I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining “Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” ilmiy seminarida muhokama qilindi. Bundan tashqari, ushbu natijalar 7 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan 2 ta Xalqaro va 5 ta Respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 14 ta ilmiy ish chop etilgan, ulardan 7 tasi O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining falsafa doktori (PhD) dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etishga tavsiya qilingan nashrlarda, shulardan 2 tasi xorijiy va 5 tasi Respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 100 betdan iborat.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning birinchi bobi “Bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar yig’indisi uchun markaziy limit teorema va uning kuchsiz moment shartida turli umumlashtirishlari” deb nomlanib u to’rta paragrafdan iborat va bog’liqsiz tasodifiy miqdorlarning taqsimotini normal taqsimot qonuniga yaqinlashish masalalariga bag‘ishlangan. Markaziy limit teorema (MLT) ehtimollar nazariyasida shubhasiz muhim o’rinni egallaydi. Va hozirda uni qo‘llash mumkin bo‘lmagan ilm sohasini topish juda qiyin. MLT – ko’p sonli tasodifiy miqdorlar(t.m.) yig’indisining taqsimoti normal taqsimotga yaqinlashishini ifodalaydigan teorema sinfidir. Ushbu turdagi natijalar birinchi marta Muavr va Laplas tomonidan Bernulli sxema seriyasi uchun olingan, umumiy holda t.m.lar yig’indilari uchun - Chebishev, Lyapunov, Lindeberg, Feller, Rotar va boshqalar natijalar olishgan.

$X_1, X_2, \ldots$ – bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar (t.m.) ketma-ketligi bo’lsin barcha n va shunday $\delta > 0$ son uchun $EX_n = 0,\ E\left|X_n\right|^{2+\delta} < \infty$ bo’lsin. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} EX_k^2, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad F_n(x) = P\left(S_n < xB_n\right),$$

$$L_n = B^{-2-\delta} \sum_{k=1}^{n} E\left|X_k\right|^{2+\delta}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

$X_1, X_2, \ldots$ bog’liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun (MLT) o’rinli bo’ladi deymiz agar quyidagi asimptotik munosabat o’rinli bo’lsa

$$\sup_x \left|F_n(x) - \Phi(x)\right| \to 0 \quad n \to \infty,$$

bu yerda

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

$(0,1)$ parametrli normal taqsimot.

Endi har bir seriyada bog’liqsiz bo’lgan tasodifiy miqdorlar seriyasini qaraylik

$$X_{1n}, \ldots, X_{nn}, \ldots, \ n = 1, 2, \ldots \qquad (3)$$

bu yerda $X_{n,j}$ tasodifiy miqdor $n$ga bog’liq bo’lishi mumkin.

Umumiylikka zarar keltirmay quyidagi belgilashni amalga oshiramiz

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_{n,j}\ .\ \sigma_{n,j}^2 = EX_{n,j}^2 < \infty\ ,\ j = 1, 2, \ldots, n\ ,\ n \geq 1$$

$$EX_{n,j}=0\ ,\ j=1,2...,n\ ,\ \sum_{k=1}^{n}\sigma_{n,j}^{2}=1 \tag{4}$$

Markaziy limit teorema o'rinli bo'lishini tekshirishda quyidagi xarakteristika juda muhim rol o'ynaydi

$$L_n(\varepsilon)=\sum_{j=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon}x^2\,dF_{n,j}(x)\ ,$$

bu yerda ε ixtiyoriy musbat son, $F_{n,j}(x)=P(X_{n,j}<x)$ $X_{n,j}$ ning taqsimot funksiyasi.

Quyidagi shart

$$L_n(\varepsilon)\to 0,\ n\to\infty,\ \forall\varepsilon>0 \tag{L}$$

Lindeberg sharti deyiladi. Xususan, (3) tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun Lindeberg sharti bajarilishidan quyidagi dispersiyalarning tekis cheksiz kichiklik sharti kelib chiqadi:

$$\max_{1\le j\le n}\sigma_{n,j}^{2}\to 0,\ n\to\infty \tag{F}$$

(F) shart Feller sharti ham deb nomlanadi o'z navbatida Feller shartidan quyidagi t.m.lar ketma-ketligi tekis cheksiz(asimptotik) kichiklik sharti kelib chiqadi

$$\max_{1\le n\le j}P(|X_{n,j}|>\varepsilon)\to 0,\ \forall\varepsilon>0,\ n\to\infty \tag{U}$$

Quyidagi Lindeberg va Lindeberg-Feller teoremalari o'rinli:

Теорема 1. (3) –bog'liqsiz t.m. ketma-ketligi Lindeberg (L) sharti o'rinli bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik markaziy limit teoremani qanoatlantiradi.

Теорема 2. (3)-bog'liqsiz t.m. ketma-ketligi Feller shartini bajarib (MLT) o'rinli bo'lishi uchun Lindeberg sharti bajarilishi zarur va yetarlidir.

V.I.Rotar (3) bog'liqsiz (t.m.) ketma-ketligi uchun quyidagi sonli xarakteristikani kiritadi:

$$R_n(\varepsilon)=\sum_{j=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon}|x|\left|F_{n,j}(x)-\Phi_{n,j}(x)\right|dx$$

Bu yerda $0<\varepsilon<\infty$. $F_{n,j}(x)$ taqsimot funksiya $X_{n,j}$ t.m.ning taqsimot funksiyasi, $\Phi_{n,j}(x)$ dispersiyasi $\sigma_{n,j}^2$ bo'lgan normal taqsimlangan t.m. taqsimot funksiyasi (ya'ni $\Phi_{n,j}(x)=\Phi(\frac{x}{\sigma_{n,j}})$).

Quyidagi shart

$$R_n(\varepsilon)\to 0,\ \ \forall\varepsilon>0,\ \ n\to\infty \tag{R}$$

Rotar sharti deyiladi.

Теорема 4. Bog'liqsiz t.m. ketma-ketligi MLTini qanoatlantirishi uchun Rotar shartini bajarishi zarur va yetarlidir.

Dissertatsiyaning ikkinchi bobi "Lindeberg-Feller tipidagi limit teoremasining umumlashmasi" deb nomlangan bo'lib u 5 ta paragrafdan iboratdir. Dissertatsiyaning ushbu bobida MLT da ishlatiladigan sonli xarakteristikalar tahliliga hamda uning turli xil isboti tadqiq qilinadi.

[37] ishda, Ibragimov-Osipov xarakteristikasi nolga intilishi Lindeberg sharti bajarilishi bilan ekvivalentligi isbotlangan. Quyida Ibragimov-Osipov xarakteristikasi keltirib o'tamiz.

$$\psi_n = \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|\geq 1} x^2 dF_{nj}(x) + \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|\leq 1} x^3 dF_{nj}(x) \right| + \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|\leq 1} x^4 dF_{nj}(x).$$

Bizda esa quyidagicha

$$M_n(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|\leq 1} |x|^{2+\alpha} dF_{nj}(x) + \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|>1} x^2 dF_{nj}(x) = m_n(\alpha) + L_n, \ \alpha > 0.$$

$n \to \infty$ da $M_n(\alpha)$ ning asimptotik xossasini keltiramiz.

Lemma 1. Agar $n \to \infty$ da shunday $\alpha = \alpha_0 > 0$ uchun

$$m_n(\alpha_0) = \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|\leq 1} |x|^{2+\alpha_0} dF_{nj}(x) \to 0,$$

bo'lsa, u holda ihtiyoriy $\alpha > 0$ uchun $m_n(\alpha) \to 0$ asimptotik munosabat o'rinli bo'ladi.

Endi ushbu bobning asosiy natijalaridan birini keltiramiz.

Теорема 5. Shunday $\alpha = \alpha_0 > 0$ uchun

$$M_n(\alpha_0) = m_n(\alpha_0) + L_n \to 0, \ n \to \infty \tag{M}$$

o'rinli bo'lsin. U holda ihtiyoriy α uchun quyidagi implikatsiya o'rinli bo'ladi

$$\{M_n(\alpha) \to 0, \ n \to \infty\} \Leftrightarrow \{L_n(\varepsilon) \to 0, \ \forall \varepsilon > 0, \ n \to \infty\}.$$

5-teoremadan Lindeberg-Feller teoremasini kelib chiqishini ko'rsatish mumkin. 2-teoremadagi *(L)* shartning o'rniga *(M)* shartdan foydalanib quyidagi teoremani keltirib o'tamiz.

Теорема 6. $\{X_{nj},\ 1 \le j \le n\}$ bog'liqsiz t.m. ketma-ketligi Feller shartini bajarib (MLT) o'rinli bo'lishi uchun *(M)* shartni bajarilishi zarur va yetarlidir.

Keling endi Fellerning moment shartlari mavjud bo'lmagandagi teoremasini keltirib o'tamiz.

Теорема 7. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$B_1, B_2, \dots B_n, \dots,$$

musbat sonlari ketma-ketligi mavjud bo'lib, quyidagi shartlarni qanoatlantirsa

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\int_{|x|>\varepsilon B_n} dF_j(x) = 0, \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n}\sum_{j=1}^{n}\int_{|x|\le\varepsilon B_n} x dF_j(x) = 0, \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{B_n^2}\sum_{j=1}^{n}\left\{\int_{|x|\le\varepsilon B_n} x^2 dF_j(x) - \left(\int_{|x|\le\varepsilon B_n} x dF_j(x)\right)^2\right\} = 1 \tag{8}$$

u holda MLT o'rinli bo'ladi.

To'g'ri chiziqda quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi nomanfiy chegaralangan B sinf funksiyalarini aniqlaymiz

Ihtiyoriy $\delta > 0$ uchun $\lim\limits_{x\to 0} b(x) = 0,\ m_b(\delta) = \inf\limits_{|x|>\delta} b(x) > 0$.

Quyidagi sonli xarakteristika

$$R_n^b = \sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} |x| b(x) \left|F_{n,j}(x) - \Phi_{n,j}(x)\right| dx \tag{9}$$

umumlashgan Rotar sonli xarakteristikasi deb nomlanadi.

$$R_n^b = \sum_{j=1}^{n}\int_{-\infty}^{\infty} |x| b(x) \left|F_{n,j}(x) - \Phi_{n,j}\right| d(x) \to 0 \tag{10}$$

shart esa umumlashgan Rotar sharti deyiladi.

Agar *b(x)* funksiyani quyidagicha tanlab olsak

$$b(\bullet) = b_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| \le \varepsilon, \\ 1, & \text{при } |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

U holda (9) formula Rotar sonli xarakteristikasiga aylanadi

$$R_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x|>\varepsilon} |x| \left| F_{n,j}(x) - \Phi_{n,j}(x) \right| dx \,.$$

Теорема 8. Quyidagi 3 ta shart ekvivalent:

1) Rotar shartining bajarilishi;

2) shunday $b(\cdot) \in B$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^b = 0$

3) ihtiyoriy $b(\cdot) \in B$ uchun $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^b = 0$ bo'ladi.

Теорема 9. $\{X_{n,1}, \ldots X_{n,n},\ n = 1, 2, \ldots\}$ bog'liqsiz t.m ketma-ketligi MLTni qanoatlantirishi uchun umumlashgan Rotar sharti bajarilishi zarur va yetarlidir.

Dissertatsiyaning 3-bobi «Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar yig'indilarining asimptotik baholari» deb nomlanib u to'rta paragrafdan iborat. Ushbu bobda MLTda mos keladigan asimptotik yoyilma bilan bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar yig'indilarining yaqinlashish tezligining baholari keltirilgan.

Keling endi Berrining moment shartlari mavjud bo'lmagandagi MLTdagi olgan yaqinlashish tezligi bahosini keltirimiz.

Теорема 10. $$\beta_n = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{n} \left| \int\limits_{|x|\le\varepsilon q} x dF_j(x) \right|, \ \gamma_n = 1 - \frac{1}{q^2} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{|x|\le\varepsilon q} x^2 dF_j(x)$$

bo'lsin.

Agar $\beta_n^2 + |\gamma_n| < 1$ bo'lsa, U holda quyidagi munosabat o'rinli

$$\sup_x \left| \overline{F_n}(x) - \Phi(x) \right| \le \frac{C(\varepsilon + \beta_n)}{\sqrt{1 - \beta_n^2 - |\gamma_n|}} + \alpha_n + \frac{\beta_n}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi e}} \ln \frac{1}{\sqrt{1 - \beta_n^2 - |\gamma_n|}} \,.$$

Bu yerda $C-$doimiy son.

Bu natijani umumlashtirish uchun quyidagi belgilashlarni amalga oshiramiz (ε va q – ihtiyoriy musbat son).

$$\overline{F_n}(x)=P\left(\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{n}X_j<x\right),$$

$$\alpha_n=\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{|x|>\varepsilon q}dF_j(x), \tag{11}$$

$$\beta_n=\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{|x|\le\varepsilon q}xdF_j(x), \tag{12}$$

$$\gamma_n=1-\frac{1}{q^2}\sum_{j=1}^{n}\left\{\int\limits_{|x|\le\varepsilon q}x^2dF_j(x)-\left(\int\limits_{|x|\le\varepsilon q}xdF_j(x)\right)^2\right\}. \tag{13}$$

Теорема 11. $X_1,...,X_n$ - bog'liqsiz t.m. ketma-ketligi bo'lsin, n – ihtiyoriy natural son bo'lsin. U holda

$$\sup_x\left|\overline{F_n}(x)-\Phi(x)\right|\le\frac{C}{q}+\alpha_n+\sqrt{\frac{2}{\pi}}|\beta_n|+\frac{4}{3}|\gamma_n|, \tag{14}$$

bo'ladi.

Теорема 12. (11)-(13) shartlar o'rinli bo'lsin va quyidagi shartni qanoatlantiruvchi shunday $h<1$mavjud bo'lsin

$$\gamma_n\le h. \tag{15}$$

U holda faqat $h$ga bog'liq shunday $A_n>0$, C_n va $H>0$ doimiy sonlar mavjud bo'lsin, quyidagi munosabat o'rinli

$$\sup_x\left|P\left(\frac{1}{A_n}\sum_{j=1}^{n}X_j-C_n<x\right)-\Phi(x)\right|\le H\varepsilon+\alpha_n. \tag{15}$$

Endi dissertatsiyaning ohirgi natijalardan birini keltirib o'tamiz ya'ni Rozenning quyidagi ishini umumlashtirganmiz, solishtirish uchun avval Rozenning ishini keltiramiz.

$X_1,X_2,...,X_n...$ umumiy xosmas taqsimoti $F(x)$ bo'lgan bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lsin. F_n-quyidagi yig'indining taqsimot funksiyasi bo'lsin

$$S_n=X_1+X_2+...+X_n.$$

I_n —xo'qdagi interval, $l(I_n)$—esa interval uzunligi. C- I_n va n bog'liq bo'lmagan doimiy son.

Теорема 13.

(a) Agar $l(I_n) \le n^p,\ 0 < p < \dfrac{1}{2}$, bo'lsa , u holda

$$P\left(S_n \in I_n\right) \le C \Big/ n^{\frac{1}{2}-p} \text{ bo'ladi.}$$

(b) Agar $l(I_n) \le \varepsilon\sqrt{n}$, $\varepsilon > 0$ bo'lsa, u holda

$$P\left(S_n \in I_n\right) \le \varepsilon\left(C + \xi\left(\varepsilon, n\right)\right),$$

bo'ladi, bu yerda ihtiyotiy $\varepsilon > 0$ son uchun $\lim\limits_{n\to\infty} \xi\left(\varepsilon, n\right) = 0$;

(c) Agar $l(I_n) \le M$ bo'lsa, u holda

$$P\left(S_n \in I_n\right) \le \frac{C}{n^{\frac{1}{2}}} \text{ bo'ladi.}$$

(d) $\max\limits_{a} P\left(S_n = a\right) \le C \big/ \sqrt{n}$.

Endi dissertatsiyaning so'ngi natijasini keltiraman, $X_1, X_2, ..., X_n...$ – bog'liqsiz s - o'lchamli P umumiy ehtimollik funksiyasi bilan aniqlangan tasodifiy vektorlar bo'lsin, $\|x\| = \max\left(|x_1|, ..., |x_s|\right)$ - $x = \left(x_1, x_2, ..., x_s\right) \in R^s$ vektorning normasi.

Quyidagi belgilashlarni amalga oshiramiz

$$S_n = X_1 + ... + X_n$$

$$a_i = \int\limits_{|x| \le N} P\left(dx\right), \qquad a\left(a_1, ... a_s\right),$$

$$m = \int\limits_{\|x-a\| \le N} P\left(dx\right), \qquad Q\left(t\right) = \int\limits_{\|x-a\| \le N} \left(t, x-a\right)^2 P\left(dx\right)$$

Bu yerda N – qandaydir musbat son.

Теорема 14. I_n, r_n radiusli n-o'lchamli shar bo'lsin, bundan tashqari chekli $N > 0$ uchun $m > 0$ va $Q\left(t\right)$ musbat aniqlangan kvadrat forma bo'lsin.

(a) Agar $r_n \le n^{\alpha}$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{1}{2}\right)$ bo'lsa, U holda

$$P\left(S_n \in I_n\right) \le \frac{C}{n^{s\left(\frac{1}{2}-a\right)}} \text{ bo'ladi.}$$

Bu yerda C -n ga bo'liq bo'lmagan doimoy son.

(b) Agar $r_n \le \varepsilon\sqrt{n}$ bo'lsa, U holda

$$P(S_n \in I_n) \le \varepsilon^s \left(C + \eta(\varepsilon, n)\right) \text{ bo'ladi.}$$

Bu yerda ihtiyoriy $\varepsilon > 0$ da $\lim\limits_{n\to\infty} \eta(\varepsilon, n) = 0$;

(c) Agar $r_n \le C$ bo'lsa, U holda

$$P(S_n \in I_n) \le \frac{C}{n^{s/2}} \text{ bo'ladi.}$$

(d) $\max\limits_{b} P(S_n = b) \le \dfrac{C}{n^{s/2}}$.

Xulosa

Umuman olganda, dissertatsiyadan olingan natijalar dissertatsiya ishining maqsadiga erishilganligi haqida gapirishga imkon beradi. Barcha asosiy natijalar yangi va birgalikda tasodifiy miqdorlarning qo'shish nazariyasiga ma'lum bir xissa qo'shadi. Dissertatsiya ishi tasodifiy miqdorlarning qo'shish nazariyasiga oid ayrim masalarni yechishga bag'ishlangan. Tadqiqot ishining asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1. Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar yig'indisining taqsimoti uchun Lindeberg-Feller tipidagi limit teorema o'rinli bo'lishi uchun Ibragimov-Osipov sonli xarakteristikasining 0 ga intilishi zaruriy va yetarli shart ekanligi isbotlangan;
2. Fellerning moment sharti mavjud bo'lmagan holdagi markaziy limit teoremasining isboti keltirilgan;
3. Bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar seriyasida MLT ning bajarilishi uchun umumlashgan Rotar sharti yetarli va zaruriy shart ekanligi isbot etilgan;
4. Kasr $2+\delta$ $(0<\delta<1)$ tartibli moment mavjud bo'lganda MLT da qoldiq had uchun Berri-Esseen tengsizligi isbotlangan;
5. Qo'shiluvchi tasodifiy miqdorlar uchun momentlar mavjud bo'lmagan holda MLTda yaqinlashish tezligi olingan;
6. Bog'liqsiz tasodifiy vektorlar yig'indisining taqsimoti ehtimolligi uchun asimptotik baholar olingan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА

СИРОЖИТДИНОВ АБДУЛХАМИД АЛИМОВИЧ

НЕКОТОРЫЕ ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ – 2025

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за B.2022.4.PhD/FM796.

Диссертация выполнена в Институте Математики имени В.И.Романовкого.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (http://www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Форманов Шакир Касимович** доктор физико-математических наук, академик
Официальные оппоненты:	**Хамдамов Исакжан Мамасалиевич** доктор физико-математических наук, профессор.
	Мамуров Игамназар Нарбаевич кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Наманганский инженерно-строительный институт**

Защита диссертации состоится «15» апреля 2025 года в 14^{00} часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана имена Мирзо Улугбека. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99878)227-12-24, факс: (+99878) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №45). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99878) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «1» апреля 2025 года.
(протокол рассылки №2 от «1» апреля 2025 года).

А. Садуллаев
Председатель научного совета по присуждению ученых степеней, д. ф.-м. н., академик

Р. М. Жураев
Ученый секретарь научного совета по присуждению ученых степеней, д. ф. ф.-м. н. (PhD)

О.Ш.Шарипов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д. ф.-м. н., профессор

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Во всем мире в научных и практических исследованиях зачастую многие математические модели выражается суммой большого числа независимых случайных величин. Нет сомнения, что закон распределения суммы будет нормальным, если число слагаемых очень велико и каждый член суммы пренебрежимо мал. Актуальними являются исследования нормальной сходимости распределений сумм независимых случайных величин, поскольку функцию распределения суммы удается выписать явно, она оказывается малопригодной для практических вычислений ввиду того, что ее сложность растет с ростом числа слагаемых. Для таких функций прямые вычисления уже для сумм нескольких десятков слагаемых становятся невозможными, в то время как в практической деятельности часто приходится иметь дело с суммами сотен и тысяч слагаемых. Впервые А.М. Ляпуновым в 1901 г. была установлена оценка скорости сходимости в центральной предельной теореме (ЦПТ), где оценка была представлена в виде числа слагаемых и их первых моментов. Моментные оценки являются наиболее простыми и удобными оценками точности аппроксимации в ЦПТ, но они не лишены некоторых недостатков. Например, в них отсутствует информация о близости исходного распределения и предельного закона. Поэтому в случаях, когда имеется существенно большое число моментов, такие оценки могут быть достаточно грубыми.

Во всем мире проведен и проводится ряд научных исследований относящиеся к определением скорости сходимости в ЦПТ. Следует отметить, что выдающиеся ученые А.Н.Колмогоров и Б.В.Гнеденко, В.В.Петров, В.М.Золотарев посвятили этой теме отдельные главы в своих известных книгах, а В.В. Сенатов, П. Холл, Р.Н. Бхаттачария, Р. Ранга Рао и И.Г. Шевцова написали по ней целые монографии. Существенный прогресс был достигнут в работах В.В. Сазонова и В.В. Сенатова, где рассматривался многомерный случай, а А.В. Булинский и его ученики рассматривали оценки скорости сходимости в ЦПТ для векторных случайных полей. Также важно отметит, что при построении математических моделей порой приходится иметь дело со случайным числом факторов. Предельные теоремы для суммы случайных величин со случайными числами слагаемыми, как нам известно, впервые были изучены в работах Г. Роббинса, Ф. Анскомбе, В. Рихтера и других. В работе Г. Роббинса рассматривалось распределение суммы случайного числа случайных величин в условиях независимости числа слагаемых от самих слагаемых случайных величин. Такую схему случайного суммирования назовем «независимой схемой». В настоящее время имеется большое количество работ относящихся к «независимой схеме».

В нашей стране особое внимание уделяется фундаментальным наукам таким, как теория вероятностей и математическая статистика, которые наряду с существенным теоретическим значением имеют многочисленные практические приложения. Проведение научных исследований с высокой математической строгостью по приоритетным направлениям специальности «Теория вероятностей и математической статистики» рассматривается как основная задача фундаментальных исследований[1]. Исследования вопросов сходимости распределений сумм независимых случайных величин к конкретным предельным законам распределения имеют важное значение не только для дальнейшего развития конкретно этих наук, они находят свои многочисленные приложения почти что во всех сферах науки. Вследствие этого достижение значимых результатов в исследовании аппроксимации распределений сумм независимых случайных величин становится актуальным. А исследование распределений сумм независимых случайных величин несомненно относятся к ключевым задачам на современном этапе развития теории вероятностей и математической статистики.

Тема и объект исследования диссертационной работы соответствуют поручениям, обозначенным в Указах Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», и ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности» и ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также других нормативно-правовых актов, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Теория суммирования независимых случайных величин, созданная в середине XX века благодаря усилиям известных математиков П. Леви, А.Я. Хинчина, А.Н. Колмогорова, Б.В. Гнеденко, Г. Крамера, К.-Г.Эссеена, является одним из главных бурно развивающихся направлений современной теории вероятностей и математической статистики. Существенные результаты в этом направлении получены известными специалистами по теории вероятностей и математической статистики В. Феллером, Г. Бергстремом, А.А. Боровковым, В.М. Золотаревым и другими. Впоследствии эта теория получила развитие в работах известных ученых В.В. Петрова, В.И. Ротаря, Э.Л. Пресмана и узбекских математиков Ш.К. Форманова, Ш.А. Мирахмедова и др. На современном этапе развития теории вероятностей теория суммирования независимых случайных величин является самостоятельным направлением, и ее результаты находят все большее применение в математической

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года №292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений академии Наук Республики Узбекистан».

статистике, финансовой и страховой математике, теории принятия решений и других разделах математики.

В 2019 году Ш.К. Формановым, Э.Л. Пресманом рассмотрен неклассический вариант ЦПТ, когда не выполняется условие равномерной бесконечной малости слагаемых. Ими приведена оценка для характеристики Ротаря в случае, когда условия Линдеберга не зависят от ε (модификация условия Ротаря). В работе Ротарем введена характеристика, представляющая собой аналог характеристики Линдеберга, и в случае конечных дисперсий слагаемых стремление этой характеристики к нулю является необходимым и достаточным условием для справедливости центральной предельной теоремы.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами учреждения, где выполнялась диссертация. Диссертационная работа выполнена по плану лаборатории «Стохастический анализ» Института математики им. В. И. Романовского АН РУз и кафедры «Теория вероятностей и математической статистики» Национального Университета Узбекистана.

Целью исследования является установление точных оценок характеристик Линдеберга, Ротаря, использующих разность распределения суммы независимых случайных величин и стандартного нормального распределения

доказательство аналога неравенства типа Берри – Эссеена в случае существования у слагаемых моментов порядка $2+\delta$ $\left(0<\delta<1\right)$.

Задачи исследования, решаемые в данной работе:

доказательство предельной теоремы типа Линдеберга – Феллера в ЦПТ для сумм независимых случайных величин;

установление оценки скорости сходимости в ЦПТ без моментных условий;

нахождение новой числовой характеристики типа Ротаря в задачах справедливости ЦПТ для последовательности серий независимых случайных величин;

получение асимптотических оценок распределений сумм независимых случайных векторов.

Объектом исследования являются суммы независимых случайных величин и суммы случайных векторов.

Предмет исследования – функция распределения, характеристическая функция, числовая характеристик Ротаря и Ибрагимова – Осипова.

Методика исследования. В диссертации использованы прямые вероятностные методы и аналитический метод такой, как метод срезки случайных величин.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

доказана предельная теорема типа Линдеберга – Феллера в ЦПТ для сумм независимых случайных величин;

установлены новые оценки скорости сходимости в ЦПТ без моментных условий;

найдена новая обобщенная числовая характеристика Ротаря, для того, чтобы справедлива Центральной Предельной Теоремы для последовательности серий независимых случайных величин

получены асимптотические оценки распределений сумм независимых случайных векторов.

Практические результаты исследования заключаются в возможности применения полученной в диссертации оценки для ЦПТ в определении адекватности математических моделей в экономических процессах.

Достоверность результатов исследования обоснована строгостью математических рассуждений и доказательств, использованием современных методов теории суммирования независимых случайных величин.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования объясняется тем, что результаты могут быть использованы при дальнейших исследованиях предельных теорем современной теории вероятностей и математической статистики и, в совокупности, эти результаты представляют определенный интерес для исследователей стохастических систематических моделей. Кроме этого, полученные результаты могут быть использованы для многих теоретических и практических задач экономики, актуарной математики, теории принятия решений, и решения этих задач непосредственно связаны с суммами независимых случайных величин.

Внедрение результатов исследования. Результаты, связанные с предельными теоремами для сумм независимых случайных величин, были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

Полученные скорости сходимости в центральной предельной тереме применены в фундаментальном научном проекте ОТ-Ф4-40 «Исследования асимптотических свойств интегральных эмпирических процессов, индексированных классом измеримых функций» (Справка Национального Университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека № 04/11-5900 от 27.07.2024г.). В результате доказывается несмещенность и состоятельность индексированных интегральных эмпирических процессов.

Методы доказательства теоремы типа Линдеберга – Феллера в ЦПТ использовались в проекте фундаментальных исследований Министерства инновационного развития республики Узбекистан “Исследования прямых и обратных задач для уравнений смешанного типа второго и высокого порядков” № ОТ-Ф4-88, 2017-2020 гг. (Справка Института Математики имени В.И. Романовского АН Республики Узбекистан № 2/296 от 26.07.2024г.). Применение данного результата позволило доказать однозначности разрешимости локальных и нелокальных краевых задач для уравнений в частных производных второго порядка.

Апробация результатов исследования. Основное содержание диссертации обсуждалось на на научном городском семинаре «Теории вероятности и математическая статистика» кафедры теории вероятностей и математической статистики Национального Университета Узбекистана неоднократно; на научном семинаре лаборатории «Стохастический анализ» института Математики им. В.И. Романовского и на научном семинаре по теории вероятностей и математической статистики. Кроме того 7 научно-практических конференциях, в том числе на 2 международных и 5 республиканских.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 14 статей, из них 7 в научных изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан, в том числе 2 опубликованы в зарубежном журнале, индексируемом в базе SCOPUS, и 5 – в республиканских научных изданиях.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы. Нумерации теорем, предложений, определений, формул сквозные, отдельно для каждой главы. Общее число страниц диссертационной работы – 100.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной «Центральная предельная теорема для сумм независимых случайных величин и ее различные обобщения при ослабленных моментных условиях» посвящена вопросам сходимости распределения независимых случайных величин к нормальному закону распределения.

Центральная предельная теорема (ЦПТ) занимает бесспорно признанное место в теории вероятностей. И сейчас невозможно назвать область науки, в которой она бы не нашла свои приложения. ЦПТ – это целый класс теорем, в которых утверждается, что при большом числе слагаемых распределение суммы случайных величин (с.в.) близко к нормальному. Результаты такого типа были впервые получены Муавром и Лапласом для схемы серий Бернулли, а для общих случаев, когда суммируемые с.в. независимы – Чебышевым, Ляпуновым, Линдебергом, Феллером, Ротарем и др.

Пусть $X_1, X_2, ...$ – последовательность независимых случайных величин (н.с.в.) таких, что $EX_n = 0,\ E\left|X_n\right|^{2+\delta} < \infty$ для всех n и некоторого $\delta > 0$. Положим

$$B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} EX_k^2, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k, \quad F_n(x) = P(S_n < xB_n),$$

$$L_n = B^{-2-\delta} \sum_{k=1}^{n} E\left|X_k\right|^{2+\delta}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Напомним, что последовательность с.в. $X_1, X_2, ...$ подчиняется Центральной Предельной Теореме (ЦПТ), если справедливо асимптотическое соотношение

$$\sup_x \left|F_n(x) - \Phi(x)\right| \to 0 \quad n \to \infty,$$

где

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-u^2/2} du$$

нормальное распределение с параметром $(0,1)$.

Теперь рассмотрим случае произвольные серии

$$X_{1n}, ..., X_{nn}, ... , \quad n = 1, 2, ... \tag{3}$$

независимых (в каждой серии) случайных величин (с.в.), где распределения с.в. $X_{n,j}$ могут зависят от n.

Обозначим $S_n = \sum_{j=1}^{n} X_{nj}$. Пусть существуют

$$\sigma_{n,j}^2 = EX_{nj}^2 < \infty, \ j = 1, 2, ..., n, \ n \geq 1$$

С точки зрения последующих результатов можно считать, не ограничивая общности, что

$$EX_{n,j} = 0, \ j = 1, 2..., n, \ \sum_{k=1}^{n} \sigma_{n,j}^2 = 1 \tag{4}$$

В задачах проверки справедливости (ЦПТ) для последовательности независимых с.в. важную роль играет следующая характеристика

$$L_n(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} \int_{|x| > \varepsilon} x^2 \, dF_{nj}(x), \ \varepsilon > 0$$

где $F_{n,j}(x) = P(X_{n,j} < x)$ функция распределения (ф.р.) с.в. $X_{n,j}$.

Условие

$$L_n(\varepsilon) \to 0,\ n \to \infty,\ \forall \varepsilon > 0 \tag{L}$$

называется условием Линдеберга. В частности, из выполнения условия Линдеберга следует, что с.в. (3) в этом случае обладают свойством равномерной бесконечной малости дисперсий:

$$\max_{1 \le j \le n} \sigma^2_{n,j} \to 0,\ n \to \infty \tag{F}$$

Условие (F) называется условием Феллера и из него, в свою очередь, вытекает так называемое условие предельной (асимптотической) малости слагаемых состоящее в том, что

$$\max_{1 \le j \le n} P(|X_{n,j}| > \varepsilon) \to 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ n \to \infty \tag{U}$$

Хорошо известно, что справедлива следующие теоремы Линдеберга и Лидеберга-Феллера:

Теорема 1. Если имеет место условие Линдеберга (L), то для последовательности независимых с.в. (3) справедлива (ЦПТ).

Теорема 2. Для того, чтобы последовательность н.с.в. удовлетворяла условию Феллера (F) и ЦПТ, необходимо и достаточно выполнение условия Линдеберга (L).

В.И.Ротарь ввел следующую числовую характеристику для последовательности с.в. (3):

$$R_n(\varepsilon) = \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|>\varepsilon} |x| \left| F_{n,j}(x) - \Phi_{n,j}(x) \right| dx$$

где $0 < \varepsilon < \infty$. $F_{n,j}(x)$ ф.р.с.в. $X_{n,j}$, $\Phi_{n,j}(x)$ ф.р. нормально распределенной с.в. с дисперсией $\sigma^2_{n,j}$ (т.е. $\Phi_{n,j}(x) = \Phi(\frac{x}{\sigma_{n,j}})$). Условие

$$R_n(\varepsilon) \to 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ n \to \infty \tag{R}$$

называется условием Ротаря.

Теорема 4. Для того чтобы имела место ЦПТ, необходимо и достаточно выполнение условия Ротаря.

Вторая глава диссертации, названная **«Обобщение предельной теоремы типа Линдеберга – Феллера»**, состоит из пяти параграфов. В этой главе диссертации исследованы числовые характеристики, используемых в ЦПТ и доказательствах ее различных вариантов.

В работе [37] было доказано, что сходимость к нулю характеристики Ибрагимова-Осипова эквивалентна выполнению условия Линдеберга. Напомним, что характеристика Ибрагимова-Осипова определяется формулой

$$\psi_n = \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|\geq 1} x^2 dF_{nj}(x) + \left| \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|\leq 1} x^3 dF_{nj}(x) \right| + \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|\leq 1} x^4 dF_{nj}(x).$$

В нашем случае положим

$$M_n(\alpha) = \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|\leq 1} |x|^{2+\alpha} dF_{nj}(x) + \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|>1} x^2 dF_{nj}(x) = m_n(\alpha) + L_n,\ \alpha > 0.$$

Приведем асимптотическое свойство $M_n(\alpha)$ при $n \to \infty$.

Лемма 1. Пусть для некоторого $\alpha = \alpha_0 > 0$,

$$m_n(\alpha_0) = \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|\leq 1} |x|^{2+\alpha_0} dF_{nj}(x) \to 0,\ n \to \infty.$$

Тогда $m_n(\alpha) \to 0, n \to \infty$ для любого $\alpha > 0$.

Теперь приведём один из основной результат этой главы.

Теорема 5. Пусть для некоторого $\alpha = \alpha_0 > 0$,

$$M_n(\alpha_0) = m_n(\alpha_0) + L_n \to 0,\ n \to \infty \tag{M}$$

Тогда для любого α имеет место следующая импликация

$$\left\{ M_n(\alpha) \to 0,\ n \to \infty \right\} \Leftrightarrow \left\{ L_n(\varepsilon) \to 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ n \to \infty \right\}.$$

Из нашей теоремы 5 как следствия можно показать Линдеберга-Феллера $(F)\wp(CLT) \Leftrightarrow (L)$.

Приведем теорему, в которой вместо условия *(L)* используются условия *(M)*.

Теорема 6. Условие *(M)* является необходимым и достаточным для того, чтобы последовательность серий независимых случайных величин $\left\{ X_{nj},\ 1 \leq j \leq n \right\}$ удовлетворяла условию *(F)* и подчинялась ЦПТ.

В.Феллер [30] доказал следующую теорему.

Теорема 7. Если существует последовательность положительных чисел

$$B_1, B_2, \dots B_n, \dots,$$

которые удовлетворяют условиям

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{|x|>\varepsilon B_n} dF_j(x) = 0, \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n} \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{|x|\le\varepsilon B_n} x dF_j(x) = 0, \tag{7}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^{n} \left\{ \int\limits_{|x|\le\varepsilon B_n} x^2 dF_j(x) - \left(\int\limits_{|x|\le\varepsilon B_n} x dF_j(x) \right)^2 \right\} = 1 \tag{8}$$

при любом $\varepsilon > 0$, тогда справедлива ЦПТ.

Определим B класс ограниченных неотрицательных функций на прямой, что

$$\lim_{x\to 0} b(x) = 0, \; m_b(\delta) = \inf_{|x|>\delta} b(x) > 0, \text{ при всех } \delta > 0.$$

Положим

$$R_n^b = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| b(x) \left| F_{n,j}(x) - \Phi_{n,j}(x) \right| dx.$$

Теорема 8. Следующие три условия эквивалентны:

1) выполняется условие Ротаря (8);

2) $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^b = 0$ для некоторой функции $b(\cdot) \in B$,

3) $\lim\limits_{n\to\infty} R_n^b = 0$ для всех функций $b(\cdot) \in B$.

Теорема 9. Пусть

$$\left\{ X_{n,1}, \dots X_{n,n}, \; n = 1, 2, \dots \right\}$$

последовательность серий независимых случайных величин. Для того чтобы эта последовательность удовлетворяла (ЦПТ) необходимо и достаточно выполнение обобщенного условия Ротаря

$$R_n^b = \sum_{j=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |x| b(x) \left| F_{n,j}(x) - \Phi_{n,j} \right| d(x) \to 0 \tag{9}$$

для любой функции $b(\bullet) \in B$.

Если положим

$$b(\bullet) = b_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } |x| \le \varepsilon, \\ 1, & \text{при } |x| > \varepsilon. \end{cases}$$

то формула (10) превращается числовую характеристику Ротаря

$$R_n(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{n} \int_{|x|>\varepsilon} |x| \left| F_{n,j}(x) - \varPhi_{n,j}(x) \right| dx .$$

В третьей главе диссертации, названной «**Оценки аппроксимации распределения сумм независимых случайных величин**», содержится четыре параграфов. В этой главе приведены оценки скорости распределений сумм независимых случайных величин с соответствующим асимптотическим разложением в ЦПТ.

Так же, как и в предыдущем главе, будем рассматривать последовательность н.с.в. $X_1, ..., X_n, ...$ с ф.р. $F_1(x), ..., F_n(x), ...$, соответственно. Если для произвольной последовательности положительных чисел $B_1, B_2, ..., B_n, ...$ (в главе 1 эти константы обозначены через $B_1, B_2, ..., B_n$) при любом $\varepsilon > 0$ выполняются условия

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|\ge\varepsilon B_n} dF_j(x) = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n^2} \sum_{j=1}^{n} \int_{|x|\le\varepsilon B_n} x^2 dF_j(x) = 1,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{B_n} \sum_{j=1}^{n} \left| \int_{x\le\varepsilon B_n} x dF_j(x) \right| = 0,$$

то функция распределения

$$F_n(x) = P\left(\frac{X_1 + ... + X_n}{B_n} < x \right)$$

стремится к $\Phi(x)$ при $n \to \infty$.

Теперь приведём результат Берри, который устанавливает скорость сходимости в ЦПТ без моментных условий.

Теорема 10. Пусть

$$\beta_n = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{n}\left|\int\limits_{|x|\le\varepsilon q} x dF_j(x)\right|,$$

$$\gamma_n = 1 - \frac{1}{q^2}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{|x|\le\varepsilon q} x^2 dF_j(x).$$

Тогда справедливо

$$\sup_x\left|\overline{F_n}(x) - \Phi(x)\right| \le \frac{C(\varepsilon+\beta_n)}{\sqrt{1-\beta_n^2-|\gamma_n|}} + \alpha_n + \frac{\beta_n}{\sqrt{2\pi}} + \frac{1}{\sqrt{2\pi e}}\ln\frac{1}{\sqrt{1-\beta_n^2-|\gamma_n|}},$$

если $\beta_n^2 + |\gamma_n| < 1$. Здесь C – абсолютная постоянная.

Чтобы обобщить этого результата введем обозначения (ε и q – произвольные положительные числа).

$$\overline{F_n}(x) = P\left(\frac{1}{q}\sum_{j=1}^{n} X_j < x\right),$$

$$\alpha_n = \sum_{j=1}^{n}\int\limits_{|x|>\varepsilon q} dF_j(x), \tag{11}$$

$$\beta_n = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{n}\int\limits_{|x|\le\varepsilon q} x dF_j(x), \tag{12}$$

$$\gamma_n = 1 - \frac{1}{q^2}\sum_{j=1}^{n}\left\{\int\limits_{|x|\le\varepsilon q} x^2 dF_j(x) - \left(\int\limits_{|x|\le\varepsilon q} x dF_j(x)\right)^2\right\}. \tag{13}$$

Теорема 11. Пусть n – произвольное натуральное число $X_1,...,X_n$ – взаимно н.с.в., ε и q – произвольные положительные числа. Тогда

$$\sup_x\left|\overline{F_n}(x) - \Phi(x)\right| \le \frac{C}{q} + \alpha_n + \sqrt{\frac{2}{\pi}}|\beta_n| + \frac{4}{3}|\gamma_n|, \tag{14}$$

где C – некоторая абсолютная постоянная.

Теорема 12. Пусть выполнены условия теоремы 11 и пусть существует такая постоянная $h<1$, что

$$\gamma_n \le h. \tag{15}$$

Тогда существуют такие постоянные $A_n > 0$, C_n и константа $H > 0$, зависящая только от h, что

$$\sup_x \left| P\left(\frac{1}{A_n} \sum_{j=1}^{n} X_j - C_n < x \right) - \Phi(x) \right| \le H\varepsilon + \alpha_n . \tag{15}$$

Теперь сформулируем наш последний результат который обобщает результат Розена для сумм случайных величин на сумму случайных векторов. Сначала приводим результат Розена.

Пусть $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ – последовательность независимых случайных величин с общим невырожденным распределением $F(x)$. Пусть $F_n(x)$ функция распределения суммы

$$S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$$

I_n — интервал на оси x, а $l(I_n)$ — его длина. C — константа, независимая от n и I_n.

Теорема 13.

(a) Если $l(I_n) \le n^p$, $0 < p < \frac{1}{2}$, то

$$P(S_n \in I_n) \le C \Big/ n^{\frac{1}{2}-p}$$

(b) Если $l(I_n) \le \varepsilon\sqrt{n}$, $\varepsilon > 0$, то

$$P(S_n \in I_n) \le \varepsilon\big(C + \xi(\varepsilon, n)\big),$$

где $\lim\limits_{n\to\infty} \xi(\varepsilon, n) = 0$ при любом $\varepsilon > 0$;

(c) Если $l(I_n) \le M$, то

$$P(S_n \in I_n) \le \frac{C}{n^{\frac{1}{2}}}.$$

(d) $\max\limits_a P(S_n = a) \le C/\sqrt{n}$.

Теперь приводим наш результат. Пусть $X_1, X_2, ..., X_n ...$ – последовательность независимых случайных s -мерных векторов с общей вероятностей функцией $P, \|x\| = \max(|x_1|, ..., |x_s|),$ - норма вектора $x = (x_1, x_2, ..., x_s) \in R^s$.

Положим

$$S_n = X_1 + ... + X_n$$

$$a_i = \int\limits_{|x| \le N} P(dx), \qquad a(a_1, ... a_s),$$

$$m = \int\limits_{\|x-a\| \le N} P(dx), \qquad Q(t) = \int\limits_{\|x-a\| \le N} (t, x-a)^2 P(dx)$$

$N -$ некоторое положительное число.

Теорема 14. Предположим, что I_n есть n-мерный шар в с радиусом r_n. Пусть существует конечное $N > 0$ такое, что $m > 0$ и квадратичная форма $Q(t)$ положительно определена.

(a) Если $r_n \le n^{\alpha}$ $\left(0 < \alpha < \frac{1}{2}\right)$, то

$$P(S_n \in I_n) \le \frac{C}{n^{s\left(\frac{1}{2} - a\right)}};$$

где C означает не зависящую от n константу не всегда одну и тут же.

(b) Если $r_n \le \varepsilon \sqrt{n}$, то

$$P(S_n \in I_n) \le \varepsilon^s (C + \eta(\varepsilon, n));$$

где $\lim\limits_{n \to \infty} \eta(\varepsilon, n) = 0$ при любом $\varepsilon > 0$;

(c) Если $r_n \le C$, то

$$P(S_n \in I_n) \le \frac{C}{n^{s/2}}.$$

(d) $\max\limits_{b} P(S_n = b) \le \frac{C}{n^{s/2}}$.

Заключение

В целом, полученные результаты позволяют сделать заключение о достижении цели исследования диссертации. Она посвящена решению некоторых задач теории суммирования независимых случайных величин.

Все основные результаты являются новыми и в совокупности вносят определенный вклад в теорию суммирования. Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Доказано, что стремление числовой характеристики Ибрагимова-Осипова к нулю является необходимым и достаточным условием справедливости предельной теоремы типа Линдеберга-Феллера для распределения суммы независимых случайных величин;
2. Доказана теорема Феллера о справедливости ЦПТ без условий на порядок моментов;
3. Доказано, что обобщенное условие Ротаря является необходимым и достаточным условием справедливости ЦПТ для серии независимых случайных величин;
4. Доказано неравенство Берри – Эссеена для остаточного члена в ЦПТ при наличии дробного момента порядка $2+\delta$ $\left(0<\delta<1\right)$;
5. Установлены новые оценки скорости сходимости в ЦПТ без моментных условий;
6. Получены асимптотические оценки для распределения вероятностей суммы независимых случайных векторов.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc. 03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

SIROJITDINOV ABDULXAMID ALIMOVICH

SOME LIMIT THEOREMS FOR DISTRIBUTIONS OF SUMS OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES

01.01.05 – Theory of probability and mathematical statistics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent – 2025

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number № B.2022.4.PhD/FM796

Dissertation has been prepared at National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website of Scientific Council (http://ik-fizmat.nuu.uz/) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (http://www.ziyonet.uz/).

Scientific supervisor:	**Formanov Shakir Kasimovich** Doctor of Physical and mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Xamdamov Isakjan Mamasaliyevich** Doctor of physical and mathematical sciences, Professor
	Mamurov Igamnazar Narbayevich Candidate of physical and mathematical sciences, Docent
Leading organization:	**Namangan engineering-construction institute**

Defense will take place on "15" april 2025 at 14⁰⁰ at the meeting of Scientific Council DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 at National University of Uzbekistan. (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 53 21, Fax: (+998 71) 246 53 21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at National University of Uzbekistan (registered for No. 45). (Address: 4 University str., Almazar district, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Tel.: (+998 71) 246 02 24).

Abstract of dissertation sent out on "1" april 202_.
(Mailing report No. 2 on "1" april 202_).

A.Sadullaev
Deputy chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

R.M. Juraev
Scientific secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees,
PhD in Math. and Physics

O.Sh.Sharipov
Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the study is to establish accurate estimates of the Lindeberg and Rotary characteristics for the difference between the distribution of the sum of independent random variables and the standard normal distribution.

The object of study are the sums of independent random variables and sums of random vectors.

Scientific novelty of the research work is as follows:

– a limit theorem of the type Lindeberg–Feller in the CLT for sums of independent random variables was proved;
– new estimates of the rate of convergence in the CLT without moment conditions have been established;
– a new generalized numerical characteristic Rotar for validity of the central limit theorem for a sequence of series of independent random variables;
– asymptotic estimates of the distributions of sums of independent random vectors are obtained.

Implementation of the research results. The results obtained in the thesis were used in the following research projects:

1. The obtained convergence rates in the central limit theorem are applied in a fundamental scientific project OT-F4-40 “Investigations of asymptotic properties of integral empirical processes indexed by the class of measurable functions”. As a result, the unbiasedness and consistency of the indexed integral empirical processes are proved.

2. Methods of proving the Lindeberg-Feller type theorem in the CLT were used in the project OT-F4-88 “Investigations of direct and inverse problems for equations of mixed type of second and higher orders”. The application of this result allowed to prove the unique solvability of local and nonlocal boundary value problems for second-order partial differential equations.

The structure and volume of the dissertation.

The dissertation consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the dissertation is 100 pages.

ЭЪЛОН ҚИЛИНГАН ИШЛАР РЎЙХАТИ
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (I часть; I part)

1. Formanov Sh.K., Sirojitdinov A.A. On new versions of the Lindeberg-Feller’s limit theorem // Elsiver, Transactions of A.Razmadze Mathematical Institute, volume 173, issue 2, 2019, 31-38 pp. (**Scopus, IF=0,5)**

2. Formanov Sh.K., Sirojitdinov A.A., Khusainova B.B. On a Rotar generalized condition and the central limit theorem // Trans Natl. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci. Mathematics, 41 (1), 54-60 (2021). (**Scopus, IF=0,23)**

3. Сирожитдинов А.А. Некоторые асимптотические оценки распределений сумм независимых случайных векторов // Бюллетень Института математики. 2019 г., № 6, стр. 37-41. **(01.00.00; №17)**
4. Форманов Ш.К., Сирожитдинов А.А., Фармонов А.Ш. Оценка точности аппроксимации в ЦПТ при существования моментов дробного порядка // Uzbek Mathematical Journal, 2021, № 1, pp.80-87. **(scopus) (01.00.00; №6)**
5. Сирожитдинов А.А. Уточнения одной теоремы Феллера // Бюллетень Института математики. 2022 г., № 5, стр. 187-193. **(01.00.00; №17)**

6. Форманов Ш.К., Сирожитдинов А.А. Хусанбоев Я.М. О центральной предельной теореме без предположений о существовании моментов // Uzbek Mathematical Journal, 2022, № 2, pp.56-65. **(scopus) (01.00.00; №6)**

7. Форманов Ш.К., Сирожитдинов А.А. Другое доказательство теоремы Эссеена об асимптотическом разложении распределения сумм независимых одинаково распределенных случайных величин // Бюллетень Института математики. 2023 г., № 1, стр. 58-63. **(01.00.00; №17)**

II bo‘lim (II часть; II Part)

8. Форманов Ш.К., Сирожитдинов А.А. Generalized options for the Rotar numerical characteristics // “XII Белорусская математическая конференция”, Минск, 22-25 ноября 2021 года, 31-32.

9. Сирожитдинов А.А. О числовых характеристиках, использующихся в центральной предельной теореме «Actual problems of stochastic analysis»

dedicated to the 80th anniversary of the birth of academician SH.K.Formanov Tashkent, February 20-21, 2021. Pp 173-174

10. Сирожитдинов А.А. «Современные проблемы теории вероятностей и математической статистики» материалы республиканской конференции Ташкент, 30 апреля-1мая 2019. P. 63-65.

11. Форманов Ш.К., Сирожитдинов А.А. Новый вариант классической предельной теоремы Линдеберга-Феллера // Международный гуманитарный научный форум. Гуманитарный чтения РГГУ: Специальный выпуск 2020 года. Международный научный круглый стол «Математические модели гуманитарных, естественнонаучных процессов: проблемы, решения, перспективы» С.5-7.

12. Sirojitdinov A., Obidov Sh., Xasanova S. Refinement of Feller's theorem. International conference "Limit theorems of probability theory and mathematical statistics", September 26-28, 2022. Tashkent.

13. Сирожитдинов А.А. О центральной предельной теореме без предположений о существовании моментов «XXI аср – интеллектуал ёшлар асри» 27- май 2022, 33-37 б. Тошкент.

14. Сирожитдинов А.А. "О центральной предельной теореме без существовании моментов" Научная конференция. «Современные проблемы стохастического анализа», посвященная 100-летию со дня рождения академика С.Х.Сираждинова. Ташкент 21- 22 сентября 2020 г.

Avtoreferat «O‘zMU Xabarlari» jurnali tahririyatida tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 2. Adadi 100 dona. Buyurtma № 15/25.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.