**FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

ORIPOV SHUKRULLO ABDUSALOMOVICH

BESSEL OPERATORI QATNASHGAN TO‘RTINCHI TARTIBLI GIPERBOLIK VA PSEVDOGIPERBOLIK TENGLAMALAR UCHUN MASALALAR

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

**FIZIKA - MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Farg‘ona – 2025

UDK: 517.95

Fizika – matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико – математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical – mathematical sciences

**FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI

ORIPOV SHUKRULLO ABDUSALOMOVICH

BESSEL OPERATORI QATNASHGAN TO‘RTINCHI TARTIBLI GIPERBOLIK VA PSEVDOGIPERBOLIK TENGLAMALAR UCHUN MASALALAR

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

**FIZIKA - MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Farg‘ona – 2025

Fizika - matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida №B 2024.2.PhD/FM1058 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Farg'ona davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida (www.fdu.uz) va «Ziyonet» Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Karimov Shaxobiddin Tuychiboyevich** fizika-matematika fanlari doktori, dotsent
Rasmiy opponentlar:	**Xasanov Anvardjan** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Ergashev Tuxtasin Gulamjanovich fizika-matematika fanlari doktori, dotsent
Yetakchi tashkilot:	**Termiz davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi Farg'ona davlat universiteti huzuridagi PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 raqamli Ilmiy kengashning 2025-yil «16» 04 soat 10:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 150100, Farg'ona shahar, Murabbiylar ko'chasi, 19-uy. Tel.: (+99873) 244-44-02, faks: (+99873) 244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

Dissertatsiya bilan Farg'ona davlat universitetining Axborot - resurs markazida tanishish mumkin (495 raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 150100, Farg'ona shahar, Murabbiylar ko'chasi, 19-uy. Tel.: (+99873) 244-44-94.

Dissertatsiya avtoreferati 2025-yil «03» 04 kuni tarqatildi.

(2025-yil «03» 04 dagi 7 raqamli reyestr bayonnomasi).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI FARG'ONA DAVLAT UNIVERSITETI

O'ZBEKISTON

Y.P.Apakov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., professor

I.U.Xaydarov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.n., dotsent

K.S.Gaziyev
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi o'rinbosari, f.-m.f.n., dotsent

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiya annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida olib borilayotgan ko‘plab amaliy masalalarni tadqiq etish differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich va chegaraviy masalalarni hal qilishga olib kelinadi. Xususan, o‘qqa nisbatan simmetrik potensiallar nazariyasi, Radon almashtirishlari va tomografiya, gazlar dinamikasi va akustika, gidrodinamikaning suyuqliklar oqimi nazariyasi, elastiklik va plastiklik jarayonlarining matematik modellari singulyar koeffitsiyentli to‘rtinchi tartibli giperbolik va psevdogiperbolik tipdagi differensial tenglamalarga keltiriladi. Bundan ko‘rinadiki, singulyar koeffitsiyentli to‘rtinchi tartibli giperbolik va psevdogiperbolik tipdagi differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich va chegaraviy masalalarni tadqiq etish yuqoridagi amaliy masalalar haqida to‘la tasavvur hosil qilgan holda, xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining dolzarb yo‘nalishlaridan biri sifatida muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

Dunyoda to‘rtinchi tartibli giperbolik va psevdogiperbolik tenglamalar uchun boshlang‘ich va chegaraviy masalalarni qo‘yish va tadqiq etish hamda ularni yechish usullarini ishlab chiqishga yo‘naltirilgan ilmiy-tadqiqot ishlari olib borilmoqda. Bu borada, bunday to‘rtinchi tartibli differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich va chegaraviy masalalarni o‘rganish bilan birga singulyar koeffitsientli, ayniqsa Bessel operatori qatnashgan to‘rtinchi tartibli giperbolik va psevdogiperbolik tenglamalar uchun boshlang‘ich va boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni tadqiq etishga alohida e’tibor berilmoqda.

Mamlakatimizda ham nazariy, ham amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan tadqiqotlar yuzasidan keng qamrovli chora-tadbirlar amalga oshirilib, muayyan natijalarga erishilmoqda. Jumladan, matematika fanlarining ustuvor yo‘nalishlari, xususan, algebra va funksional analiz, differensial tenglama va matematik fizika, dinamik tizimlar nazariyasi, geometriya va topologiya, ehtimollik nazariyasi va matematik statistika, amaliy matematika va matematik modellashtirish bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish, matematiklarning asosiy vazifalari va faoliyati sifatida belgilangan[1]. Amalga oshirilgan chora-tadbirlar natijasida bugungi kunga qadar ushbu sohalar bo‘yicha muhim ilmiy natijalar qo‘lga kiritildi. Jumladan, differensial tenglamalar yo‘nalishida Bessel operatori qatnashgan to‘rtinchi tartibli giperbolik va psevdogiperbolik tenglamalar uchun Koshi, Gursa masalalarining yechimlarini aniq ko‘rinishini topish hamda yagonaligini isbotlash alohida ahamiyatga ega.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 17-fevraldagi PQ-2789-son “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”, 2017-yil 20-apreldagi PQ-2909-son “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”, 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-

---

[1] O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017-yil 18-maydagi “O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy-tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish chora-tadbirlari to‘g‘risida” gi 292-son qarori

quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” va 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur dissertatsiya respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Singulyar koeffitsiyentli xususiy hosilali differensial tenglamalar boy tarixga ega. Birinchi marta bunday differensial tenglamalar, asosan, ikkinchi tartibli giperbolik tipdagi tenglamalar L.Eyler, B.Riman, S.Puasson va G.Darbu tomonidan singulyar koeffitsiyentlarni o‘zgarmas parametrlarining turli xil xususiy qiymatlari uchun ko‘rib chiqilgan. G.Darbu monografiyasida sirtlarning egrilik masalalarini o‘rganayotganda bunday tenglamalarni Eyler-Puason tenglamalari deb ataydi. Shuning uchun, keyinchalik ko‘plab mualliflar bunday tenglamalarni va ularning elliptik analoglarini Eyler-Puason-Darbu (EPD) tenglamalari deb atay boshladilar. A.Weinstein, E.C.Young, D.Fox, J.B.Diaz, H.F.Weinberger, E.K.Blum, D.W.Bresterslar tomonidan Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi singulyar koeffitsientlarni o‘zgarmas parametrlarining turli qiymatlari uchun tadqiq qilindi.

Singulyar koeffitsiyentlarga ega bo‘lgan xususiy hosilali differensial tenglamalar orasida singulyar Bessel operatori qatnashgan tenglamalarni alohida ta’kidlash lozim. Bessel operatorlari qatnashgan ikkinchi tartibli differensial tenglamalar bo‘yicha barcha muammolar Voronej matematigi I.A.Kipriyanov va uning shogirdlari tomonidan to‘liq o‘rganilgan. Ushbu yo‘nalish haqida batafsil ma’lumotlarni V.V.Katraxov va S.M.Sitnik hamda S.M.Sitnik va E.L.Shishkinalarning monografiyalaridan topish mumkin. Bessel operatorlari qatnashgan ikkinchi tartibli differentsial tenglamalar nazariyasi almashtirish operatorlarini qo‘llashning alohida sohasiga aylandi. Ushbu sinfning tenglamalarini tadqiq qilishning dastlabki bosqichida Sonin va Puasson juftligidan foydalanilgan. Almashtirish operatori sifatida bu operatorlar dastlab Delsart asarlarida joriy etilgan, keyin esa ularni o‘rganish Delsart va Lions asarlarida davom ettirilgan. A.K.Urinov va Sh.T.Karimov ishlarida almashtirish operatori sifatida kasr tartibli Erdeyi-Kober operatorlari qo‘llanilgan.

A.V.Bitsadze, A.M.Naxushev, M.M.Smirnov, S.A.Tersenov, I.A.Kipriyanov, R.Carroll, R.Showalter, M.B.Kapilevich, N.Radzhabov, K.B.Sabitov, S.A.Aldashev, O.A.Marichev, A.A.Kilbas, O.A.Repin, V.V.Katraxov, S.M.Sitnik, M.S.Salohiddinov, A.K.O‘rinov, M.Mirsaburov, B.Islomov, A.Xasanov, Sh.T.Karimov, T.G.Ergashev, E.T.Karimov, K.T.Karimov va boshqalar xususiy hosilali singulyar koeffitsientli differensial tenglamalar uchun turli masalalarni o‘rgandilar. Hozirda yuqori tartibli xususiy hosilali differentsial tenglamalar uchun masalalarni tadqiq etish jadal rivojlanmoqda. Jumladan, ikki o‘lchovli to‘rtinchi tartibli differensial tenglamalarni tizimli oʻrganish M.S.Salohiddinov, T.D.Joʻraev va A.Sopuev, A.M.Naxushev, M.M.Smirnov, M.M.Meredov, A.K.Urinov va ularning shogirdlari ishlarida tadqiq qilinmoqda. T.D. Joʻraev va A. Sopuevlar ishlarida ikki oʻzgaruvchili umumiy toʻrtinchi tartibli chiziqli tenglamani toʻliq sinflash va kanonik koʻrinishga keltirish masalalari oʻrganilgan. A.G.Sveshnikov, A.B.Alshin, M.O.Korpusov, Yu.D.Pletner, A.I.Kojanov, V.I.Jegalov, A.N.Mironov, E.A.Utkina va boshqalar ishlarida psevdogiperbolik Bussineska-Lyav tenglamasi uchun boshlangʻich va lokal chegaraviy masalalar yechilishini oʻrgandilar. Biroq, muhim amaliy ahamiyatga ega boʻlgan bir yoki bir nechta oʻzgaruvchilar boʻyicha Bessel operatori qatnashgan kichik hadli uchinchi va toʻrtinchi tartibli giperbolik tipdagi tenglamalar va psevdogiperbolik tenglamalar uchun masalalar deyarli oʻrganilmagan. Mazkur dissertatsiya aynan shu yoʻnalishdagi masalalarni oʻrganishga bagʻishlangan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bogʻliqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Fargʻona davlat universiteti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq “Differensial tenglamalar va unga turdosh matematik sohalarning dolzarb muammolari” dasturi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi almashtirish operatorlari va Riman usuli yordamida singulyar koeffitsiyentli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlangʻich va chegaraviy masalalarni qoʻyish va oʻrganishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari quyidagilardan iborat:

Bessel operatori qatnashgan differensial tenglamalar uchun Riman funksiyalarini qurish usulini ishlab chiqish;

vaqt oʻzgaruvchisi boʻyicha Bessel operatori qatnashgan toʻrtinchi tartibli giperbolik tenglama uchun Koshi masalasini bayon qilish va bir qiymatli yechilishini tekshirish;

fazoviy oʻzgaruvchisi boʻyicha Bessel operatori qatnashgan toʻrtinchi tartibli giperbolik tenglama uchun Koshi masalasini bayon qilish va bir qiymatli yechilishini isbotlash;

Bessel operatori qatnashgan psevdogiperbolik Bussineska-Lyav tenglamasi uchun Koshi va Gursa masalalarini tadqiq etish.

Tadqiqotning obyekti Bessel operatori qatnashgan xususiy hosilali toʻrtinchi tartibli giperbolik va psevdogiperbolik tenglamalar hisoblanadi.

Tadqiqotning predmeti Bessel operatori qatnashgan xususiy hosilali toʻrtinchi tartibli giperbolik va psevdogiperbolik tenglamalar uchun boshlangʻich va chegaraviy masalalardan iborat.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiya ishida matematik fizikaning almashtirish operatorlari usuli, maxsus funksiyalar nazariyasi va Riman usullari qoʻllanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

Bessel operatori qatnashgan differensial tenglamalar uchun almashtirish operatorlari yordamida Riman funksiyasini qurish usuli ishlab chiqilgan;

vaqt o‘zgaruvchisi bo‘yicha Bessel operatori qatnashgan to‘rtinchi tartibli giperbolik tenglama uchun topilgan Riman funksiyasidan foydalanib Koshi masalasining bir qiymatli yechilishi isbotlangan;

fazoviy o‘zgaruvchisi bo‘yicha Bessel operatori qatnashgan to‘rtinchi tartibli giperbolik tenglama uchun Koshi masalasining bir qiymatli yechilishi almashtirish operatorlari va Riman usullaridan foydalanib isbotlangan;

Bessel operatori qatnashgan psevdogiperbolik Bussineska-Lyav tenglamasi uchun Koshi va Gursa masalalarining yechimlari almashtirish operatorlari va Riman usulidan foydalanib topilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari olingan ilmiy natijalarni shunday matematik modellarga keltiriladigan jarayonlarning sifat xususiyatlarini o‘rganishga hamda qo‘yilgan masalalar yechimini sonli hisoblashga qo‘llash mumkinligidan iborat.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Matematik isbotlar almashtirish operatorlari usuli, matematik fizika, maxsus funksiyalar nazariyasi va Riman usullariga, shuningdek, matematik fikrlash va hisob-kitoblarning qat’iyligiga asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati.

Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati shundan iboratki, ishda olingan ilmiy natijalar to‘rtinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun boshlang‘ich va chegaraviy masalalar nazariyasini yanada rivojlantirish uchun asos sifatida foydalanish mumkin.

Dissertatsiya tadqiqotining amaliy ahamiyati geofizika, okeanologiya, atmosfera fizikasi, gazlar dinamikasi, gidrodinamikaning suyuqliklar oqimi nazariyasi, elastiklik va plastiklik jarayonlarini va fanning boshqa sohalariga oid jarayonlarni matematik modellashtirishda qo‘llash mumkinligi bilan belgilanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Bessel operatori qatnashgan to‘rtinchi tartibli giperbolik va psevdogiperbolik tenglamalar uchun masalalarni tadqiq qilish bo‘yicha olingan natijalar asosida:

Bessel operatori qatnashgan to‘rtinchi tartibli Bussineska-Lyav tenglamasi uchun qurilgan Riman funksiyasi hamda Koshi va Gursa masalalarining yechim formulalaridan № 23-21-10015-sonli xorijiy grantda psevdogiperbolik tenglamalar va koeffitsiyentlari maxsuslikka ega bo‘lgan differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni yechishda foydalanilgan (Rossiya Ta’lim va fan vazirligi Chelyabinsk davlat universitetining 2024-yil 8-oktyabrdagi №13-8-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, ba’zi noklassik differensial tenglamalar uchun yechimning integral ko‘rinishini topish va ularni amaliy masalalarga tatbiq qilish imkonini bergan;

koeffitsiyentlari maxsuslikka ega bo‘lgan to‘rtinchi tartibli giperbolik tipdagi tenglama va Bussineska-Lyav tenglamasi uchun boshlang‘ich va chegaraviy masalalarning yechimlarini qurish bo‘yicha olingan natijalardan “Bisingulyar masalalar va ularning tatbiqlari” nomli xorijiy ilmiy loyihada psevdogiperbolik va singulyar koeffitsiyentli differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarning yechimini qurishda foydalanilgan (O‘sh davlat universitetining 2024-yil 25-noyabrdagi №1576-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, amaliy masalalar yechimlarining integral ko‘rinishlarini topish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiyaning asosiy natijalari 7 ta xalqaro va 3 ta respublika ilmiy va ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan oʻtkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi boʻyicha 16 ta ilmiy ish e’lon qilingan boʻlib, ulardan 6 tasi ilmiy maqola, shulardan 4 tasi xorijiy ilmiy jurnallarda, 2 tasi esa Oʻzbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan mahalliy ilmiy jurnallarda chop etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar roʻyxatidan iborat. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 101 betni tashkil etadi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yoʻnalishlariga mosligi koʻrsatilgan, muammoning oʻrganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi boʻyicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning **“Bessel operatori qatnashgan xususiy hosilali tenglamalar uchun Riman funksiyasini qurish”** nomli birinchi bobida singulyar koeffitsiyentli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun Riman funksiyasini qurishning bir usuli bayon qilingan va Riman funksiyasining aniq koʻrinishlari topilgan.

1.1-paragrafda Erdeyi-Kober operatorlari hamda ularning xossalariga oid boʻlgan ba’zi ma’lumotlar keltirilgan.

1.2-paragrafda Gauss, Appell, Gumbert, Kampe-de-Ferye va ba’zi umumlashgan gipergeometrik funksiyalar va ularning xossalari haqida ayrim ma’lumotlar keltirilgan. Shuningdek, Kampe-de-Ferye gipergeometrik funksiyasining xususiy holi boʻlgan

$$K_0(a;b,c;b',c';\sigma_1,\sigma_2)=F^{1;0;0}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1; & -; & -; \\ -; & 3/2,1; & 3/2,1;\end{matrix}\ \sigma_1,\sigma_2\right]=$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}}{(b)_m(c)_m(b')_n(c')_n}\frac{\sigma_1^m}{m!}\frac{\sigma_2^n}{n!}, \tag{1}$$

funksiya uchun quyidagi natijalar olingan, bu yerda a, b, c, b', c' haqiqiy sonlar boʻlib, $b, c, b', c' \neq 0,-1,-2,...,$ $(a)_n = a(a+1)\,...\,(a+n-1)$ – Poxgammer belgisi.

1-lemma. *Agar* $b,c,b',c' \neq 0,-1,-2,...,-n,...$ *boʻlsa, u holda* (1) *qator uchun quyidagi differensiallash formulalari oʻrinli:*

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_1}K_0(a;b,c;b',c';\sigma_1,\sigma_2)=\frac{a}{bc}K_0(a+1;\,b+1,\,c+1;\,b',\,c';\,\sigma_1,\,\sigma_2)\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_2}K_0(a;b,c;b',c';\sigma_1,\sigma_2)=\frac{a}{b'c'}K_0(a+1;\,b,\,c;\,b'+1,\,c'+1;\,\sigma_1,\,\sigma_2)\,,$$

$$\left(\sigma_1\frac{\partial}{\partial\sigma_1}+(b-1)\right)K_0(a;b,c;b',c';\sigma_1,\sigma_2)=(b-1)K_0(a;b-1,c;b',c';\sigma_1,\sigma_2)\,,$$

$$\left(\sigma_2\frac{\partial}{\partial\sigma_2}+(b'-1)\right)K_0(a;b,c;b',c';\sigma_1,\sigma_2)=(b'-1)K_0(a;b,c;b'-1,c';\sigma_1,\sigma_2)\,,$$

$$\left(\sigma_1\frac{\partial^2}{\partial\sigma_1^2}+b\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\right)K_0(a;b,c;b',c';\sigma_1,\sigma_2)=\frac{a}{c}K_0(a+1;\,b,\,c+1;\,b',\,c';\,\sigma_1,\,\sigma_2)\,,$$

$$\left(\sigma_2\frac{\partial^2}{\partial\sigma_2^2}+b'\frac{\partial}{\partial\sigma_2}\right)K_0(a;b,c;b',c';\sigma_1,\sigma_2)=\frac{a}{c'}K_0(a+1;\,b,\,c;\,b',\,c'+1;\,\sigma_1,\,\sigma_2)$$

$$\left(\sigma_1\frac{\partial^2}{\partial\sigma_1^2}+b\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\right)\left(\sigma_2\frac{\partial^2}{\partial\sigma_2^2}+b'\frac{\partial}{\partial\sigma_2}\right)K_0(a;b,c;b',c';\sigma_1,\sigma_2)=$$

$$=\frac{a(a+1)}{cc'}K_0(a+2;\,b,\,c+1;\,b',\,c'+1;\,\sigma_1,\,\sigma_2)\,.$$

1.3-paragraf Bessel operatori qatnashgan ikki o‘zgaruvchili xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun Riman funksiyasini qurishga bag‘ishlangan. Buning uchun quyidagi Koshi masalasi tadqiq etilgan:

Koshi masalasi.

$$u_{yy}+\frac{2\beta}{y}u_y-L^{(x)}(u)=f(x,y),\ (x,y)\in\Omega \tag{2}$$

tenglamaning

$$u(x,0)=0,\ \ u_y(x,0)=0,\ \ x\in R \tag{3}$$

birjinsli boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin, *bunda* $\beta\in R$ *bo‘lib*, $0<2\beta<1$, $L^{(x)}$ – y *ga bog‘liq bo‘lmagan, eng yuqori tartibli hosilasining koeffitsienti musbat bo‘lgan*, x *o‘zgaruvchi bo‘yicha ikkinchi tartibli chiziqli elliptik operator,* Ω *esa* $L^{(x)}$ *operator ko‘rinishiga bog‘liq bo‘lgan* $\{(2),(3)\}$ *masala yechimining aniqlanish sohasi*.

Agar $R(\xi,\eta;x,y)$ Riman funksiyasi ma’lum bo‘lsa, u holda {(2), (3)} masala yechimi

$$u(x,y)=\iint_{\Omega}R(\xi,\eta;x,y)\,f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Erdeyi-Kober almashtirish operatoridan foydalanib, (2) tenglama uchun $L^{(x)}=\partial^2/\partial x^2$ bo‘lganda qo‘yilgan Koshi masalasining Riman funksiyasi

$$R_1(x,y;\xi,s)=\frac{1}{2}(s/y)^{\beta}F(\beta,1-\beta,1;\sigma)$$

ko‘rinishda topilgan, bu yerda $\sigma=[(\xi-x)^2-(s-y)^2]/(4sy)$, $F(a,b,c;z)$– Gaussning gipergeometrik funksiyasi; $L^{(x)}=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{2\alpha}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}+\lambda^2$ hol uchun esa (bunda $\alpha,\lambda\in R$, $\alpha>0$) Riman funksiyasi

$$R_2(x,y;\xi,s)=\frac{1}{2}(\xi/x)^{\alpha}(s/y)^{\beta}B_2^{(3)}(\alpha,\beta,1-\alpha,1-\beta,1;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$$

ko‘rinishda topilgan, bu yerda $\sigma_1=-r^2/(4x\xi)$, $\sigma_2=r^2/(4ys)$, $\sigma_3=(\lambda^2r^2)/4$, $r^2=(\xi-x)^2-(s-y)^2$,

$$B_2^{(3)}(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma;x,y,z)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_m(\alpha_2)_n(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma)_{m+n+p}m!n!p!}x^my^nz^p$$

– uch o‘zgaruvchili buzilgan gipergeometrik funksiya.

Dissertatsiyaning **“Bessel operatori qatnashgan to‘rtinchi tartibli giperbolik tenglama uchun masalalar”** deb nomlangan ikkinchi bobi ikkita paragrafdan iborat bo‘lib, unda vaqt va fazoviy o‘zgaruvchilar bo‘yicha Bessel operatori qatnashgan to‘rtinchi tartibli giperbolik tenglama uchun Koshi masalasi tadqiq etilgan. Masalani yechish uchun Riman usuli hamda Riman funksiyasini qurishning almashtirish operatorlari usuli qo‘llanilgan va bu usul yordamida yechimning aniq ko‘rinishi topilgan.

2.1-paragrafda $\Omega_1=\{(x,t):\ x\in R,\, t>0\}$ sohada vaqt o‘zgaruvchisi bo‘yicha Bessel operatori qatnashgan ushbu

$$L_{\beta}^{\lambda}(u)\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2\beta}{t}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2u(x,t)-\lambda^2u(x,t)=0 \qquad (4)$$

tenglama uchun quyidagi Koshi masalasi qo‘yilgan va tadqiq etilgan, bu yerda $\beta,\,\lambda\in R$ bo‘lib, $0<\beta<1/2$.

Koshi masalasi. *Shunday* $u(x,t)\in M$ *funksiya topilsinki, u* Ω_1 *sohada* (4) *tenglamaning yechimi bo‘lib, quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:*

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\ \lim_{t\to0}t^{2\beta}u_t(x,t)=\psi_0(x),$$

$$u_{tt}(x,0)=\varphi_1(x),\ \lim_{t\to0}t^{2\beta}u_{ttt}(x,t)=\psi_1(x),\ x\in R, \qquad (5)$$

bu yerda $M\in\{u(x,t):\, u,\ t^{2\beta}u_t,\ u_{tt},\ t^{2\beta}u_{ttt}\in C(\bar{\Omega}),\ u\in C^4(\Omega)\}$, $\varphi_k(x)$, $\psi_k(x)$, $k=0,1$ *– berilgan silliq funksiyalar.*

Bu masala bo‘yicha asosiy natija quyidagi teoremada keltirilgan:

1-teorema. *Agar* $\varphi_k(x)\in C^{4-2k}(R)$, $\psi_k(x)\in C^{3-2k}(R)$, $k=0,1$ *hamda* $\varphi_k(x)$ *va* $\psi_k(x)$ *funksiyalarning mos holda barcha* $4-2k$ *va* $3-2k$, $k=0,1$ *tartibli hosilalari* $x=0$ *da nolga teng bo‘lsa, u holda ushbu*

$$u(x,t)=\gamma_1t^{1-2\beta}\int_{x-t}^{x+t}[t^2-(\xi-x)^2]^{\beta-1}\,{}_0F_3\left(\frac{1}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\beta+1}{2};\delta\right)\varphi_0(\xi)d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\gamma_1t^{1-2\beta}\int_{x-t}^{x+t}[t^2-(\xi-x)^2]^{\beta-1}\,{}_0F_3\left(\frac{3}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\beta+1}{2};\delta\right)(\xi-x)\varphi_0'(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1+2\beta}{4\beta}\gamma_1 t^{1-2\beta}\int_{x-t}^{x+t}[t^2-(\xi-x)^2]^{\beta}\,{}_0F_3\left(\frac{3}{2},\frac{\beta+1}{2},\frac{\beta+2}{2};\delta\right)\varphi_1(\xi)d\xi+$$

$$+\gamma_2\int_{x-t}^{x+t}[t^2-(\xi-x)^2]^{-\beta}\,{}_0F_3\left(\frac{1}{2},\frac{1-\beta}{2},\frac{2-\beta}{2};\delta\right)\psi_0(\xi)d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\gamma_2\int_{x-t}^{x+t}[t^2-(\xi-x)^2]^{-\beta}\,{}_0F_3\left(\frac{3}{2},\frac{1-\beta}{2},\frac{2-\beta}{2};\delta\right)(\xi-x)\psi_0'(\xi)d\xi+$$

$$+\gamma_3\int_{x-t}^{x+t}[t^2-(\xi-x)^2]^{1-\beta}\,{}_0F_3\left(\frac{3}{2},\frac{2-\beta}{2},\frac{3-\beta}{2};\delta\right)\psi_1(\xi)d\xi$$

tenglik bilan aniqlangan $u(x,t)$ *funksiya* $\{(4),\ (5)\}$ *masalaning yagona yechimi bo'ladi, bu yerda* $\delta=\frac{c}{16}[t^2-(\xi-x)^2]^2$, $\gamma_1=\frac{\Gamma(1/2+\beta)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\beta)}$, $\gamma_2=\frac{\Gamma(1/2-\beta)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(1-\beta)}$, $\gamma_3=\frac{\gamma_2(3-2\beta)}{4(1+2\beta)(1-\beta)^2}$, ${}_0F_3(a,b,c;z)$ – *umumlashgan gipergeometrik funksiya,* $\Gamma(z)$ – *Eylerning gamma-funksiyasi.*

2.2-paragrafda $\Omega_2=\{(x,y):0<y<x<+\infty\}$ sohada fazoviy o'zgaruvchisi bo'yicha Bessel operatori qatnashgan ushbu

$$L_\alpha^\lambda(u)\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{2\alpha}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2u(x,y)-\lambda^2u(x,y)=0 \qquad (6)$$

tenglama uchun quyidagi masala qo'yilgan va tadqiq etilgan, bu yerda $\alpha,\lambda\in R$ bo'lib, $\alpha>0$.

Koshi masalasi. *Shunday* $u(x,y)\in C^3(\Omega_2\cup J)\cap C^4(\Omega_2)$ *funksiya topilsinki, u* Ω_2 *sohada* (6) *tenglamaning klassik yechimi bo'lib, quyidagi*

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\ u_y(x,0)=\psi_0(x),\ u_{yy}(x,0)=\varphi_1(x),\ u_{yyy}(x,0)=\psi_1(x),\ x\ge 0 \quad (7)$$

shartlarni qanoatlantirsin, bu yerda $J=\{(x,y):y=0,\ 0\le x<+\infty\}$, $\varphi_k(x),\ \psi_k(x)$, $k=0,1$ – *berilgan silliq funksiyalar.*

Bu yerda asosiy natija quyidagi teorema ko'rinishida bayon qilingan:

2-teorema. *Agar* $\varphi_j(x)\in C^{4-2j}(R)$, $\psi_j(x)\in C^{3-2j}(R)$, $j=0,1$ *va boshlang'ich funksiyalarning barcha mos hosilalari* $x=0$ *da nolga teng bo'lsa, u holda*

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\int_{x-y}^{x+y}(s/x)^\alpha\varphi_0(s)F(\alpha,1-\alpha,1;\sigma_0)ds-$$

$$-\frac{y}{4}\int_{x-y}^{x+y}(s/x)^\alpha f_0(s)F(\alpha,1-\alpha,1;\sigma_0)ds-$$

$$-\frac{cy}{6}\int_{x-y}^{x+y}(s/x)^\alpha\varphi_0(s)H_1(x,y,s)ds+\frac{y}{4}\int_{x-y}^{x+y}(s/x)^\alpha\varphi_1(s)H_2(x,y,s)ds+$$

$$+\frac{y}{4}\frac{\partial}{\partial y}\int_{x-y}^{x+y}(s/x)^\alpha\psi_0(s)F(\alpha,1-\alpha,1;\sigma_0)ds+$$

$$+\int\limits_{x-y}^{x+y}(s/x)^{\alpha}\psi_0(s)K_1(x,y,s)ds+\int\limits_{x-y}^{x+y}(s/x)^{\alpha}\psi_1(s)K_2(x,y,s)ds$$

formula bilan aniqlangan $u(x,y)$ *funksiya* {(6), (7)} *masalaning yagona klassik yechimi bo'ladi, bu yerda*

$$H_1(x,y,s)=y^2F(\alpha,1-\alpha,1;\sigma_0)-$$

$$-3[y^2-(s-x)^2]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2)_n(3/2)_n(3/2)_n}\frac{\sigma_2^n}{n!}F(\alpha,1-\alpha,2n+2;\sigma_0)-$$

$$-\frac{3}{2}[y^2-(s-x)^2]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2)_n(5/2)_n(3/2)_n}\frac{\sigma_2^n}{n!}F(\alpha,1-\alpha,2n+2;\sigma_0)-$$

$$-\frac{c}{20}(s-x)^2[y^2-(s-x)^2]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)_n}{(3)_n(7/2)_n(3/2)_n(3/2)_n}\frac{\sigma_2^n}{n!}F(\alpha,1-\alpha,2n+2;\sigma_0)-$$

$$-\frac{2}{5}\sigma_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)_n(1)_n}{(2)_n(3)_n(7/2)_n(3/2)_n(3/2)_n}\frac{\sigma_2^n}{n!}\,{}_3F_2(\alpha,1-\alpha,2;1,2n+3;\sigma_0),$$

$$H_2(x,y,s)=F(\alpha,1-\alpha,1;\sigma_0)+$$

$$+\frac{4}{3}\sigma_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n}{(2)_n(2)_n(5/2)_n(3/2)_n}\frac{\sigma_2^n}{n!}F(\alpha,1-\alpha,2n+3;\sigma_0),$$

$$K_1(x,y,s)=\frac{3}{4}F(\alpha,1-\alpha,1;\sigma_0)+$$

$$+\frac{7}{3}\sigma_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n}{(2)_n(2)_n(3/2)_n(5/2)_n}\frac{\sigma_2^n}{n!}F(\alpha,1-\alpha,2n+3;\sigma_0)-$$

$$-\frac{4}{3}\sigma_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n}{(2)_n(2)_n(3/2)_n(5/2)_n}\frac{\sigma_2^n}{n!}\,{}_3F_2(\alpha,1-\alpha,2;1,2n+3;\sigma_0)+$$

$$+\frac{c}{12}[2(s-x)^2-y^2][(s-x)^2-y^2]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n}{(2)_n(3/2)_n(5/2)_n}\frac{\sigma_2^n}{n!}F(\alpha,1-\alpha,2n+2;\sigma_0),$$

$$K_2(x,y,s)=\frac{1}{8}[y^2-(s-x)^2]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1)_n(3/2)_n(3/2)_n}\frac{\sigma_2^n}{n!}F(\alpha,1-\alpha,2n+2;\sigma_0),$$

$$\sigma_0=[y^2-(x-s)^2]/(4xs),\qquad \sigma_1=(c/16)(\eta^2-y^2)^2,\qquad \sigma_2=(c/16)[y^2-(s-x)^2]^2,$$

$$f_0(x)=\varphi_0''(x)+\frac{2\alpha}{x}\varphi_0'(x).$$

Dissertatsiyaning uchinchi bobi **"Bessel operatori qatnashgan to'rtinchi tartibli psevdogiperbolik tenglama uchun masalalar"** deb nomlangan bo'lib, u ikkita paragrafdan iborat. Bu bobda Bessel operatori qatnashgan Bussineska-Lyav tenglamasi uchun Gursa va Koshi masalalari almashtirish operatori hamda Riman usuli yordamida yechilgan.

3.1-paragrafda $\Omega_3=\{(x,y):0<x<l,\ 0<y<h\}$ sohada

$$L_\alpha(u)=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x}-u\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=0 \qquad (8)$$

tenglama uchun quyidagi Gursa masalasi o‘rganilgan, bu yerda $\alpha \in R$ bo‘lib, $0<\alpha<1/2$.

Gursa masalasi (*G* masala). Ω_3 *sohada* (8) *tenglamaning shunday yechimi topilsinki, u quyidagi chegaraviy shartlarni qanoatlantirsin*:

$$u(x,0)=\psi_1(x), \quad u_y(x,0)=\psi_2(x), \quad 0\le x\le l; \tag{9}$$

$$u(0,y)=\varphi_1(y), \quad \lim_{x\to 0} x^{2\alpha}u_x(x,y)=\varphi_2(y), \quad 0\le y\le h, \tag{10}$$

bu yerda $\psi_k(x), \varphi_k(y), (k=1,2)$ *berilgan silliq funksiyalar bo‘lib*, $\psi_1(0)=\varphi_1(0)$, $\psi_2(0)=\varphi_1'(0)$ *tengliklar bajariladi*.

Dastlab, {(8)-(10)} masala $\varphi_2(y)=0$ bo‘lgan holda qaralgan va bu masalaning yechimi quyidagi ko‘rinishda topilgan:

$$u_1(x,y)=\psi_1(x)\cos y+\psi_2(x)\sin y+\varphi_1(y)\bar{I}_{\alpha-1/2}(x)-$$

$$-\varphi_1(0)K_0\left(1;\alpha+\frac{1}{2},1;\frac{1}{2},1;\frac{x^2}{4},-\frac{y^2}{4}\right)-\varphi_1'(0)yK_0\left(1;\alpha+\frac{1}{2},1;\frac{3}{2},1;\frac{x^2}{4},-\frac{y^2}{4}\right)+$$

$$+\gamma_1 x^2\int_0^y K_0\left(2;\alpha+\frac{3}{2},2;\frac{3}{2},2;\frac{x^2}{4},-\frac{(\eta-y)^2}{4}\right)(\eta-y)\varphi_1(\eta)d\eta-$$

$$-\frac{y^2}{2}\int_0^x (t/x)^\alpha (x-t)\Phi_1(x,y,t)\psi_1(t)dt-\frac{y^3}{6}\int_0^x (t/x)^\alpha (x-t)\Phi_2(x,y,t)\psi_2(t)dt, \tag{11}$$

bu yerda $\gamma_1=1/[2(2\alpha+1)]$, $\bar{I}_\nu(x)=\Gamma(\nu+1)(x/2)^{-\nu}I_\nu(x)$ – mavhum argumentli Bessel-Klifford funksiyasi, $K_0(a;b,c;b',c';\sigma_1,\sigma_2)$ esa (1) tenglik bilan aniqlangan gipergeometrik funksiya,

$$\Phi_1(x,y,t)=\sum_{m,n,k=0}^{\infty}\frac{(2)_{m+n}}{(3/2)_m(2)_m(3/2)_n(2)_n}\frac{\omega_1^m}{m!}\frac{\omega_2^n}{n!}F(\alpha,1-\alpha,m+3/2;\omega_3),$$

$$\Phi_2(x,y,t)=\sum_{m,n,k=0}^{\infty}\frac{(2)_{m+n}}{(3/2)_m(2)_m(5/2)_n(2)_n}\frac{\omega_1^m}{m!}\frac{\omega_2^n}{n!}F(\alpha,1-\alpha,m+3/2;\omega_3),$$

$$\omega_1=\frac{(x-t)^2}{4},\ \omega_2=-\frac{y^2}{4}\quad \omega_3=-\frac{(x-t)^2}{4xt}.$$

(8) tenglamaning xossalaridan va (11) formuladan foydalanib, (8) tenglamaning $u(x,0)=0$, $u_y(x,0)=0$, $u(0,y)=0$, $\lim\limits_{x\to 0} x^{2\alpha}u_x(x,y)=\varphi_2(y)$ shartlarni qanoatlantiruvchi $u_2(x,y)$ yechimi formulasi quyidagicha topilgan:

$$u_1(x,y)=\frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\varphi_2(y)\bar{I}_{1/2-\alpha}(x)+\tilde{\gamma}_1 x^{3-2\alpha}\int_0^y K_0\left(2;\frac{5}{2}-\alpha,2;\frac{3}{2},2;\frac{x^2}{4},\sigma_2\right)(\eta-y)\varphi_2(\eta)d\eta,$$

bu yerda $\tilde{\gamma}_1=1/[2(3-2\alpha)(1-2\alpha)]$.

3-teorema. *Aytaylik,* $0<\alpha<1/2$, $\psi_k(x)\in C[0,l]\cap C^2(0,l)$, $\varphi_k(y)\in C[0,h]\cap C^2(0,h)$, ($k=1,2$) *bo‘lsin, bunda* $\varphi_2'(y)$ *funksiya* $x\to 0$ da 2α *dan kichik tartibli maxsuslikka ega bo‘lishi mumkin. U holda* $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$ *funksiya G masalaning yagona yechimi bo‘ladi.*

3.2-paragrafda quyidagi masala tadqiq qilingan.

Koshi masalasi. $\Omega_4=\{(x,y):0<x<y\}$ *sohada*

$$L_\alpha(u)\equiv\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x}-u\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,y) \qquad (12)$$

tenglamaning

$$u\big|_{y=x}=\varphi_0(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=x}=\varphi_1(x),\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{y=x}=\varphi_2(x),\ \left.\frac{\partial^3 u}{\partial n^3}\right|_{y=x}=\varphi_3(x),\ x>0, \qquad (13)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi topilsin, bu yerda $\alpha\in R$ *bo'lib*, $0<\alpha<1/2$, $\varphi_k(x)$ $(k=\overline{0,3})$, $f(x,y)$ *berilgan funksiyalar*, n *- tashqi birlik normal vektor*.

1.3-paragrafda ishlab chiqilgan usul yordamida {(12), (13)} masalaning Riman funksiyasi topilgan bo'lib, u quyidagi ko'rinishga ega:

$$\upsilon(x,y;\xi,\eta)=(\xi-x)(\eta-y)\left(\frac{\xi}{x}\right)^\alpha\times$$

$$\times\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(1)_{m+n}}{(3/2)_m(1)_m(3/2)_n(1)_n}\frac{\sigma_1^m}{m!}\frac{\sigma_2^n}{n!}F\left(\alpha,1-\alpha,m+\frac{3}{2};\sigma_3\right), \qquad (14)$$

bu yerda $\sigma_1=(1/4)(\xi-x)^2$, $\sigma_2=-(1/4)(\eta-y)^2$, $\sigma_3=-(\xi-x)^2/(4x\xi)$.

{(12), (13)} masalaning yechimi (14) Riman funksiyasi yordamida quyidagi ko'rinishda topilgan:

$$u(x,y)=\left[1+\frac{\alpha}{y}(x-y)\right]\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha,\frac{3}{2};\varpi_1,\varpi_2\right)\varphi_0(y)+$$

$$+\frac{4\varpi_2}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha,\frac{5}{2};\varpi_1,\varpi_2\right)\varphi_0(y)+$$

$$+\frac{2\alpha(1-\alpha)\varpi_1}{3}\frac{x+y}{y}\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha\Xi_2\left(1+\alpha,2-\alpha,\frac{5}{2};\varpi_1,\varpi_2\right)\varphi_0(y)+$$

$$+(x-y)\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha,\frac{3}{2};\varpi_1,\varpi_2\right)\Phi_1(y)+$$

$$+\int_x^y(\xi-x)\left(\frac{\xi}{x}\right)^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(1-\alpha)_k}{(3/2)_k}\frac{\sigma_3^k}{k!}K_0\left(1;\frac{3}{2}+k,1;\frac{1}{2},1;\sigma_1,\mu\right)\Phi_2(\xi)\,d\xi-$$

$$-\int_x^y(\xi-x)(\xi-y)\left(\frac{\xi}{x}\right)^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(1-\alpha)_k}{(3/2)_k}\frac{\sigma_3^k}{k!}K_0\left(1;\frac{3}{2}+k,1;\frac{3}{2},1;\sigma_1,\mu\right)\Phi_3(\xi)\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{6}\int_x^y(\xi-x)^3(\xi-y)\left(\frac{\xi}{x}\right)^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(1-\alpha)_k}{(5/2)_k}\frac{\sigma_3^k}{k!}K_0\left(2;\frac{5}{2}+k,2;\frac{3}{2},2;\sigma_1,\mu\right)\Phi_4(\xi)-$$

$$-\iint_{\Omega_1}(\xi-x)(\eta-y)\left(\frac{\xi}{x}\right)^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(1-\alpha)_k}{(3/2)_k}\frac{\sigma_3^k}{k!}K_0\left(1;\frac{3}{2}+k,1;\frac{3}{2},1;\sigma_1,\sigma_2\right)f(\xi,\eta)\,d\xi d\eta, \qquad (15)$$

bu yerda $\mu=-\dfrac{(\xi-y)^2}{4}$, $\varpi_1=-\dfrac{(y-x)^2}{4xy}$, $\varpi_2=\dfrac{(y-x)^2}{4}$,

$$\Phi_1(\xi)=\frac{1}{2}\left[\sqrt{2}\varphi_1(\xi)+\varphi_0'(\xi)\right],$$

$$\Phi_2(\xi)=\frac{1}{4}\left[\varphi_0''(\xi)+2\sqrt{2}\varphi_1'(\xi)+2\varphi_2(\xi)+4\varphi_0(\xi)\right]+\frac{\alpha}{\xi}\left[\sqrt{2}\varphi_1(\xi)+\varphi_0'(\xi)\right],$$

$$\Phi_3(\xi)=\frac{1}{4}\left[\varphi_0'''(\xi)-2\varphi_0'(\xi)+2\sqrt{2}\varphi_1(\xi)+\sqrt{2}\varphi_1'(\xi)-2\varphi_2'(\xi)-2\sqrt{2}\varphi_3(\xi)\right]+$$

$$+\frac{\alpha}{2\xi}\left[\varphi_0''(\xi)-2\varphi_2(\xi)\right],$$

$$\Phi_4(\xi)=\sqrt{2}\varphi_1(\xi)+\varphi_0'(\xi)+\frac{2\alpha}{\xi}\varphi_0(\xi).$$

Quyidagi teorema o‘rinli:

4-teorema. *Aytaylik,* $\varphi_j(x)\in C^{3-j}(R^+)$, $j=\overline{0,3}$ *va boshlang‘ich funksiyalarning barcha mos hosilalari* $x=0$ *da nolga teng bo‘lsa, u holda* (15) *tenglik bilan aniqlangan* $u(x,y)$ *funksiya* {(12), (13)} *Koshi masalasining yagona yechimi bo‘ladi*.

XULOSA

Dissertatsiya ishi Bessel operatori qatnashgan to‘rtinchi tartibli giperbolik va psevdogiperbolik tenglamalar uchun boshlang‘ich va chegaraviy masalalarni qo‘yish va tadqiq etishga bag‘ishlangan.

Tadqiqot natijalari quyidagicha:

1. Bessel operatori qatnashgan xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun Riman funksiyalarini qurish usuli ishlab chiqilgan.
2. Vaqt o‘zgaruvchisi bo‘yicha ta’sir qiluvchi Bessel operatori qatnashgan to‘rtinchi tartibli giperbolik tenglama uchun Koshi masalasi yechimining formulasi almashtirish operatorlari va Riman usuli yordamida topilgan.
3. Almashtirish operatorlari va Riman usulidan foydalanib, fazoviy o‘zgaruvchisi bo‘yicha ta’sir qiluvchi Bessel operatori qatnashgan to‘rtinchi tartibli giperbolik tenglama uchun Koshi masalasi yechimining formulasi topilgan.
4. Almashtirish operatorlari va Riman usulidan foydalanib, Bessel operatori qatnashgan Bussineska-Lyav tenglamasi uchun Gursa masalasi yechimining integral ko‘rinishi topilgan.
5. Bessel operatori qatnashgan bir jinsli bo‘lmagan Bussineska-Lyav tenglamasi uchun Riman funksiyasi qurilgan va bu funksiya yordamida Koshi masalasi yechimining formulasi topilgan.

Dissertatsiya ishida olingan natijalar va o‘rganilgan masalalardan Bessel operatori qatnashgan xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasini yanada rivojlantirish uchun foydalanish mumkin.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ ФЕРГАНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

ФЕРГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ОРИПОВ ШУКРУЛЛО АБДУСАЛОМОВИЧ

ЗАДАЧИ ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ И ПСЕВДОГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ОПЕРАТОРОМ БЕССЕЛЯ

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Фергана – 2025

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико – математическим наукам зарегистрирована в Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за №B 2024.2.PhD/FM1058.

Диссертация выполнена в Ферганском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб – странице Научного совета (www.fdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Каримов Шахобиддин Туйчибоевич** доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Хасанов Анварджан** доктор физико-математических наук, профессор
	Эргашев Тухтасин Гуламжанович доктор физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Термезский государственный университет**

Защита диссертации состоится «16» 04 2025 года в 10:00 часов на заседании Научного совета PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 при Ферганском государственном университете. (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, дом 19. Тел: (+99873) 244-44-02, факс: (+99873) 244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно–ресурсном центре Ферганского государственного университета (зарегистрирована за №495). (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, дом 19). Тел.: (+99873) 244-44-94.

Автореферат диссертации разослан «03» 04 2025 года.
(протокол рассылки №7 от «03» 04 2025 года).

Ю.П.Апаков
Председатель научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф-м.н., профессор

И.У.Хайдаров
Ученый секретарь научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф-м.н., доцент

К.С.Газиев
Заместитель председателя научного семинара при научном совете по присуждению ученых степеней, к.ф-м.н., доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие практические исследования, проводимые в мировом масштабе, приводят к решению начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений. В частности, математические модели теории осесимметрического потенциала, преобразованию Радона и томографии, газодинамики и акустики, теории струй в гидродинамике, процессов упругости и пластичности сводятся к гиперболическим и псевдогиперболическим дифференциальным уравнениям четвертого порядка с сингулярными коэффициентами. Отсюда следует, что исследование начальных и краевых задач для гиперболических и псевдогиперболических дифференциальных уравнений четвертого порядка с сингулярными коэффициентами, как одно из современных направлений теории уравнений в частных производных, является актуальным.

В мире ведутся научно-исследовательские работы, направленные на постановку и изучение начальных и краевых задач для гиперболических и псевдогиперболических уравнений четвертого порядка, а также на разработку методов их решения. В связи с этим особое внимание уделяется не только исследованию начальных и краевых задач для таких дифференциальных уравнений четвертого порядка, но и изучению начальных и начально-краевых задач для гиперболических и псевдогиперболических уравнений четвертого порядка с сингулярными коэффициентами, особенно с оператором Бесселя.

В нашей Республике особое внимание уделяется фундаментальным исследованиям, которые имеют как теоретическое, так и практическое значение. В том числе, проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям математических наук, особенно, по алгебре и функциональному анализу, по дифференциальным уравнениям и математической физике, по теории динамических систем, по геометрии и топологии, по теории вероятностей и математической статистике, по прикладной математике и математическому моделированию определено как основные задачи и направления деятельности математиков[2]. К настоящему времени в этих областях достигнуты важные научные результаты. В этом направлении особое значение приобретает нахождение точного представления решения и доказательство единственности задач Коши и Гурса для гиперболических и псевдогиперболических уравнений четвертого порядка с оператором Бесселя.

Проблема исследования настоящей диссертации находится в русле задач, обозначенных в Постановлениях Президента Республики Узбекистан ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии Наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего

[2] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года № 292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан»

образования», ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии Наук Республики Узбекистан», ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Дифференциальные уравнения в частных производных с сингулярными коэффициентами имеют богатую историю. Впервые такие дифференциальные уравнения, в основном гиперболического типа второго порядка, рассматривали Л.Эйлер, Б.Риман, С.Пуассон и Г.Дарбу при различных частных значениях постоянных параметров сингулярности. При исследовании вопросов кривизны поверхностей в монографии Г.Дарбу, такие уравнения названы уравнениями Эйлера-Пуассона. Поэтому впоследствии многие авторы стали называть такие уравнения и их эллиптические аналоги - уравнениями Эйлера-Пуассона-Дарбу (ЭПД). В работах A.Weinstein, E.C.Young, D.Fox, J.B.Diaz, H.F.Weinberger, E.K.Blum, D.W.Bresters, исследованы единственность и существование решения задача Коши при различных значениях параметров сингулярности.

Среди дифференциальных уравнений с частными производными с особенностями в коэффициентах, особо отметим уравнения с операторами Бесселя. Наиболее полно весь круг вопросов для дифференциальных уравнений второго порядка с оператором Бесселя был изучен воронежским математиком И.А.Киприяновым и его учениками. Более подробную информацию об этом направлении можно найти в монографиях В.В.Катрахова и С.М.Ситника, С.М.Ситника и Э.Л.Шишкиной. Отдельной областью применения операторов преобразования (ОП) стала теория дифференциальных уравнений второго порядка с оператором Бесселя. На первоначальном этапе исследований уравнений этого класса применялась пара известных ОП Сонина и Пуассона. Как ОП эти операторы впервые были введены в работе Жана Дельсарта, а затем их изучение продолжилось в работах Дельсарта и Лионса. В работах А.К.Уринова и Ш.Т.Каримова в качестве ОП применялись операторы Эрдейи-Кобера дробного порядка.

В работах А.В.Бицадзе, А.М.Нахушева, М.М.Смирнова, С.А.Терсенова, И.А.Киприянова, R.Carroll, R.Showalter, М.Б.Капилевича, Н.Раджабова, К.Б.Сабитова, С.А.Алдашева, О.А.Маричева, А.А.Килбаса, О.А.Репина, В.В.Катрахова, С.М.Ситника, М.С.Салахитдинова, А.К.Уринова, М.Мирсабурова, Б.Исломова, А.Хасанова, Ш.Т.Каримова, Т.Г.Эргашева, Э.Т.Каримова, К.Т.Каримова и других также исследованы различные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными с особенностями в коэффициентах. В настоящее время исследования задач для уравнений в частных производных высших порядков быстро развиваются. Например, систематическое изучение двумерных уравнений четвертого порядка рассматривалось в работах М.С.Салахитдинова, Т.Д.Джураева и А.Сопуева, А.М.Нахушева, М.М.Смирнова, М.М.Мередова, А.К.Уринова и их учеников. В работах Т.Д.Джураева и А.Сопуева исследованы вопросы полной классификации и приведения к каноническому виду общего линейного уравнения четвертого порядков с двумя независимыми переменными. В работах А.Г.Свешникова, А.Б.Альшина, М.О.Корпусова, Ю.Д.Плетнера, А.И.Кожанова, В.И.Жегалова, А.Н.Миронова, Е.А.Уткиной и других были исследованы вопросы разрешимости начальных и локальных краевых задач для псевдогиперболического уравнения Буссинеска-Лява. Однако, задачи, имеющие очень важное прикладное значение для уравнений гиперболического типа с младшими коэффициентами и псевдогиперболических уравнений третьего и четвертого порядка в случае, когда оператор Бесселя действует по одной или нескольким переменным, почти не исследованы. Данная диссертация посвящена изучению задач в этом направлении.

Связь темы диссертации с научно – исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в рамках темы «Актуальные проблемы дифференциальных уравнений и родственных разделов математики» плана научно – исследовательских работ Ферганского государственного университета.

Целью исследования является постановка и решение начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами с применением операторов преобразования и метода Римана.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

разработка методов построения функции Римана для уравнений в частных производных с оператором Бесселя;

постановка задачи Коши для гиперболического уравнения четвертого порядка с оператором Бесселя, действующим по временной переменной и исследование ее однозначной разрешимости;

доказательство однозначной разрешимости задачи Коши для гиперболического уравнения четвертого порядка с оператором Бесселя, действующим по пространственным переменным;

исследования задач Коши и Гурса для псевдогиперболического уравнения Буссинеска–Лява с оператором Бесселя.

Объектом исследования являются гиперболические и псевдогиперболические уравнения в частных производных четвертого порядка с оператором Бесселя.

Предмет исследования. Начальные и граничные задачи для гиперболических и псевдогиперболических уравнений в частных производных четвертого порядка с оператором Бесселя.

Методы исследования. В диссертационной работе использованы методы операторов преобразования математической физики, методы теории специальных функций и метод Римана.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

разработан метод построения функция Римана для дифференциальных уравнений с оператором Бесселя с использованием операторов преобразования;

доказана однозначная разрешимость задачи Коши с использованием функции Римана, найденной для гиперболического уравнения четвертого порядка с оператором Бесселя по временной переменной;

однозначная разрешимость задачи Коши для гиперболического уравнения четвертого порядка с оператором Бесселя, действующим по пространственным переменным, доказана методом Римана;

методом операторов преобразования и методом Римана найдены формулы решения задач Коши и Гурса для псевдогиперболического уравнения Буссинеска-Лява с оператором Бесселя.

Практические результаты исследования состоят в применении полученных научных результатов для изучения качественных характеристик процессов, приводящих к математическим моделям и для численного расчета решения задач.

Достоверность результатов исследования. Математические доказательства основаны на методе операторов преобразования, математической физики, теории специальных функций и методе Римана, а также основаны на строгости математических рассуждений и вычислений.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования заключается в том, что полученные в работе научные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития теории начальных и краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных четвертого порядка с сингулярными коэффициентами.

Практическая значимость диссертационного исследования определяется возможностью его применения при математическом моделировании геофизики, океанологии, физики атмосферы, газовой динамики, теории течения жидкости, гидродинамики, процессов упругости и пластичности, а также процессов, связанных с другими областями науки.

Внедрение результатов исследования.

Полученные результаты по исследованию задач для гиперболических и псевдогиперболических уравнений четвертого порядка с оператором Бесселя были внедрены в следующих научно-исследовательских проектах:

результаты исследования задач Коши и Гурса для уравнения Буссинеска-Лява четвертого порядка с оператором Бесселя и построенная функция Римана, для такого уравнения были использованы при решении краевых задач для псевдогиперболических уравнений и дифференциальных уравнений с особенностями в коэффициентах в зарубежном гранте № 23-21-10015 (Челябинского государственного университета Минобрнауки России, справка № 13-8 от 8 октября 2024 года). Применение этих результатов позволило построить интегральное представление решений некоторых неклассических дифференциальных уравнений и показать их применение в прикладных задачах;

результаты по построению явных решений начальных и краевых задач для уравнения гиперболического типа четвертого порядка и уравнения Буссинеска-Лява с особенностями в коэффициентах были использованы при построении решения задач для псевдогиперболических уравнений и дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами в зарубежном научном проекте на тему «Бисингулярные задачи и их приложения» (Ошский государственный университет, справка №1576 от 25 ноября 2024 года). Применение этих результатов дало возможность построить интегральные представления решения прикладных задач.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации обсуждались на 7 международных и 3 республиканских научных и научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 16 научных работ, в том числе – 6 научных статей, из них 4 опубликованы в зарубежных научных журналах, 2 опубликованы в отечественных научных журналах, рекомендованных к публикации основных научных результатов докторских диссертаций Высшей Аттестационной Комиссии Республики Узбекистан.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объём диссертации составляет 101 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность и необходимость темы диссертации, освещается совместимость исследования с приоритетными направлениями развития науки и техники республики, указывается уровень изученности проблемы, цель, описываются задачи, объект и предмет исследования, описываются научная новизна и практические результаты исследования, раскрывается теоретическая и практическая значимость полученных результатов, информация о внедрении результатов исследования, сведения об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Построение функции Римана для уравнений в частных производных с оператором Бесселя»**, описан метод построения функции Римана для дифференциальных уравнений с сингулярными коэффициентами и найдены функции Римана в явном виде.

В параграфе 1.1 даются некоторые сведения об операторах Эрдейи-Кобера и их свойствах.

В параграфе 1.2 приведены некоторые сведения о функциях Гаусса, Аппеля, Гумберта, Кампе-де-Ферье и о некоторых обобщенных гипергеометрических функциях и их свойствах. Также были получены следующие результаты для функции

$$K_0(a;b,c;b',c';\sigma_1,\sigma_2)=F^{1;0;0}_{0;2;2}\left[\begin{matrix}1; & -; & -; \\ -; & 3/2,1; & 3/2,1;\end{matrix}\ \sigma_1,\sigma_2\right]=$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(a)_{m+n}}{(b)_m(c)_m(b')_n(c')_n}\frac{\sigma_1^m}{m!}\frac{\sigma_2^n}{n!},\tag{1}$$

которая является частным случаем гипергеометрической функции Кампе-де-Ферье, где a, b, c, b', c' действительные числа, причем $b, c, b', c' \neq 0,-1,-2,\ldots$, $(a)_n = a(a+1)\ldots(a+n-1)$ – символ Похгаммера.

Лемма 1. *Если* $b, c, b', c' \neq 0, -1, -2,\ldots, -n,\ldots$, *то для ряда* (1) *справедливы следующие формулы дифференцирования*

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_1}K_0(a;b,c;b',c';\sigma_1,\sigma_2)=\frac{a}{bc}K_0(a+1;\,b+1,\,c+1;\,b',\,c';\,\sigma_1,\,\sigma_2),$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma_2}K_0(a;b,c;b',c';\sigma_1,\sigma_2)=\frac{a}{b'c'}K_0(a+1;\,b,\,c;\,b'+1,\,c'+1;\,\sigma_1,\,\sigma_2),$$

$$\left(\sigma_1\frac{\partial}{\partial\sigma_1}+(b-1)\right)K_0(a;b,c;b',c';\sigma_1,\sigma_2)=(b-1)K_0(a;b-1,c;b',c';\sigma_1,\sigma_2),$$

$$\left(\sigma_2\frac{\partial}{\partial\sigma_2}+(b'-1)\right)K_0(a;b,c;b',c';\sigma_1,\sigma_2)=(b'-1)K_0(a;b,c;b'-1,c';\sigma_1,\sigma_2),$$

$$\left(\sigma_1\frac{\partial^2}{\partial\sigma_1^2}+b\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\right)K_0(a;b,c;b',c';\sigma_1,\sigma_2)=\frac{a}{c}K_0(a+1;\,b,\,c+1;\,b',\,c';\,\sigma_1,\,\sigma_2),$$

$$\left(\sigma_2\frac{\partial^2}{\partial\sigma_2^2}+b'\frac{\partial}{\partial\sigma_2}\right)K_0(a;b,c;b',c';\sigma_1,\sigma_2)=\frac{a}{c'}K_0(a+1;\,b,\,c;\,b',\,c'+1;\,\sigma_1,\,\sigma_2)$$

$$\left(\sigma_1\frac{\partial^2}{\partial\sigma_1^2}+b\frac{\partial}{\partial\sigma_1}\right)\left(\sigma_2\frac{\partial^2}{\partial\sigma_2^2}+b'\frac{\partial}{\partial\sigma_2}\right)K_0(a;b,c;b',c';\sigma_1,\sigma_2)=$$

$$=\frac{a(a+1)}{cc'}K_0(a+2;\,b,\,c+1;\,b',\,c'+1;\,\sigma_1,\,\sigma_2).$$

Параграф 1.3 посвящен построению функции Римана для уравнений в частных производных с двумя переменными и с оператором Бесселя. Исследована следующая задача Коши:

Задача Коши. *Найти решение уравнения*

$$u_{yy}+\frac{2\beta}{y}u_y-L^{(x)}(u)=f(x,y),\ (x,y)\in\Omega \tag{2}$$

удовлетворяющее однородным начальным условиям

$$u(x,0)=0,\ u_y(x,0)=0,\ x\in R,\tag{3}$$

где $\beta\in R$, *причем* $0<2\beta<1$, $L^{(x)}$ – *не зависящий от* y, *линейный эллиптический оператор по переменной* x *второго порядка с* *положительным коэффициентом при старший производной, а* Ω *– область определения решения задачи* $\{(2), (3)\}$, *зависящая от вида оператора* $L^{(x)}$.

Если известна функция Римана $R(\xi,\eta;x,y)$ задачи $\{(2), (3)\}$, то решение этой задачи представимо в виде

$$u(x,y)=\iint\limits_{\Omega} R(\xi,\eta;x,y)\,f(\xi,\eta)d\xi d\eta .$$

С помощью оператора преобразования Эрдейи-Кобера найдена функция Римана задачи Коши для уравнения (2) при $L^{(x)}=\partial^2/\partial x^2$ в виде

$$R_1(x,y;\xi,s)=\frac{1}{2}(s/y)^{\beta}F(\beta,1-\beta,1;\sigma),$$

где $\sigma=[(\xi-x)^2-(s-y)^2]/(4sy)$, $F(a,b,c;z)$– гипергеометрическая функция Гаусса, а при $L^{(x)}=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{2\alpha}{x}\dfrac{\partial}{\partial x}+\lambda^2$ $(\alpha,\lambda\in R,\ \ \alpha>0)$ найдена функция Римана в виде

$$R_2(x,y;\xi,s)=\frac{1}{2}(\xi/x)^{\alpha}(s/y)^{\beta}B_2^{(3)}(\alpha,\beta,1-\alpha,1-\beta,1;\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3),$$

где $\sigma_1=-r^2/(4x\xi)$, $\sigma_2=r^2/(4ys)$, $\sigma_3=(\lambda^2r^2)/4$, $r^2=(\xi-x)^2-(s-y)^2$,

$$B_2^{(3)}(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2,\gamma;x,y,z)=\sum_{m,n,p=0}^{\infty}\frac{(\alpha_1)_m(\alpha_2)_n(\beta_1)_m(\beta_2)_n}{(\gamma)_{m+n+p}m!n!p!}x^m y^n z^p$$

– вырожденная гипергеометрическая функция трех переменных.

Вторая глава диссертации, названная «**Задачи для гиперболического уравнения четвертого порядка с оператором Бесселя**», состоит из двух параграфов и посвящена изучению задач Коши для гиперболического уравнения четвертого порядка с оператором Бесселя, действующим по временным и по пространственным переменным. Для решения задачи был использован метод Римана и метод операторов преобразования для построения функции Римана, с помощью этого метода было найдено точное представление решения поставленной задачи.

В параграфе 2.1 в области $\Omega_1=\{(x,t):\ x\in R,\ t>0\}$ для уравнения

$$L_{\beta}^{\lambda}(u)\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\frac{2\beta}{t}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^2u(x,t)-\lambda^2u(x,t)=0, \tag{4}$$

поставлена и исследована задача Коши, где $\beta,\lambda\in R$, причем $0<\beta<1/2$.

Задача Коши. *Найти в области* Ω_1 *решение* $u(x,t)\in M$ *уравнения* (4), *удовлетворяющего условиям*

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\ \ \lim_{t\to 0}t^{2\beta}u_t(x,t)=\psi_0(x),$$

$$u_{tt}(x,0)=\varphi_1(x),\ \ \lim_{t\to 0}t^{2\beta}u_{ttt}(x,t)=\psi_1(x),\ \ x\in R, \tag{5}$$

где $M\in\{u(x,t):\ u,\ t^{2\beta}u_t,\ u_{tt},\ t^{2\beta}u_{ttt}\in C(\overline{\Omega}),\ u\in C^4(\Omega)\}$, $\varphi_k(x),\ \psi_k(x)$, $k=0,1$ – *заданные гладкие функции.*

Основной результат сформулирован в виде следующей теоремы:

Теорема 1. *Пусть* $\varphi_k(x)\in C^{4-2k}(R)$, $\psi_k(x)\in C^{3-2k}(R)$, $k=0,1$ *и все производные функции* $\varphi_k(x)$ *и* $\psi_k(x)$ *соответственно до порядка* $4-2k$ и $3-2k$, $k=0,1$ *включительно обращаются в нуль при* $x=0$. *Тогда функция* $u(x,t)$, *определяемая равенством*

$$u(x,t)=\gamma_1 t^{1-2\beta}\int_{x-t}^{x+t}[t^2-(\xi-x)^2]^{\beta-1}\,{}_0F_3\left(\frac{1}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\beta+1}{2};\delta\right)\varphi_0(\xi)d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\gamma_1 t^{1-2\beta}\int_{x-t}^{x+t}[t^2-(\xi-x)^2]^{\beta-1}\,{}_0F_3\left(\frac{3}{2},\frac{\beta}{2},\frac{\beta+1}{2};\delta\right)(\xi-x)\varphi_0'(\xi)d\xi+$$

$$+\frac{1+2\beta}{4\beta}\gamma_1 t^{1-2\beta}\int_{x-t}^{x+t}[t^2-(\xi-x)^2]^{\beta}\,{}_0F_3\left(\frac{3}{2},\frac{\beta+1}{2},\frac{\beta+2}{2};\delta\right)\varphi_1(\xi)d\xi+$$

$$+\gamma_2\int_{x-t}^{x+t}[t^2-(\xi-x)^2]^{-\beta}\,{}_0F_3\left(\frac{1}{2},\frac{1-\beta}{2},\frac{2-\beta}{2};\delta\right)\psi_0(\xi)d\xi-$$

$$-\frac{1}{2}\gamma_2\int_{x-t}^{x+t}[t^2-(\xi-x)^2]^{-\beta}\,{}_0F_3\left(\frac{3}{2},\frac{1-\beta}{2},\frac{2-\beta}{2};\delta\right)(\xi-x)\psi_0'(\xi)d\xi+$$

$$+\gamma_3\int_{x-t}^{x+t}[t^2-(\xi-x)^2]^{1-\beta}\,{}_0F_3\left(\frac{3}{2},\frac{2-\beta}{2},\frac{3-\beta}{2};\delta\right)\psi_1(\xi)d\xi$$

является единственным решением задачи Коши {(4), (5)}, *где* $\delta=\dfrac{c}{16}[t^2-(\xi-x)^2]^2$, $\gamma_1=\dfrac{\Gamma(1/2+\beta)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\beta)}$, $\gamma_2=\dfrac{\Gamma(1/2-\beta)}{2\sqrt{\pi}\Gamma(1-\beta)}$, $\gamma_3=\dfrac{\gamma_2(3-2\beta)}{4(1+2\beta)(1-\beta)^2}$, ${}_0F_3(a,b,c;z)$ – *обобщенная гипергеометрическая функция,* $\Gamma(z)$ – *гамма-функция Эйлера*.

В параграфе 2.2 в области $\Omega_2=\{(x,y):0<y<x<+\infty\}$ для уравнения

$$L_\alpha^\lambda(u)\equiv\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial x^2}-\frac{2\alpha}{x}\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 u(x,y)-\lambda^2u(x,y)=0 \qquad (6)$$

поставлена и исследована задача Коши, где $\alpha,\lambda\in R$, причем $\alpha>0$.

Задача Коши. *В области* Ω_2 *требуется найти классическое решение* $u(x,y)\in C^3(\Omega_2\cup J)\cap C^4(\Omega_2)$ *уравнения* (6), *удовлетворяющего условиям*

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\ u_y(x,0)=\psi_0(x),\ u_{yy}(x,0)=\varphi_1(x),\ u_{yyy}(x,0)=\psi_1(x),\ x\ge 0 \qquad (7)$$

где $J=\{(x,y):y=0,\ 0\le x<+\infty\}$, $\varphi_k(x),\ \psi_k(x)$, $k=0,1$ – *заданные гладкие функции.*

Основной результат сформулирован в виде следующей теоремы:

Теорема 2. *Пусть* $\varphi_j(x)\in C^{4-2j}(R^+)$, $\psi_j(x)\in C^{3-2j}(R^+)$, $j=0,1$ *и все соответствующие производные начальных функций обращаются в нуль при* $x=0$. *Тогда функция* $u(x,y)$, *определяемая формулой*

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}\int_{x-y}^{x+y}(s/x)^\alpha\varphi_0(s)F(\alpha,1-\alpha,1;\sigma_0)ds-$$

$$-\frac{y}{4}\int_{x-y}^{x+y}(s/x)^{\alpha} f_0(s)F(\alpha,1-\alpha,1;\sigma_0)ds-$$

$$-\frac{cy}{6}\int_{x-y}^{x+y}(s/x)^{\alpha}\varphi_0(s)H_1(x,y,s)ds+\frac{y}{4}\int_{x-y}^{x+y}(s/x)^{\alpha}\varphi_1(s)H_2(x,y,s)ds+$$

$$+\frac{y}{4}\frac{\partial}{\partial y}\int_{x-y}^{x+y}(s/x)^{\alpha}\psi_0(s)F(\alpha,1-\alpha,1;\sigma_0)ds+$$

$$+\int_{x-y}^{x+y}(s/x)^{\alpha}\psi_0(s)K_1(x,y,s)ds+\int_{x-y}^{x+y}(s/x)^{\alpha}\psi_1(s)K_2(x,y,s)ds$$

является единственным классическим решением задачи Коши $\{(6), (7)\}$, *где*

$$H_1(x,y,s)=y^2F(\alpha,1-\alpha,1;\sigma_0)-$$

$$-3[y^2-(s-x)^2]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2)_n(3/2)_n(3/2)_n}\frac{\sigma_2^n}{n!}F(\alpha,1-\alpha,2n+2;\sigma_0)-$$

$$-\frac{3}{2}[y^2-(s-x)^2]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2)_n(5/2)_n(3/2)_n}\frac{\sigma_2^n}{n!}F(\alpha,1-\alpha,2n+2;\sigma_0)-$$

$$-\frac{c}{20}(s-x)^2[y^2-(s-x)^2]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)_n}{(3)_n(7/2)_n(3/2)_n(3/2)_n}\frac{\sigma_2^n}{n!}F(\alpha,1-\alpha,2n+2;\sigma_0)-$$

$$-\frac{2}{5}\sigma_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)_n(1)_n}{(2)_n(3)_n(7/2)_n(3/2)_n(3/2)_n}\frac{\sigma_2^n}{n!}\,{}_3F_2(\alpha,1-\alpha,2;1,2n+3;\sigma_0),$$

$$H_2(x,y,s)=F(\alpha,1-\alpha,1;\sigma_0)+$$

$$+\frac{4}{3}\sigma_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n}{(2)_n(2)_n(5/2)_n(3/2)_n}\frac{\sigma_2^n}{n!}F(\alpha,1-\alpha,2n+3;\sigma_0),$$

$$K_1(x,y,s)=\frac{3}{4}F(\alpha,1-\alpha,1;\sigma_0)+$$

$$+\frac{7}{3}\sigma_2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n}{(2)_n(2)_n(5/2)_n(3/2)_n}\frac{\sigma_2^n}{n!}F(\alpha,1-\alpha,2n+3;\sigma_0)-$$

$$-\frac{4}{3}\sigma_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n}{(2)_n(2)_n(3/2)_n(5/2)_n}\frac{\sigma_2^n}{n!}\,{}_3F_2(\alpha,1-\alpha,2;1,2n+3;\sigma_0)+$$

$$+\frac{c}{12}[2(s-x)^2-y^2][(s-x)^2-y^2]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1)_n}{(2)_n(3/2)_n(5/2)_n}\frac{\sigma_2^n}{n!}F(\alpha,1-\alpha,2n+2;\sigma_0),$$

$$K_2(x,y,s)=\frac{1}{8}[y^2-(s-x)^2]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1)_n(3/2)_n(3/2)_n}\frac{\sigma_2^n}{n!}F(\alpha,1-\alpha,2n+2;\sigma_0),$$

$\sigma_0=[y^2-(x-s)^2]/(4xs)$, $\quad \sigma_1=(c/16)(\eta^2-y^2)^2$, $\quad \sigma_2=(c/16)[y^2-(s-x)^2]^2$,

$f_0(x)=\varphi_0''(x)+\dfrac{2\alpha}{x}\varphi_0'(x)$.

Третья глава диссертации называется **«Задачи для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка с оператором Бесселя»** и состоит из двух параграфов. В этой главе задачи Гурса и Коши для уравнения Буссинеска-Лява с оператором Бесселя решаются методами Римана и операторов преобразования.

В параграфе 3.1 в области $\Omega_3 = \{(x,y): 0<x<l,\, 0<y<h\}$ для уравнения

$$L_\alpha(u) = \frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x} - u\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (8)$$

исследована следующая задача Гурса, где $\alpha \in R$, причем $0<\alpha<1/2$.

Задача Гурса (задача G). *В области Ω_3 требуется найти решение уравнения* (8), *которое удовлетворяет следующим граничным условиям:*

$$u(x,0) = \psi_1(x), \quad u_y(x,0) = \psi_2(x), \quad 0 \le x \le l; \qquad (9)$$

$$u(0,y) = \varphi_1(y), \quad \lim_{x\to 0} x^{2\alpha} u_x(x,y) = \varphi_2(y), \quad 0 \le y \le h, \qquad (10)$$

где $\psi_k(x), \varphi_k(y), (k=1,2)$ – заданные гладкие функции, причем $\psi_1(0) = \varphi_1(0)$, $\psi_2(0) = \varphi_1'(0)$.

Сначала рассмотрена задача {(8)-(10)} при $\varphi_2(y) = 0$, и решение этой задачи было найдено в следующем виде:

$$u_1(x,y) = \psi_1(x)\cos y + \psi_2(x)\sin y + \varphi_1(y)\bar{I}_{\alpha-1/2}(x) -$$

$$-\varphi_1(0)K_0\left(1;\alpha+\frac{1}{2},1;\frac{1}{2},1;\frac{x^2}{4},-\frac{y^2}{4}\right) - \varphi_1'(0)yK_0\left(1;\alpha+\frac{1}{2},1;\frac{3}{2},1;\frac{x^2}{4},-\frac{y^2}{4}\right) +$$

$$+\gamma_1 x^2 \int_0^y K_0\left(2;\alpha+\frac{3}{2},2;\frac{3}{2},2;\frac{x^2}{4},-\frac{(\eta-y)^2}{4}\right)(\eta-y)\varphi_1(\eta)d\eta -$$

$$-\frac{y^2}{2}\int_0^x (t/x)^\alpha (x-t)\Phi_1(x,y,t)\psi_1(t)dt - \frac{y^3}{6}\int_0^x (t/x)^\alpha (x-t)\Phi_2(x,y,t)\psi_2(t)dt, \qquad (11)$$

где $\gamma_1 = 1/[2(2\alpha+1)]$, $\bar{I}_\nu(x) = \Gamma(\nu+1)(x/2)^{-\nu} I_\nu(x)$ – функция Бесселя-Клиффорда мнимого аргумента, $K_0(a;b,c;b',c';\sigma_1,\sigma_2)$ – гипергеометрическая функция, определяемая равенством (1),

$$\Phi_1(x,y,t) = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \frac{(2)_{m+n}}{(3/2)_m (2)_m (3/2)_n (2)_n} \frac{\omega_1^m}{m!}\frac{\omega_2^n}{n!} F(\alpha, 1-\alpha, m+3/2; \omega_3),$$

$$\Phi_2(x,y,t) = \sum_{m,n,k=0}^{\infty} \frac{(2)_{m+n}}{(3/2)_m (2)_m (5/2)_n (2)_n} \frac{\omega_1^m}{m!}\frac{\omega_2^n}{n!} F(\alpha, 1-\alpha, m+3/2; \omega_3),$$

$$\omega_1 = \frac{(x-t)^2}{4},\ \omega_2 = -\frac{y^2}{4} \quad \omega_3 = -\frac{(x-t)^2}{4xt}.$$

Аналогично, используя свойства уравнения (8) и формулу (11), формула решения $u_2(x,y)$ уравнения (8), удовлетворяющего условиям $u(x,0)=0$, $u_y(x,0)=0$, $u(0,y)=0$, $\lim_{x\to 0} x^{2\alpha}u_x(x,y) = \varphi_2(y)$, была найдена следующим образом:

$$u_2(x,y) = \frac{x^{1-2\alpha}}{1-2\alpha}\varphi_2(y)\bar{I}_{1/2-\alpha}(x) + \tilde{\gamma}_1 x^{3-2\alpha}\int_0^y K_0\left(2;\frac{5}{2}-\alpha,2;\frac{3}{2},2;\frac{x^2}{4},\sigma_2\right)(\eta-y)\varphi_2(\eta)d\eta,$$

где $\tilde{\gamma}_1 = 1/[2(3-2\alpha)(1-2\alpha)]$.

Теорема 3. *Пусть* $0<\alpha<1/2$, $\psi_k(x)\in C[0,l]\cap C^2(0,l)$, $\varphi_k(x)\in C[0,h]\cap C^2(0,h)$, $(k=1,2)$ *причем* $\varphi_2'(y)$ *соответственно может иметь особенность порядка меньше* 2α *при* $x\to 0$. *Тогда функция* $u(x,y)=u_1(x,y)+u_2(x,y)$ *будет единственным решением задачи G.*

В параграфе 3.2 исследована следующая задача:

Задача Коши. *В области* $\Omega_4=\{(x,y):0<x<y\}$ *требуется найти решение уравнения*

$$L_\alpha(u)\equiv\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x}-u\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{2\alpha}{x}\frac{\partial u}{\partial x}=f(x,y) \qquad (12)$$

удовлетворяющего условиям

$$u\big|_{y=x}=\varphi_0(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{y=x}=\varphi_1(x),\ \left.\frac{\partial^2 u}{\partial n^2}\right|_{y=x}=\varphi_2(x),\ \left.\frac{\partial^3 u}{\partial n^3}\right|_{y=x}=\varphi_3(x),\ x>0, \qquad (13)$$

где $\alpha\in R$, *причем* $0<\alpha<1/2$, $\varphi_k(x)$ $(k=\overline{0,3})$, $f(x,y)$ *– заданные гладкие функции,* n *– единичный вектор внешней нормали.*

С помощью метода, разработанного в параграфе 1.3, найдены функции Римана задачи {(12), (13)}, которая имеет следующий вид:

$$\upsilon(x,y;\xi,\eta)=(\xi-x)(\eta-y)\left(\frac{\xi}{x}\right)^\alpha\times$$

$$\times\sum_{m,n=0}^{\infty}\frac{(1)_{m+n}}{(3/2)_m(1)_m(3/2)_n(1)_n}\frac{\sigma_1^m}{m!}\frac{\sigma_2^n}{n!}F\left(\alpha,1-\alpha,m+\frac{3}{2};\sigma_3\right), \qquad (14)$$

где $\sigma_1=(1/4)(\xi-x)^2$, $\sigma_2=-(1/4)(\eta-y)^2$, $\sigma_3=-(\xi-x)^2/(4x\xi)$.

Пользуясь функцией Римана (14), решение задачи {(12), (13)} найдено в виде:

$$u(x,y)=\left[1+\frac{\alpha}{y}(x-y)\right]\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha,\frac{3}{2};\varpi_1,\varpi_2\right)\varphi_0(y)+$$

$$+\frac{4\varpi_2}{3}\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha,\frac{5}{2};\varpi_1,\varpi_2\right)\varphi_0(y)+$$

$$+\frac{2\alpha(1-\alpha)\varpi_1}{3}\frac{x+y}{y}\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha\Xi_2\left(1+\alpha,2-\alpha,\frac{5}{2};\varpi_1,\varpi_2\right)\varphi_0(y)+$$

$$+(x-y)\left(\frac{y}{x}\right)^\alpha\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha,\frac{3}{2};\varpi_1,\varpi_2\right)\Phi_1(y)+$$

$$+\int_x^y(\xi-x)\left(\frac{\xi}{x}\right)^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(1-\alpha)_k}{(3/2)_k}\frac{\sigma_3^k}{k!}K_0\left(1;\frac{3}{2}+k,1;\frac{1}{2},1;\sigma_1,\mu\right)\Phi_2(\xi)\,d\xi-$$

$$-\int_x^y(\xi-x)(\xi-y)\left(\frac{\xi}{x}\right)^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(1-\alpha)_k}{(3/2)_k}\frac{\sigma_3^k}{k!}K_0\left(1;\frac{3}{2}+k,1;\frac{3}{2},1;\sigma_1,\mu\right)\Phi_3(\xi)\,d\xi-$$

$$-\frac{1}{6}\int_x^y(\xi-x)^3(\xi-y)\left(\frac{\xi}{x}\right)^\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(1-\alpha)_k}{(5/2)_k}\frac{\sigma_3^k}{k!}K_0\left(2;\frac{5}{2}+k,2;\frac{3}{2},2;\sigma_1,\mu\right)\Phi_4(\xi)-$$

$$-\iint_{\Omega_1}(\xi-x)(\eta-y)\left(\frac{\xi}{x}\right)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\alpha)_k(1-\alpha)_k}{(3/2)_k}\frac{\sigma_3^k}{k!}K_0\left(1;\frac{3}{2}+k,1;\frac{3}{2},1;\sigma_1,\sigma_2\right)f(\xi,\eta)d\xi d\eta, \quad (15)$$

где $\mu=-\dfrac{(\xi-y)^2}{4}$, $\varpi_1=-\dfrac{(y-x)^2}{4xy}$, $\varpi_2=\dfrac{(y-x)^2}{4}$, $\Phi_1(\xi)=\dfrac{1}{2}\left[\sqrt{2}\varphi_1(\xi)+\varphi_0'(\xi)\right]$,

$$\Phi_2(\xi)=\frac{1}{4}\left[\varphi_0''(\xi)+2\sqrt{2}\varphi_1'(\xi)+2\varphi_2(\xi)+4\varphi_0(\xi)\right]+\frac{\alpha}{\xi}\left[\sqrt{2}\varphi_1(\xi)+\varphi_0'(\xi)\right],$$

$$\Phi_3(\xi)=\frac{1}{4}\left[\varphi_0'''(\xi)-2\varphi_0'(\xi)+2\sqrt{2}\varphi_1(\xi)+\sqrt{2}\varphi_1'(\xi)-2\varphi_2'(\xi)-2\sqrt{2}\varphi_3(\xi)\right]+$$

$$+\frac{\alpha}{2\xi}\left[\varphi_0''(\xi)-2\varphi_2(\xi)\right],\ \Phi_4(\xi)=\sqrt{2}\varphi_1(\xi)+\varphi_0'(\xi)+\frac{2\alpha}{\xi}\varphi_0(\xi).$$

Справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть* $\varphi_j(x)\in C^{3-j}(R^+)$, $j=\overline{0,3}$ *и все соответствующие производные начальных функций обращаются в нуль при* $x=0$. *Тогда функция* $u(x,y)$, *определяемая равенством* (15), *является единственным решением задачи Коши* {(12), (13)}.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена решению начальных и краевых задач для гиперболических и псевдогиперболических уравнений четвертого порядка с оператором Бесселя. Основные результаты исследования заключаются в следующем:

1. Разработан метод построения функции Римана для уравнений в частных производных с оператором Бесселя.
2. Найдена формула решения задачи Коши для уравнения гиперболического типа четвертого порядка с оператором Бесселя, действующим по временной переменной, методом операторов преобразования и методом Римана.
3. Методом операторов преобразования и методом Римана найдена формула решения задачи Коши для уравнения гиперболического типа четвертого порядка с оператором Бесселя, действующим по пространственным переменным.
4. Пользуясь методом операторов преобразования и методом Римана найдено интегральное представление решения задачи Гурса для уравнения Буссинеска-Лява с оператором Бесселя.
5. Построена функция Римана для неоднородного уравнения Буссинеска-Лява с оператором Бесселя и на его основе найдена формула решения задачи Коши.

Задачи, исследованные в диссертационной работе, могут быть использованы для дальнейшего развития теории уравнений в частных производных с оператором Бесселя.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 FERGANA STATE UNIVERSITY

FERGANA STATE UNIVERSITY

ORIPOV SHUKRULLO ABDUSALOMOVICH

PROBLEMS FOR FOURTH-ORDER HYPERBOLIC AND PSEUDO-HYPERBOLIC EQUATIONS WITH BESSEL OPERATOR

01.01.02 – Differential Equations and Mathematical Physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Fergana – 2025

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number №B 2024.2.PhD/FM1058.

Dissertation has been prepared at Fergana State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (resume)) on the website (www.fdu.uz) and the "ZiyoNet" information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Karimov Shakhobiddin Tuychiboevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Official opponents:	**Khasanov Anvardjan** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Ergashev Tukhtasin Gulamjanovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
Leading organization:	**Termez State University**

Defense will take place «16» 04 2025 at 10:00 at the meeting of Scientific Council number PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 at Fergana State University. (Address: Murabbiylar str. 19, Fergana, Uzbekistan, 150100, Phone: (+99873) 244-44-02, fax: (+99873) 244-44-93, e-mail: fardu_info@umail.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Fergana State University (is registered № 495). (Address: Murabbiylar str. 19, Fergana, Uzbekistan, 150100, Phone: (+99873) 244-44-94.

Abstract of dissertation sent out on «03» 04 2025 year.
(Mailing report № 7 on «03» 04 2025 year).

Y.P.Apakov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.Ph.M.S., Professor

I.U.Khaydarov
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, C.Ph.M.S., Associate Professor

K.S.Gaziyev
Deputy chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, C.Ph.M.S., Associate Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research is to formulate and solve initial and boundary value problems for partial differential equations with singular coefficients using transmutation operators and the Riemann method.

Object of the research: fourth-order hyperbolic and pseudo-hyperbolic partial differential equations with the Bessel operator.

Scientific novelty of the research work is as follows:

using the method of transformation operators, the method for constructing the Riemann function for differential equations with the Bessel operator has been developed;

using the Riemann method, the unique solvability of the Cauchy problem for a fourth-order hyperbolic equation with the Bessel operator acting on time variables has been proved;

the unique solvability of the Cauchy problem for a fourth-order hyperbolic equation with a Bessel operator acting on the spatial variables has been proven using the Riemann method;

the formulas for solving the Cauchy and Goursat problems for the pseudo-hyperbolic Boussinesq-Love equation with the Bessel operator have been found using the method of transmutation operators and the Riemann method.

Implementation of research results. The obtained results on the study of problems for fourth-order hyperbolic and pseudo-hyperbolic equations with the Bessel operator were implemented in the following research projects:

the results of the study on Cauchy and Goursat problems for the fourth-order Boussinesq-Love equation with the Bessel operator, as well as the constructed Riemann function for such an equation, were utilized in solving boundary value problems for pseudo-hyperbolic equations and differential equations with singular coefficients within the framework of an international grant No. 23-21-10015 (Chelyabinsk State University, Ministry of Education and Science of Russia, reference No. 13-8, dated October 8, 2024). The application of these results made it possible to construct an integral representation of solutions for certain non-classical differential equations and demonstrate their applicability in applied problems.

the results obtained in constructing explicit solutions for initial and boundary value problems for fourth-order hyperbolic-type equations and the Boussinesq-Love equation with singular coefficients were utilized in solving problems related to pseudo-yperbolic equations and differential equations with singular coefficients within the framework of the international research project “Bisingular Problems and Their Applications” (Osh State University, reference No. 1576, dated November 25, 2024). The application of these results enabled the construction of integral representations for solutions in applied problem settings.

E’lon qilingan ishlar ro‘yxati
Список опубликованных работ
List of published works

I bo‘lim (I часть; part I)

1. Karimov Sh.T, Oripov Sh.A. On a method for constructing the Riemann function for partial differential equations with a singular Bessel operator // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2020, Vol. 41, Issue 6, - pp. 1087–1093. (3. Journal IF: 0.53)
2. Karimov Sh.T, Oripov Sh.A. Solution of the Cauchy problem for a hyperbolic equation of the fourth order with the Bessel operator by the method of transmutation operators // Boletín de la Sociedad Matemática Mexicana. 2023. Vol. 29. Issue 2. Article number 28. - pp. 1-15. (3. Journal IF: 0.9)
3. Karimov Sh.T, Oripov Sh.A. Solution of the Goursat problem for the Boussinesq–Love equation with the Bessel operator by the method of transmutation operators // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023, Vol. 44, Issue 8, - pp. 3343-3350. (3. Journal IF: 0.53)
4. Karimov Sh.T, Oripov Sh.A. A Cauchy problem for the Boussinesq-Love equation with the Bessel operator // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2024, Vol. 45, Issue 9, - pp. 4508-4521. (3. Journal IF: 0.53)
5. Орипов Ш.А. Задача Коши для уравнения четвертого порядка с оператором Бесселя действующим по геометрическим переменным // Бюллетень Института математики. 2024. Т. 7. № 2. -С. 71-82. (01.00.00; №17)
6. Орипов Ш.А. Задача Коши для псевдогиперболического уравнения четвертого порядка с сингулярными коэффициентами // Бюллетень Института математики. 2024. Т. 7. № 4. -С. 102-116. (01.00.00; №17)

II bo‘lim (II часть; part II)

7. Каримов Ш.Т., Орипов Ш.А. Об одном методе построения функции Римана для дифференциальных уравнений в частных производных с сингулярными коэффициентами // «Современные проблемы математики и информатики». 22-23 мая 2019 г. – Фергана, 2019. –С. 166-168.
8. Karimov Sh.T, Oripov Sh.A. Constructing the Riemann function for partial-differential equations with a singular Bessel operator // Тезисы докладов Международной научной конференции на тему «Современные проблемы дифференциалных уравнений и смежных разделов математики». 12-13 марта 2020 г. – Фергана. 2020. –С. 200-203.
9. Каримов Ш.Т., Орипов Ш.А. Задача Коши для одного уравнения гиперболического типа с поливолновым оператором // «Современные методы математической физики и их приложения» Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых. 17-18 ноября 2020 г. – Ташкент. 2020. –С. 231-232.

10. Каримов Ш.Т., Орипов Ш.А. Решение задачи Гурса для уравнения Буссинеска-Лява с сингулярными коэффициентами методом операторов преобразования. // Традиционная международная апрельская научная конференция в честь Дня работников науки Республики Казахстан. 5-8 апреля 2021 г. – Алматы. 2021. –С. 155-156.

11. Oripov Sh.A. To‘rtinchi tartibli giperbolik tipdagi tenglama uchun Dirixle masalasi // “Matematikaning iqtisodiy-texnik masalalarga tatbiqlari va o‘qitish muammolari” Respublika ilmiy-amaliy anjumani. 9-aprel 2021 y. – Andijon. 2021. – 251-256 b.

12. Karimov Sh.T., Oripov Sh.A. On the Dirichlet problem for the Boussinesq-Love equation with singular coefficients // The VII international scientific conference “Modern problems of applied mathematics and information technologies Al-Khwarizmi 2021”. 15-17 November 2021 y. – Fergana. 2021. –pp. 131.

13. Орипов Ш.А. Первая краевая задача для уравнения Буссинеска-Лява с сингулярными коэффициентами // Abstracts International conference “Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics”. 23-24 September 2022 y. – Samarkand. 2022. –pp. 291-292.

14. Karimov Sh.T, Oripov Sh.A. Characteristic problem for the Boussinesq-Love equation with singular coefficients // AIP Conference Proceedings. 2023. 2781, 020073. - pp. 1-7.

15. Каримов Ш.Т., Орипов Ш.А. Задача Коши для уравнения четвертого порядка с оператором Бесселя, действующим по геометрическим переменным // VII Международная научная конференция “Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики”. 4-8 декабря 2023 г. – Нальчик. 2023. –С. 145-147.

16. Каримов Ш.Т., Орипов Ш.А.Задача Коши для уравнения Буссинеска-Лява с оператором Бесселя // Международная конференция “Дифференциальные уравнения и их приложения”. 6-7 июня 2024 г. – Казан. 2024. –С. 59-61.

Avtoreferat Farg'ona davlat universiteti «FarDU. Ilmiy xabarlar – Научный вестник. ФерГУ» ilmiy – metodik jurnal tahririyatida tahrirdan o'tkazilib, o'zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o'zaro muvofiqlashtirildi.

FDU "Nusxa ko'paytirish bo'limi"da chop etildi. 2025-yil.
Bosishga ruxsat etildi: 2025-yil.
Bichimi 60x84 1/16. Ofset qog'ozi
Nashriyot bosma tabog'i – 2,25.
Shartli bosma tabog'i – 1,125.
Adadi 50 nusxa.
Manzil: 150100, Farg'ona shahri Murabbiylar ko'chasi, 19-uy.