**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

TOSHKENT DAVLAT TRANSPORT UNIVERSITETI

JALOLOV IKROMJON ISOMIDDINOVICH

L. XYORMANDER FAZOSIDA OPTIMAL KVADRATUR FORMULALAR

**01.01.03 – Hisoblash matematikasi va diskret matematika
(fizika-matematika fanlari)**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Toshkent – 2025

UDK: 519.644

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH

TOSHKENT DAVLAT TRANSPORT UNIVERSITETI

JALOLOV IKROMJON ISOMIDDINOVICH

L. XYORMANDER FAZOSIDA OPTIMAL KVADRATUR FORMULALAR

01.01.03 – Hisoblash matematikasi va diskret matematika
(fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Toshkent – 2025

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2021.2.PhD/FM604 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya Toshkent Davlat Transport universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (ik-fizmat.nuu.uz) va “Ziyonet” ta’lim axborot tarmog‘ida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar: **Shadimetov Xolmatvay Maxkambayevich**
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Rasmiy opponentlar: **Hayotov Abdullo Roxmonovich**
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Urunboyev Erkin
fizika-matematika fanlari doktori, dotsent

Yetakchi tashkilot: **Termiz davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi O‘zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 raqamli Ilmiy kengashning “________”______________ 2025-yil soat _______ dagi majlisida bo‘lib o‘tadi (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 227-12-24; faks: (+99871) 246-53-21, 246-02-24; e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan O‘zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (____ raqami bilan ro‘yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 246-02-24.

Dissertatsiya avtoreferati 2025-yil “_______” _______________ kuni tarqatildi.

(2025 yil “_______” ________________ dagi ________ raqamli reestr bayonnomasi)

M.M. Aripov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., professor

Z.R. Raxmonov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d.

R.D. Aloyev
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash huzuridagi ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida olib borilayotgan ilmiy va amaliy tadqiqotlar natijasida tebranishlar nazariyasi, elektrodinamika va mexanika masalalariga oid xususiy hosilali differensial tenglamalar, regulyar va singulyar integral tenglamalar yuqori aniqlik bilan sonli yechish usullarini ishlab chiqishga olib keldi. Bu esa optimal kvadratur va kubatur formulalarini qurish muhimligini kasb etadi. Aksariyat hollarda, aniq integrallarni hisoblash jarayonini optimallashtirish hisob-kitoblarni kamaytirish va samaradorlikni oshirishga yordam beradi. Katta hajmdagi hisoblashlar o‘tkazilayotgan vaqtda, kvadratur va kubatur formulalaridan foydalanish jarayonida ularni optimallashtirish juda muhim ahamiyatga ega bo‘ladi. Shu bois, optimal kvadratur va kubatur formulalarini qurish uchun yangi algoritmlar ishlab chiqish va aniq integrallarni yuqori aniqlik bilan taqribiy hisoblash, shuningdek, differensiallanuvchi funksiyalarning L. Xyormander fazosida optimal kvadratur formulalarini qurish hisoblash matematikasining eng muhim vazifalaridan biri bo‘lib hisoblanmoqda.

Hozirgi kunda jahonda L. Xyormanderning funksional fazolarida yuqori aniqlikdagi optimal va eng samarali kvadratur hamda kubatur formulalarini qurish katta ahamiyat kasb etmoqda. Ayniqsa, L. Xyormander fazosida optimal va eng yaxshi kvadratur va kubatur formulalarini qurish, ularning mavjudligini va yagona ekanligini isbotlash, shuningdek, xatoliklarni baholash masalalari keng qo‘llanilmoqda. Tebranish jarayonlarini matematik modellashtirishda yuzaga keladigan xususiy hosilali differensial tenglamalar, regulyar va singulyar integral tenglamalarning sonli yechimlari, optimal kvadratur va kubatur formulalari yordamida ifodalanadi. Bu, o‘z navbatida, sonli usullar nazariyasi, hisoblash matematikasi va boshqa tegishli sohalar tadqiqotlarining asosiy yo‘nalishlaridir. Shuning uchun, L. Xyormander fazosida optimal kvadratur va kubatur formulalarni qurish, ularning xatoliklarini baholash bo‘yicha ilmiy tadqiqotlar muhim ilmiy tadqiqotlardan biri bo‘lib hisoblanadi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tadbiqlari, jumladan, quyosh fizikasi, geofizika, tebranishlar nazariyasi, mexanika masalalarining sonli-analitik yechimlarini ishlab chiqish kabi dolzarb yo‘nalishlarga katta e’tibor qaratilmoqda. Xususan, turli fazolarda optimal panjarali kvadratur, kubatur va interpolyatsion formulalar qurish, ularning xatoliklarini L. Xyormander fazolarida baholash bo‘yicha muhim natijalarga erishildi. “Funksional analiz, matematik fizika, differensial tenglamalar, matematik modellashtirish, hisoblash matematikasi va diskret matematika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika”[1] kabi ustuvor yo‘nalishlar bo‘yicha xalqaro standartlar darajasidagi ilmiy izlanishlar olib borish

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasida ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-son Qarori.

O‘zR FA V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatining asosiy vazifalaridan biri hisoblanadi. Qaror ijrosini ta’minlashda umumlashgan funksiyalar asosida Furye almashtirishlaridan foydalanib, kvadratur va kubatur formulalar qurish, L. Xyormander fazolarida ularning xatoliklarini baholash uchun optimal kvadratur formulalar nazariyasini rivojlantirish muhim ahamiyatga ega.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevral PF-4947-sonli “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi, 2022-yil 28-yanvar PF-60-sonli “2022–2026-yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmonlari, 2017-yil 17-fevral PQ-2789-sonli “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2017-yil 20-aprel PQ-2909-sonli “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2018-yil 27-aprel PQ-3682-sonli “Innovatsion g‘oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2020-yil 7-may PQ-4708-sonli “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi Qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishi-ning ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Ko‘plab ilmiy-amaliy tadqiqotlar natijasida tebranishlar nazariyasi, elektrodinamika, mexanika masalalaridagi xususiy hosilali differensial tenglamalar, regulyar va singulyar integral tenglamalarni yuqori aniqlikda sonli yechish optimal kvadratur va kubatur formulalar qurishga olib kelinadi. Bunday masalalarni yechish bilan ko‘pgina matematiklar shug‘ullangan: Gauss, Chebishev, Grigori, Eyler, Nyuton va boshqalar. Integral tenglamalarni sonli yechishda optimal kvadratur va kubatur formulalari katta nazariy ahamiyatga ega. Shu sababli, ko‘plab tadqiqotlar optimal panjarali kvadratur va kubatur formulalarini qurishga bag‘ishlangan, masalan, S.L.Sobolev, A.N. Kolmogorov, S.M. Nikolskiy, N.S.Baxvalov, I.Babushka, I.P.Misovskix, V.V.Ivanov, N.P.Korneychuk, D.A. Mclaren, G.N.Salixov, M.D. Ramazanov, V.I. Polovinkin, M.V. Noskov, X.M. Shadimetov, A.R. Hayotov va boshqalar. Kubatur formulalar nazariyasida klassik yondashish I.P. Misovskix, A. Sard, A.X. Stroud, A.J. Duran, Y.G. Shi, M.I Israilov ishlarida rivojlantirilgan.

Optimal kvadratur formulalarni qurish uchun yangi algoritmlarni ishlab chiqish, funksiyalarning turli fazolarida ularning xatoliklarini baholash muhim vazifalardandir. Hozirgi vaqtda taqribiy integrallash uchun formulalarni optimallashtirish masalasi – bu berilgan funksiyalar fazosida xatolik funktsionali normasining minimumini topishdan iborat. Kvadratur formula xatolik funksionali normasini hisoblash va optimal kvadratur formula qurish masalalari birinchi bo‘lib A.Sard va S.M. Nikolskiylarning ishlarida qaralgan. Barcha $\tilde{W}_p^r\left(r=1.2,\cdots 1\le p\le\infty\right)$ sinflar uchun A.A. Jensikbayev ishlarida, kvadratur formulalar uchun masala yechilgan. Optimal kvadratur formula xatolik funksionali normasi nolga intiluvchi eng yaxshi yaqinlashish tartibini aniqlash va optimal kvadratur formula qurish imkoniyati bo‘lmasa, u holda asimptotik optimal kvadratur formula qurish masalalarini asosan $L_2^{(m)}(R^n)$, $L_2^{(m)}(\Omega)$ va $\tilde{L}_2^{(m)}$ fazolarda S.L.Sobolev qaragan. Optimal kvadratur formula qurish masalasini $W_2^{(m)}$ fazoda birinchi bo‘lib A.Sard qaragan. Commanning ishida A.Sard masalasi $m=2$ da ixtiyoriy N uchun qaralgan. $S^{n-1}\subset R^n$ sferada algebraik aniqlikdagi formulalarni S.L.Sobolev ($n=3$) va G.N. Salixov $\left(n=4,5\right)$lar qurganlar. M.D.Ramazonov va T.X. Sharipov ishlarida chegara qatlami bilan kubatur formulalarini qurishning yangi algoritmlari yaratganlar hamda bunday formulalarning asimptotik optimalligini isbotladilar.

Differensiallanuvchi funksiyalarning Gilbert va Banax fazolarida mos differensial operatorlarning diskret analoglariga asoslanib, optimal kvadratur va interpolyatsion formulalar, yarim normaga minimum beruvchi interpolyatsion natural splaynlar qurish masalalari bo‘yicha S.L. Sobolev, Z.J. Jamalov, X.M. Shadimetov, G.V. Milovanović, A. Cabada, A.R. Hayotov, F.A. Nuraliyev, D.M. Axmedov va A.K. Boltayevlarning tadqiqotlari natijalarini alohida qayd etish maqsadga muvofiqdir.

Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Toshkent davlat transport universiteti “Informatika va kompyuter grafikasi” kafedrasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi differensiallanuvchi funksiyalarning L. Xyormander fazosida panjarali optimal kvadratur formulalar qurish va ularning xatolik funksionali normalarini hisoblashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

vaznli kvadratur formulalarning xatolik funksionallari ekstremal funksiyasi va normasini topish;

L. Xyormanderning $H_2^{\mu}\left(R\right)$ fazosida vaznli optimal kvadratur formula mavjudligi va yagonaligini isbotlash;

$H_2^{\mu}\left(R\right)$ fazoda ixtiyoriy m da vaznli kvadratur formulaning optimal koeffitsiyentlarini topish uchun differensial operatorning diskret analogini qurish;

L. Xyormanderning $H_2^{\mu}(R)$ fazosida panjarali optimal kvadratur formulalar qurish.

Tadqiqotning obyekti. Tadqiqotning obyekti kvadratur formulalar va L. Xyormanderning $H_2^{\mu}(R)$ funksional fazosida chiziqli differensial operatorlarning dikret analoglarini qurishdan iborat.

Tadqiqotning predmeti. Ekstremal funksiyalar, optimal kvadratur formulalar, differensial operatorning dikret analoglari, L. Xyormanderning $H_2^{\mu}(R)$ funksional fazosida umumlashgan funksiyalar va kvadratur formulalar nazariyasidan iboratdir.

Tadqiqotning usullari. Tadqiqot ishida hisoblash matematikasi, funksional analiz, differensial tenglamalar nazariyasi, umumlashgan funksiyalar, diskret argumentli funksiyalar nazariyasi usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi:

vaznli kvadratur formulalarning xatolik funksionali normasi kvadratining ifodasini ekstremal funksiya tushunchasidan foydalanib topilgan;

L. Xyormanderning $H_2^{\mu}(R)$ fazosida vaznli optimal kvadratur formula mavjudligi va yagonaligini Sobolev metodi yordamida isbotlangan;

$H_2^{\mu}(R)$ fazoda ixtiyoriy m da vaznli kvadratur formulaning optimal koeffitsiyentlarini aniqlash uchun differensial operatorning diskret analogi qurilgan;

L. Xyormanderning $H_2^{\mu}(R)$ fazosida $m=1,2$ da differensial operatorlarning diskret analogidan foydalanib panjarali optimal kvadratur formulalar qurilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

tadqiqot ishida qurilgan diskret operator, Furye qatorining o‘zgaruvchan koeffitsiyentlarini sonli hisoblashda qo‘llanilgan;

panjarali optimal kvadratur formulalar, shamol turbinalarining samarali parametrlarini aniqlash maqsadida tuzilgan matematik model tenglamalarini taqribiy yechishda qo‘llanilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi kvadratur formulalar nazariyasi hisoblash matematikasi, funksional analiz, differensial tenglamalar nazariyasi, umumlashgan funksiyalar, diskret argumentli funksiyalar nazariyasi metodlarini qo‘llanilganligi, hamda matematik mulohazalarning qatiyligi bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot ishining ilmiy ahamiyati L. Xyormander fazosida aniq integrallarni yetarli aniqlikda taqribiy hisoblash uchun panjarali optimal kvadratur formulalar qurilganligi va ularning xatoligi yuqoridan baholanganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati panjarali optimal kvadratur formulalar aniq integrallarni sonli taqribiy hisoblash usullari yordamida shamol turbinalarining samarali parametrlarini aniqlash maqsadida tuzilgan matematik model tenglamalarini taqribiy yechishda qo‘llanilgani bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. L. Xyormanderning $H_2^{\mu}\left(R\right)$ fazosida panjarali optimal kvadratur formulalar qurish bo‘yicha olingan yangi ilmiy natijalar asosida:

yuqori tartibli differensial operatorning $D_m\left[\beta\right]$ diskret analogi asosida qurilgan optimal kvadratur formuladan “Shamolning past tezligi uchun mo‘ljallangan vertikal o‘qli shamol turbinasi yaratish” mavzusidagi innovatsion loyihasida shamol turbinalarining samarali parametrlarini aniqlashda foydalanilgan (O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi M.T. O‘rozboyev nomidagi mexanika va inshotlar seysmik mustahkamligi institutining 2024-yil 5-iyundagi 508-3-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, shamol turbinalarining samarali parametrlarini aniqlash jarayonida hosil bo‘lgan matematik model tenglamalarini taqribiy yechish imkonini bergan;

differensiallanuvchi funksiyalarning L. Xyormander fazosida qurilgan optimal kvadratur formulalardan “Birjinslimas g‘ovak muhitida suyuqlik sizishi va moddalar ko‘chishi gidrodinamik modellarini tuzish va sonli tadqiq etish” mavzusidagi fundamental grantda makroporali va mikroporali silindrik zonalardan tashkil topgan g‘ovak muhitlarda adsorbsiya hodisasini hisobga olib moddaning anomal ko‘chishi masalalarini sonli tadqiq etishda foydalanilgan (Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universitetining 2024-yil 10-iyundagi 10-2750-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, makroporali va mikroporali silindrik zonalardan tashkil topgan g‘ovak muhitlarda adsorbsiya hodisasini hisobga olib modda ko‘chishi masalalarini sonli tadqiq etishda zonalar o‘rtasida nisbiy umumiy va jamlanma modda almashinish uchun integral munosabatlarni samarali hisoblash imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari, 13 ta ilmiy amaliy anjumanlarda, jumladan 10 ta xalqaro va 3 ta respublika anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining elon qilinishi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 26 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiyasi komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 12 ta maqola, jumladan 3 tasi xorijiy va 9 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan, shuningdek, elektron hisoblash mashinalari uchun dasturni rasmiy ro‘yxatdan o‘tkazish to‘g‘risidagi bitta guvohnoma olingan.

Dissertatsiyaninng hajmi va tuzilishi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa, ilova va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissersatsiyaning hajmi 78 betdan iborat.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, muammoning o‘rganilganlik darajasi, mavzu bo‘yicha dunyo miqyosidagi ilmiy-tadqiqotlar sharhi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning **“L. Xyormander fazosida kvadratur formulalarning xatoligi, mavjudligi va yagonaligi hamda optimal koeffisiyentlarni topish algoritmi”** deb nomlangan birinchi bobi davriy bo‘lmagan $H_2^{\mu}(\Omega)$ va $W_2^m(\Omega)$ fazolar to‘g‘risida ma’lumotlarga va optimal kvadratur formulalar qurish algoritmiga bag‘ishlangan, shuningdek, vaznli kvadratur formulaning xatolik funksionali ekstremal funksiyasi va normasi topilgan va L.Xyormanderning $H_2^{\mu}(R)$ fazosida vaznli kvadratur formulaning mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

1.1. paragrafda davriy bo‘lmagan $H_2^{\mu}(\Omega)$ va $W_2^m(\Omega)$ fazolar to‘g‘risida ma’lumotlar keltirilgan. Bu yerda $H_2^{\mu}(\Omega)$ va $W_2^m(\Omega)$ fazolar μ ning faqatgina bitta qiymatida, ya’ni $\mu=\left(1+y^2\right)^{\frac{m}{2}}$ bo‘lgandagina bir-biriga mos kelib, ular izomorf bo‘ladi va normalari ekvivalent bo‘lib quyidagicha aniqlanadi:

$$\left\|f(x)\right|H_2^{\mu}(R)\| = \left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|F^{-1}\left[(1+y^2)^{m/2}\cdot F\left[f(x)\right](y)\right]\right|^2 dx\right\}^{1/2},$$

bunda F va F^{-1} lar Furyening to‘g‘ri va teskari almashtirishlari:

$$F\left[f(x)\right](y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{2\pi iyx}dx \text{ ва } F^{-1}\left[f(x)\right](y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi iyx}dy.$$

L. Xyormanderning $H_2^{\mu}(R)$ fazosida quyidagi ko‘rinishdagi kvadratur formulani qaraymiz

$$\int_0^1 p(x)f(x)dx \approx \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta f(x_\beta), \tag{1}$$

kvadratur formulaning xatolik funksionali

$$\ell_N(x)=\varepsilon_{[0,1]}(x)p(x)-\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x-x_\beta), \tag{2}$$

ko‘rinishdan iborat. Bu yerda C_β, $x_\beta(x_\beta\in[0,1])$ lar mos ravishda kvadratur formulaning koeffitsiyentlari va tugun nuqtalari, $p(x)$- vazn funksiyasi, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ esa $[0,1]$ kesmaning xarakteristik funksiyasi, $\delta(x)$ - Dirakning delta funksiyasi va $f(x)\in H_2^{\mu}(R)$.

Integral bilan kvadratur yig‘indi orasidagi ayirmaga kvadratur formulaning xatoligi deyiladi va xatolik funktsionalining f funktsiyalardagi qiymati quyidagicha aniqlanadi:

$$(\ell_N, f)\equiv\int_{-\infty}^{\infty}\ell_N(x)f(x)dx=\int_0^1 p(x)f(x)dx-\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta f(x_\beta). \tag{3}$$

(1) - kvadratur formula φ funktsiyaga aniq deyiladi, agar (3) - formulada f ning o‘rniga φ ni qo‘yganda u nolga aylansa. Kvadratur formula aniq bo‘lgan funktsiyalar to‘plami, ℓ_N xatolik funksionali yadrosini tashkil etadi.

Koshi-Shvarts tengsizligidan

$$|(\ell_N, f)| \leq \left\| \ell_N \mid H_2^{\mu*} \right\| \cdot \left\| f \mid H_2^{\mu} \right\|.$$

(1) - kvadratur formula xatoligining absolyut qiymati (2) - xatolik funktsionalining $H_2^{\mu*}$ qo‘shma fazodagi normasi bilan yuqoridan baholanadi:

$$\left\| \ell_N \mid H_2^{\mu*} \right\| = \sup_{\left\| f | H_2^{\mu} \right\| = 1} |(\ell, f)|. \tag{4}$$

Endi ketma-ket quyidagi masalalarni yechishimizga to‘g‘ri keladi.

1- masala. (1) - kvadratur formulaning $\ell_N(x)$ xatolik funksionali normasini hisoblash kerak, ya’ni

$$\left\| \ell_N(x) \middle| H_2^{\mu*}(0,1) \right\| = \sup_{\|f\| \neq 0} \left| \ell(f) \right| / \left\| f(x) \middle| H_2^{\mu}(0,1) \right\|. \tag{5}$$

2- masala. Fiksirlangan x_β tugun nuqtalarda shunday C_β koeffitsiyentlarni topish kerakki, quyidagi tenglik o‘rinli bo‘lsin

$$\left\| \overset{0}{\ell}_N(x) \middle| H_2^{\mu*}(0,1) \right\| = \inf_{C_\beta} \left\| \ell_N(x) \middle| H_2^{\mu*}(0,1) \right\|. \tag{6}$$

$H_2^{\mu*}(0,1)$ fazosida (2) - xatolik funktsionalining normasini topish uchun uning ekstremal funksiyasidan foydalaniladi.

Ta’rif 1. $\psi_\ell(x)$ funksiya $\ell_N(x)$ funksionalning ekstremal funksiyasi deyiladi, agar quyidagi tenglik o‘rinli bo‘lsa,

$$(\ell_N(x), \psi_\ell(x)) = \left\| \ell_N \middle| H_2^{\mu*}(0,1) \right\| \cdot \left\| \psi_\ell \middle| H_2^{\mu}(0,1) \right\|. \tag{7}$$

1.2 paragrafda (1) - ko‘rinishdagi kvadratur formulaning (2) - xatolik funksionali ekstremal funksiyasi va normasini topish qaraladi va quyidagi isbotlangan:

Teorema 1. (2) - xatolik funksionalining ekstremal funksiyasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$\psi_\ell(x) = [p(x) \cdot \varepsilon_{[0,1]}(x)] * v_m(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta v_m(x - h\beta), \tag{8}$$

bunda $v_m(x) = F^{-1}[(1+y^2)^{-m}](x)$, $H_2^{\mu*}(R)$ fazoda xatolik funksionali normasining kvadrati quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$\left\| \ell_N(x) \middle| H_2^{\mu*}(R) \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^{-1}\left\{ (1+y^2)^{-m/2} F[\ell_N(x)](y) \right\}(x) \right|^2 dx.$$

1.3 paragrafda optimal kvadratur formulaning mavjudligi va yagonaligi yaqqol ko‘rsatilgan va quyidagilar isbotlangan.

Lemma 1. Quyidagi tenglik o‘rinlidir

$$\left\| \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x - h\beta) \mid H_2^{\mu*} \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta v_{\frac{m}{2}}(x - h\beta) \right|^2 dx.$$

Lemma 2. Quyidagi

$$\left\{v_{m/2}(x-\beta h)\right\}_{\beta=0}^{N}$$

sistema chiziqli bog‘liq bo‘lmagan sistemadan iboratdir.

Bundan esa $\delta\left(x-h\beta\right), \beta=0,1,...,N$ ning ham $H_2^{\mu*}\left(R\right)$ fazoda chiziqli bog‘liq emasligi kelib chiqadi. Shunday qilib, $v_{m/2}\left(x-h\beta\right), \beta=0,1,...,N$ funksiyaning chiziqli qobig‘i $L_2\left(R\right)$ fazoning $\left(N+1\right)$- o‘lchovli fazo ostidan iborat bo‘ladi. Optimal kvadratur formulaning mavjudligi va yagonaligi yuqoridagi lemmalar va ushbu fazo ostidagi mavjudlik va yagonalik nazariyalari hamda eng yaxshi yaqinlashishdan kelib chiqadi.

Shunday qilib, quyidagi o‘rinli:

Teorema 2. L. Xyormanderning $H_2^{\mu}\left(R\right)$ fazodagi optimal kvadratur formulaning quyidagi

$$\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta v_m(h\alpha-h\beta)=\int_{-\infty}^{\infty}\varepsilon_{[0,1]}(y)\cdot v_m(h\alpha-y)dy,\ \alpha=0,1,2,...,N, \tag{9}$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi koeffitsiyentlari mavjud va u yagonadir.

1.4. paragrafda esa $H_2^{\mu}\left(R\right)$ fazoda kvadratur formulalarning optimal koeffitsiyentlarini aniqlash algoritmi qaralgan va (9) sistemani har doim ham ma’lum bo‘lgan metodlar bilan yechib bo‘lmasligi isbotlangan. Shuning uchun ham S.L.Sobolev tomonidan kvadratur formulaning optimal koeffitsiyentlarini aniqlaydigan metod tavsiya qilingan.

Shunga asosan $C_\beta=C[\beta]$ va $v_m(h\beta)=v_h^{(m)}[\beta]$ belgilashlarni kiritib, (9)-sistemani diskret argumentli funksiyalarni o‘ramasi shaklida yozish mumkin, ya’ni:

$$C[\beta]*v_h^{(m)}[\beta]=f_m[\beta], \beta=0,1,...,N, \tag{10}$$

$$C[\beta]=0,\ h\beta\notin[0,1], \tag{11}$$

bu yerda

$$f_m[\beta]=\int_0^1 p(y)\cdot v_m(h\beta-y)dy. \tag{12}$$

(10) - (11) tenglamalar sistemasini B sistema deb belgilaymiz.

Quyidagi masalani qaraymiz.

B masala. *$f_m[\beta]$ berilganda B sistemani qanoatlantiruvchi $C[\beta]$ diskret funktsiyani topish.*

Bu metodning asosiy g‘oyasi $C[\beta]$ noma’lum funksiyani $u_h^m[\beta]=u^m(h\beta)$ funksiyaga almashtrishdan iboratdir.

Aynan esa, $C[\beta]$ o‘rniga

$$u_h^m[\beta]=v_h^{(m)}[\beta]*C[\beta], \tag{13}$$

noma’lum funksiya kiritiladi.

U holda quyidagi

$$D_m[\beta]*v_h^m[\beta]=\delta\left[\beta\right], \tag{14}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $D_m(h\beta)=D_h^{(m)}[\beta]$, operatorni topish zarur bo‘ladi, bu yerda $\delta[\beta]=\begin{cases}1, & \beta=0,\\ 0, & \beta\neq 0.\end{cases}$

(14) ni hisobga olib (13) dan quyidagini olamiz

$$C[\beta]=D_h^{(m)}[\beta]*u[\beta]. \tag{15}$$

Endi navbatdagi masalani yechishga to‘gri keladi.

B1 masala. $h\beta\notin[0,1]$ bo‘lganda $u_h^{(m)}[\beta]$ funktsiyani topish.
Quyidagi isbotlangan:

Teorema 3. $u^m(h\beta)$ funksiya quyidagi ko‘rinishga ega

$$u_h^m[\beta]=\begin{cases}f_m[\beta], & h\beta\in[0,1]\\ \sum\limits_{\alpha=0}^{N}C[\alpha]v_m(h\beta-h\alpha), & h\beta\notin[0,1]\end{cases}. \tag{16}$$

1.5. paragrafda optimal koeffitsiyentlarni topish uchun S.L. Sobolevning yaratgan algoritmini modifikatsiyalash qaralgan. Ushbu usul yordamida $F\left[\hat{v}_m(x)\right](p)$ diskret funksiyani aniqlash uchun Furye almashtrishlari yordamida isbotlangan ushbu lemmadan foydalanamiz.

Lemma 3. Quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi

$$\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}h^{-1}[1+(p-\beta h^{-1})^2]^m=\sum_{\beta=-\infty}^{\infty}v_m(h\beta)\mathrm{e}^{(2\pi i\beta hp)}. \tag{17}$$

Dissertatsiyaning **“Differensial operatorlar va ularning diskret analoglarini qurish hamda fundamental yechimlarini topish”** deb nomlangan ikkinchi bobi differensial operatorlar, ularning diskret analoglari va fundamental yechimlarini topishga bag‘ishlangan.

Ba’zi bir differentsial operatorlarning diskret analogi optimal kvadratur, kubatur va optimal interpolyatsion formulalarning koeffitsiyentlarini topish uchun muhim rol o‘ynaydi. Shu munosabat bilan biz differentsial operatorni qurish masalasini qaraymiz va $v_m(x)$ funksiya $\left(1-\frac{d^2}{(2\pi)^2dx^2}\right)^m$ differensial operatorning fundamental yechimidan iborat ekanligini ko‘rsatamiz. Bu differensial operatorning diskret analogi bo‘lgan $D_m[\beta]$ operatori quyidagi

$$D_m[\beta]*v_m[\beta]=\delta[\beta],$$

tenglikni qanoatlantirishini ham ko‘rsatamiz, bu yerda

$$\delta[\beta]=\begin{cases}1, & \beta=0\\ 0, & \beta\neq 0\end{cases},\qquad h=\frac{1}{N},\omega>0,N=1,2,...$$

2.1. paragrafda $2m-$ tartibli differensial operatorning va fundamental yechimini topish uchun quyidagi lemmadan foydalanamiz.

Lemma 4. Quyidagi rekurrent formula o‘rinlidir

$$\left(1-\frac{d^2}{\left(2\pi\right)^2 dx^2}\right)\nu_m\left(x\right)=\nu_{m-1}\left(x\right),\ m=2,3,...,\ \ \nu_1\left(x\right)=\pi \mathrm{e}^{-2\pi|x|}. \qquad (18)$$

Ushbu lemma yordamida quyidagi teorema isbotlanadi.

Teorema 4. Diskret analogi $D_m[\beta]*\nu_m[\beta]=\delta[\beta]$ tenglikni qanoatlantiruvchi $D_m\left[\beta\right]$ diskret funksiyaning $2m$- tartibli differensial operatori quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$\left(1-\frac{d^2}{\left(2\pi\right)^2 dx^2}\right)^m, \qquad (19)$$

va $\nu_m\left(x\right)$ funksiya (19) differensial operatorning fundamental yechimidan iborat bo‘lib, ya’ni quyidagi tenglik o‘rinlidir

$$\left(1-\frac{d^2}{\left(2\pi\right)^2 dx^2}\right)^m \nu_m\left(x\right)=\delta\left(x\right). \qquad (20)$$

2.2. paragrafda $D_1\ [h\beta]$ dikret operator qurilishining algoritmi berilgan. Ushbu

$$D_1\left[\beta\right]*\nu_1\left[\beta\right]=\delta\left[\beta\right], \qquad (21)$$

teglikni qanoatlantiruvchi $D_1\ [h\beta]$ operatorini qurish algoritmiga asosan quyidagi isbotlanadi, bu yerda

$$\nu_1\left[\beta\right]=F^{-1}\left\{\left[1+y^2\right]^{-1}\right\}\left(x\right), x=h\beta$$

Teorema 5. $\left[1-\frac{1}{\left(2\pi\right)^2}\frac{d^2}{dx^2}\right]$ differensial operatorining (21) – tenglikni qanoatlantiruvchi $D_1\left[\beta\right]$ diskret analogi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$D_1\left[\beta\right]=\frac{1}{\pi}\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{4\pi h}+1}{\mathrm{e}^{4\pi h}-1}, \ \beta=0\\[2mm] \dfrac{\mathrm{e}^{4\pi h}}{1-\mathrm{e}^{4\pi h}}, \ |\beta|=1.\end{cases}$$

2.3. Paragrafda bir differensial operatorining $D_m\left(h\beta\right)$ dikret analogini qurish algoritmi qaraladi va $m=2$ da $D_2\left(h\beta\right)$ operatorining aniq ko‘rinishi ko‘rsatilgan bo‘lib, quyidagi isbotlanadi.

Teorema 6. $D_2\left[\beta\right]*\nu_2\left[\beta\right]=\delta\left(h\beta\right)$ tenglikni qanoatlantiruvchi $D_2\left[\beta\right]$ operator quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$D_2[\beta]=\frac{1}{\pi\left(2\pi h\operatorname{ch}(2\pi h)-\operatorname{sh}(2\pi h)\right)}\begin{cases}2\left(\dfrac{2\pi h-\operatorname{sh}(2\pi h)\operatorname{ch}(2\pi h)}{2\pi h\operatorname{ch}(2\pi h)-\operatorname{sh}(2\pi h)}-2\operatorname{ch}(2\pi h)\right)+\dfrac{A_1}{\lambda_1},\ \beta=0\\ 1+A,\ |\beta|=1\\ A_1\lambda_1^{|\beta|-1},\ |\beta|\geq 2\end{cases}\qquad(22)$$

bu yerda $\lambda_1=\dfrac{\left(2\pi h-\operatorname{sh}(2\pi h)\operatorname{ch}(2\pi h)\right)-\sqrt{\left(1-\operatorname{ch}^2(2\pi h)\right)\left(4\pi^2h^2-\operatorname{sh}^2(2\pi h)\right)}}{2\pi h\operatorname{ch}(2\pi h)-\operatorname{sh}(2\pi h)}$,

$|\lambda_1|<1$ va h – kichik parametr.

2.4. - 2.5. paragraflarda $\left[1-\dfrac{1}{(2\pi\omega)^2}\dfrac{d^2}{dx^2}\right]^m$ differensial operatorning $D_m[\beta]$ diskret analogini qurish uchun Furye almashtirishidan aniqlangan $\overset{\ddagger\cdot}{v}_m(x)$ funksiyasi qaralgan.

Teorema 7. $F[\overset{\ddagger\cdot}{D}_m(x)]=\left\{F[\overset{\ddagger\cdot}{v}_m(x)]\right\}^{-1}$ tenglikni qanoatlantiradigan $\left[1-\dfrac{1}{(2\pi\omega)^2}\dfrac{d^2}{dx^2}\right]^m$ differensial operatorining $D_m[\beta]$ diskret analogini aniqlash uchun $\overset{\ddagger\cdot}{v}_m(x)$ funksiyani Furye almashtirishi, quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi

$$F\left[\overset{\ddagger\cdot}{v}_m(x)\right](p)=\frac{\pi(2m-2)!}{2^{2m-2}[(m-1)!]^2}\left[\frac{\lambda\left(e^{4\pi h}-1\right)}{-\lambda^2e^{2\pi h}+\lambda\left(e^{4\pi h}+1\right)-e^{2\pi h}}\right]+$$

$$\frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!(4\pi h)^k}{k!(m-k-1)!}\left[\frac{e^{2\pi h}}{e^{2\pi h}-\lambda}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{\lambda}{e^{2\pi h}-\lambda}\right)^i\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{\rho=0}^{i}(-1)^{i-\rho}\frac{i!}{\rho!(i-\rho)!}\rho^k+\frac{\lambda e^{2\pi h}}{\lambda e^{2\pi h}-1}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{\lambda e^{2\pi h}-1}\right)^i\sum_{\rho=0}^{i}(-1)^{i-\rho}\frac{i!}{\rho!(i-\rho)!}\rho^k\right],\qquad(23)$$

bu yerda $\Delta^i\gamma^k$ - γ^k dan olingan $i-$ tartibli chekli ayirma, $\Delta^i0^k=\Delta^i\gamma^k\Big|_{\gamma=n}$.

Teorema 8. (20) tenglikni qanoatlantiruvchi $\left[1-\dfrac{1}{(2\pi)^2}\dfrac{d^2}{dx^2}\right]^m$ differensial operatoratorining diskret analogi quyidagicha aniqlanadi

$$F\left[\overset{\ddagger}{D}_m[\beta]\right]=\frac{2^{2m-2}\left((m-1)!\right)^2}{\pi(2m-2)!}\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m-1}\dfrac{T^m\left(\lambda_{1,k}\right)\lambda_{1,k}^{|\beta|}}{\lambda_{1,k}^2L_{2m-2}'\left(\lambda_{1,k}\right)}, & |\beta|\geq 2\\ 1+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\dfrac{T^m\left(\lambda_{1,k}\right)}{\lambda_{1,k}^2L_{2m-2}'\left(\lambda_{1,k}\right)}, & |\beta|=1\\ \sum\limits_{k=1}^{m-1}\dfrac{T^m\left(\lambda_{1,k}\right)}{\lambda_{1,k}^2L_{2m-2}'\left(\lambda_{1,k}\right)}-\dfrac{2m\mathrm{ch}(2\pi h)c_{2m-2}+c_{2m-3}}{c_{2m-2}^2}, & |\beta|=0\end{cases}, \quad (24)$$

bu yerda

$$T^m(\lambda)=\left(\lambda^2-2\lambda\mathrm{ch}(2\pi h)+1\right)^m,$$

$$L_{2m-2}(\lambda)=-2\lambda\mathrm{sh}(2\pi h)T^{m-1}(\lambda)+\sum_{k=1}^{m-1}a_kP_{2k}(\lambda)T^{m-k-1}(\lambda),$$

bunda

$$P_{2k}(\lambda)=\mathrm{e}^{-2\pi h}\left(\left(\lambda\mathrm{e}^{2\pi h}-1\right)^{k+1}\right)E_{k-1}\left(\lambda\mathrm{e}^{-2\pi h}\right)+\ \mathrm{e}^{2\pi h}\left(\left(1-\lambda\mathrm{e}^{-2\pi h}\right)^{k+1}\right)E_{k-1}\left(\lambda\mathrm{e}^{2\pi h}\right)$$

Xulosa qilib shuni qayd qilamizki, qurilgan differensial operatorlar mexanikada, tebranishlar nazariyasida nihoyatda juda ko‘p qo‘llaniladi.

Dissertatsiyaning uchinchi bobida L. Xyormanderning $H_2^\mu(R)$ fazosida taqribiy integrallash formulalarining optimizatsiya masalasi qaralgan. Bu yerda optimal kvadratur formulalar qurish masalasidan iborat bo‘lgan $H_2^\mu(R)$ L. Xyormander fazosida $m=1,2$ bo‘lganda panjarali kvadratur formulalarning optimal koeffitsiyentlarini va $u_2(h\beta)$ noma’lum funksiyasini topish algoritmi berilgan. Shu maqsadda xatolik funksionali normasiga eng kichik qiymat beruvchi kvadratur formulalarning koeffitsientlarini topishimiz kerak. Keyinchalik, optimal kvadratur formulalar koeffitsiyentlari uchun umumlashgan funksiyalardan iborat ifodalarga Furye almashtirishlarini qo‘llab, chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz. Shunday qilib, biz panjarali optimal kvadratur formulaning koeffitsiyentlari uchun aniq formulalar topamiz. Shu bilan birga, biz ma’lum differensial operatorning diskret analoglarini va uning xossalarini qo‘llab, optimal koeffitsiyentlarni hamda panjarali optimal kvadratur formulalar koeffitsientlarini yaqqol ifodasini olishni algoritmini yaratdik. Shu bilan birga panjarali optimal kvadratur formulalar xatolik funksionallari normasining kvadratini hisoblaydigan formulani ham oldik.

3.1 paragrafda $m=1$ bo‘lganda $H_2^\mu(R)$ fazosida optimal panjarali kvadratur formulaning koeffisiyentlari hisoblangan.

Quyidagi isbotlangan:

Teorema 9. L.Xyormanderning $H_2^\mu(R)$ fazosida (1) ko‘rinishdagi barcha kvadratur formulalar orasidan

$$\overset{0}{C}[\beta]=\mathrm{cth}(2\pi h)\cdot\int_0^1 p(y)\mathrm{e}^{-2\pi|h\beta-y|}dy-\frac{1}{2\mathrm{sh}(2\pi h)}\int_0^1 p(y)\mathrm{e}^{-2\pi|h(\beta-1)-y|}dy-$$

$$-\frac{1}{2\operatorname{sh}\left(2\pi h\right)}\int_0^1 p(y)\mathrm{e}^{-2\pi|h(\beta+1)-y|}dy, \quad \beta=1,2,...,N-1, \tag{25}$$

$$\overset{0}{C}[0]=\operatorname{cth}(2\pi h)\int_0^1 p(y)\mathrm{e}^{-2\pi y}dy-\frac{\mathrm{e}^{-2\pi h}}{2\operatorname{sh}(2\pi h)}\int_0^1 p(y)\mathrm{e}^{-2\pi y}dy-$$
$$-\frac{1}{2\operatorname{sh}(2\pi h)}\int_0^1 p(y)\mathrm{e}^{-2\pi|h-y|}dy, \tag{26}$$

$$C[N]=\operatorname{cth}(2\pi h)\cdot\int_0^1 p(y)\mathrm{e}^{-2\pi|Nh-y|}dy-\frac{1}{2\operatorname{sh}(2\pi h)}\int_0^1 p(y)\mathrm{e}^{-2\pi|h(N-1)-y|}dy-$$
$$-\frac{1}{2\operatorname{sh}\left(2\pi h\right)}\int_0^1 p(y)\mathrm{e}^{-2\pi|h(N+1)-y|}dy. \tag{27}$$

koeffitsiyentlar bilan aniqlanadigan

$$\int_0^1 p(x)f(x)dx\approx\sum_{\beta=0}^{N}\overset{0}{C}[\beta]f[\beta], \tag{28}$$

vaznli panjarali kvadratur formula yagona optimal kvadratur formuladir, bu yerda

$$\ell_N(x)=p\left(x\right)\varepsilon_{[0,1]}(x)-\sum_{\beta=0}^{N}\overset{0}{C}_{\beta}\,\delta(x-x_{\beta}), \tag{29}$$

(28) - optimal kvadratur formulaning (29) - xatolik funksionalidan iborat.
Agar (28) - kvadratur formulada $p\left(x\right)=1$ deb olsak, u holda quyidagilar o‘rinlidir.

Natija 1. L. Xyormanderning $H_2^{\mu}\left(R\right)$ fazosida barcha (1) ko‘rinishdagi kvadratur formulalar orasidan, teng taqsimlangan tugun nuqtalar orqali (2) - funksional xatolikning normasini minimumga erishtiradigan optimal koeffitsiyentlar bilan $m=1$ va $p\left(x\right)=1$ bo‘lganda, optimal kvadratur formulaning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi

$$\int_0^1 f\left(x\right)dx\cong\frac{\left[\operatorname{ch}\left(2\pi h\right)-1\right]}{\pi\operatorname{sh}\left(2\pi h\right)}\left[\frac{1}{2}\left(f\left(0\right)+f\left(1\right)\right)+\sum_{\beta=1}^{N-1}f\left(h\beta\right)\right], \tag{30}$$

bu yerda

$$C\left[0\right]=\frac{\left[\operatorname{ch}\left(2\pi h\right)-1\right]}{2\pi\operatorname{sh}\left(2\pi h\right)},$$
$$C\left[\beta\right]=\frac{\left[\operatorname{ch}\left(2\pi h\right)-1\right]}{\pi\operatorname{sh}\left(2\pi h\right)},\ \beta=\overline{1,N-1}, \tag{31}$$
$$C\left[N\right]=\frac{\left[\operatorname{ch}\left(2\pi h\right)-1\right]}{2\pi\operatorname{sh}\left(2\pi h\right)},$$

bunda h kichik parametr.

Agar (28) kvadratur formulada $p(x)=\mathrm{e}^{2\pi i\omega x}$ deb olsak, u holda quyidagilar o‘rinlidir.

Natija 2. L. Xyormanderning $H_2^{\mu}(R)$ fazosida barcha (1) ko‘rinishdagi kvadratur formulalar orasidan, teng taqsimlangan tugun nuqtalar orqali (3) funksional xatolikning normasini minimumga erishtiradigan optimal koeffitsiyentlar bilan $m=1$ va $p(x)=\mathrm{e}^{2\pi i\omega x}$ bo‘lganda, optimal kvadratur formulaning ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{2\pi i\omega x} f(x)dx \approx \sum_{\beta=0}^{N} \overset{0}{C}[\beta] f[\beta], \tag{32}$$

bu yerda

$$\begin{aligned}
C[0] &= \frac{1}{2\pi\left(1+\omega^2\right)\mathrm{sh}(2\pi h)}\left[\mathrm{e}^{2\pi h}-\mathrm{e}^{2\pi i\omega h}+i\omega\,\mathrm{sh}(2\pi h)\right],\\
C[\beta] &= \frac{\mathrm{e}^{2\pi i\omega h\beta}}{\pi\left(1+\omega^2\right)\mathrm{sh}(2\pi h)}\left[\mathrm{ch}(2\pi h)-\cos(2\pi h)\right],\ \beta=\overline{1,N-1}\ ,\\
C[N] &= \frac{\mathrm{e}^{2\pi i\omega}}{2\pi\left(1+\omega^2\right)\mathrm{sh}(2\pi h)}\left[\mathrm{ch}(2\pi h)-\mathrm{e}^{-2\pi i\omega h}-i\sin(2\pi h)\cos(2\pi h)\right],
\end{aligned} \tag{33}$$

bunda h kichik parametr.

3.2 paragraf $u_2(h\beta)$ noma’lum funksiyani topish algoritmiga bag‘ishlangan va quyidagi isbotlangan

Lemma 5. $u_2(h\beta)$ noma’lum funksiyaning ko‘rinishi quyidagicha

$$u_2(h\beta)=\begin{cases}\mathrm{e}^{2\pi h\beta}\left(a_1^-+a_2^-h\beta\right), & \beta<0,\\ f_2[\beta], & 0\le\beta\le N,\\ \mathrm{e}^{-2\pi h\beta}\left(a_1^++a_2^+h\beta\right), & \beta>N.\end{cases} \tag{34}$$

3.3 paragrafda $H_2^{\mu}(R)$ L.Xyormander fazosida kvadratur formulalarning optimal koeffitsiyentlarini topish masalasi muhokama qilingan. Bu yerda 3.2 paragrafda keltirilgan algoritmdan foydalanib, $m=2$ da (1) ko‘rinishdagi kvadratur formulaning optimal koeffitsiyentlari uchun ixtiyoriy $N=1,2,...$ larda oshkor formulalarni olamiz.

Teorema 10. L. Xyormanderning $H_2^{\mu}(R)$ fazosida teng taqsimlangan tugun nuqtalar bilan, (29) xatolik funksionalini minimumga erishtiradigan (28) - kvadratur formulaning optimal koeffitsiyentlari, $m=2$ va $p(x)=1$ bo‘lganda quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi

$$C[\beta]=\rho\left\{k_1-k_2\begin{cases}\left(1+\lambda_1^N\right),\beta=0,\\ \left(\lambda_1^\beta+\lambda_1^{N-\beta}\right),\beta=\overline{1,N-1},\\ \left(\lambda_1^N+1\right),\beta=N,\end{cases}\right\},$$

bu yerda

$$k_1=\left[d+2\left(1+A_1\right)\right]+2\frac{A_1\lambda_1}{1-\lambda_1}\quad \text{va}\quad k_2=A_1\left(M-\frac{1-(1+\pi)\mathrm{e}^{-2\pi}}{2\left(\mathrm{e}^{2\pi h}-\lambda_1\right)}\right), \tag{35}$$

$$M=\left\{\frac{1}{2}\left\{2\frac{1}{1-\lambda_1}-\frac{\mathrm{e}^{-2\pi}}{\mathrm{e}^{2\pi h}-\lambda_1}\left[1+\pi+\frac{\pi h\mathrm{e}^{2\pi h}}{\mathrm{e}^{2\pi h}-\lambda_1}\right]+\frac{\mathrm{e}^{2\pi h}}{1-\lambda_1\mathrm{e}^{2\pi h}}\left[\frac{\pi h}{1-\lambda_1\mathrm{e}^{2\pi h}}-1\right]\right\}\right\}, \tag{36}$$

$$A_1=\frac{\lambda_1^4-4\mathrm{ch}(2\pi h)\lambda_1^3+2\left(1+2\mathrm{ch}^2(2\pi h)\right)\lambda_1^2-4\mathrm{ch}(2\pi h)\lambda_1+1}{\lambda_1^2-1}, \tag{37}$$

$$\lambda_1=\frac{\left(2\pi h-\mathrm{sh}(2\pi h)\mathrm{ch}(2\pi h)\right)-\sqrt{\left(1-\mathrm{ch}^2(2\pi h)\right)\left(4\pi^2h^2-\mathrm{sh}^2(2\pi h)\right)}}{2\pi h\mathrm{ch}(2\pi h)-\mathrm{sh}(2\pi h)}, \tag{38}$$

$$\rho=\frac{1}{\pi\left(2\pi h\mathrm{ch}(2\pi h)-\mathrm{sh}(2\pi h)\right)}, \tag{39}$$

$$d=2\left(\frac{2\pi h-\mathrm{sh}(2\pi h)\mathrm{ch}(2\pi h)}{2\pi h\mathrm{ch}(2\pi h)-\mathrm{sh}(2\pi h)}-2\mathrm{ch}(2\pi h)\right)+\frac{A_1}{\lambda_1} \tag{40}$$

bunda A_1 va λ_1 (11), (12) dan aniqlanadi va $|\lambda_1|<1$, h - kichik parametr.

3.4. paragrafda L.Xyormander fazosida optimal kvadratur formulaning xatolik funksionali normasi hisoblangan, ya'ni quyidagi o'rinli.

Teorema 11. L. Xyormanderning $H_2^\mu(R)$ fazosida (28) - kvadratur formula xatolik funksionali normasining kvadrati quyidagi tenglik bilan aniqlanadi. $\left\|\overset{o}{\ell}\,|\,H_2^{\mu*}(R)\right\|^2=\int_0^1\int_0^1 v_m(x-y)dxdy-2\sum_{\beta=0}^{N}\overset{o}{C}_\beta\int_0^1 v_m(x-h\beta)dx+\sum_{k=0}^{N}\sum_{\beta=0}^{N}\overset{o}{C}_\beta\overset{o}{C}_k v_m(hk-h\beta)$.

bu yerda $\quad v_m(x)=\dfrac{\pi\,\mathrm{e}^{-2\pi|x|}}{2^{2m-2}\cdot(m-1)!}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!\cdot(4\pi)^k}{k!\cdot(m-k-1)!}|x|^k$.

XULOSA

Dissertatsiya ishi differensiallanuvchi funksiyalarning L. Xyormander fazolarida integrallarni taqribiy hisoblash uchun optimal kvadratur formulalar qurishga bag'ishlangan.

Tadqiqotning asosiy natijalari yangi bo'lib, ular quyidagilardan iborat:

1. L. Xyormander fazosida vaznli kvadratur formula xatolik funksionalining ekstremal funksiyasi topilgan;

2. Vaznli kvadratur formula xatolik funksionalining normasi hisoblangan.

3. L. Xyormander fazosida vaznli optimal kvadratur formula mavjudligi va yagonaligi isbotlangan;

4. Vaznli optimal kvadratur formulalar qurishda eng katta ahamiyatga ega bo‘lgan $2m-$tartibli differensial operatorining $D_m[\beta]$ diskret analogi qurilgan;

5. L. Xyormanderning $H_2^{\mu}(R)$ fazosida optimal kvadratur formulalarini qurish algoritmi ishlab chiqilgan;

6. Ushbu algoritm $m=1$ va $p(x)=1$ hollari uchun realizatsiya qilingan;

7. $m=1,2$ hollari uchun yangi optimal kvadratur formulalar olingan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

**ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТРАНСПОРТНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

ЖАЛОЛОВ ИКРОМЖОН ИСОМИДДИНОВИЧ

ОПТИМАЛЬНЫЕ КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ Л. ХЁРМАНДЕРА

**01.01.03 - Вычислительная и дискретная математика
(физика и математика)**

**АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Ташкент – 2025

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан за № B2021.2.PhD/FM604.

Диссертация выполнена в Ташкентском государственном транспортном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный руководитель: **Шадиметов Холматвай Махкамбаевич**
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: **Хаётов Абдулло Рохмонович**
доктор физико-математических наук, профессор

Урунбоев Эркин
доктор физико-математических наук, доцент

Ведущая организация: **Термезский государственный университет**

Защита диссертации состоится «______» _____________ 2025 года в ______ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за № _____). Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24.

Автореферат диссертации разослан «______» _______________2025 года.

(протокол рассылки №________ от «______» _______________2025 года).

М.М. Арипов
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

З.Р. Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

Р.Д. Алоев
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученой степени доктора наук, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность востребованность темы диссертации. В мире, многочисленные научные и практические исследования, сосредоточенные на анализе теории колебаний, электродинамики, дифференциальных уравнений с частными производными в задачах техники, численное решение регулярных и сингулярных интегральных уравнений с высокой точностью, в основном приводится к построению оптимальных квадратурных и кубатурных формул. Обычно оптимизация приближенных вычислений определённых интегралов позволяет предотвращать больших количеств вычислений. Оптимизация процессов приближенных вычислений определённых интегралов при больших вычислениях будет полезными, если вычисления производиться с помощью квадратурных и кубатурных формул, при этом оптимизируется и сами формулы. Поэтому построение оптимальных квадратурных и кубатурных формул, создание алгоритмов и приблизительное вычисление определённых интегралов с высокой точностью, а также построение оптимальных квадратурных формул дифференцируемых функций в пространстве Л.Хёрмандера считаются одним из основных задач вычислительной математики.

В настоящее время в мире большое значение приобретает построения оптимальных и наилучших квадратурных, кубатурных формул, которые имеют высокую точность в функциональных пространствах Л.Хёрмандера. В частности, широко используется построение оптимальных и наилучших квадратурных, кубатурных формул в пространстве Л. Хёрмандера, доказательство их существования и единственности в этом пространстве, а также оценка их погрешностей. Известно, что численно-аналитические решения дифференциальные уравнения в частных производных, регулярных и сингулярных интегральных уравнений, образующихся при математическом моделировании колебательных процессов, выражаются через оптимальные квадратурные и кубатурные формулы и являются объектом исследования в теории численных методов, вычислительной математике и других подобных задач. По этой причине построение оптимальных квадратурных и кубатурных формул в пространстве Л.Хёрмандера, оценки их погрешностей является одним из целевых научных исследований.

В нашей стране большое внимание уделяется фундаментальным наукам, имеющие научные и практические применения, такие как физика солнца, теория колебаний, решения задач механики численно-аналитическими методами. В частности, достигались важные результаты по построению оптимальных квадратурных и кубатурных формул, оценки их погрешности в пространствах Л.Хёрмандера. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по «Функциональному анализу, математическая физика, дифференциальные уравнения, математическое моделирование, вычислительная математика и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика»[2] является одной из основных задач института Математики АНРУз имени В.И. Романовского. Для обеспечения выполнения постановления имеет важное значение использование преобразования Фурье на основе обобщённых функций, построение квадратурных и кубатурных формул, развитие теорий оптимальных квадратурных формул для оценки погрешностей в пространстве Л. Хёрмандера.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан УП –№ 4947 от 07 февраля 2017 года “О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан”, УП-№60 от 28 января 2022 года “О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы”, в постановлениях ПП – № 2789 от 17 февраля 2017 года “О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности”, ПП – № 2909 от 20 апреля 2017 года “О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования”, ПП –№ 3682 от 27 апреля 2018 года “О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов”, ПП – № 4708 от 07 мая 2020 года “О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики”, а также в других нормативно–правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Результаты многих научных и практических исследований, таких как дифференциальные уравнения частных производных в задачах механики, теория колебаний, высокоточное численное решение регулярных и сингулярных интегральных уравнений приводится к построению оптимальных квадратурных и кубатурных формул. Решением таких задач занимались многие известные математики: Гаусс, Чебышев, Грегори, Эйлер, Ньютон и другие. При численно решение интегральных уравнений оптимальные квадратурные и кубатурные формулы имеет большое теоре-тическое значение. Поэтому многие исследование посвящается к построению оптимальных решетчатых квадратурных и кубатурных формулам, например, в работах С.Л. Соболева, А.Н. Колмогорова, С.М. Никольского, Н.С. Бахвалова, И. Бабушки, И.П. Мысовких, В.В. Иванова, Н.П. Корнейчука, D.A. Mclaren, Г.Н. Салихова, М.Д. Рамазанова, В.И. Половинкина, М.В. Носкова, Х.М. Шадиметова, А.Р. Хаётова и др. Классическая постановка теории кубатурных и квадратурных формул развивается в работах И.П. Мысовских, A. Sard, A.H. Stroud, A.D. Duran, Y.G. Shi, М.И. Исраилова.

[2] Постановление Президента Республики Узбекистан ПП–4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 7 мая 2020 года.

Важными задачами являются разработка новых алгоритмов построения оптимальных квадратурных формул, оценка их погрешностей в различных пространствах функций. Задачи вычисления нормы функционала погрешности квадратурных формул и построение оптимальной квадратурной формулы впервые рассмотрены в работах С.М. Никольского и А. Сардом. В работе А. А. Женсыкбаева задача решена для квадратурных формул для всех классов. В работах С.Л. Соболева рассмотрены задачи построения асимптотических квадратурных формул в основном в пространствах и когда нет возможности определения порядка сходимости к нулю нормы функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы. Задача построением оптимальных квадратурных формул над пространством впервые рассмотрен А. Сардом. В работе Коммана рассматривается задача А. Сарда при для произвольного N. Формулы алгебраической точности на сфере построили С.Л. Соболев и Г.Н. Салихов. В работах М.Д. Рамазанова и Т.Х. Шарипова создан новый алгоритм построения кубатурных формул с пограничным слоем, и они доказали асимптотическую оптимальность таких формул.

Особо следует отметить результаты трудов С.Л. Соболева, З.Ж. Жамалова, Х.М. Шадиметова, Г.В. Милованович, А. Кабада построения оптимальных квадратурных и интерполяционных формул, интерполяционных натуральных сплайнов, дающих минимум полу-норме в некоторых гильбертовых и банаховых пространствах основываясь на дискретные аналоги соответствующих дифференциальных операторов.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами научно-исследовательской организации, в котором выполняется диссертация. Диссертационное исследование выполнено в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ кафедры «Информатики и компьютерной графики» Ташкентского транспортного университета.

Целью исследования являются построение оптимальных решетчатых квадратурных формул и вычисление норм их функционалов погрешностей на классах дифференцируемых функций.

Задачи исследования.

определить экстремальной функции весовых квадратурных формул и вычислить нормы функционала погрешности;

доказать существование и единственность весовой оптимальной квадратурной формулы в пространстве Л. Хёрмандера $H_2^\mu(R)$;

построение дискретного аналога дифференциального оператора для определении оптимальных коэффициентов весовых квадратурных формул в пространстве $H_2^\mu(R)$ для произвольных целых m;

построение решетчатых оптимальных квадратурных формул в пространстве Л. Хёрмандера $H_2^\mu(R)$.

Объект исследования. Объектом исследования являются квадратурные формулы, дискретные аналоги линейных дифференциальных операторов в функциональном пространстве Л. Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$.

Предмет исследования. Экстремальные функции, оптимальные квадратурные формулы, дискретный аналог дифференциального оператора, обобщённые функции и квадратурные формулы в функциональном пространстве Л. Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$.

Методы исследования. Исследование весовых оптимальных квадратурных формул основывается на идеях функционального анализа, вычислительной математики, теорию дифференциальных уравнений, обобщённых функций, теории функций дискретного аргумента.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

получено выражение квадрата нормы функционала погрешности весовых квадратурных формул с использованием понятия экстремальной функции;

доказана существование и единственность весовой оптимальной квадратурной формулы методом Соболева в пространстве Л. Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$;

построен дискретный аналог дифференциального оператора для определения оптимальных коэффициентов весовых квадратурных формул в пространстве $H_2^{\mu}(R)$ для произвольных целых m;

построены решетчатые оптимальные квадратурные формулы с помощью дискретного аналога дифференциальных операторов в пространстве Л. Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$ в случае $m=1,2$.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

построенный в исследовательской работе дискретный оператор использовался при численном вычислении переменных коэффициентов ряда Фурье;

оптимальная решетчатая квадратурная формула использовалась при приблизительном решении уравнений математической модели, которые были сформулированы для определения эффективных параметров ветровых турбин.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов теории квадратурных формул, методов вычислительной математики, функционального анализа, теория дифференциальных уравнений, обобщённых функций, теории функций дискретного аргумента, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость исследовательской работы в пространстве Л. Хёрмандера объясняется построением решетчатых квадратурных формул для приближенного вычислении определённого интеграла с достаточной точностью и оцениванием сверху их погрешностей.

Практическая значимость результатов исследования объясняется применением построенных решетчатых квадратурных формул для приближенного вычисления определённого интеграла при определении эффективных параметров ветровых турбин.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных новых результатов по построении оптимальных решетчатых квадратурных формул в пространстве Л. Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$:

на основе дискретного аналога $D_m[\beta]$ дифференциального оператора высокого порядка построенный из оптимальных квадратурных формул использовалось в инновационном проекте «Создание ветровой турбины с вертикальной осью, рассчитанной на низкую скорость ветра» для определении эффективных параметров ветровых турбин. (Справка № 508-3 от 5 июня 2024 года Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева Академии Наук Республики Узбекистан). В результате это дало возможность приближенного решения математических модельных уравнений, которые сформулированы для определения эффективных параметров ветровых турбин;

оптимальные квадратурные формулы в пространстве Л. Хёрмандера дифференцируемых функций использованы в фундаментальном гранте «Построение гидродинамических моделей истечения жидкости и массопереноса в неоднородной поровой среде и численное исследование» для при численного исследования задач аномального переноса вещества для поровых сред макропоровых и микропоровых зон (Самаркандский государственный университет им. Шарофа Рашидова. Справка № 10-2750 от 10 июня 2024 года). В результате это дало возможность эффективного вычисления интегральных отношений для относительного полного и кумулятивного массопереноса между зонами в численных исследованиях задач массопереноса, учитывающее процесс адсорбции поровых сред макропоровых и микропоровых зон.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационного исследования обсуждались на 13 научно-практических конференциях, в том числе, на 10 международных и 3 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 26 научные работы, из них 12 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 3 опубликована в зарубежном журнале и 9 в республиканских изданиях, а также свидетельство об авторстве на компьютерную программу.

Объём и структура диссертации. Диссертация содержит 78 страниц и состоит из введения, трёх глав, приложение, заключения и список использованной литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **“Алгоритм нахождения оптимальных коэффициентов и оценка погрешности также существовании и единственности квадратурных формул в пространстве Л. Хёрмандера”** имеется некоторые сведения о непериодических пространствах $H_2^{\mu}(\Omega)$, $W_2^m(\Omega)$ и рассматриваются алгоритм построения оптимальных квадратурных формул, также найдена экстремальная функция для вычисления нормы функционала погрешности и доказана существования и единственности оптимальных квадратурных формул в пространстве Л. Хёрмандера.

В параграф 1.1. приведена сведения о непериодических пространствах, рассматриваются $H_2^{\mu}(\Omega)$ и $W_2^m(\Omega)$. Здесь пространств $H_2^{\mu}(\Omega)$ и $W_2^m(\Omega)$ совпадает только при в одном значение μ, т.е. при $\mu=\left(1+y^2\right)^{\frac{m}{2}}$ и они является изоморфны, их нормы эквивалентны, которые имеет следующий вид:

$$\left\| f(x) \middle| H_2^{\mu}(R) \right\| = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^{-1}\left[(1+y^2)^{m/2} \cdot F\left[f(x) \right](y) \right] \right|^2 dx \right\}^{1/2},$$

здесь F и F^{-1} прямое и обратное преобразования Фурье:

$$F\left[f(x)\right](y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{2\pi iyx}dx \text{ и } F^{-1}\left[f(x)\right](y)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{e}^{-2\pi iyx}dy.$$

Рассмотрим квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 p(x)f(x)dx \approx \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta} f(x_{\beta}), \tag{1}$$

и соответственно ее функционал погрешности

$$\ell_N(x)=\varepsilon_{[0,1]}(x)p(x)-\sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta}\delta(x-x_{\beta}) \tag{2}$$

в пространстве Л. Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$. Здесь C_{β}-коэффициенты, x_{β} ($x_{\beta}\in[0,1]$) - узлы квадратурной формулы, $p(x)$-весовая функция, $\varepsilon_{[0,1]}(x)$-характерическая функция отрезка $[0,1]$, $\delta(x)$-дельта функция Дирака и $f(x)\in H_2^{\mu}(R)$.

Разность между интегралом и квадратурной суммой называется погрешностью квадратурной формулы, а значение функции погрешности f в функциях определяется как

$$(\ell_N, f) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \ell_N(x)f(x)dx = \int_0^1 p(x)f(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C_{\beta} f(x_{\beta}) \tag{3}$$

(1) - квадратурная формула φ называется функцией ровно в том случае, если она обращается в нуль при замене φ вместо f в формуле (3). Набор функций, квадратурная формула которых точна, образует ядро функционал погрешности ℓ_N.

Из неравенства Коши-Шварца

$$|(\ell_N, f)| \leq \left\| \ell_N \mid H_2^{\mu *} \right\| \cdot \left\| f \mid H_2^{\mu} \right\|.$$

Абсолютное значение погрешности квадратурной формулы (1) оценивается сверху нормой функционал погрешности (2) в сопряжённое пространстве $H_2^{\mu *}$:

$$\left\| \ell_N \mid H_2^{\mu *} \right\| = \sup_{\left\| f \mid H_2^{\mu} \right\| = 1} |(\ell, f)|. \tag{4}$$

Теперь нам необходимо решить следующие задачи.

Задача 1. Найти норму функционала погрешности $\ell_N(x)$ квадратурной формулы (1) в пространстве $H_2^{\mu *}(0,1)$, т.е.

$$\left\| \ell_N(x) \middle| H_2^{\mu *}(0,1) \right\| = \sup_{\mathrm{P} f \mathrm{P} \neq 0} \left| \ell(f) \right| / \left\| f(x) \middle| H_2^{\mu}(0,1) \right\|. \tag{5}$$

Задача 2. В фиксированных узлах x_β необходимо найти такие коэффициенты C_β, чтобы выполнялось равенство

$$\left\| \overset{0}{\ell}_N(x) \middle| H_2^{\mu *}(0,1) \right\| = \inf_{C_\beta} \left\| \ell_N(x) \middle| H_2^{\mu *}(0,1) \right\| . \tag{6}$$

Для нахождения нормы функционала погрешности (2) в пространстве $H_2^{\mu *}(0,1)$ используется её экстремальная функция.

Определение 1. Функция $\psi_\ell(x)$ называется экстремальной функцией функционала $\ell_N(x)$, если выполняется следующая равенство:

$$(\ell_N(x), \psi_\ell(x)) = \left\| \ell_N \middle| H_2^{\mu *}(0,1) \right\| \cdot \left\| \psi_\ell \middle| H_2^{\mu}(0,1) \right\|. \tag{7}$$

В параграф 1.2. рассматриваются экстремальная функция функционала погрешности квадратурной формулы (1) и его норма и доказана следующая:

Теорема 1. Экстремальная функция функционала погрешности (2) имеет вид

$$\psi_\ell(x) = [p(x) \cdot \varepsilon_{[0,1]}(x)] * \nu_m(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \nu_m(x - h\beta), \tag{8}$$

где $\nu_m(x) = F^{-1}[(1+y^2)^{-m}](x)$, квадрат нормы функционала погрешности над пространством $H_2^{\mu *}(R)$ имеет вид

$$\left\| \ell_N(x) \middle| H_2^{\mu *}(R) \right\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| F^{-1}\left\{ (1+y^2)^{-m/2} F[\ell_N(x)](y) \right\}(x) \right|^2 dx.$$

В параграфе 1.3. рассматриваются исследование о существовании и единственности оптимальной квадратурной формулы и доказана следующие.

Лемма 1. Справедливо следующее равенство

$$\| \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta \delta(x-h\beta) \mid H_2^{\mu^*} \|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta v_{\frac{m}{2}}(x-h\beta) \right|^2 dx.$$

Лемма 2. Система

$$\left\{ v_{m/2}(x-\beta h) \right\}_{\beta=0}^{N}$$

является линейно независимой системой.

Отсюда следует также линейная независимость $\delta(x-h\beta),\ \beta=0,1,2,...,N$ в пространстве $H_2^{\mu}(R)$. Таким образом, линейная оболочка функций $v_{m/2}(x-h\beta),\ \beta=0,1,2,...,N$ является $(N+1)$ - мерным подпространством в $L_2(R)$. Из этих лемм и из теории существования и единственности наилучшего приближения под пространством следует существование и единственность оптимальной квадратурной формулы.

Таким образом справедлива следующая

Теорема 2. Оптимальная квадратурная формула коэффициенты, которая является решением системы линейный уравненный

$$\sum_{\beta=0}^{N} C_\beta v_m(h\alpha-h\beta) = \int_{-\infty}^{\infty} p(y)\cdot \varepsilon_{[0,1]}(y)]\cdot v_m(h\alpha-y)dy,\ \ \alpha=0,1,2,...,N \qquad (9)$$

существует и она является единственной в пространстве Л. Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$.

В параграфе 1.4. рассматриваются алгоритм определение оптимальных коэффициентов квадратурных формул пространстве $H_2^{\mu}(R)$ и доказана, что решить эту систему (9) известными методами удаётся не всегда, из за малости определителя системы. В связи с этим С.Л.Соболев предложил метод, который позволяет определять оптимальные коэффициенты квадратурной формулы.

Переобозначив $C_\beta = C[\beta]$ и $v_m(h\beta)=v_h^m[\beta]$, систему (9) можно записать в виде свёртки функций дискретного аргумента:

$$C[\beta] * v_h^m[\beta] = f_m[\beta], \beta=0,1,...,N, \qquad (10)$$

$$C[\beta]=0,\ h\beta \notin [0,1], \qquad (11)$$

где

$$f_m[\beta] = \int_0^1 p(y)\cdot v_m(h\beta-y)dy. \qquad (12)$$

Систему уравнений (10), (11) будем обозначать системой B.

Рассмотрим соответствующую задачу.

Задача *B. Найти дискретную функцию* $C[\beta]$, *удовлетворяющую системе B при заданных* $f_m[\beta]$.

Главная идея этого метода состоит в замене неизвестной функции $C[\beta]$ на функцию $u^m(h\beta)=u_h^m[\beta]$.

А именно, вместо $C[\beta]$ вводится неизвестная функция

$$u_h^m[\beta] = v_h^{(m)}[\beta] * C[\beta]. \qquad (13)$$

Тогда необходимо найти оператор $D_m(h\beta)=D_m[\beta]$, который удовлетворяет равенству

$$D_m[\beta]*v_h^m[\beta]=\delta[\beta], \tag{14}$$

где $\delta[\beta]=\begin{cases}1, \ \beta=0,\\ 0, \beta\neq 0.\end{cases}$

Из (13), учитывая (14), получим

$$C[\beta]=D_h^{(m)}[\beta]*u[\beta]. \tag{15}$$

Задача *B1. Найти функцию* $u_h^{(m)}[\beta]$ *при* $h\beta\notin[0,1]$.

Доказана следующая:

Теорема 3. Функция $u^m(h\beta)$ имеет вид

$$u_h^m[\beta]=\begin{cases} f_m[\beta], \ h\beta\in[0,1],\\ \sum\limits_{\alpha=0}^{N} C[\alpha]v_m(h\beta-h\alpha), \ h\beta\notin[0,1]. \end{cases} \tag{16}$$

В параграф 1.5. рассматривается модификация алгоритма С.Л.Соболева для нахождении оптимальных коэффициентов квадратурных формул. Для определения дискретной функции $F\left[\widehat{v}_m\left(x\right)\right]\left(p\right)$ воспользуемся этой леммой, которая доказывается с помощью преобразований Фурье.

Лемма 3. Справедливо следующее равенство

$$\sum_{\beta=-\infty}^{\infty} h^{-1}[1+(p-\beta h^{-1})^2]^m = \sum_{\beta=-\infty}^{\infty} v_m(h\beta)\mathrm{e}^{(2\pi i\beta hp)} \ . \tag{17}$$

Во второй главе диссертации, названной **“Построение дифференциальных операторов и их дискретных аналогов и нахождение фундаментальное решение”** посвящается нахождение дискретных аналогов и фундаментальных решений дифференциальных операторов.

Дискретные аналоги некоторых дифференциальных операторов играют важную роль при нахождении коэффициентов оптимальных квадратурных, кубатурных и оптимальных интерполяционных формул. В связи с этим мы рассмотрели задачу построения дифференциального оператора и показали, что функция $v_m\left(x\right)$ состоит из фундаментального решения дифференциального оператора $\left(1-\dfrac{d^2}{\left(2\pi\ \right)^2 dx^2}\right)^m$. Мы также показали, что оператор $D_m\left[\beta\right]$, являющийся дискретным аналогом этого дифференциального оператора, удовлетворяет следующему равенству

$$D_m\left[\beta\right]*v_m\left[\beta\right]=\delta\left[\beta\right] \ ,$$

где $\delta[\beta]=\begin{cases}1, \ \beta=0\\ 0, \ \beta\neq 0\end{cases}$, $\quad h=\dfrac{1}{N}, \omega>0, N=1,2,...$

В параграф 2.1 Для нахождении фундаментального решении дифференциального оператора $2m$-го порядка используем следующую лемму.

Лемма 4. Имеет места следующая рекуррентная формула

$$\left(1-\frac{d^2}{(2\pi)^2\,dx^2}\right)\nu_m(x)=\nu_{m-1}(x),\ m=2,3,...,\nu_1(x)=\pi\mathrm{e}^{-2\pi|x|}. \tag{18}$$

С помощью этой лемму доказаны следующие:

Теорема 4. Дифференциальный оператор $2m$-го порядка, которая функция $D_m[\beta]$ являющееся дискретным аналогам этого оператора, удовлетворяющее равенство $D_m[\beta]*\nu_m[\beta]=\delta[\beta]$, имеет следующий вид

$$\left(1-\frac{d^2}{(2\pi)^2\,dx^2}\right)^m, \tag{19}$$

и функция $\nu_m(x)$ являются фундаментальным решением дифференциального оператора (19), т.е. имеет место равенство

$$\left(1-\frac{d^2}{(2\pi)^2\,dx^2}\right)^m \nu_m(x)=\delta(x). \tag{20}$$

В параграфе 2.2 дан алгоритм построение дискретного оператора $D_1\,[h\beta]$.

Рассматривается алгоритм построение оператора $D_1\,[h\beta]$, которая удовлетворяет равенству

$$D_1[\beta]*\nu_1[\beta]=\delta[\beta], \tag{21}$$

где

$$\nu_1[\beta]=F^{-1}\left\{\left[1+y^2\right]^{-1}\right\}(x), x=h\beta .$$

Справедлива следующая

Теорема 5. Дискретный аналог $D_1[\beta]$ дифференциального оператора $\left[1-\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{d^2}{dx^2}\right]$ удовлетворяющий равенству (21) определяется формулой

$$D_1[\beta]=\frac{1}{\pi}\begin{cases}\dfrac{\mathrm{e}^{4\pi h}+1}{\mathrm{e}^{4\pi h}-1}, \beta=0,\\[2ex] \dfrac{\mathrm{e}^{4\pi h}}{1-\mathrm{e}^{4\pi h}}, |\beta|=1.\end{cases}$$

В параграфе 2.3 рассматривается алгоритм построении дискретного аналога одного дифференциального оператора $D_2(h\beta)$ и доказана следующая

Теорема 6. Оператор $D_2[\beta]$ удовлетворяющий равенству

$$D_2[\beta]*\nu_2[\beta]=\delta[\beta]$$

следующий имеет вид

$$D_2[\beta]=\frac{1}{\pi\left(2\pi h\operatorname{ch}(2\pi h)-\operatorname{sh}(2\pi h)\right)}\begin{cases}2\left(\dfrac{2\pi h-\operatorname{sh}(2\pi h)\operatorname{ch}(2\pi h)}{2\pi h\operatorname{ch}(2\pi h)-\operatorname{sh}(2\pi h)}-2\operatorname{ch}(2\pi h)\right)+\dfrac{A_1}{\lambda_1},\ \beta=0\\ 1+A,\ |\beta|=1\\ A_1\lambda_1^{|\beta|-1},\ |\beta|\geq 2\end{cases}\tag{22}$$

здесь

$$\lambda_1=\frac{\left(2\pi h-\operatorname{sh}(2\pi h)\operatorname{ch}(2\pi h)\right)-\sqrt{\left(1-\operatorname{ch}^2(2\pi h)\right)\left(4\pi^2h^2-\operatorname{sh}^2(2\pi h)\right)}}{2\pi h\operatorname{ch}(2\pi h)-\operatorname{sh}(2\pi h)}$$

$|\lambda_1|<1$ и h - малый параметр.

В параграфах 2.4 и 2.5 рассматривается построения преобразование Фурье функции $\overset{\ddagger\cdot}{\nu}_m(x)$ для определения дискретного аналога $D_m[\beta]$ дифференциального оператора $\left(1-\dfrac{d^2}{(2\pi)^2dx^2}\right)^m$.

Справедлива следующая

Теорема 7. Преобразование Фурье функции $\overset{\ddagger\cdot}{\nu}_m(x)$ для определения дискретного аналога $D_m[\beta]$ дифференциального оператора $\left[1-\dfrac{1}{(2\pi)^2}\dfrac{d^2}{dx^2}\right]^m$, удовлетворяющий равенству $F[\overset{\ddagger\cdot}{D}_m(x)]=\left\{F[\overset{\ddagger\cdot}{\nu}_m(x)]\right\}^{-1}$ имеет вид

$$F\left[\overset{\ddagger\cdot}{\nu}_m(x)\right](p)=\frac{\pi(2m-2)!}{2^{2m-2}[(m-1)!]^2}\left[\frac{\lambda\left(\mathrm{e}^{4\pi h}-1\right)}{-\lambda^2\mathrm{e}^{2\pi h}+\lambda\left(\mathrm{e}^{4\pi h}+1\right)-\mathrm{e}^{2\pi h}}\right]+$$

$$\frac{\pi}{2^{2m-2}(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!(4\pi h)^k}{k!(m-k-1)!}\left[\frac{\mathrm{e}^{2\pi h}}{\mathrm{e}^{2\pi h}-\lambda}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{\lambda}{\mathrm{e}^{2\pi h}-\lambda}\right)^i\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\sum_{\rho=0}^{i}(-1)^{i-\rho}\frac{i!}{\rho!(i-\rho)!}\rho^k+\frac{\lambda\mathrm{e}^{2\pi h}}{\lambda\mathrm{e}^{2\pi h}-1}\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{\lambda\mathrm{e}^{2\pi h}-1}\right)^i\sum_{\rho=0}^{i}(-1)^{i-\rho}\frac{i!}{\rho!(i-\rho)!}\rho^k\right],\tag{23}$$

где $\Delta^i\gamma^k$ - конечная разность порядка i от γ^k, $\Delta^i0^k=\Delta^i\gamma^k\Big|_{\gamma=n}$.

Теорема 8. Дискретный аналог дифференциального оператора $\left[1-\dfrac{1}{(2\pi)^2}\dfrac{d^2}{dx^2}\right]^m$, удовлетворяющиеся равенство (20) определяется

$$F\left[\overset{\ddagger}{D}_m[\beta]\right]=\frac{2^{2m-2}\left((m-1)!\right)^2}{\pi(2m-2)!}\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{T^m\left(\lambda_{1,k}\right)\lambda_{1,k}^{|\beta|}}{\lambda_{1,k}^2L'_{2m-2}\left(\lambda_{1,k}\right)}, & |\beta|\geq 2\\ 1+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{T^m\left(\lambda_{1,k}\right)}{\lambda_{1,k}^2L'_{2m-2}\left(\lambda_{1,k}\right)}, & |\beta|=1\\ \sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{T^m\left(\lambda_{1,k}\right)}{\lambda_{1,k}^2L'_{2m-2}\left(\lambda_{1,k}\right)}-\frac{2m\mathrm{ch}(2\pi h)c_{2m-2}+c_{2m-3}}{c_{2m-2}^2}, & |\beta|=0\end{cases}, \quad (24)$$

где

$T^m(\lambda)=\left(\lambda^2-2\lambda\mathrm{ch}(2\pi h)+1\right)^m$,

$L_{2m-2}(\lambda)=-2\lambda\mathrm{sh}(2\pi h)T^{m-1}(\lambda)+\sum\limits_{k=1}^{m-1}a_kP_{2k}(\lambda)T^{m-k-1}(\lambda)$,

здесь

$P_{2k}(\lambda)=\mathrm{e}^{-2\pi h}\left(\left(\lambda\mathrm{e}^{2\pi h}-1\right)^{k+1}\right)E_{k-1}\left(\lambda\mathrm{e}^{-2\pi h}\right)+\ \mathrm{e}^{2\pi h}\left(\left(1-\lambda\mathrm{e}^{-2\pi h}\right)^{k+1}\right)E_{k-1}\left(\lambda\mathrm{e}^{2\pi h}\right)$.

В заключение отметим, что построенные дифференциальные операторы очень широко используются в механике и теории вибраций.

В главе 3 мы рассматриваем задачи оптимизации формул приближенного интегрирования в пространстве Л. Хёрмандера $H_2^\mu(R)$. Здесь дан алгоритм нахождении оптимальных коэффициентов решетчатых квадратурных формул в пространстве Л. Хёрмандера $H_2^\mu(R)$ при $m=1,2$ и нахождения неизвестной функции $u_2(h\beta)$. Для этого нам надо найти коэффициенты решетчатых квадратурных формул, дающие наименьшее значение норме функционала погрешности. Применяя преобразование Фурье в обобщённых функциях получается система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов оптимальных решетчатых квадратурных формул. Таким образом найдём явные выражения коэффициентов оптимальной квадратурной формулы. При этом применяя дискретный аналог одного дифференциального оператора и которые используется для получения оптимальных коэффициентов. Также, мы вычислили квадрата нормы функционала погрешности оптимальных решетчатых квадратурных формул.

В параграфе 3.1. вычислены коэффициенты оптимальных решетчатых квадратурных формул в пространстве $H_2^\mu(R)$, при $m=1$.

Доказана следующие

Теорема 9. Среди всех квадратурных формул вида (1) решетчатая весовая квадратурная формула определяемая коэффициентами является единственной оптимальной над пространством Хёрмандера $H_2^\mu(R)$.

$$\overset{0}{C}[\beta]=\mathrm{cth}(2\pi h)\cdot\int_0^1 p(y)\mathrm{e}^{-2\pi|h\beta-y|}dy-\frac{1}{2\mathrm{sh}(2\pi h)}\int_0^1 p(y)\mathrm{e}^{-2\pi|h(\beta-1)-y|}dy-$$

$$-\frac{1}{2\mathrm{sh}(2\pi h)}\int_0^1 p(y)\mathrm{e}^{-2\pi|h(\beta+1)-y|}dy,\quad \beta=1,2,...,N-1, \quad (25)$$

$$\overset{0}{C}[0]=\mathrm{cth}(2\pi h)\int_0^1 p(y)\mathrm{e}^{-2\pi y}dy-\frac{\mathrm{e}^{-2\pi h}}{2\mathrm{sh}(2\pi h)}\int_0^1 p(y)\mathrm{e}^{-2\pi y}dy-$$
$$-\frac{1}{2\mathrm{sh}(2\pi h)}\int_0^1 p(y)\mathrm{e}^{-2\pi|h-y|}dy, \tag{26}$$

$$C[N]=\mathrm{cth}(2\pi h)\cdot\int_0^1 p(y)\mathrm{e}^{-2\pi|Nh-y|}dy-\frac{1}{2\mathrm{sh}(2\pi h)}\int_0^1 p(y)\mathrm{e}^{-2\pi|h(N-1)-y|}dy-$$
$$-\frac{1}{2\mathrm{sh}\left(2\pi h\right)}\int_0^1 p(y)\mathrm{e}^{-2\pi|h(N+1)-y|}dy. \tag{27}$$

$$\int_0^1 p(x)f(x)dx\approx\sum_{\beta=0}^{N}\overset{0}{C}[\beta]f[\beta], \tag{28}$$

здесь

$$\ell_N(x)=p\left(x\right)\varepsilon_{[0,1]}(x)-\sum_{\beta=0}^{N}\overset{0}{C}_\beta\,\delta(x-x_\beta)\,, \tag{29}$$

Отсюда имеем следующие:

Следствие 1. Среди всех квадратурных формул вида (1) с оптимальными коэффициентами который минимизирует норму функционала погрешности (2) с равно расположенными узлами в пространстве $H_2^\mu\left(R\right)$ при $m=1$ и $p\left(x\right)=1$ оптимальной имеет следующий вид

$$\int_0^1 f\left(x\right)dx\cong\frac{\left[\mathrm{ch}\left(2\pi h\right)-1\right]}{\pi\mathrm{sh}\left(2\pi h\right)}\left[\frac{1}{2}\left(f\left(0\right)+f\left(1\right)\right)+\sum_{\beta=1}^{N-1}f\left(h\beta\right)\right], \tag{30}$$

где

$$C\left[0\right]=\frac{\left[\mathrm{ch}\left(2\pi h\right)-1\right]}{2\pi\mathrm{sh}\left(2\pi h\right)},$$
$$C\left[\beta\right]=\frac{\left[\mathrm{ch}\left(2\pi h\right)-1\right]}{\pi\mathrm{sh}\left(2\pi h\right)},\ \beta=\overline{1,N-1}, \tag{31}$$
$$C\left[N\right]=\frac{\left[\mathrm{ch}\left(2\pi h\right)-1\right]}{2\pi\mathrm{sh}\left(2\pi h\right)},$$

здесь h малый параметр.

Следствие 2. Среди всех квадратурных формул вида (1) с оптимальными коэффициентами который минимизирует норму функционала погрешности (2) с равно расположенными узлами в пространстве $H_2^\mu\left(R\right)$ при $m=1$ и $p\left(x\right)=\mathrm{e}^{2\pi i\omega x}$ оптимальной имеет следующий вид

$$\int_0^1 e^{2\pi i\omega x} f(x)dx \approx \sum_{\beta=0}^{N} \overset{0}{C}[\beta] f[\beta], \tag{32}$$

где

$$C[0] = \frac{1}{2\pi\left(1+\omega^2\right)\mathrm{sh}\left(2\pi h\right)}\left[e^{2\pi h} - e^{2\pi i\omega h} + i\omega \mathrm{sh}\left(2\pi h\right)\right],$$

$$C[\beta] = \frac{e^{2\pi i\omega h\beta}}{\pi\left(1+\omega^2\right)\mathrm{sh}\left(2\pi h\right)}\left[\mathrm{ch}\left(2\pi h\right) - \cos\left(2\pi h\right)\right],\ \beta = \overline{1, N-1}\ , \tag{33}$$

$$C[N] = \frac{e^{2\pi i\omega}}{2\pi\left(1+\omega^2\right)\mathrm{sh}\left(2\pi h\right)}\left[\mathrm{ch}\left(2\pi h\right) - e^{-2\pi i\omega h} - i\sin\left(2\pi h\right)\cos\left(2\pi h\right)\right],$$

здесь h - малый параметр.

Параграф 3.2. посвящается алгоритм нахождения неизвестной функции $u_2\left(h\beta\right)$ и справедлива следующая

Лемма 5. Неизвестная функции $u_2\left(h\beta\right)$ имеет следующее преставление

$$u_2\left(h\beta\right) = \begin{cases} e^{2\pi h\beta}\left(a_1^- + a_2^- h\beta\right),\ \beta < 0, \\ f_2[\beta], \qquad 0 \le \beta \le N,. \\ e^{-2\pi h\beta}\left(a_1^+ + a_2^+ h\beta\right),\ \beta > N. \end{cases} \tag{34}$$

На этом параграфе 3.3 обсуждается вопрос нахождения оптимальных коэффициентов C_β квадратурных формул в пространстве Л. Хёрмандера.

Здесь используя алгоритма приведённый в параграфе 3.2, получено явные формулы для коэффициентов оптимальных квадратурных формул вида (1) при $m = 2$, для любого $N = 1,2,....$

Теорема 10. Оптимальные коэффициенты квадратурных формул вида (28) который минимизирует норму функционала погрешности (29) с равно расположенными узлами в пространстве $H_2^\mu\left(R\right)$ при $m = 2$ и $p\left(x\right) = 1$ имеют следующий вид

$$C[\beta] = \rho\left\{k_1 - k_2\begin{cases}\left(1+\lambda_1^N\right), \beta = 0, \\ \left(\lambda_1^\beta + \lambda_1^{N-\beta}\right), \beta = \overline{1, N-1}, \\ \left(\lambda_1^N + 1\right), \beta = N, \end{cases}\right\}$$

где

$$k_1 = \left[d + 2\left(1 + A_1\right)\right] + 2\frac{A_1\lambda_1}{1-\lambda_1} \quad \text{и} \quad k_2 = A_1\left(M - \frac{1-\left(1+\pi\right)e^{-2\pi}}{2\left(e^{2\pi h} - \lambda_1\right)}\right), \tag{35}$$

$$M = \left\{\frac{1}{2}\left\{2\frac{1}{1-\lambda_1} - \frac{e^{-2\pi}}{e^{2\pi h} - \lambda_1}\left[1 + \pi + \frac{\pi h e^{2\pi h}}{e^{2\pi h} - \lambda_1}\right] + \frac{e^{2\pi h}}{1-\lambda_1 e^{2\pi h}}\left[\frac{\pi h}{1-\lambda_1 e^{2\pi h}} - 1\right]\right\}\right\} \tag{36}$$

$$A_1=\frac{\lambda_1^4-4\mathrm{ch}(2\pi h)\lambda_1^3+2\left(1+2\mathrm{ch}^2(2\pi h)\right)\lambda_1^2-4\mathrm{ch}(2\pi h)\lambda_1+1}{\lambda_1^2-1}, \tag{37}$$

$$\lambda_1=\frac{\left(2\pi h-\mathrm{sh}(2\pi h)\mathrm{ch}(2\pi h)\right)-\sqrt{\left(1-\mathrm{ch}^2(2\pi h)\right)\left(4\pi^2h^2-\mathrm{sh}^2(2\pi h)\right)}}{2\pi h\mathrm{ch}(2\pi h)-\mathrm{sh}(2\pi h)}, \tag{37}$$

$$\rho=\frac{1}{\pi\left(2\pi h\mathrm{ch}(2\pi h)-\mathrm{sh}(2\pi h)\right)}, \tag{39}$$

$$d=2\left(\frac{2\pi h-\mathrm{sh}(2\pi h)\mathrm{ch}(2\pi h)}{2\pi h\mathrm{ch}(2\pi h)-\mathrm{sh}(2\pi h)}-2\mathrm{ch}(2\pi h)\right)+\frac{A_1}{\lambda_1} \tag{40}$$

$|\lambda_1|<1$ и h - малый параметр.

В параграфе 3.4 вычислены нормы функционала погрешности оптимальной квадратурной формул в пространстве Л. Хёрмандера, т.е. справедлива следующая:

Теорема 11. Квадрат нормы функционала погрешности квадратурной формулы вида (28) над пространством Л. Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$ имеет вид

$$\left\|\overset{o}{\ell}\,|\,H_2^{\mu*}(R)\right\|^2=\int_0^1\int_0^1 v_m(x-y)dxdy-2\sum_{\beta=0}^{N}\overset{o}{C}_\beta\int_0^1 v_m(x-h\beta)dx+\sum_{k=0}^{N}\sum_{\beta=0}^{N}\overset{o}{C}_\beta\overset{o}{C}_k v_m(hk-h\beta),$$

здесь

$$v_m(x)=\frac{\pi\,\mathrm{e}^{-2\pi|x|}}{2^{2m-2}\cdot(m-1)!}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{(2m-k-2)!\cdot(4\pi)^k}{k!\cdot(m-k-1)!}|x|^k.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена построению оптимальных квадратурных формул для приближенного вычисления интегралов в пространствах Л. Хёрмандера дифференцируемых функций.

Основные результаты диссертационной работы являются новыми и состоят в следующем:

1. Найдена экстремальная функция функционала погрешности весовых квадратурных формул в пространстве Л. Хёрмандера;

2. Вычислена норма функционала погрешности весовой квадратурной формулы;

3. Доказана существование и единственность весовой оптимальной квадратурной формулы в пространстве Л.Хёрмандера;

4. Построен дискретный аналог $D_m[\beta]$ дифференциального оператора $2m-$го порядка, который играет важную роль при построении весовых оптимальных квадратурных формул;

5. Разработан алгоритм построении оптимальных квадратурных формул в пространстве Л. Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$;

6. Этот алгоритм численно реализован при $m=1$ и $p(x)=1$;

7. Получены новые оптимальные квадратурные формулы в случаях $m=1,2$.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 AT NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

TASHKENT STATE TRANSPORT UNIVERSITY

JALOLOV IKROMJON ISOMIDDINOVICH

OPTIMAL QUADRATURE FORMULAS IN THE SPACE OF L. HÖRMANDER

01.01.03 – Computational and discrete mathematics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent–2025

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under number № B2021.2.PhD/FM604

Dissertation has been prepared at Tashkent state transport university.

Abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the website http://ik-fizmat.nuu.uz/ and the "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific superviser:	**Shadimetov Kholmat Makhkambaevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Hayotov Abdullo Roxmonovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Urunboyev Erkin Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Associate professor
Leading organization:	**Termez state university**

Defense will take place "_____" _____________2025 at ______ at the meeting of Scientific Council number DSc/03/30/12/2019/FM.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on "_____" _______________2025 year
(Mailing report № ___________on "_____" _______________2025 year)

M.M. Aripov
Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.F.-M.S., professor

Z.R. Rakhmonov
Scientific Secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, D.F.-M.S.

R.D. Aloyev
Chairman of Scientific Seminar under
Scientific Council on award of scientific
degrees, D.F.-M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

The purpose of the study are the construction of optimal lattice quadrature formulas and the calculation of the norms of their error functionals on classes of differentiable functions.

The object of the study consists of quadrature formulas, discrete analogu of linear differential operators in the functional space $H_2^{\mu}(R)$ of L. Hörmander .

The scientific novelty of the research work is as follows:

using the extremal function an expression for the square of the norm of the error functional of weight quadrature formulas was obtained;

the existence and uniqueness of the weighted optimal quadrature formula by the Sobolev method in the L. Hörmander space $H_2^{\mu}(R)$ is proven;

an algorithm for constructing a discrete analogue of a differential operator for determining the optimal coefficients of weight quadrature formulas in the space $H_2^{\mu}(R)$ for arbitrary integers m is defined;

using a discrete analogue of differential operators lattice optimal quadrature formulas in the L. Hörmander space $H_2^{\mu}(R)$ in the case $m=1,2$ are constructed;

Implementation of the research results. Based on the new results obtained on the construction of optimal lattice quadrature formulas in the L. Hörmander space $H_2^{\mu}(R)$:

based on the $D_m[\beta]$ discrete analogue of the differential operator of high order constructed from optimal quadrature formulas was used on the topic of the innovative project "Orient the creation of wind turbines with a vertical axis for low wind speed" to determine the effective parameters of wind turbines. (Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, certificate No. 508-3 dated June 5, 2024, Institute of Mechanics and Seismic Resistance of Structures named after M.T. Urazbaev). As a result, it makes it possible to determine the effective parameters of wind turbines created for the approximate solution of mathematical model equations.;

from the constants of optimal quadrature formulas in the L. Hörmander space of differentiable functions on the topic of the fundamental grant "In an inhomogeneous medium, the creation and numerical application of hydrodynamic models of liquid splashing and drug transfer" bearing in mind the adsorption process of macropore and micropore cylindrical zones was used in the environment of the govak creation and numerical application of the problem of anomaly transfer. (certificate No. 10-2750 dated June 10, 2024, Samarkand State University named after Sharof Rashidov). As a result, bearing in mind the adsorption process of macropore and micropore cylindrical zones was used in the environment of the govak creation and numerical application of the problem of anomaly transfer makes it possible for among zones relatively general and total drug transfer effective calculation of integral relations.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, a list of references and applications. The volume of the dissertation is 78 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo'lim (Часть I; Part I)

1. Шадиметов Х.М., Жалолов Ик.И. Об одном алгоритме построения оператора $D_h^m[\beta]$ для определения оптимальных коэффициентов весовых квадратурных формул пространстве $W_2^m(R)$. Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2010. – № 3. – С. 178–187. (01.00.00; №6).
2. Жалолов Ик.И. Вычисление коэффициентов оптимальных решетчатых весовых квадратурных формул в пространстве С.Л. Соболева $W_2^m(R)$. Узбекский математический журнал. –Ташкент, 2010. – № 4. – С. 43–50. (01.00.00; №6).
3. Шадиметов Х.М., Жалолов Ик.И. О существования и единственности весовой оптимальной квадратурной формулы в пространстве $W_2^m(R)$. ДОК АН РУз, 2011. – № 1, – С. 6–9. (01.00.00; №7).
4. Шадиметов Х.М., Жалолов Ик.И. Об одном алгоритме построения дискретного аналога $D_2[\beta]$ одного оператора. Узбекский математический журнал –Ташкент, 2015. – № 1. – С.158–163.(01.00.00; №6).
5. Шадиметов Х.М., Жалолов И.И. Оптимальная квадратурная формула в пространстве Соболева. Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 2016. – № 2. – С. 94–102. (01.00.00; №9).
6. Жалолов И.И. Фундаментальное решение дифференциального оператора *2m*-го порядка. Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 2017. – №4 (10). – С. 93–97.
7. Jalolov I.I. A differential operator of order 2*m* and its fundamental solution. Uzbek Mathematical journal. – 2018. – №.1, – pp.102–108. (01.00.00; №6).
8. Ikrom. I.Jalolov. The algorithm for constructing a differential operator of 2nd order and finding a fundamental solution. // AIP Conference Proceedings 2365, 020015 (2021) https://doi.org/10.1063/5.0057025. **(Scopus IF:=0.189)**
9. Жалолов И.И. Алгоритм построения оптимальной квадратурной формулы в пространстве Хёрмандера $H_2^\mu(R)$. Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 2022. – № 6 (45) . – С.114–131.(01.00.00; №9).
10. Kholmat Shadimetov and Ikrom Jalolov. A Representotion of the Optimal Quadrature Formula in the Hormander Space $H_2^\mu(R)$. // AIP Conference Proceedings. 2781, 020041 (2022) https://doi.org/10.1063/5.0144834. **(Scopus IF:=0.189)**
11. Жалолов И. И. Алгоритм Соболева о нахождении неизвестных функций для построения оптимальной квадратурной формулы в пространстве Хёрмандера. Проблемы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент. – № S3/1(50). 2023. – С. 42–53. (01.00.00; №9).

12. Shadimetov Kh., Jalolov I. Weighted Optimal Formulas for Approximate Integration.*Mathematics* 2024,*12*,738. https://doi.org/10.3390/math12050738. **(Scopus, IF:=2.3).**

II bo‘lim (Часть II; Part II)

13. Шадиметов Х.М., Жалолов Ик.И. Построении оптимальной квадратурной формулы в пространстве С.Л. Соболева $W_2^m(R)$. Дифференциальные уравнения. Функциональные пространства. Теория приближений. Новосибирск. Международная конференция, тезис, 2008. – С. 588–589.
14. Шадиметов Х.М., Жалолов Ик.И. О нахождения неизвестный функции $U_h^m[\beta]$ и построения оператора $D_h^m[\beta]$ для определения оптимальных коэффициентов весовых квадратурных формул пространстве $W_2^m(R)$. Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий- Аль Хорезми 2009. Ташкент. Международная конференция, 2009. – С. 41–47.
15. Жалолов Ик.И. О двух принципах построения квадратурных формул. Вопросы вычислительной и прикладной математики. – Ташкент, 2010. – № 125. – С. 47–56.
16. Jalolov I.I., Ochilova N.T. The extremal function of the error functional of quadrature formula and its norm in $H_2^\mu(R)$ space. The 4^{th} Congress of the Turkic World Mathematical Society (TWMS) – Baku, Azerbaijan, 2011. – pp. 334–335.
17. Жалолов И.И. Об экстремальной функции и норма функционала погрешности квадратурной формулы общего вида в пространстве $H_2^\mu(R)$.Актуальные проблемы прикладной математики и информационных технологий - Аль Хорезми 2012. Ташкент. Международная конференция, материалы конференции, 2012, Том № 1. – С. 52–55.
18. Жалолов Ик.И., Абдуллаев Б.Р. Фундаментальное решение дифференциального оперотора $2m$ - го порядка. Кубатурные формулы и их приложения. Тезисы докладов научного семинара посвященного 85 - летию со дня рождения Гайбулла Назруллаевича Салихова (1932-1979). – Ташкент, 2017. – С. 19–20.
19. Shadimetov Kh.M., Jalolov Ik.I. Finding the coefficients of optimal lattice cubature formulas in the space S.L. Sobolev $W_2^m(R)$. Abstracts of the VI international scientific conference “Modern problems of the applied mathematics and information technology – Al-Khorezmiy 2018”, 2018. -pp. 152–154.
20. Ikrom.I. Jalolov. The algorithm for constructing a differential operator of 2^{nd} order and finding a fundamental solution. ABSTRACTS of the Uzbekistan-Malaysia international online conference Computational models and technologies. – Tashkent, August 24–25, 2020. – pp. 50–51.

21. Жалолов И.И. Преобразование Фурье функции $\bar{v}_m(x)$ для определения дискретного аналога одного дифференциального оператора. “Стохастик таҳлилнинг долзарб муаммолари”. Илмий конференция материаллари, (1 қисм). – Ташкент, 2021. – С. 518–519.
22. Шадиметов Х. М., Жалолов Ик. И. Алгоритм построения оптимальной квадратурной формулы в пространстве Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$. “Амалий математика ва ахборот технологияларининг замонавий муаммолари” халқаро илмий-амалий анжуман. Тезислар тўплами. – Бухоро, 2021 йил, 15-апрель. – Б. 114–120.
23. Жалолов Ик.И. Об одном представление оптимальной квадратурной формулы в пространстве Хёрмандера $H_2^{\mu}(R)$. “Амалий математика ва ахборот технологияларининг замонавий муаммолари” халқаро илмий-амалий анжуман. Тезислар тўплами. – Бухоро, 2022 йил, 11-12 май. – Б. 317–319.
24. Жалолов Ик.И. Алгоритм Соболева о нахождении неизвестных функций для построения оптимальной квадратурной формулы в пространстве Хёрмандера. “Fizika, matematika va mexanikaning dolzarb muammolari” xalqaro ilmiy-amaliy anjumani materiallari. – Buxoro, 2023 yil, 24-25-may. – B. 31–36.
25. Жалолов И.И., Исомиддинов Б.О. Об одном алгоритме построение оптимальной квадратурной формулы в пространстве Хёрмандера. Труды международного семинара, посвященном 90-летию профессора М.И. Исроилова 27 апреля 2024 г. «Вычислительные модели и технологии» (СМТ2024). – Ташкент. – С. 148–149.
26. Shadimetov X.M, Jalolov I.I. Xyormander fazosida optimal kvadratur formulalar orqali integrallarni taqribiy hisoblash algoritmi. // Dasturiy Guvohnoma, 2024, № DGU 41645.

Avtoreferat “O‘zMU xabarlari” jurnali tahririyatida tahrirdan o‘tkazildi.

Bosishga ruxsat etildi: **.04.2025-yil.
Bichimi 60x84 1/16, “Times New Roman”
garniturada raqamli bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 3. Adadi: 100. Buyurtma №: 163.

“TRAINMAX” MChJ bosmaxonasida chop etildi.
100194, Toshkent shahri, Yunusobod-11, 62-uy.