

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH

V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

KARIMOV ROZIQ SODIQ O‘G‘LI

**GILBERT FAZOSI $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ DA OPTIMAL AYIRMALI
FORMULALAR VA ULARNING TATBIQLARI**

**01.01.03 – Hisoblash matematikasi va diskret matematika
(fizika-matematika fanlari)**

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Toshkent – 2025

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации
доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-
mathematical sciences**

Karimov Roziq Sodiq o'g'li

Gilbert fazosi $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ da optimal ayirmali formulalar va ularning tatbiqlari .. 3

Каримов Розик Содик угли

Оптимальные разностные формулы в гильбертовом пространстве

$W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ и их приложения 21

Karimov Rozik Sodik ugli

Optimal difference formulas in the Hilbert space $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ and their

applications..... 39

E'lon qilingan ishlar ro'yxati

Список опубликованных работ

List of published works 43

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH

V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

KARIMOV ROZIQ SODIQ O‘G‘LI

**GILBERT FAZOSI $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ DA OPTIMAL AYIRMALI
FORMULALAR VA ULARNING TATBIQLARI**

**01.01.03 – Hisoblash matematikasi va diskret matematika
(fizika-matematika fanlari)**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Toshkent – 2025

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2024.1.PhD/FM1013 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya O'zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (ik-fizmat.nuu.uz) va "Ziyonet" ta'lim axborot tarmog'ida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:

Shadimetov Xalmatvay Maxkambayevich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Rasmiy opponentlar:

Normurodov Chori Begaliyevich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Xudoyberganov Mirzoali O'razaliyevich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Yetakchi tashkilot:

Qoraqalpoq davlat universiteti

Dissertatsiya himoyasi O'zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 raqamli Ilmiy kengashning "_____" _____ 2025-yil soat ____ dagi majlisida bo'lib o'tadi (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 227-12-24; faks: (+99871) 246-53-21, 246-02-24; e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan O'zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (____ raqam bilan ro'yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 246-02-24.

Dissertatsiya avtoreferati 2025-yil "_____" _____ kuni tarqatildi.

(2025-yil "_____" _____ dagi _____ raqamli reestr bayonnomasi).

M.M. Aripov

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash raisi,
f.-m.f.d., professor

Z.R. Raxmonov

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash ilmiy
kotibi, f.-m.f.d.

R.D. Aloyev

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash
huzuridagi ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d.,
professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiya annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida fizika va texnikadagi ko‘plab masalalar chiziqli va chiziqli bo‘lmagan oddiy differensial tenglamalar uchun chegaraviy yoki boshlang‘ich-chegaraviy masalalarga olib kelinadi. Shu kabi masalalarning analitik yechimga ega bo‘ladiganlari soni chegaralangan. Bu esa turli xil sonli usullardan foydalangan holda taqribiy yechimlarni topish zaruriyatiga olib keladi. Matematik fizika masalalarini sonli yechishning ancha samarali usuli bu chekli ayirmalar usuli yoki to‘r usuli hisoblanadi. Shu sababli, oddiy differensial tenglamalarga qo‘yilgan Koshi masalasini taqribiy yechish uchun optimal oshkor va oshkormas chekli-ayirmali formulalarni qurish, hamda funksiyalar sinfida ushbu optimal chekli-ayirmali formulalarning xossalari o‘rganish va ularning xatoliklarini baholash zamonaviy hisoblash matematikasining muhim vazifalaridan biri bo‘lib qolmoqda.

Hozirgi kunda ko‘plab muhandislik muammolari matematik jihatdan aniq yechimlar bilan emas, balki, asosan, fizik masalalarning yechimlari orqali yechiladi. Tabiat qonunlari haqidagi zamonaviy qarashlar bizga hal qilishimiz mumkin bo‘lgan masalalardan ko‘ra umumiyroq va murakkabroq muammolarni shakllantirish imkonini beradi. Fizik yoki muhandislik nuqtai nazaridan amalga oshiriladigan soddalashtirishlar, yechim jarayonining har bir bosqichida yaqinlashish sifatida qaralishi lozim. Masalan, uzluksiz masalalarni diskretlashtirish jarayonida bu usullar sonli usullardan foydalangan holda yechiladi, chunki bu usullar funksiyalar sinfida metod xatoligini minimal darajaga tushiradi. Shu sababli, funksiyalar sinfida chekli-ayirmali formulalarning optimal koeffitsientlarini topish va ularning xatoliklarini optimal baholarini hisoblash muhim ilmiy tadqiqot ishlaridan biri hisoblanadi.

Mamlakatimizda fundamental va amaliy masalalarni yechish maqsadida sonli tahlilning optimal usullarini ishlab chiqish va bu usullarning funksional fazolardagi xatoliklarini baholashga katta e‘tibor qaratilmoqda. Xususan, hisoblash matematikasining sonli integrallash nazariyasiga alohida ahamiyat berilmoqda va bu borada Gilbert fazosida optimal chekli-ayirmali formulalarni qurish va funksiyalar sinfida ushbu formulalarning xatoliklarini baholash bo‘yicha muhim natijalarga erishildi. “Algebra, matematik tahlil, differensial tenglamalar nazariyasi, funksional tahlil, ehtimollar nazariyasi, hisoblash matematikasi va matematik modellashtirish”¹ ustuvor yo‘nalishlar bo‘yicha xalqaro standartlar darajasidagi ilmiy izlanishlar olib borish O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatining asosiy vazifalaridan biri hisoblanadi. Qaror ijrosini ta‘minlash uchun chekli-ayirmali formulalarni qurish va funksiyalar sinfida ularning xatoliklarini baholash muhim ahamiyatga ega.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevral PF-4947-sonli “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi, 2022-yil 28-yanvar PF-60 sonli “2022–2026-yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmonlari, 2017-yil 17-fevral PQ-2789-sonli “Fanlar akademiyasi faoliyati,

¹ O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta‘lim sifatini oshirish va ilmiy- tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” gi PQ-4708-son Qarori.

ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi, 2017-yil 20-aprel PQ-2909-sonli "Oliy ta'lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi, 2018-yil 27-aprel PQ-3682-sonli "Innovatsion g'oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi, 2020-yil 7-may PQ-4708-sonli "Matematika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi Qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga bog'liqligi. Mazkur ilmiy-tadqiqot ishi O'zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. "Matematika, mexanika va informatika" ustuvor yo'nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o'rganilganlik darajasi. Oddiy differensial tenglamalarni sonli yechish bugungi kunda ham katta muammo bo'lib qolmoqda. Shu sababli, hozirgi vaqtda ko'plab tadqiqotchilar ushbu muammo ustida ishlab kelmoqda. Xususan, S.Mehrkanoon, Z.A.Majid, M.Suleiman, K.I.Othman va Z.B.Ibrahim birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasini uch nuqta va uch qadamdan foydalangan holda yechishning yangicha yondashuvi taklif qilishgan. Beuken L., Cheffert O., Tutueva A., Butusov D., Legat V. yangi yarim oshkor va yarim oshkormas prediktor-korrektor usullarini taqdim etishgan. Tadqiqot ishida ular turg'unlik sohalarini va taklif qilingan usullarning sonli turg'unligini o'rgandilar hamda yarim oshkor usullar an'anaviy prediktor-korrektor usullarga qaraganda yuqori sonli turg'unlikka ega ekanligini aniq ko'rsatdilar.

Osama Y. Ababneh chiziqli va nochiziqli holatlarda oddiy differensial tenglamalarni yechishning yangi sonli usullarini taqdim etdi. Adekoya Odunayo M. va Z.O.Ogunwobi ikkinchi tartibli differensial tenglamalar uchun Adams-Bashfort-Multon va Miln-Simpson usullarini kombinatsiyalashtirdi. Sajal K. Kar Adams-Bashfort sxemasidan yangi chekli-ayirmali prediktor-korrektor sxemani yaratish uchun foydalangan. Emil Vitasek va Praha abstrakt oddiy differensial tenglamani yechish uchun kerak bo'ladigan yuqori aniqlikdagi usullarni o'rgandilar. Omarova A.G. va V.G.Zverev oddiy differensial tenglamaga qo'yilgan Koshi masalasini o'rgandilar. Bu yerda ular Koshi masalasini taqribiy yechish uchun yangi maxsus ayirmali sxemalarni taklif qilishdi.

Ma'lumki, hisoblash algoritmlarini optimallashtirish masalasi S.L.Sobolev, V.L.Vaskevich, I.Babushka, G.Dalkvist, M.D.Ramazonov, V.I.Polovinkin, V.G.Gabdulxayev, I.V.Boykovlar tomonidan qaralgan va qarab kelinmoqda. Bu sohada olimlarimizdan G.N.Salixov, M.I.Israilov, X.M.Shadimetov, A.R.Hayotov, F.A.Nuraliev, D.M.Axmedov, S.S.Azamov, A.K.Boltaev va boshqalar ilmiy tadqiqot olib borishgan va borishmoqda. M.M.Aripov, R.D.Aloev va ularning shogirdlari nochiziqli parabolik tenglamalarning asimptotik avtomodel yechimlarini va ayirmali sxemalarning turg'unligini o'rganib kelishmoqda.

Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilgan ilmiy-tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog'liqligi. Dissertatsiya

tadqiqoti O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti Hisoblash matematikasi laboratoriyasining “Gilbert fazolarida optimal kvadratur, interpolyatsion, ayirmali formulalar qurish va ularni integral va differensial tenglamalarni yechishga tatbiqlari” mavzusidagi kalendar rejasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechish uchun oshkor va oshkormas (ekstrapolyatsion va interpolyatsion) optimal chekli-ayirmali formulalar (chekli-ayirmali usullar yoki chekli-ayirmali sxemalar)ni qurish, shuningdek, differensiallanuvchi funksiyalar sinfida ularning xatolik funksionali normalarni aniqlashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

$W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ sinfda, ixtiyoriy $m \geq 2$ uchun ekstremal funksiyadan foydalanib, chekli ayirmali-formulalarning xatoligini topish;

chekli-ayirmali formulalarning optimal koeffitsiyentlarini topish uchun sistema olish;

$W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ sinfda, ixtiyoriy $m \geq 2$ uchun chekli-ayirmali formulalarni optimallashtirishning yangi algoritmini ishlab chiqish;

funksiyalarning $W_2^{(2,1)}(0,1)$ va $W_2^{(3,2)}(0,1)$ sinflarida ushbu algoritmni tatbiq qilish va chekli-ayirmali formulalarning optimal xatoliklarni hisoblash.

Tadqiqotning obyekti. Oddiy differensial tenglamalar, ekstrapolyatsion va interpolyatsion chekli-ayirmali sxemalar, chekli-ayirmali sxemalar xatoliklari bahosi.

Tadqiqotning predmeti. Differensiallanuvchi funksiyalar sinfida chekli-ayirmali formulalar xatoliklari.

Tadqiqot usullari. Dissertatsiya ishida differensial tenglamalarni taqribiy yechish usullari, hisoblash matematikasining usullari va chekli-ayirmali usullar qo‘llanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

$W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ sinfda, ixtiyoriy $m \geq 2$ uchun ekstremal funksiyadan foydalanib, chekli ayirmali-formulalarning xatolik funksionallari normasi topilgan;

chekli-ayirmali formulalarning optimal koeffitsiyentlarini topish uchun Lagranj aniqmas ko‘paytuvchilar metodi yordamida sistema olingan;

$W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ sinfda, ixtiyoriy $m \geq 2$ uchun chekli-ayirmali formulalarni Sobolev metodi asosida optimallashtirishning algoritmi ishlab chiqilgan;

funksiyalarning $W_2^{(2,1)}(0,1)$ va $W_2^{(3,2)}(0,1)$ sinflarida ushbu algoritm tatbiq qilingan va chekli-ayirmali formulalarning optimal xatoliklari hisoblangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

qurilgan chekli-ayirmali formulalar yordamida oddiy differensial tenglamalar uchun Koshi masalasini sonli yechishda qo‘llanilgan;

dissertatsiya natijalari shamol turbinalarining samarali parametrlarini aniqlash maqsadida tuzilgan matematik model tenglamalarini taqribiy yechishda qo‘llanilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchligi hisoblash matematikasi, matematik mantiqning qat'iyligi, funksional tahlil, optimallashtirish nazariyasi, diskret argumentli funksiyalar nazariyasi va chekli-ayirmali formulalar nazariyasiga asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Gilbert fazosida oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechish uchun optimal oshkor va oshkormas chekli-ayirmali formulalarni qurish dissertatsiya ishi natijalarining ilmiy ahamiyatini belgilab beradi.

Ushbu tadqiqot ishida fizika, mexanika, elastiklik nazariyasi va tabiiy ravishda oddiy differensial tenglamalarga olib kelinadigan boshqa sohalarga oid masalalarni sonli yechish uchun ishlatilishi mumkin bo'lgan oshkor va oshkormas chekli-ayirmali formulalar qurilgan.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Gilbert fazosida oddiy differensial tenglamalarni taqribiy yechish uchun optimal chekli-ayirmali formulalar qurilgan va ularning algoritmlari ishlab chiqilgan bo'lib, quyidagi loyihalarda foydalanilgan:

ushbu dissertatsiya ishida olingan ilmiy natijalardan 2022–2024-yillarda O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi Mexanika va inshootlar seysmik mustahkamligi institutida bajarilgan IL-21071166 “Shamolning past tezligi uchun mo'ljallangan vertikal o'qli shamol turbinasini yaratish” mavzusidagi innovatsion loyihani bajarishda, ya'ni shamol turbinalarining samarali parametrlarini aniqlash maqsadida tuzilgan matematik model tenglamalarini taqribiy yechishda ushbu formulalardan foydalanilgan (O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi M.T.O'razboyev nomidagi Mexanika va inshootlar seysmik mustahkamligi institutining 2024-yil 8-iyuldagi 696-3-sonli ma'lumotnomasi). Natijada shamol elektr stansiyalari uchun samarali parametrlarni aniqlash maqsadida tuzilgan matematik model tenglamalarini taqribiy yechish imkonini bergan;

bundan tashqari tadqiqot ishida olingan ilmiy natijalaridan 2022–2023-yillarda Toshkent axborot texnologiyalari universitetida bajarilgan IL-5321091543 “Gaz tarmoqlarining topologik modelini yaratish va simulyatsiya qilish” mavzusidagi innovatsion loyihani bajarishda, ya'ni loyihada gaz tarmoqlarining topologik modelini yaratishda va simulyatsiya qilishda foydalanilgan (Toshkent axborot texnologiyalari universitetining 2024-yil 18-oktyabrdagi 4207/05-2-sonli ma'lumotnomasi). Natijada gaz tarmoqlarini simulyatsiya qilishning samarali modellari uchun differensial munosabatlarni taqribiy yechish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur dissertatsiya ishi natijalari 11 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan, 9 ta xalqaro va 2 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o'tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e'lon qilinishi. Dissertatsiya mavzusi bo'yicha jami 19 ta ilmiy ish chop etilgan bo'lib, shulardan, O'zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 7 ta maqola, shu jumladan, 3 tasi xorijiy va 4 tasi respublika jurnallarida chop etilgan hamda elektron hisoblash mashinalari uchun dasturni rasmiy ro'yxatdan o'tkazish to'g'risidagi bitta guvohnoma olingan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish, o'n beshta paragrafni o'z ichiga olgan uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar

ro'yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiya ishining umumiy hajmi 97 betni tashkil etadi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga mosligi ko'rsatilgan, muammoning o'rganilganlik darajasi, mavzu bo'yicha dunyo miqyosidagi ilmiy-tadqiqotlar sharhi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo'yicha ma'lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning "**Gilbert fazosida optimal ayirmali formulalar qurish algoritmi**" deb nomlangan birinchi bobida Gilbert fazosida optimal chekli-ayirmali formulalar tadqiq qilingan. Dissertatsiyaning ushbu bobida Gilbert fazosida chekli-ayirmali formulalar qurish masalasi, ya'ni algebraik va funksional usullardan foydalanib chekli-ayirmali formulalar qurish masalasi keltirilgan.

Ushbu bobning birinchi paragrafi chekli-ayirmali formulalar qurish masalasini algebraik qo'yishga bag'ishlangan.

Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Koshi masalasining taqribiy yechimini topishni qaraymiz. Faraz qilaylik $x > 0$ da va $x = 0$ uchun boshlang'ich shart bilan berilgan

$$y' = f(x, y), x \in [0, 1], y(0) = y_0 \quad (1)$$

chiziqli bo'lmagan differensial tenglamani qanoatlantiruvchi, $x \in [0, 1]$ intervalda uzluksiz $y = y(x)$ funksiyani topish talab qilinsin, bu yerda $f(x, y)$ ikki o'zgaruvchili berilgan uzluksiz funksiyasi.

Agar $f(x, y)$ funksiya $D = \{x \in [0, 1], |y - y_0| \leq U\}$ to'rtburchak sohada aniqlangan bo'lsa va ixtiyoriy $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ uchun y o'zgaruvchi bo'yicha

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$$

Lipshits shartini qanoatlantirsa, u holda (1) masala yagona yechimga ega bo'ladi, bu yerda $L = \text{const} > 0$. (1) masalaning taqribiy yechimini topish uchun $[0, 1]$ kesmani

uzunligi $h = \frac{1}{N}$ bo'lgan N ta qismlarga ajratamiz va $x_n = nh$ $n = 0, 1, \dots, N$ tugun

nuqtalarda qidirilayotgan $y(x)$ yechimning taqribiy qiymatlarini y_n bilan belgilaymiz. (1) masalaning taqribiy yechimini topish uchun Eyler usulidan foydalanish mumkin:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n, \quad (2)$$

bu yerda $y'_n = f(x_n, y_n)$, hamda x_{n+1} tugun nuqtadagi y_{n+1} taqribiy qiymat x_n tugun nuqtadagi funksiya va uning hosilalari qiymatlarining chiziqli kombinatsiyasi orqali aniqlanadi.

Dastlabki nuqtalarda y'_n dan foydalanib, $y'(x)$ uchun

$$y'(x) = y'_n + \frac{1}{h}(x - x_n)\nabla y'_n + \frac{1}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1})\nabla^2 y'_n + \\ + \frac{1}{3!h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})\nabla^3 y'_n + \dots$$

interpolyatsion formulani qurish mumkin, bu erda ∇ chap chekli ayirmani bildiradi, ya'ni $\nabla z_n = z_n - z_{n-1}$. Ushbu interpolyatsion formulani $[x_n, x_{n+1}]$ kesmada integrallab,

$$y_{n+1} = y_n + h \left(y'_n + \frac{1}{2}\nabla y'_n + \frac{5}{12}\nabla^2 y'_n + \frac{3}{8}\nabla^3 y'_n + \dots \right)$$

Adams-Bashfort formulasini olamiz.

Xuddi shunday, $[x_{n-1}, x_n]$ kesmada integrallab,

$$y_n = y_{n-1} + h \left(y'_n - \frac{1}{2}\nabla y'_n - \frac{1}{12}\nabla^2 y'_n - \frac{1}{24}\nabla^3 y'_n \dots \right)$$

Adams-Multon formulasini olamiz.

Bundan tashqari, ushbu interpolyatsion formulani $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ va $[x_{n-2}, x_n]$ kesmalarda integrallash orqali

$$y_{n+1} = y_{n-1} + h \left(2y'_n + \frac{1}{3}\nabla^2 y'_n + \frac{1}{3}\nabla^3 y'_n + \dots \right)$$

Nistryomning oshkor formulasini va

$$y_n = y_{n-2} + h \left(2y'_n - 2\nabla y'_n + \frac{1}{3}\nabla^2 y'_n + \dots \right)$$

Miln-Simpsonning oshkormas formulasini olamiz.

Bu formulalar *Dalkvist ma'nosida* turg'undir. Shunga o'xshash formulalar taqribiy differensiallash va boshqa usullar yordamida ham olinishi mumkin.

Umumiy chekli-ayirmali formula. Endi yuqoridagilarni hisobga olgan holda

$$\sum_{\beta=0}^k C_{\beta} y_{n+\beta} = h \sum_{\beta=0}^k C_{\beta}^{(1)} y'_{n+\beta}, \quad n = 0, 1, \dots, N - k, \quad C_k \neq 0 \quad (3)$$

umumiy chekli-ayirmali usulni

$$y_i = y_{0,i}, \quad i = 0, 1, \dots, k - 1$$

boshlang'ich shartlar bilan ko'rib chiqamiz, bu yerda $y'_{\beta} = f(x_{\beta}, y_{\beta})$, $x_{\beta} = h\beta$,

$$\beta = 0, 1, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad h = \frac{1}{N}, \quad N = 1, 2, \dots$$

Shunday qilib, (3) formula y_k ni dastlabki k ta y_i qiymatlari orqali aniqlanganligi sababli, u k -tartibli chekli-ayirmali formula deb ataladi. Agar $C_k^{(1)} \neq 0$ bo'lsa, u holda formula *oshkormas*; aks holda, ya'ni $C_k^{(1)} = 0$ bo'lsa, formula *oshkor* deyiladi.

(3) formulaning $y = y(x)$ yechimidagi approksimatsiya xatoligi

$$R_k = \sum_{\beta=0}^k C_\beta y(x_\beta) - h \sum_{\beta=0}^k C_\beta^{(1)} f(x_\beta, y(x_\beta)) \quad (4)$$

formula bilan aniqlanadi.

Chekli-ayirmali formulalarning yaqinlashishi.

1-ta'rif. Agar quyidagi

$$\sum_{\beta=0}^k C_\beta = 0, \quad \sum_{\beta=0}^k \frac{\beta^s C_\beta}{s!} = h \sum_{\beta=0}^k \frac{\beta^{s-1} C_\beta^{(1)}}{(s-1)!}, \quad s = 1, 2, \dots, p, \quad (0^0 \equiv 1). \quad (5)$$

shartlar bajarilsa, u holda (3) chekli-ayirmali formula $p \geq 0$ tartibli deyiladi.

Agar bu shartlar bajarilsa, u holda yetarli darajada silliq $y(x)$ funksiya uchun Teylor formulasidan foydalanib

$$\sum_{\beta=0}^k C_\beta y(x + h\beta) - h \sum_{\beta=0}^k C_\beta^{(1)} y'(x + h\beta) = A_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(x) + O(h^{p+2})$$

oson tekshiriladi, bu yerda A_{p+1} – qandaydir o'zgarmas.

Bundan kelib chiqadiki, p -tartibli (3) chekli-ayirmali formula (1) differensial tenglamaga aniqligi h^{p+1} tartib bilan lokal yaqinlashadi, ya'ni (1) tenglamada

$$C_k y(x + hk) - h C_k^{(1)} f(x + hk, y(x + hk))$$

hisoblashda yuzaga keladigan xatolik h^{p+1} tartibda bo'ladi.

Shunday qilib, p tartibli (3) chekli-ayirmali formula bo'yicha (1) tenglamani lokal approksimatsiya tartibi h^{p+1} bo'ladi.

Bundan kelib chiqadiki, yuqorida qayd etilganlardan shuni aytish mumkinki (3) formula koeffitsiyentlariga ba'zi qo'shimcha shartlar qo'yilishi kerak. Bu kabi muammolarni G.Dalkvist batafsil o'rgangan.

2-ta'rif. Agar

$$P(\zeta) = \sum_{\beta=0}^k C_\beta \zeta^\beta$$

xarakteristik ko'phadning barcha ζ_i ildizlari uchun $|\zeta_i| \leq 1$ yoki $|\zeta_i| = 1$ ildizlari bir karrali bo'lsa, u holda (3) chekli-ayirmali formula Dalkvist ma'nosida turg'un deyiladi.

Ikkinchi paragrafda biz (4) xatolikni (5) shartlarga ko'ra, C_β va $C_\beta^{(1)}$ koeffitsiyentlar bo'yicha minimallashtiramiz, ya'ni chekli-ayirmali formulalar qurishning funksional qo'yilishini qaraymiz. Buning uchun $\varphi(h\beta) = y(h\beta)$ va $\varphi'(h\beta) = y'(h\beta)$ belgilashlarni olamiz, bu yerda $y'(h\beta) = f(h\beta, \varphi(h\beta))$.

Endi chekli-ayirmali formulalar qurish masalasini funksional qo'yamiz. Quyidagi

$$\sum_{\beta=0}^k C_\beta \varphi(h\beta) - h \sum_{\beta=0}^k C_\beta^{(1)} \varphi'(h\beta) \cong 0 \quad (6)$$

ko'rinishdagi chekli-ayirmali formulalar qurish masalasini ko'rib chiqamiz. Bunda C_β va $C_\beta^{(1)}$ chekli-ayirmali formulalarning koeffitsiyentlari. Ko'rib chiqilayotgan

masalalar sinfi berilgan $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ funksiyalar sinfida aniqlanadi, ya'ni biz qarayotgan $\varphi(x)$ funksiyalar $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ Gilbert fazosining haqiqiy funksiyalar sinfidan olingan. Bu fazoda skalyar ko'paytma

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 (\varphi^{(m)}(x) + \varphi^{(m-1)}(x))(\psi^{(m)}(x) + \psi^{(m-1)}(x)) dx \quad (7)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Aytaylik $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ fazo $C(0,1)$ uzluksiz funksiyalar fazosida joylashgan, u holda chekli-ayirmali formulalarning xatolik funksionali

$$\begin{aligned} \ell(\varphi) &= (\ell, \varphi) = \sum_{\beta=0}^k C_\beta \varphi(h\beta) - h \sum_{\beta=0}^k C_\beta^{(1)} \varphi'(h\beta) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{\beta=0}^k C_\beta \delta(x - h\beta) + h \sum_{\beta=0}^k C_\beta^{(1)} \delta'(x - h\beta) \right] \varphi(x) dx \end{aligned} \quad (8)$$

chiziqlidir.

(8) tenglikka chekli-ayirmali formulalar xatoligi deyiladi. $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ sinfda chekli-ayirmali formulalarning xatoligi deb

$$\ell(W_2^{(m,m-1)}) = \sup_{\varphi \in W_2^{(m,m-1)}} |\ell(\varphi)| \quad (9)$$

kattalikka aytiladi.

Qaralayotgan sinfda

$$\overset{\circ}{\ell}(W_2^{(m,m-1)}) = \inf_{C_\beta, C_\beta^{(1)}} \left\| \ell(W_2^{(m,m-1)}) \right\| \quad (10)$$

optimal chekli-ayirmali formula uchun *quyi chegara* deyiladi. Agar

$$\ell(W_2^{(m,m-1)}) = \overset{\circ}{\ell}(W_2^{(m,m-1)})$$

uchun chekli-ayirmali formula mavjud bo'lsa, bunday chekli-ayirmali formula qaralayotgan sinfda *optimal chekli-ayirmali formula deyiladi*. Hamda $\overset{\circ}{C}_\beta$ va $\overset{\circ}{C}_\beta^{(1)}$ koeffitsiyentlar chekli-ayirmali formulaning *optimal koeffitsiyentlari* deb ataladi.

Optimal chekli-ayirmali formulalar qurish masalasining funksional qo'yilishi $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ funksiyalar sinfida chekli-ayirmali formulalar xatoligini minimallashtirishdan iborat. $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ fazo Gilbert fazosi bo'lganligi sababli, ushbu sinfda xatolik chekli-ayirmali formulalarning (8) xatolik funksionali normasiga mos keladi. Funksiyalar sinfida chekli-ayirmali formulalarning xatoligini topish uchun ekstremal funksiyadan foydalanamiz.

3-ta'rif. Agar $\psi_\ell(x) \in W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ funksiya uchun

$$(\ell, \psi_\ell) = \left\| \ell | W_2^{(m,m-1)*} \right\| \cdot \left\| \psi_\ell | W_2^{(m,m-1)} \right\|$$

tenglik o'rinli bo'lsa, unga (6) chekli-ayirmali formulaning ekstremal funksiyasi deyiladi.

$\psi_\ell(x)$ funksiya Riss elementi hisoblanadi. Demak, Riss teoremasiga asosan quyidagilar kelib chiqadi:

$$(\ell, \varphi) = \langle \psi_\ell, \varphi \rangle, \quad (11)$$

$$\|\ell | W_2^{(m,m-1)*}(0,1)\| = \|\psi_\ell | W_2^{(m,m-1)}(0,1)\|.$$

Shunday qilib, quyidagi teorema o‘rinlidir.

1-teorema. Gilbert fazosi $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ da (6) chekli-ayirmali formulaning maksimalashtiruvchi elementi, ya’ni ekstremal funksiyasi uchun

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x) + de^{-x} + P_{m-2}(x) \quad (12)$$

ifoda o‘rinlidir, bu yerda

$$G_m(x) = \frac{\text{sign}(x)}{2} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{x^{2j-1}}{(2j-1)!} \right)$$

Grin funksiyasi yoki

$$G_m^{(2m)}(x) - G_m^{(2m-2)}(x) = \delta(x)$$

tenglamaning fundamental yechimi, d – ixtiyoriy o‘zgarmas, $P_{m-2}(x)$ – ixtiyoriy $(m-2)$ – darajali ko‘phad.

Uchinchi paragrafda ekstremal funksiyadan foydalanib, $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ funksiyalar sinfida chekli-ayirmali formulaning xatoligi topiladi.

2-teorema. $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ sinfda (6) chekli-ayirmali formulaning xatoligi, ya’ni (6) chekli-ayirmali formula xatolik funksionali normasining kvadrati uchun

$$\begin{aligned} \|\ell | W_2^{(m,m-1)*}\|^2 = & (-1)^m \left[\sum_{\gamma=0}^k C_\gamma \sum_{\beta=0}^k C_\beta G_m(h\gamma - h\beta) - \right. \\ & \left. - 2h \sum_{\gamma=0}^k C_\gamma^{(1)} \sum_{\beta=0}^k C_\beta G'_m(h\gamma - h\beta) - h^2 \sum_{\gamma=0}^k C_\gamma^{(1)} \sum_{\beta=0}^k C_\beta^{(1)} G''_m(h\gamma - h\beta) \right] \quad (13) \end{aligned}$$

tenglik o‘rinlidir, bu yerda $G'_m(x)$ va $G''_m(x)$ ma’lum funksiyalar.

$W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ sinfda chekli-ayirmali formulalarning xatoligini $(\ell, x^\alpha) = 0, \alpha = 0, 1, \dots, m-2$, $(\ell, e^{-x}) = 0$ shartlarga muvofiq $C_\beta^{(1)}, \beta = 0, 1, \dots, k$ koefitsiyentlar bo‘yicha minimallashtiramiz.

To‘rtinchi paragrafda $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ sinfda chekli-ayirmali formulalar xatoligini koefitsiyentlar bo‘yicha minimallashtirish orqali chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi olinadi.

Endi, $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ sinfda chekli-ayirmali formulalar xatoligining, ya’ni chekli-ayirmali formulalar xatolik funksionali normasining minimumini topish uchun Lagranjning aniqmas ko‘paytuvchilar usulidan foydalanamiz. Buning uchun

$$\Psi(\mathbf{C}, \mathbf{C}^{(1)}, \boldsymbol{\lambda}) = \|\ell | W_2^{(m,m-1)*}\|^2 - 2(-1)^m \sum_{\alpha=0}^{m-2} \lambda_\alpha (\ell, x^\alpha) - 2(-1)^m \lambda_{m-1} (\ell, e^{-x})$$

yordamchi funksiyani qaraymiz. Bu yerda $\mathbf{C} = (C_0, C_1, \dots, C_k)$, $\mathbf{C}^{(1)} = (C_0^{(1)}, C_1^{(1)}, \dots, C_k^{(1)})$

va $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})$.

$\Psi(C, C^{(1)}, \lambda)$ funksiyadan $C_\beta^{(1)}, \beta = 0, 1, \dots, k$ va $\lambda_\alpha, \alpha = 0, 1, \dots, m-1$ lar bo'yicha olingan barcha xususiy hosilalarni hisoblaymiz.

Keyin, olingan xususiy hosilalarni nolga tenglashtirib

$$\frac{\partial \Psi}{\partial C_\beta^{(1)}} = 0, \quad \beta = 0, 1, \dots, k,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_\alpha} = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-1$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

Ushbu tengliklar $C_\beta^{(1)}$ va λ_α larni topish uchun quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini beradi

$$h \sum_{\gamma=0}^k C_\gamma^{(1)} G_m''(h\beta - h\gamma) + \alpha h \sum_{\alpha=0}^{m-2} \lambda_\alpha (h\beta)^{\alpha-1} + \lambda_{m-1} e^{-h\beta} = - \sum_{\gamma=0}^k C_\gamma G_m'(h\beta - h\gamma), \quad \beta = 0, 1, \dots, k, \quad (14)$$

$$h\alpha \sum_{\gamma=0}^k C_\gamma^{(1)} (h\gamma)^{\alpha-1} = \sum_{\gamma=0}^k C_\gamma (h\gamma)^\alpha, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-2, \quad (15)$$

$$h \sum_{\gamma=0}^k C_\gamma^{(1)} e^{-h\gamma} = - \sum_{\gamma=0}^k C_\gamma e^{-h\gamma}, \quad (16)$$

bu yerda $G_m'(h\beta)$ va $G_m''(h\beta)$ ma'lum funksiyalar.

(14)-(16) sistemani yechish orqali, biz chekli-ayirmali formulalarning $C_\beta^{(1)}, \beta = 0, 1, \dots, k$ optimal koeffitsiyentlarini va diskret argumentli optimal funksiyaning $\lambda_\alpha, \alpha = 0, 1, \dots, m-1$ koeffitsiyentlarini olamiz.

Shunday qilib, (11) tenglamaning umumiy yechimi qaralayotgan (12) formula uchun, (12) va (14) tengliklardan $\psi'_\ell(h\beta) = 0$ ekanligini osongina ko'rish mumkin va bu Babushkaning teoremasida isbotlangan.

(14)-(16) sistema yechimining mavjud va yagonaligi uchun navbatdagi o'rinli.

3-teorema. (14)-(16) sistemaning yechimi mavjud va u yagonadir.

Beshinchi paragrafda chekli-ayirmali formulalarning optimal koeffitsiyentlarini topish algoritmi berilgan.

Bu algoritmnı amalga oshirish uchun (14)-(16) sistemani

$$h \sum_{\gamma=0}^k C_\gamma^{(1)} G_m''(h\beta - h\gamma) + P_{m-3}(h\beta) + \lambda_{m-1} e^{-h\beta} = f_m(h\beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, k, \quad (17)$$

$$h \sum_{\gamma=0}^k C_\gamma^{(1)} (h\gamma)^{\alpha-1} = g_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m-2, \quad (18)$$

$$h \sum_{\gamma=0}^k C_\gamma^{(1)} e^{-h\gamma} = g_k \quad (19)$$

ko'rinishda qayta yozib olamiz, bu yerda $h = \frac{1}{N}, N = 1, 2, \dots,$

$$G'_m(h\beta - h\gamma) = \frac{\text{sign}(h\beta - h\gamma)}{2} \left(\frac{e^{h\beta - h\gamma} + e^{h\gamma - h\beta}}{2} - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(h\beta - h\gamma)^{2j-2}}{(2j-2)!} \right), \quad (20)$$

$$f_m(h\beta) = -\sum_{\gamma=0}^k C_\gamma G'_m(h\beta - h\gamma), \quad \beta = 0, 1, \dots, k, \quad (21)$$

$$G''_m(h\beta - h\gamma) = \frac{\text{sign}(h\beta - h\gamma)}{2} \left(\frac{e^{h\beta - h\gamma} - e^{h\gamma - h\beta}}{2} - \sum_{j=1}^{m-2} \frac{(h\beta - h\gamma)^{2j-1}}{(2j-1)!} \right), \quad (22)$$

C_β - berilgan koeffitsientlar,

$$g_\alpha = \frac{1}{\alpha} \sum_{\gamma=0}^k C_\gamma (h\gamma)^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m-2, \quad (23)$$

$$g_k = -\sum_{\gamma=0}^k C_\gamma e^{-h\gamma}. \quad (24)$$

Oltinchi paragrafda esa Adams tipidagi oshkor chekli-ayirmali formulalarni ko'rib chiqamiz. Agar (6) formuladagi C_β koeffitsiyentlar

$$C_\beta = \begin{cases} 1, & \text{при } \beta = k, \\ -1, & \text{при } \beta = k-1, \\ 0, & \text{при } \beta = 0, 1, \dots, k-2 \end{cases} \quad (25)$$

tenglik bilan aniqlansa, u holda

$$\varphi(hk) - \varphi(hk - h) \cong h \sum_{\beta=0}^{k-1} C_\beta^{(1)} \varphi'(h\beta)$$

chekli-ayirmali formula Adams tipidagi *oshkor chekli-ayirmali formula* deyiladi.

Adams tipidagi chekli-ayirmali formulalarning optimal koeffitsiyentlarini ifodalash uchun quyidagi teoremlar o'rinli.

4-teorema. $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ sinfda, $m \geq 3$ holda Adams tipidagi oshkor chekli-ayirmali formulalarning $\overset{\circ}{C}_\beta^{(1)}$, $\beta = 1, 2, \dots, k-2$ optimal koeffitsiyentlari uchun

$$\overset{\circ}{C}_\beta^{(1)} = \sum_{j=1}^{m-2} (M_j \cdot \lambda_j^\beta + N_j \lambda_j^{k-\beta}), \quad \beta = 1, 2, \dots, k-2 \quad (26)$$

ifoda o'rinlidir, bu yerda λ_j lar $(2m-4)$ -darajali $P_{2m-4}(\lambda)$ ko'phadning $|\lambda_j| < 1$ ildizlar, M_j va N_j noma'lum parametrlar.

5-teorema. $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ sinfda, $m \geq 3$ holda Adams tipidagi oshkor chekli-ayirmali formulalarning $\overset{\circ}{C}_0^{(1)}$ va $\overset{\circ}{C}_{k-1}^{(1)}$ optimal koeffitsiyentlari uchun

$$\overset{\circ}{C}_0^{(1)} = \frac{e^h - he^h - 1}{he^h(e^{hk-h} - 1)} + \frac{1}{e^{hk-h} - 1} \sum_{j=1}^{m-2} \left[\frac{(M_j + N_j \lambda_j)(1 - \lambda_j^{k-2}) \lambda_j}{1 - \lambda_j} - \right]$$

$$\left. \frac{M_j(e^{hk-2h} - \lambda_j^{k-2})(\lambda_j e^h - 1)\lambda_j e^h + N_j(\lambda_j^{k-2} e^{hk-2h} - 1)(e^h - \lambda_j)\lambda_j^2 e^h}{(e^h - \lambda_j)(\lambda_j e^h - 1)} \right], \quad (27)$$

$$C_{k-1}^{(1)} = \frac{he^{hk} - e^h + 1}{he^h(e^{hk-h} - 1)} - \frac{e^{hk-h}}{e^{hk-h} - 1} \sum_{j=1}^{m-2} \left[\frac{(M_j + N_j \lambda_j)(1 - \lambda_j^{k-2})\lambda_j}{1 - \lambda_j} - \frac{M_j(e^{hk-2h} - \lambda_j^{k-2})(\lambda_j e^h - 1)\lambda_j + N_j(\lambda_j^{k-2} e^{hk-2h} - 1)(e^h - \lambda_j)\lambda_j^2}{(e^h - \lambda_j)(\lambda_j e^h - 1)e^{hk-2h}} \right] \quad (28)$$

ifodalar o‘rinlidir.

Dissertatsiyaning “ $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazoda oshkor va oshkormas optimal chekli-ayirmali formulalar qurish va ularning xatoliklarini baholash” deb nomlangan ikkinchi bobi $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazoda optimal oshkor va oshkormas chekli-ayirmali formulalar qurishga bag‘ishlangan. Dissertatsiyaning ushbu bobida dastlab $D_1(h\beta)$ diskret operator yordamida Gilbert fazosi $W_2^{(2,1)}(0,1)$ da Adams tipidagi chekli-ayirmali formulalarning optimal koeffitsiyentlari topilgan. Keyinchalik, $W_2^{(2,1)}(0,1)$ sinfda chekli-ayirmali formulalar xatoligining optimal baholari olingan, ya’ni $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazoda chekli-ayirmali formulalar xatolik funksionali normasining kvadrati hisoblab chiqilgan.

Ushbu bobning asosiy natijalari quyidagilardan iborat.

6-teorema. Gilbert fazosi $W_2^{(2,1)}(0,1)$ da

$$\varphi(hk) - \varphi(hk - h) \cong h \sum_{\beta=0}^{k-1} C_{\beta}^{(1)} \varphi'(h\beta) \quad (29)$$

Adams tipidagi oshkor chekli-ayirmali formulaning optimal koeffitsientlari uchun

$$C_{\beta}^{(1)} = \begin{cases} 0 & \text{npu } 0 \leq \beta \leq k-2, \\ \frac{e^h - 1}{he^h} & \text{npu } \beta = k-1 \end{cases}$$

ifoda o‘rinlidir.

Demak, $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazoda optimal oshkor chekli-ayirmali formula quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\varphi_{n+k} = \varphi_{n+k-1} + \frac{e^h - 1}{e^h} \varphi'_{n+k-1}, \quad n = 0, 1, \dots, N-k, \quad k \geq 1.$$

7-teorema. Gilbert fazosi $W_2^{(2,1)}(0,1)$ da

$$\varphi(hk) - \varphi(hk - h) \cong h \sum_{\beta=0}^k C_{\beta}^{(1)} \varphi'(h\beta) \quad (30)$$

Adams tipidagi oshkormas chekli-ayirmali formulaning optimal koeffitsientlari uchun

$$C_{\beta}^{\circ(1)} = \begin{cases} 0 & npu \quad \beta = 1, 2, \dots, k-2, \\ \frac{e^h - 1}{h(e^h + 1)} & npu \quad \beta = k-1, k \end{cases}$$

tenglik o‘rinlidir.

Shunday qilib, $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazoda optimal oshkormas chekli-ayirmali formula quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\varphi_{n+k} = \varphi_{n+k-1} + \frac{e^h - 1}{(e^h + 1)} (\varphi'_{n+k-1} + \varphi'_{n+k}), \quad n = 0, 1, \dots, N-k, \quad k \geq 1.$$

8-teorema. $W_2^{(2,1)}(0,1)$ sinfda (29) ko‘rinishdagi oshkor chekli-ayirmali formula uchun xatolikning optimal bahosi

$$\left\| \ell^e |W_2^{(2,1)*}(0,1) \right\|^2 = h - \frac{(e^h - 1)(3e^h - 1)}{2e^{2h}}$$

formula bilan ifodalanadi.

Ushbu bahoning h bo‘yicha Teylor qatoriga yoyilmasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\left\| \ell^e |W_2^{(2,1)*} \right\|^2 = \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + O(h^5).$$

9-teorema. $W_2^{(2,1)}(0,1)$ sinfda (30) ko‘rinishdagi oshkormas chekli-ayirmali formula uchun xatolikning optimal bahosi

$$\left\| \ell^{im} |W_2^{(2,1)*} \right\|^2 = h - \frac{2(e^h - 1)}{e^h + 1}$$

formula bilan ifodalanadi.

Ushbu bahoning h bo‘yicha Teylor qatoriga yoyilmasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\left\| \ell^{im} |W_2^{(2,1)*} \right\|^2 = \frac{h^3}{12} - \frac{h^5}{120} + O(h^6).$$

Ikkinchi bobning 5-paragrafida 6- va 7-teoremlarda berilgan (29) optimal oshkor va (30) optimal oshkormas chekli ayirmali formulalar yordamida topilgan sonli yechimlar va ularning xatoliklari keltirilgan. Bunda sonli yechimlar va ularning xatoliklari jadvallar, hamda shu jadvalga mos grafiklar orqali ko‘rsatib o‘tilgan.

Dissertatsiyaning “**Gilbert fazosi $W_2^{(3,2)}(0,1)$ da optimal chekli-ayirmali formula qurish**” nomli uchinchi bobi $W_2^{(3,2)}(0,1)$ fazoda ixtiyoriy k natural soni uchun oshkor optimal chekli-ayirmali formula qurishga bag‘ishlangan. Bu yerda diskret argumentli optimal funksiya topilgan va undan $W_2^{(3,2)}(0,1)$ sinfda oshkor chekli-ayirmali formula xatoligining optimal bahosini topishda foydalanilgan. Keyin $W_2^{(3,2)}(0,1)$ sinfda oshkor chekli-ayirmali formula uchun xatolikning optimal bahosi hisoblangan. Bundan tashqari, diskret argumentli optimal funksiyasidan foydalanib, $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ sinfda oshkor chekli-ayirmali formulalarning optimal

xatoligi uchun yangi formula olingan. So'ngra, qurilgan oshkor optimal chekli-ayirmali formula yordamida ba'zi Koshi masalalari yechilib sonli natijalar olingan.

Ushbu bobning assosiy natijalarini keltirib o'tamiz.

10-teorema. *Adams tipidagi*

$$\varphi(hk) - \varphi(hk - h) \cong h \sum_{\beta=0}^{k-1} C_{\beta}^{(1)} \varphi'(h\beta) \quad (31)$$

oshkor chekli-ayirmali formulaning optimal koeffitsientlari

$$C_0^{(1)} = \frac{\lambda^k (e^h - he^h - 1)(\lambda^2 - 1)}{he^h (e^h - 1)(\lambda^{2k} - \lambda^2)}, \quad (32)$$

$$C_{\beta}^{(1)} = \frac{(e^h - he^h - 1)(1 - \lambda) [\lambda^{k+\beta} (e^h - \lambda) + \lambda^{k-\beta} (\lambda e^h - 1)]}{he^h (e^h - 1)(\lambda^{2k} - \lambda^2)}, \quad \beta = 1, 2, \dots, k-2, \quad (33)$$

$$C_{k-1}^{(1)} = \frac{(\lambda^{2k} - \lambda^2)(he^{2h} - e^h + 1) + (\lambda^{2k-1} - \lambda^3)(e^{2h} - he^{2h} - e^h)}{he^h (e^h - 1)(\lambda^{2k} - \lambda^2)} \quad (34)$$

tengliklar bilan ifodalanadi.

11-teorema. *Diskret argumentli $\overset{\circ}{F}(h\beta) = \overset{\circ}{d} e^{-h\beta} + \overset{\circ}{p}_0$ optimal funksiya*

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{F}(h\beta) = & \left(\frac{e^{hk-h} (e^h - h - 1)}{4} + \frac{e^{hk-2h} (e^h - he^h - 1) [(e^h - 1)(\lambda^{2k-1} - \lambda^{2k-2} e^h) - \lambda e^h + 1]}{4(e^h - 1)(\lambda^{2k-2} - 1)(\lambda e^h - 1)} \right) + \\ & + \frac{e^{hk-2h} (e^h - he^h - 1)(\lambda e^{2h} - \lambda e^h - \lambda + 1)}{4(e^h - 1)(\lambda^{2k-2} - 1)(e^h - \lambda)} - \frac{\lambda^{k-1} (e^h - he^h - 1)(1 - \lambda^2)(e^{2h} - 1)}{4e^h (\lambda^{2k-2} - 1)(e^h - \lambda)(\lambda e^h - 1)} \cdot e^{-h\beta} - \\ & - h^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{(e^h - he^h - 1)(1 + \lambda^{k-1})(\lambda^{k-1} e^h - \lambda^k + \lambda e^h - 1)}{2he^h (e^h - 1)(\lambda^{2k-2} - 1)(1 - \lambda)} \right) \end{aligned} \quad (35)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

12-teorema. $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ sinfda, $m \geq 2$ holda Adams tipidagi oshkor chekli-ayirmali formulalar uchun xatolikning optimal bahosi

$$\left\| \ell \left| W_2^{(m,m-1)*} \right|^2 \right\| = (-1)^m \left\{ \frac{e^{-h} - e^h}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{h^{2j-1}}{(2j-1)!} + h \sum_{\gamma=0}^{k-1} C_{\gamma}^{(1)} \left[\overset{\circ}{d} e^{-h\gamma} + P_{m-3}^{\circ}(h\gamma) + f_m(h\gamma) \right] \right\} \quad (36)$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda $C_{\beta}^{(1)}$ - oshkor chekli-ayirmali formulalarning

optimal koeffitsiyentlari, $\overset{\circ}{d} e^{-h\beta} + P_{m-3}^{\circ}(h\beta)$ - diskret argumentli optimal funksiya,

$$f_m(h\beta) = \frac{1}{2} \left((1 - e^h) \left(\frac{e^{h\beta-hk}}{2} - \frac{e^{hk-h\beta-h}}{2} \right) - \sum_{j=2}^{m-1} \left(\frac{(h\beta - hk)^{2j-2}}{(2j-2)!} - \frac{(h\beta - hk + h)^{2j-2}}{(2j-2)!} \right) \right).$$

13-teorema. (31) oshkor chekli-ayirmali formula uchun $W_2^{(3,2)}(0,1)$ sinfda xatolikning optimal bahosi

$$\begin{aligned}
\left\| \ell \mid W_2^{(3,2)*}(0,1) \right\|^2 &= \frac{(e^h - he^h - 1)}{2e^{2h}(\lambda^{2k-2} - 1)(\lambda e^h - 1)(e^h - \lambda)} \left[2(e^{2h} - e^h + 2)(\lambda^{2k-2} - 1)\lambda e^h + \right. \\
&+ (e^h - 3)(\lambda^{2k-4} - 1)\lambda^2 e^{2h} - (2e^{2h} - e^h + 1)(\lambda^{2k} - 1) \left. \right] + \frac{h(e^h - 1)}{2e^h} + \\
&+ \frac{h^2(e^h - he^h - 1)(\lambda^{2k-2}e^h - \lambda^{2k-1} + \lambda e^h - 1)}{e^h(e^h - 1)(\lambda^{2k-2} - 1)(1 - \lambda)} + \frac{h^3}{3}
\end{aligned} \tag{37}$$

formula bilan ifodalanadi.

Oshkor chekli-ayirmali formula (37) optimal xatoligining Teylor qatoriga yoyilmasi quyidagicha:

$$\begin{aligned}
\left\| \ell \mid W_2^{(3,2)*}(0,1) \right\|^2 &= \frac{h^5}{30(\lambda - 1)^2} \cdot \left[7\lambda + 8 + \frac{31\lambda^{10} - 1}{4(\lambda^8 + \lambda^6 + \lambda^4 + \lambda^2 + 1)} \right] - \\
&- \frac{h^6}{144} \cdot \frac{16\lambda^3(\lambda^2 - \lambda + 1) - 17\lambda^2(\lambda^4 + 1) + 8\lambda(\lambda^6 + 1) - 35(\lambda^8 + 1)}{(\lambda^4 + \lambda^2 + 1)(\lambda - 1)^4} + O(h^7).
\end{aligned}$$

Ushbu bobning 4-paragrafida 10-teoremada keltirilgan koeffitsiyentlar orqali aniqlangan optimal oshkor chekli-ayirmali formula va boshqa ma'lum formulalar yordamida topilgan taqribiy yechimlar, hamda ularning xatoliklari keltirilgan. Keltirilgan sonli natijalar jadvallar va bu jadvallarga mos grafiklar orqali taqdim etilgan.

XULOSA

Dissertatsiya ishida oddiy differensial tenglamalarga qo'yilgan Koshi masalasini taqribiy yechish uchun oshkor va oshkormas optimal chekli-ayirmali formulalar qurildi va funksiyalar sinfida ushbu formulalar xatoligining optimal baholari olindi.

Tadqiqot ishining asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1. $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ sinfda maksimallashtiruvchi element, ya'ni chekli-ayirmali formulalarning ekstremal elementi topildi;
2. $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ sinfda xatolikni chekli-ayirmali formula koeffitsiyentlari bo'yicha minimallashtirish orqali chiziqli tenglamalar sistemasi olindi;
3. $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ sinfda, har qanday $m \geq 3$ uchun Adams tipidagi oshkor chekli-ayirmali formulalar optimal koeffitsiyentlarining ko'rinishi topildi;
4. $m = 2$ uchun oshkor va oshkormas chekli-ayirmali formulalarning optimal koeffitsiyentlari topildi, hamda $W_2^{(2,1)}(0,1)$ sinfda oshkor va oshkormas chekli-ayirmali formulalar xatoliklarining optimal baholari olindi;
5. $m = 3$ uchun optimal oshkor chekli-ayirmali formula qurildi va $W_2^{(3,2)}(0,1)$ sinfda oshkor chekli-ayirmali formula xatoligining optimal bahosini hisoblashda foydalanilgan diskret argumentli optimal funksiya topildi;

6. $W_2^{(3,2)}(0,1)$ sinfda oshkor chekli-ayirmali formula xatoligi uchun optimal baho hisoblab chiqildi va funksiyalarning $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ sinfida oshkor chekli-ayirmali formulalar optimal xatoligi uchun yangi formula olindi;
7. sonli natijalar keltirildi.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

КАРИМОВ РОЗИК СОДИК УГЛИ

**ОПТИМАЛЬНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ ФОРМУЛЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ
ПРОСТРАНСТВЕ $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ**

01.01.03 – Вычислительная и дискретная математика

**АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Ташкент–2025

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за № B2024.1.PhD/FM1013.

Диссертация выполнена в Институте Математики им. В.И.Романовского АН РУз.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:

Шадиметов Халматвай Махкамбаевич
доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты:

Нормуродов Чори Бегалиевич
доктор физико-математических наук,
профессор

Худойберганов Мирзоали Уразалиевич
доктор физико-математических наук,
профессор

Ведущая организация:

Каракалпакский государственный университет

Защита диссертации состоится «_____» _____ 2025 года в _____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за № _____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «_____» _____ 2025 года.

(протокол рассылки № _____ от «_____» _____ 2025 года).

М.М. Арипов

Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

З.Р. Рахмонов

Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

Р.Д. Алоев

Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученой степени доктора наук, д.ф.-м.н., профессор

ВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В мире большое количество задачи физики и техники приводят к краевым либо начально-краевым задачам для линейных и нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом число задач, имеющих аналитическое решение, ограничено. Это приводит к необходимости искать приближенные решения, пользуясь для этого различными численными методами. Достаточно эффективным методом численного решения задач математической физики является метод конечных разностей или метод сеток. Поэтому построения оптимальных явных и неявных конечно-разностных методов для приближенного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений, исследованных свойств этих оптимальных численных методов и оценке их погрешности на классах функций являются актуальной задачей современной вычислительной математики.

В настоящее время в мире во многих инженерных проблемах интересуются в основном решениями физических задач, а не точными решениями математических. Современные представления о законах природы позволяют формулировать задачи, которые более общи и сложны по сравнению с теми, которые мы можем на самом деле решить. Упрощения, основанные на физических или инженерных соображениях, нужно рассматривать как приближения, формирующие по крайней мере одну стадию процесса решения. Например, дискретизация непрерывных задач. Приближенный метод для решения дискретных задач является оптимальным, если на этом методе достигается нижняя грань в погрешности метода на классах. Поэтому нахождение оптимальных коэффициентов и вычисление оптимальной оценки погрешности конечно-разностных формул на классах функций является одним из приоритетных научно-исследовательских работ.

В нашей стране большое внимание уделяется такому важному направлению, как разработка оптимальных методов численного анализа для решения фундаментальных и прикладных задач и оценки погрешностей этих методов в функциональных пространствах. В частности, большое внимание уделялось теории численного интегрирования вычислительной математики, особенно в гильбертовом пространстве, где были получены важные результаты по построению оптимальных конечно-разностных формул и оценки погрешности этих формул на классах функций. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по таким приоритетным направлениям «алгебра, математический анализ, теория дифференциальных уравнений, функциональный анализ, теория вероятностей, вычислительной математики и математического моделирования»² в деятельности Института математики имени В.И.Романовского АН Руз, является одной из основных задач. Для обеспечения выполнения постановления важно построить конечно-разностные формулы на классах функций.

² Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП-4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 07 мая 2020 года.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан УП-4947 от 07 февраля 2017 года “О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан”, УП-60 от 28 января 2022 года “О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы”, в постановлениях ПП-2789 от 17 февраля 2017 года “О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности”, ПП-2909 от 20 апреля 2017 года “О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования”, ПП-3682 от 27 апреля 2018 года “О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов”, ПП-4708 от 07 мая 2020 года “О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики”, а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Эта исследовательская работа была выполнена в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV, которые включает математику, механику и информатику.

Степень изученности проблемы. Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений даже сегодня остается большой проблемой. Поэтому в настоящее время над этой проблемой занимаются многие исследователи. S.Mehrkanoon, Z.A.Majid, M.Suleiman, K.I.Othman и Z.B.Ibrahim предложили новый подход к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с использованием трех точек и трех шагов. Бевкен Л., Бутузов Д., Хоанг Н.С. и др. представляли новые полуявные и полунейвные методы предиктора-корректора. В этом исследовании они изучали численную устойчивость этих методов, строя области устойчивости и явно показывали, что полуявные методы обладают более высокой числовой устойчивостью, чем обычные алгоритмы предиктора-корректора.

Osama Y.Ababneh представлял новые численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений, как в линейных, так и в нелинейных случаях. Adekoya M.Odunayo и Z.O.Ogunwobi сбалансировали методы Адамса-Башфорта-Мултона и Милна-Симпсона для дифференциального уравнения второго порядка. Sajal K. Kar использовал Схема Адамса-Башфорта для создания новой схемы конечно-разност времени предиктора-корректора. Emil Vitásek и Praha изучали методы сколь угодно высоких порядков точности решения абстрактного обыкновенного дифференциального уравнения. Омарова А.Г. и В.Г.Зверева исследовали задачу Коши для дифференциальных уравнений. Здесь они предложили новые специальные разностные схемы для приближенного решения этой задачи.

Известно, что проблема оптимизации вычислительных алгоритмов рассматривались и рассматриваются в работах зарубежных ученых С.Л.Соболева, В.Л.Васкевича, И.Бабушки, Г.Далквиста, М.Д.Рамазанова,

В.И.Половинкина, Б.Г.Габдулхаева, И.В.Бойкова. В этой области занимались и занимаются наши ученые Г.Н.Салихова, М.И.Исраилова, Х.М.Шадиметова, А.Р.Хаётова, Ф.А.Нуралиева, Д.М.Ахмедова, С.С.Азамова, А.К.Болтаева и другие. М.М.Арипов, Р.Д.Алоев и их ученики занимаются исследованиями автомодельных решений нелинейных параболических уравнений и устойчивостью разностных схем.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами научно-исследовательской организации, в которой выполняется диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой «Построение оптимальных квадратурных, интерполяционных и конечно-разностных формул в Гильбертовых пространствах и их применение к решению интегральных и дифференциальных уравнений» лаборатории вычислительной математики Института математики им. В.И. Романовского Академия Наук Республики Узбекистан.

Цель исследования состоит в том, чтобы построить явные и неявные (экстраполяционные и интерполяционные) оптимальные конечно-разностные формулы (конечно-разностные методы или конечно-разностные схемы) для приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений, а также для определения норм их функционалов погрешностей в гильбертовом пространстве.

Задачи исследования:

найти погрешность конечно-разностных формул на классах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ с помощью экстремальной функции для любого $m \geq 2$;

получить систему для нахождения оптимальных коэффициентов конечно-разностных формул;

разработать новый алгоритм для оптимизации конечно-разностных формул на классах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ для любого $m \geq 2$;

реализовать этот алгоритм и вычислить оптимальных погрешностей конечно-разностных формул на классах $W_2^{(2,1)}(0,1)$ и $W_2^{(3,2)}(0,1)$.

Объект исследования. Обыкновенные дифференциальные уравнения, экстраполяционные и интерполяционные конечно-разностные схемы, оценка погрешности конечно-разностных схем.

Предмет исследования. Погрешности конечно-разностных формул на классах дифференцируемых функций.

Методы исследования. В исследованиях диссертации использовались приближенные методы для дифференциальных уравнений, методы вычислительной математики, методы конечных разностей.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

найдена норма функционала погрешности конечно-разностных формул на классах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ с помощью экстремальной функции для любого $m \geq 2$;

получена система методом неопределенных множителей Лагранжа для нахождения оптимальных коэффициентов конечно-разностных формул;

разработан алгоритм на основе метода Соболева для оптимизации конечно-разностных формул на классах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ для любого $m \geq 2$;

реализован этот алгоритм и вычислен оптимальных погрешностей конечно-разностных формул на классах $W_2^{(2,1)}(0,1)$ и $W_2^{(3,2)}(0,1)$.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

построенные конечно-разностные формулы используется при численном решении задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений;

результаты диссертации использованы для аппроксимации уравнений математической модели, построенной для определения эффективных параметров ветроэнергетических установок.

Достоверность результатов исследования основана на вычислительной математике, строгости математических рассуждений, функциональном анализе, теории оптимизации, теории функций дискретного аргумента и теории конечно-разностных формул.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Построение оптимальных явных и неявных конечно-разностных формул для приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений в пространстве Гильберта является научной ценностью результатов диссертационной работы.

В этом исследовании были обнаружены оптимальные явные и неявные конечно-разностные формулы, которые можно использовать для численного решения задач, связанных с физикой, механикой, теорией упругости и другими областями, которые естественным образом сводятся к обыкновенным дифференциальным уравнениям.

Внедрение результатов исследования. На основе этих научных результатов был разработан алгоритм построения оптимальных конечно-разностных формул приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве:

из научных результатов, полученных в данной диссертационной работе, при реализации инновационного проекта ИЛ-21071166 «Создание ветроэнергетической установки с вертикальной осью, рассчитанной на малую скорость ветра», выполняемого в Институте механики и сейсмостойкости сооружений им. М. Т. Уразбаева АН РУз в 2022–2024 годах, т.е. данные формулы использовались при приближенном решении уравнений математической модели, созданной с целью определения эффективных параметров ветроэнергетических установок (справка № 696-3 от 8 июля 2024 года, Институт механики и сейсмостойкости сооружений им. М.Т. Уразбаева Академии Наук Республики Узбекистан). В результате удалось приближенно решить уравнения математической модели, предназначенной для определения эффективных параметров ветроэнергетических установок;

полученные в диссертационной работе научные результаты были использованы для численного моделирования топологических моделей газовых сетей при реализации инновационного проекта ИЛ-5321091543 «Создание и моделирование топологической модели газовых сетей»,

осуществляемого в Ташкентском университете информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий в 2022–2023 годах (справка № 4207/05-2 от 18 октября 2024 года, Ташкентский университет информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий). В результате удалось аппроксимировать решение дифференциальных уравнений для эффективных моделей моделирования газовых сетей.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации были обсуждены на 9 международных и 2 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 19 научных работ, из них 7 статей опубликованы в журналах, которые входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на соискание ученой степени доктора философии (PhD), в том числе 3 статьи опубликованы в зарубежных журналах, 4 в республиканских научных изданиях. Кроме того, получено одно свидетельство об официальной регистрации программы для вычислительных систем.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, разбитых на пятнадцать параграфов, заключения и списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 97 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность и необходимость темы диссертации, указывается соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и техники республики, указывается степень изученности проблемы, приводится обзор мировых исследований по теме, описываются цель, задачи, объект и предмет исследования, излагается научная новизна и практические результаты исследования, раскрывается теоретическая и практическая значимость полученных результатов, дано внедрение результатов исследования, приводятся данные по опубликованным работам и структуре диссертации.

Исследование оптимальных конечно-разностных формул в пространстве гильберта находится в первой главе диссертации под названием «**Алгоритм построения оптимальных конечно-разностных формул в гильбертовом пространстве**». В этой главе диссертации приводятся задачи построения конечно-разностных формул в гильбертовом пространстве, т.е. постановка задач построения конечно-разностных формул с использованием алгебраических и функциональных методов.

Первой параграф этой главы посвящается алгебраической постановке задач построения конечно-разностных формул.

Рассмотрим приближенное решение задачу Коши для уравнения первого порядка. Пусть требуется найти непрерывную функцию $y = y(x)$ на отрезке $x \in [0,1]$, удовлетворяющую нелинейному дифференциальному уравнению при $x > 0$ и начальному условию при $x = 0$:

$$y' = f(x, y), \quad x \in [0, 1], \quad y(0) = y_0, \quad (1)$$

где $f(x, y)$ - заданная непрерывная функция двух аргументов.

Если функция $f(x, y)$ определена в прямоугольнике $D = \{x \in [0, 1], |y - y_0| \leq U\}$ и удовлетворяет в области D по переменной y условию Липшица:

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \text{ для всех } (x, y_1), (x, y_2) \in D,$$

где $L = \text{const} > 0$, то задача (1) имеет единственное решение. Для нахождения приближенного решения задача (1) разделим отрезок $[0, 1]$ на N частей длины

$h = \frac{1}{N}$ и обозначим через y_n приближенные значения искомого решения $y(x)$ в точках $x_n = nh$, $n = 0, 1, \dots, N$. Для нахождения приближенного решения задача (1) служит метод Эйлера:

$$y_{n+1} = y_n + hy'_n, \quad (2)$$

где $y'_n = f(x_n, y_n)$, так что y_{n+1} есть линейная комбинация значений функции, и ее производных в точке x_n .

Используя y'_n во многих предыдущих точках, для $y'(x)$ можно построить интерполяционную формулу

$$y'(x) = y'_n + \frac{1}{h}(x - x_n)\nabla y'_n + \frac{1}{2!h^2}(x - x_n)(x - x_{n-1})\nabla^2 y'_n + \\ + \frac{1}{3!h^3}(x - x_n)(x - x_{n-1})(x - x_{n-2})\nabla^3 y'_n + \dots,$$

где ∇ обозначает разность назад, т. е. $\nabla z_n = z_n - z_{n-1}$. Интегрируя эту интерполяционную формулу на отрезке $[x_n, x_{n+1}]$ получаем

$$y_{n+1} = y_n + h \left(y'_n + \frac{1}{2}\nabla y'_n + \frac{5}{12}\nabla^2 y'_n + \frac{3}{8}\nabla^3 y'_n + \dots \right),$$

- результат, известный как *формула Адамса-Башфорта*.

Аналогично, интегрируя по отрезку $[x_{n-1}, x_n]$, получим *формулу Адамса-Мултона*

$$y_n = y_{n-1} + h \left(y'_n - \frac{1}{2}\nabla y'_n - \frac{1}{12}\nabla^2 y'_n - \frac{1}{24}\nabla^3 y'_n \dots \right).$$

Кроме того, интегрирование эту формулу на отрезках $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ и $[x_{n-2}, x_n]$ дает явные *формулы Нистрёма*

$$y_{n+1} = y_{n-1} + h \left(2y'_n + \frac{1}{3}\nabla^2 y'_n + \frac{1}{3}\nabla^3 y'_n + \dots \right)$$

и неявные *формулы Милн-Симпсона*

$$y_n = y_{n-2} + h \left(2y'_n - 2\nabla y'_n + \frac{1}{3}\nabla^2 y'_n + \dots \right).$$

Эти формулы устойчивы в смысле Далквиста. Аналогичные формулы можно вывести с помощью приближенного дифференцирования и т.д.

Общая конечно-разностная формула. Рассмотрим теперь, учитывая выше сказанное, общий конечно-разностный метод

$$\sum_{\beta=0}^k C_{\beta} y_{n+\beta} = h \sum_{\beta=0}^k C_{\beta}^{(1)} y'_{n+\beta}, \quad n = 0, 1, \dots, N-k, \quad C_k \neq 0, \quad (3)$$

с начальными условиями

$$y_i = y_{0,i}, \quad i = 0, 1, \dots, k-1,$$

где $y'_{\beta} = f(x_{\beta}, y_{\beta})$, $x_{\beta} = h\beta$, $\beta = 0, 1, \dots, N$, $k = 1, 2, \dots, N$, $h = \frac{1}{N}$, $N = 1, 2, \dots$

Так как формула (3) определяет y_k через k предыдущих значений y_i будем называть ее *конечно-разностной формулой k -го порядка*. Если $C_k^{(1)} \neq 0$, то формула называется *явной*; если же $C_k^{(1)} = 0$, то *неявной*.

Погрешность аппроксимации формулы (3) на решении $y = y(x)$ уравнения (1) определяется по формуле

$$R_k = \sum_{\beta=0}^k C_{\beta} y(x_{\beta}) - h \sum_{\beta=0}^k C_{\beta}^{(1)} f(x_{\beta}, y(x_{\beta})). \quad (4)$$

Сходимость конечно-разностных формул.

Определение 1. Говорят, что конечно-разностная формула имеет степень $p \geq 0$, если выполнены следующие условия:

$$\sum_{\beta=0}^k C_{\beta} = 0, \quad \sum_{\beta=0}^k \frac{\beta^s C_{\beta}}{s!} = h \sum_{\beta=0}^k \frac{\beta^{s-1} C_{\beta}^{(1)}}{(s-1)!}, \quad s = 1, 2, \dots, p, \quad (0^0 \equiv 1). \quad (5)$$

Легко проверить с помощью формулы Тейлора, что если эти условия выполняются, то для достаточно гладкой функции $y(x)$

$$\sum_{\beta=0}^k C_{\beta} y(x+h\beta) - h \sum_{\beta=0}^k C_{\beta}^{(1)} y'(x+h\beta) = A_{p+1} h^{p+1} y^{(p+1)}(x) + O(h^{p+2}),$$

где A_{p+1} – некоторая постоянная.

Отсюда следует, что конечно-разностное уравнение (3) степени p аппроксимирует дифференциальное уравнение (1) локально с точностью порядка h^{p+1} , т. е. что ошибка, возникающая при вычислении

$$C_k y(x+hk) - h C_k^{(1)} f(x+hk, y(x+hk))$$

формуле (1), будет порядка h^{p+1} .

Таким образом, локальный порядок аппроксимации (1) конечно-разностной формулой (3) степени p будет h^{p+1} .

Из этого следует, что на коэффициенты из (3) необходимо наложить некоторые дополнительные условия для того, чтобы исключить нежелательные явления, отмеченные выше. Г. Дальквист детально изучил эту проблему.

Определение 2. Конечно-разностная формула (3) устойчива в смысле

Далквиста, если все корни ζ_i характеристического полинома $P(\zeta) = \sum_{\beta=0}^k C_{\beta} \zeta^{\beta}$

таковы, что $|\zeta_i| \leq 1$, а также корни, для которых $|\zeta_i| = 1$, просты.

В параграфе 2 мы будем минимизировать погрешность (4) по коэффициентам C_{β} и $C_{\beta}^{(1)}$ при условиях (5), т.е. будем рассматривать построение конечно-разностных формул в функциональной постановке. Для этого обозначим $\varphi(h\beta) = y(h\beta)$, $\varphi'(h\beta) = y'(h\beta)$, где $y'(h\beta) = f(h\beta, \varphi(h\beta))$.

Теперь, мы переходим к функциональной постановке наших задач. Рассмотрим задачу построения конечно-разностных формул

$$\sum_{\beta=0}^k C_{\beta} \varphi(h\beta) - h \sum_{\beta=0}^k C_{\beta}^{(1)} \varphi'(h\beta) \cong 0. \quad (6)$$

Здесь C_{β} и $C_{\beta}^{(1)}$ коэффициенты конечно-разностных формул. Класс рассматриваемых задач определяется заданием класса $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, т.е. мы рассмотрим функции $\varphi(x)$ из класса вещественных функций в гильбертовом пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$. Скалярное произведение в этом пространстве определяется

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 (\varphi^{(m)}(x) + \varphi^{(m-1)}(x)) (\psi^{(m)}(x) + \psi^{(m-1)}(x)) dx. \quad (7)$$

Пусть пространство $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ вложено в пространство $C(0,1)$, непрерывных функций, тогда будет линейным функционал погрешности конечно-разностных формул

$$\begin{aligned} \ell(\varphi) &= (\ell, \varphi) = \sum_{\beta=0}^k C_{\beta} \varphi(h\beta) - h \sum_{\beta=0}^k C_{\beta}^{(1)} \varphi'(h\beta) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\sum_{\beta=0}^k C_{\beta} \delta(x - h\beta) + h \sum_{\beta=0}^k C_{\beta}^{(1)} \delta'(x - h\beta) \right] \varphi(x) dx. \end{aligned} \quad (8)$$

Величина (8) называется погрешностью конечно-разностных формул. Погрешность конечно-разностных формул на классах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ называют величиной

$$\ell(W_2^{(m,m-1)}) = \sup_{\varphi \in W_2^{(m,m-1)}} |\ell(\varphi)|. \quad (9)$$

Нижняя грань

$$\overset{\circ}{\ell}(W_2^{(m,m-1)}) = \inf_{C_{\beta}, C_{\beta}^{(1)}} \left\| \ell(W_2^{(m,m-1)}) \right\| \quad (10)$$

называется *оптимальной конечно-разностной формулы* на рассматриваемом классе. Если существует конечно-разностной формула, для которой

$$\ell(W_2^{(m,m-1)}) = \overset{\circ}{\ell}(W_2^{(m,m-1)}), \text{ то}$$

такую конечно-разностную формулу называют *оптимальной конечно-разностной формулой* на рассматриваемом классе. А коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta$ и $\overset{\circ}{C}_\beta^{(1)}$ называют *оптимальными коэффициентами* конечно-разностных формул.

Задача о построении оптимальной конечно-разностной формулы в функциональной постановке состоит в минимизации погрешности конечно-разностных формул на классах функций $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$. Так, как $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ гильбертово пространство, тогда эта погрешность на классах совпадает с нормой функционала погрешности (8) конечно-разностных формул. Для нахождения погрешности конечно-разностных формул на классах будем пользоваться экстремальной функцией.

Определение 3. Если выполняется равенство

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell | W_2^{(m,m-1)*}\| \cdot \|\psi_\ell | W_2^{(m,m-1)}\|$$

и $\psi_\ell \in W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, тогда ψ_ℓ называется *экстремальной функцией* функционала ℓ .

Функция $\psi_\ell(x)$ является элементом Рисса. Тогда в силу теоремы Рисса следует, что

$$(\ell, \varphi) = \langle \psi_\ell, \varphi \rangle, \quad (11)$$

$$\|\ell | W_2^{(m,m-1)*}(0,1)\| = \|\psi_\ell | W_2^{(m,m-1)}(0,1)\|.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Максимизирующий элемент, т.е. экстремальная функция конечно-разностных формул (6) в гильбертовом пространстве $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ задается равенством

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \ell(x) * G_m(x) + P_{m-2}(x) + de^{-x}, \quad (12)$$

где

$$G_m(x) = \frac{\text{sign}x}{2} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{x^{2j-1}}{(2j-1)!} \right)$$

является функций Грина или фундаментальным решение следующе уравнений

$$G_m^{(2m)}(x) - G_m^{(2m-2)}(x) = \delta(x),$$

$d = \text{const}$, $P_{m-2}(x)$ - некоторый неизвестный многочлен степени $m-2$.

В параграфе 3 с помощью экстремальной функцией будут найдены погрешности конечно-разностных формул на классах функций $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$.

Теорема 2. Погрешность конечно-разностных формул (6) на классах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, т.е. квадрат нормы функционала погрешности конечно-разностных формул дается равенством

$$\|\ell | W_2^{(m,m-1)*}\|^2 = (-1)^m \left[\sum_{\gamma=0}^k C_\gamma \sum_{\beta=0}^k C_\beta G_m(h\gamma - h\beta) - \right.$$

$$\left. -2h \sum_{\gamma=0}^k C_{\gamma}^{(1)} \sum_{\beta=0}^k C_{\beta} G'_m(h\gamma - h\beta) - h^2 \sum_{\gamma=0}^k C_{\gamma}^{(1)} \sum_{\beta=0}^k C_{\beta}^{(1)} G''_m(h\gamma - h\beta) \right], \quad (13)$$

где функции $G'_m(x)$ и $G''_m(x)$ известны.

Поэтому, мы будем минимизировать погрешность конечно-разностных формул на классах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ по коэффициентам $C_{\beta}^{(1)}$, $\beta = 0, 1, \dots, k$ подчиненным условиям $(\ell, x^{\alpha}) = 0$, $\alpha = 0, 1, \dots, m-2$, $(\ell, e^{-x}) = 0$.

В параграфе 4 минимизируя погрешность на классах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ по коэффициентам конечно-разностных формул получается система линейных алгебраических уравнений.

Применим теперь для нахождения минимума погрешности конечно-разностных формул на классах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, т.е. нормы, метод неопределенных множителей Лагранжа. Для этого рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Psi(\mathbf{C}, \mathbf{C}^{(1)}, \boldsymbol{\lambda}) = \left\| \ell \mid W_2^{(m,m-1)*} \right\|^2 - 2(-1)^m \sum_{\alpha=0}^{m-2} \lambda_{\alpha} (\ell, x^{\alpha}) - 2(-1)^m \lambda_{m-1} (\ell, e^{-x}).$$

Здесь $\mathbf{C} = (C_0, C_1, \dots, C_k)$, $\mathbf{C}^{(1)} = (C_0^{(1)}, C_1^{(1)}, \dots, C_k^{(1)})$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{m-1})$.

Теперь вычислим все частные производные по $C_{\beta}^{(1)}$, $\beta = 0, 1, \dots, k$ и λ_{α} , $\alpha = 0, 1, \dots, m-1$ от функции $\Psi(\mathbf{C}, \mathbf{C}^{(1)}, \boldsymbol{\lambda})$.

Далее, приравнивая их к нулю имеем

$$\frac{\partial \Psi}{\partial C_{\beta}^{(1)}} = 0, \quad \beta = 0, 1, \dots, k,$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial \lambda_{\alpha}} = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-1.$$

Эти равенства дает нам систему линейных уравнений для нахождения $C_{\beta}^{(1)}$ и λ_{α} .

$$h \sum_{\gamma=0}^k C_{\gamma}^{(1)} G'_m(h\beta - h\gamma) + \alpha h \sum_{\alpha=0}^{m-2} \lambda_{\alpha} (h\beta)^{\alpha-1} + \lambda_{m-1} e^{-h\beta} = - \sum_{\gamma=0}^k C_{\gamma} G'_m(h\beta - h\gamma), \quad \beta = 0, 1, \dots, k, \quad (14)$$

$$h\alpha \sum_{\gamma=0}^k C_{\gamma}^{(1)} (h\gamma)^{\alpha-1} = \sum_{\gamma=0}^k C_{\gamma} (h\gamma)^{\alpha}, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-2, \quad (15)$$

$$h \sum_{\gamma=0}^k C_{\gamma}^{(1)} e^{-h\gamma} = - \sum_{\gamma=0}^k C_{\gamma} e^{-h\gamma}, \quad (16)$$

здесь $G'_m(h\beta)$ и $G''_m(h\beta)$ известные функции.

Решая систему (14)-(16), мы получаем оптимальные коэффициенты $C_{\beta}^{(1)}$, $\beta = 0, 1, \dots, k$ конечно-разностных формул и коэффициенты λ_{α} , $\alpha = 0, 1, \dots, m-1$ оптимальной функции дискретного аргумента.

Переходом к рассмотрению формулу (12) для общего решения уравнения (11) не трудно видеть, что из (12) и (14) следует, что $\psi'_\ell(h\beta) = 0$. Это и есть теоремы Бабушки.

Для существования и единственности решений системы (14)-(16) справедливо следующее.

Теорема 3. *Решения системы (14)-(16) существует, и оно единственно.*

В параграфе 5 приводится алгоритм для нахождения оптимальных коэффициентов конечно-разностных формул.

Для реализации этого алгоритма, мы перепишем систему (14)-(16) в виде

$$h \sum_{\gamma=0}^k C_\gamma^{(1)} G_m''(h\beta - h\gamma) + P_{m-3}(h\beta) + \lambda_{m-1} e^{-h\beta} = f_m(h\beta), \quad \beta = 0, 1, \dots, k, \quad (17)$$

$$h \sum_{\gamma=0}^k C_\gamma^{(1)} (h\gamma)^{\alpha-1} = g_\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m-2, \quad (18)$$

$$h \sum_{\gamma=0}^k C_\gamma^{(1)} e^{-h\gamma} = g_k. \quad (19)$$

Здесь $h = \frac{1}{N}$, $N = 1, 2, \dots$,

$$G_m'(h\beta - h\gamma) = \frac{\text{sign}(h\beta - h\gamma)}{2} \left(\frac{e^{h\beta - h\gamma} + e^{h\gamma - h\beta}}{2} - \sum_{j=1}^{m-1} \frac{(h\beta - h\gamma)^{2j-2}}{(2j-2)!} \right), \quad (20)$$

$$f_m(h\beta) = - \sum_{\gamma=0}^k C_\gamma G_m'(h\beta - h\gamma), \quad \beta = 0, 1, \dots, k \quad (21)$$

$$G_m''(h\beta - h\gamma) = \frac{\text{sign}(h\beta - h\gamma)}{2} \left(\frac{e^{h\beta - h\gamma} - e^{h\gamma - h\beta}}{2} - \sum_{j=1}^{m-2} \frac{(h\beta - h\gamma)^{2j-1}}{(2j-1)!} \right), \quad (22)$$

C_β - заданные коэффициенты,

$$g_\alpha = \frac{1}{\alpha} \sum_{\gamma=0}^k C_\gamma (h\gamma)^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \dots, m-2, \quad (23)$$

$$g_k = - \sum_{\gamma=0}^k C_\gamma e^{-h\gamma}. \quad (24)$$

А в параграфе 6 мы рассмотрим явных конечно-разностных формул типа Адамса. Если коэффициенты C_β в формуле (6) определяются следующим равенством

$$C_\beta = \begin{cases} 1, & \text{при } \beta = k, \\ -1, & \text{при } \beta = k-1, \\ 0, & \text{при } \beta = 0, 1, \dots, k-2, \end{cases} \quad (25)$$

тогда конечно-разностная формула $\varphi(hk) - \varphi(hk-h) \cong h \sum_{\beta=0}^{k-1} C_\beta^{(1)} \varphi'(h\beta)$

называется *явной конечно-разностной формулы* типа Адамса.

Для представления оптимальных коэффициентов конечно-разностных формул типа Адамса справедливы следующие теоремы.

Теорема 4. Для представления оптимальных коэффициентов $C_\beta^{(1)}$, $\beta = 1, 2, \dots, k-2$ явных конечно-разностных формул типа Адамса на классах $W_2^{(m, m-1)}(0, 1)$ при $t \geq 3$ справедлива следующая формула

$$C_\beta^{(1)} = \sum_{j=1}^{m-2} (M_j \cdot \lambda_j^\beta + N_j \lambda_j^{k-\beta}) \text{ при } \beta = 1, 2, \dots, k-2, \quad (26)$$

здесь λ_j - корни полинома $P_{2m-4}(\lambda)$ степени $2m-4$, $|\lambda_j| < 1$, M_j и N_j неизвестные параметры.

Теорема 5. Коэффициенты $C_0^{(1)}$ и $C_{k-1}^{(1)}$ оптимальных явных конечно-разностных формул типа Адамса на классах $W_2^{(m, m-1)}(0, 1)$ при $t \geq 3$ выражаются следующими представлениями

$$C_0^{(1)} = \frac{e^h - he^h - 1}{he^h(e^{hk-h} - 1)} + \frac{1}{e^{hk-h} - 1} \sum_{j=1}^{m-2} \left[\frac{(M_j + N_j \lambda_j)(1 - \lambda_j^{k-2}) \lambda_j}{1 - \lambda_j} - \frac{M_j (e^{hk-2h} - \lambda_j^{k-2})(\lambda_j e^h - 1) \lambda_j e^h + N_j (\lambda_j^{k-2} e^{hk-2h} - 1)(e^h - \lambda_j) \lambda_j^2 e^h}{(e^h - \lambda_j)(\lambda_j e^h - 1)} \right], \quad (27)$$

$$C_{k-1}^{(1)} = \frac{he^{hk} - e^h + 1}{he^h(e^{hk-h} - 1)} - \frac{e^{hk-h}}{e^{hk-h} - 1} \sum_{j=1}^{m-2} \left[\frac{(M_j + N_j \lambda_j)(1 - \lambda_j^{k-2}) \lambda_j}{1 - \lambda_j} - \frac{M_j (e^{hk-2h} - \lambda_j^{k-2})(\lambda_j e^h - 1) \lambda_j + N_j (\lambda_j^{k-2} e^{hk-2h} - 1)(e^h - \lambda_j) \lambda_j^2}{(e^h - \lambda_j)(\lambda_j e^h - 1) e^{hk-2h}} \right]. \quad (28)$$

Вторая глава диссертации под названием «**Построение явных и неявных оптимальных конечно-разностных формул в пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$ и оценка их погрешностей**», посвящена построению оптимальных явных и неявных конечно-разностных формул в пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$. В настоящей главе диссертации с помощью дискретного оператора $D_1(h\beta)$ найдены оптимальные коэффициенты конечно-разностных формул типа Адамса в гильбертовом пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$. Далее, получены оптимальные оценки погрешности конечно-разностных формул на классе $W_2^{(2,1)}(0,1)$, т.е. вычислены квадрат нормы функционала погрешности конечно-разностных формул в пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$.

Основные результаты этой главы заключаются в следующем.

Теорема 6. В гильбертовом пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$ оптимальные коэффициенты явной конечно-разностной формулы типа Адамса

$$\varphi(hk) - \varphi(hk - h) \cong h \sum_{\beta=0}^{k-1} C_{\beta}^{(1)\circ} \varphi'(h\beta) \quad (29)$$

выражается следующей формулой

$$C_{\beta}^{(1)\circ} = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq \beta \leq k-2, \\ \frac{e^h - 1}{he^h} & \text{при } \beta = k-1. \end{cases}$$

Очевидно, что оптимальная явная конечно-разностная формула в пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$ принимает вид

$$\varphi_{n+k} = \varphi_{n+k-1} + \frac{e^h - 1}{e^h} \varphi'_{n+k-1}, \quad n = 0, 1, \dots, N-k, \quad k \geq 1.$$

Теорема 7. В гильбертовом пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$ оптимальные коэффициенты неявной конечно-разностной формулы типа Адамса

$$\varphi(hk) - \varphi(hk - h) \cong h \sum_{\beta=0}^k C_{\beta}^{(1)} \varphi'(h\beta) \quad (30)$$

определяются равенствами

$$C_{\beta}^{(1)\circ} = \begin{cases} 0 & \text{при } \beta = 1, 2, \dots, k-2, \\ \frac{e^h - 1}{h(e^h + 1)} & \text{при } \beta = k-1, k. \end{cases}$$

Отсюда следует, что оптимальная неявная конечно-разностная формула типа Адамса в пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$ имеет вид

$$\varphi_{n+k} = \varphi_{n+k-1} + \frac{e^h - 1}{(e^h + 1)} (\varphi'_{n+k-1} + \varphi'_{n+k}), \quad n = 0, 1, \dots, N-k, \quad k \geq 1.$$

Теорема 8. Оптимальной оценкой погрешности явной конечно-разностной формулы вида (29) на классе $W_2^{(2,1)}(0,1)$ выражается формулой

$$\left\| \ell^e | W_2^{(2,1)*}(0,1) \right\|^2 = h - \frac{(e^h - 1)(3e^h - 1)}{2e^{2h}}.$$

Разложение этой оценки в ряд Тейлора по h имеет вид

$$\left\| \ell^e | W_2^{(2,1)*} \right\|^2 = \frac{h^3}{3} - \frac{h^4}{4} + O(h^5).$$

Теорема 9. Оптимальной оценкой погрешности неявной конечно-разностной формулы вида (30) на классе $W_2^{(2,1)}(0,1)$ определяется равенством

$$\left\| \ell^{im} | W_2^{(2,1)*} \right\|^2 = h - \frac{2(e^h - 1)}{e^h + 1}.$$

Разложение этого равенства в ряд Тейлора имеет вид

$$\left\| \ell^{im} | W_2^{(2,1)*} \right\|^2 = \frac{h^3}{12} - \frac{h^5}{120} + O(h^6).$$

А в параграфе 5 второй главы приводим некоторые численные результаты, чтобы показать таблицы и графики решений и погрешность нашей оптимальной явной конечно-разностной формулы (29) и оптимальной неявной конечно-разностной формулы (30), с коэффициентами, приведенными соответственно в теоремах 6 и 7.

Третья глава диссертации под названием «**Построения оптимальной конечно-разностной формулы в гильбертовом пространстве $W_2^{(3,2)}(0,1)$** » посвящена для любого целого k будут построены оптимальные явные конечно-разностные формулы в пространстве гильберта $W_2^{(3,2)}(0,1)$. Здесь найдена оптимальная функция дискретного аргумента, которая применивается в нахождении оптимальной оценки погрешности явной конечно-разностной формулы на классе $W_2^{(3,2)}(0,1)$. Далее, вычислена оптимальная оценка погрешности явной конечно-разностной формулы на классе $W_2^{(3,2)}(0,1)$. Кроме того, с помощью оптимальной функции дискретного аргумента получена новая формула для оптимальной погрешности явных конечно-разностных формул на классах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$. Далее, с помощью построенной явной оптимальной конечно-разностной формулы решены примеры по задачам Коши.

Основными результатами этой главы являются следующие.

Теорема 10. *Оптимальные коэффициенты явной конечно-разностной формулы типа Адамса*

$$\varphi(hk) - \varphi(hk - h) \cong h \sum_{\beta=0}^{k-1} C_{\beta}^{(1)} \varphi'(h\beta) \quad (31)$$

выражаются равенствами

$$C_0^{(1)} = \frac{\lambda^k (e^h - he^h - 1)(\lambda^2 - 1)}{he^h (e^h - 1)(\lambda^{2k} - \lambda^2)}, \quad (32)$$

$$C_{\beta}^{(1)} = \frac{(e^h - he^h - 1)(1 - \lambda) [\lambda^{k+\beta} (e^h - \lambda) + \lambda^{k-\beta} (\lambda e^h - 1)]}{he^h (e^h - 1)(\lambda^{2k} - \lambda^2)}, \quad \beta = 1, 2, \dots, k-2, \quad (33)$$

$$C_{k-1}^{(1)} = \frac{(\lambda^{2k} - \lambda^2)(he^{2h} - e^h + 1) + (\lambda^{2k-1} - \lambda^3)(e^{2h} - he^{2h} - e^h)}{he^h (e^h - 1)(\lambda^{2k} - \lambda^2)} \dots \quad (34)$$

Теорема 11. *Оптимальная функция дискретного аргумента $\mathring{F}(h\beta) = \mathring{d} e^{-h\beta} + \mathring{p}_0$ выражается равенством*

$$\mathring{F}(h\beta) = \left(\frac{e^{hk-h} (e^h - h - 1)}{4} + \frac{e^{hk-2h} (e^h - he^h - 1) [(e^h - 1)(\lambda^{2k-1} - \lambda^{2k-2} e^h) - \lambda e^h + 1]}{4(e^h - 1)(\lambda^{2k-2} - 1)(\lambda e^h - 1)} \right) + \frac{e^{hk-2h} (e^h - he^h - 1)(\lambda e^{2h} - \lambda e^h - \lambda + 1)}{4(e^h - 1)(\lambda^{2k-2} - 1)(e^h - \lambda)} - \frac{\lambda^{k-1} (e^h - he^h - 1)(1 - \lambda^2)(e^{2h} - 1)}{4e^h (\lambda^{2k-2} - 1)(e^h - \lambda)(\lambda e^h - 1)} \cdot e^{-h\beta} -$$

$$-h^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{(e^h - he^h - 1)(1 + \lambda^{k-1})(\lambda^{k-1}e^h - \lambda^k + \lambda e^h - 1)}{2he^h(e^h - 1)(\lambda^{2k-2} - 1)(1 - \lambda)} \right). \quad (35)$$

Теорема 12. *Оптимальная оценка погрешности явных конечно-разностных формул типа Адамса на классах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$, для любого $m \geq 2$ задается формулой*

$$\|\ell | W_2^{(m,m-1)*}\|^2 = (-1)^m \left\{ \frac{e^{-h} - e^h}{2} + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{h^{2j-1}}{(2j-1)!} + h \sum_{\gamma=0}^{k-1} C_\gamma^{(1)} \left[\overset{\circ}{d} e^{-h\gamma} + P_{m-3}^\circ(h\gamma) + f_m(h\gamma) \right] \right\}, \quad (36)$$

здесь $C_\beta^{(1)}$ – оптимальные коэффициенты явных конечно-разностных формул,

$\overset{\circ}{d} e^{-h\beta} + P_{m-3}^\circ(h\beta)$ – оптимальная функция дискретного аргумента,

$$f_m(h\beta) = \frac{1}{2} \left((1 - e^h) \left(\frac{e^{h\beta - hk}}{2} - \frac{e^{hk - h\beta - h}}{2} \right) - \sum_{j=2}^{m-1} \left(\frac{(h\beta - hk)^{2j-2}}{(2j-2)!} - \frac{(h\beta - hk + h)^{2j-2}}{(2j-2)!} \right) \right).$$

Теорема 13. *Оптимальная оценка погрешности явной конечно-разностной формулы вида (31) на классе $W_2^{(3,2)}(0,1)$, выражается формулой*

$$\begin{aligned} \|\overset{\circ}{\ell} | W_2^{(3,2)*}(0,1)\|^2 &= \frac{(e^h - he^h - 1)}{2e^{2h}(\lambda^{2k-2} - 1)(\lambda e^h - 1)(e^h - \lambda)} \left[2(e^{2h} - e^h + 2)(\lambda^{2k-2} - 1)\lambda e^h + \right. \\ &+ (e^h - 3)(\lambda^{2k-4} - 1)\lambda^2 e^{2h} - (2e^{2h} - e^h + 1)(\lambda^{2k} - 1) \left. \right] + \frac{h(e^h - 1)}{2e^h} + \\ &+ \frac{h^2(e^h - he^h - 1)(\lambda^{2k-2}e^h - \lambda^{2k-1} + \lambda e^h - 1)}{e^h(e^h - 1)(\lambda^{2k-2} - 1)(1 - \lambda)} + \frac{h^3}{3}. \end{aligned} \quad (37)$$

Разложение квадрат нормы (37) оптимальной явной конечно-разностной формулы в ряд Тейлора:

$$\begin{aligned} \|\overset{\circ}{\ell} | W_2^{(3,2)*}(0,1)\|^2 &= \frac{h^5}{30(\lambda - 1)^2} \cdot \left[7\lambda + 8 + \frac{31\lambda^{10} - 1}{4(\lambda^8 + \lambda^6 + \lambda^4 + \lambda^2 + 1)} \right] - \\ &- \frac{h^6}{144} \cdot \frac{16\lambda^3(\lambda^2 - \lambda + 1) - 17\lambda^2(\lambda^4 + 1) + 8\lambda(\lambda^6 + 1) - 35(\lambda^8 + 1)}{(\lambda^4 + \lambda^2 + 1)(\lambda - 1)^4} + O(h^7). \end{aligned}$$

В параграфе 4 этой главы приводим некоторые численные результаты, чтобы показать таблицы и графики решений и погрешность нашей оптимальной явной конечно-разностной формулы (31), с коэффициентами, приведенными соответственно в теореме 10.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе построены оптимальные явные и неявные конечно-разностные формулы для приближенного решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений и получены оптимальные оценки погрешности этих формул на классах функций.

Основные результаты исследовательской работы состоят в следующем:

1. найден максимизирующий элемент, т.е. экстремальный элемент погрешности конечно-разностных формул на классах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$;

2. минимизируя погрешность на классах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ по коэффициентам конечно-разностных формул получена система линейных уравнений;

3. найдены представления оптимальных коэффициентов явных конечно-разностных формул типа Адамса на классах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ для любого $m \geq 3$;

4. найдены оптимальные коэффициенты явной и неявной конечно-разностной формулы для $m=2$ и получены оптимальные оценки погрешности явной и неявной конечно-разностной формулы на классе $W_2^{(2,1)}(0,1)$;

5. построены оптимальные явные конечно-разностные формулы для $m=3$ и найдена оптимальная функция дискретного аргумента, которая применяется в нахождении оптимальной оценки погрешности явной конечно-разностной формулы на классе $W_2^{(3,2)}(0,1)$;

6. вычислена оптимальная оценка погрешности явной конечно-разностной формулы на классе $W_2^{(3,2)}(0,1)$ и получена новая формула для оптимальной погрешности явных конечно-разностных формул на классах $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$;

7. приведены численные эксперименты.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN**

V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

KARIMOV ROZIK SODIK UGLI

**OPTIMAL DIFFERENCE FORMULAS IN THE HILBERT SPACE
 $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ AND THEIR APPLICATIONS**

01.01.03 – Computational and discrete mathematics

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF
PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

Tashkent – 2025

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number № B2024.1.PhD/FM1013.

Dissertation has been prepared at V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences.

Abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the website (ik-fizmat.nuu.uz) and the “ZiyoNet” Information and educational portal (www.ziynet.uz).

Scientific supervisor:

Shadimetov Kholmat Makhkambaevich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Official opponents:

Normurodov Chori Begalievich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Khudoyberganov Mirzoali Urazalievich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Leading organization:

Karakalpak State University

Defense will take place on _____, 2025 at _____ at the meeting of Scientific Council DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 at National University of Uzbekistan (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Phone: (+99871) 227-12-24; fax: (+99871) 246-53-21; e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (registered № _____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 246-02-24)

Abstract of dissertation is sent out on _____, 2025 year.

(Mailing report № _____ of _____, 2025 year).

M.M. Aripov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S., Professor

Z.R. Rakhmanov
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S., Professor

R.D. Alov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S., Professor

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

The aim of the study is to construct explicit and implicit (extrapolation and interpolation) optimal finite-difference formulas (finite-difference methods or finite-difference schemes) for the approximate solution of ordinary differential equations, as well as for determining the norms of their error functionals in Hilbert space.

The object of the research is ordinary differential equations, extrapolation and interpolation finite-difference schemes, error estimation of finite-difference schemes.

The scientific novelty of the research work is as follows:

the norm of the error functional of the finite-difference formulas on classes $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ was found using the extremal function for any $m \geq 2$;

using the method of undetermined Lagrange multipliers, the system for finding optimal coefficients of finite-difference formulas was obtained;

an algorithm based on the Sobolev method for optimizing finite-difference formulas on classes $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ for any $m \geq 2$ was developed

this algorithm was implemented and optimal errors of finite-difference formulas on classes $W_2^{(2,1)}(0,1)$ and $W_2^{(3,2)}(0,1)$ were calculated.

Implementation of the research results. Based on these scientific results, an algorithm for constructing optimal finite-difference formulas for an approximate solution of ordinary differential equations in a Hilbert space was developed:

from the scientific results obtained in this dissertation, during the implementation of the innovative project IL-21071166 "Creation of a wind turbine with a vertical axis designed for low wind speed", carried out at the Institute of Mechanics and Seismic Resistance of Structures named after M. T. Urazbaev of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan in 2022-2024, i.e. these formulas were used in the approximate solution of the equations of a mathematical model created to determine the effective parameters of wind turbines. (Reference Institute of Mechanics and Seismic Resistance of Structures named after M. T. Urazbaev of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan dated July 8, 2024). As a result, it was possible to approximately solve the equations of a mathematical model designed to determine the effective parameters of wind power plants;

The scientific results obtained in the dissertation were used for numerical modeling of topological models of gas networks in the implementation of the innovative project IL-5321091543 "Creation and modeling of a topological model of gas networks", carried out at the Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi in 2022-2023. (Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, certificate dated October 18, 2024). As a result, it was possible to approximate the solution of differential equations for effective models of gas networks.

Approbation of the research results. The main results of the dissertation were discussed at 9 international and 2 national scientific and practical conferences.

Publication of the research results. On the topic of the dissertation, 19 scientific papers were published, of which 7 articles were published in journals that are included in the list of scientific publications proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for the defense of dissertations for the degree of Doctor of Philosophy (PhD), including 3 articles published in foreign journals, 4 in national scientific publications. In addition, one certificate of official registration of a program for computing systems was received.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, three chapters divided into fifteen paragraphs, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation is 97 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo'lim (Часть I; Part I)

1. A.R. Hayotov, R.S. Karimov, Optimal difference formula in the Hilbert space $W_2^{(2,1)}(0,1)$. // Problems of Computational and Applied Mathematics. – Tashkent, 2021, 5(35), pp. 129–136. **(01.00.00; №9)**
2. R.S. Karimov, A norm of an error functional of the optimal difference formula in the Hilbert space // Bulletin of the Institute of Mathematics. – Tashkent, 2022, 5(5), pp. 46–52. **(01.00.00; №17)**
3. R.S. Karimov, An implicit difference formula for linear differential equation of the first order in the Hilbert space // Problems of Computational and Applied Mathematics, 2022, 5/1(44), pp. 123–133. **(01.00.00; №9)**
4. Kh.M. Shadimetov, A.R. Hayotov, R.S. Karimov, Optimization of Explicit Difference Methods in the Hilbert Space $W_2^{(2,1)}$ // AIP Conference Proceedings, 2023, 2781, 020054, pp. 1–6. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0144805>, **(3. Scopus, IF: 0.5)**
5. Kh.M. Shadimetov, R.S. Karimov, Coefficients of the optimal explicit difference formula in a Hilbert space // Problems of Computational and Applied Mathematics, 2023, 2/1(48), pp. 45–57. **(01.00.00; №9)**
6. Kh.M. Shadimetov, R.S. Karimov, Optimization of Adams-type difference formulas in Hilbert space $W_2^{(2,1)}(0,1)$ // Journal of Computational Analysis and Applications, 2024, no. 1, vol. 32, pp. 300–319. **(3. Scopus, IF: 1.3)**
7. Kh.M. Shadimetov, R.S. Karimov, Optimal coefficients of an implicit difference formula in the Hilbert space // AIP Conference Proceedings, 2024, 3004, 060030, pp. 1–9. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0200065>, **(3. Scopus, IF: 0.5)**

II bo'lim (Часть II; Part II)

8. A.R. Hayotov, R.S. Karimov, Gilbert fazosida optimal ayirmali formula qurish // “Differensial tenglamalar va analizning turdosh masalalari” mavzusidagi xorijiy olimlar ishtirokidagi Respublika ilmiy anjumani materiallari. – Buxoro, 2021-yil, 04–05-noyabr, pp. 300–302.
9. R.S. Karimov, The norm of the error functional for the optimal difference formula in a Hilbert space // Abstracts of the International scientific conference on the theme “Modern Problems of Applied Mathematics and Information Technologies al-Khwarizmi 2021”. – Fergana, 2021, November 15–17, 2021, pp. 271.
10. Karimov R.S. The norm of the error functional for the optimal difference formula in the Hilbert space $W_2^{(3,2)}(0,1)$. // Proceedings of the International

- Scientific-Practical Conference "Modern problems of applied mathematics and information technologies". – Bukhara, 2022, 11–12 May, pp. 258.
11. Kh.M. Shadimetov, A.R. Hayotov, R.S. Karimov, An optimal implicit difference formulas in the Hilbert space $W_2^{(2,1)}(0,1)$ // Abstracts of the international scientific and practical conference “Modern problems of mathematical analysis and function theory”. – Dushanbe, 2022, June 24–25, pp. 343–345.
 12. Kh.M. Shadimetov, R.S. Karimov, The norm of the error functional of the optimal explicit difference formula in the Hilbert space $W_2^{(3,2)}(0,1)$ // Uzbekistan-Malaysia international conference CMT. – Tashkent, 2022, September 16–17, pp. 42–43. <http://cmt.nuu.uz/>
 13. Kh.M. Shadimetov, R.S. Karimov, An implicit difference formula for linear differential equation of the first order in the Hilbert space // Topical issues of algebra and analysis collection of proceedings of the Republican scientific and practical conference, part 1. – Termez, 2022, November 18–19, pp. 235–238.
 14. Kh.M. Shadimetov, R.S. Karimov, The extremal function of an optimal difference formula in the Hilbert space $W_2^{(m,m-1)}(0,1)$ // Abstracts of the international scientific and practical conference “Actual problems of mathematical modeling and information technology”. – Nukus, 2023, 2–3 may, pp. 151–152.
 15. Kh.M. Shadimetov, R.S. Karimov, On the optimal explicit difference formula in the Hilbert space // Abstracts of the 8th international conference Al-Khwarizmi “Actual problems of applied mathematics and information technologies”. – Samarqand, 2023, September 25–26, pp. 144.
 16. Kh.M. Shadimetov, R.S. Karimov, Optimal difference method in a Hilbert space // Abstracts of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (TWMS Congress-2023). – Turkestan, 2023, November 20–23, pp. 73.
 17. Kh.M. Shadimetov, R.S. Karimov, The norm of the error functional for the optimal difference formula in the Hilbert space // International scientific conference “Modern problems of differential equations and their applications”. – Tashkent, 2023, 23–25 November, pp. 124–125.
 18. Kh.M. Shadimetov, R.S. Karimov, System of equations for finding optimal coefficients of difference formulas in the Hilbert space // “Modern Problems of Mathematics and its Teaching” (Proceedings of the International Scientific and Practical Conference). – Khujand, 2024, June 21–22, pp. 172–176.
 19. X.M. Shadimetov, A.R. Hayotov, R.S. Karimov, U.N. Xayriyev, Adams-Bashfort tipidagi ko‘p qadamli optimal ayirmali formulaning dasturi. // Intelektual mulk agentligi. – Toshkent. – №. DGU 17289, 01.07.2022.

Avtoreferat “O‘zMU xabarlari” jurnali tahririyatida tahrirdan o‘tkazildi.

Bosishga ruxsat etildi: **.04.2025-yil.
Bichimi 60x84 1/16, “Times New Roman”
garniturada raqamli bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 4. Adadi: 100. Buyurtma №: 162.

“TRAINMAX” MChJ bosmaxonasida chop etildi.
100194, Toshkent shahri, Yunusobod-11, 62-uy.