ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

QORAQALPOQ DAVLAT UNIVERSITETI

ABDIKADIROV SULTANBAY MAMUTOVICH

SEPARAT-GARMONIK VA α-SEPARAT-GARMONIK FUNKSIYALARNI ANALITIK DAVOM ETTIRISH

01.01.01 – Matematik analiz

fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi AVTOREFERATI

Nukus shahri – 2025 yil

UDK: 517.55

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

Abdikadirov Sultanbay Mamutovich
Separat-garmonik va $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalarni analitik davom ettirish 3

Абдикадиров Султанбай Мамутович
Аналитическое продолжение сепаратно-гармонических и $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций 19

Abdikadirov Sultanbay Mamutovich
Analytic continuation of separatly harmonic and $\boldsymbol{\alpha}$-separatly harmonic functions... 37

E’lon qilingan ishlar ro‘yxati
Список опубликованных работ
List of published works.. 41

ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

QORAQALPOQ DAVLAT UNIVERSITETI

ABDIKADIROV SULTANBAY MAMUTOVICH

SEPARAT-GARMONIK VA α-SEPARAT-GARMONIK FUNKSIYALARNI ANALITIK DAVOM ETTIRISH

01.01.01 – Matematik analiz

fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi AVTOREFERATI

Nukus shahri – 2025 yil

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertasiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestasiya komissiyasida № B2024.1.PhD/FM1000 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Qoraqalpoq Davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz(rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasida (www.ik-mat.urdu.uz) va "Ziyonet" Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Imomkulov Sevdiyor Akramovich** fizika-matematika fanlari doktori
Rasmiy opponentlar:	**Shoimqulov Bahodir Allaberdievich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Atamuratov Alimardon Abdirimovich fizika-matematika fanlari nomzodi, katta ilmiy xodim
Yetakchi tashkilot:	**Toshkent davlat pedagogika universiteti**

Dissertatsiya himoyasi Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch Davlat universiteti huzuridagi PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 raqamli Ilmiy kengashning 2025 yil "10" may soat 10 : 00 dagi majlisida bo'lib o'tadi (Manzil: 220100, Urganch sh., H. Olimjon ko'chasi, 14-uy. Tel.: (99862) 224-66-11; faks: (99862) 224-67-00; e-mail: ik-mat.urdu@umail.uz

Dissertatsiya bilan Abu Rayhon Beruniy nomidagi Urganch Davlat universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (Д792- raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 220100, Urganch sh., H. Olimjon ko'chasi, 14-uy. Tel.: (99862) 224-66-11; faks: (99862) 224-67-00). e-mail: arm@urdu.uz.

Dissertatsiya avtoreferati 2025 yil "22" aprel kuni tarqatildi.

(2025 yil "22" aprel dagi 2- raqamli reestr bayonnomasi).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

B.I. Abdullayev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, fizika-matematika fanlari doktori

A.A. Reyimberganov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, fizika-matematika fanlari nomzodi

B.A. Babajanov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi, fizika-matematika fanlari doktori

KIRISh (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotasiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida zamonaviy matematikaning ko‘plab sohalarida olib borilayotgan aksariyat ilmiy va amaliy tadqiqotlarda golomorf, subgarmonik va garmonik funksiyalar keng qo‘llanilmoqda. Bugungi kunda separat-analitik va separat-garmonik funksiyalarni analitik davom ettirish hamda ularning bartaraf etiladigan maxsusliklarini aniqlash masalalari potensiyallar va plyuripotensiyallar nazariyasi sohalaridagi tadqiqotlarning eng ko‘p o‘rganilayotgan asosiy masalasi hisoblanadi. Shuningdek, separat-garmonik funksiyalarning umumlashmasi bo‘lgan $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalarni analitik davom ettirish masalasiga doir tadqiqotlarni olib borish bugungi kunda matematik analizning muhim vazifalardan biri bo‘lib qolmoqda.

Hozirgi kunda jahon miqyosida matematik analizning eng tez rivojlanayotgan sohalaridan biri plyuripotensiallar nazariyasi asosida ko‘p o‘lchamli haqiqiy va kompleks fazolardagi sohalarda separat-analitik, separat-garmonik va separat-subgarmonik funksiyalarni analitik davom ettirish muammolarini tadqiq qilishga alohida e’tibor qaratilmoqda. Bu masalalar zamonaviy ko‘p o‘lchamli kompleks analizning istoqbolli yo‘nalishlari bilan bog‘liq bo‘lib, nazariy fizikada, xususan, maydonning kvant nazariyasida keng tatbiqlarga ega. Xususan, $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik va $\boldsymbol{\alpha}$-separat-subgarmonik funksiyalar sinflari separat-garmonik va separat-subgarmonik funksiyalar sinflarining kengaytmasi sifatida yangi tadqiqot yo‘nalishlarini aniqlaydi. Shu sababli separat-garmonik va $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalarni analitik davom ettirish, ularning bartaraf etiladigan maxsusliklarini o‘rganish muhim ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tadbiqlariga ega bo‘lgan sohalariga e’tibor kuchaytirilmoqda. Jumladan, so‘ngi yillarda ko‘p o‘lchamli kompleks analizda plyuripotensiallar nazariyasining masalalarini o‘rganishda separat-analitik, separat-subgarmonik va separat-garmonik funksiyalarni analitik davom ettirish va ularning bartaraf etiladigan maxsuslik to‘plamlarini tavsiflashda salmoqli natijalarga erishildi. Matematika sohasidagi ilmiy tadqiqot ishlari ko‘lamini kengaytirish, ularning natijadorligi va amaliy ahamiyatini oshirish matematika va uning tatbiqlari sohasidagi tadqiqotlarni rivojlantirishning ustuvor yo‘nalishlari etib belgilangan[1]. Ushbu qaror ijrosini ta’minlashda plyuripotensiallar nazariyasini rivojlantirish, xususan $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik va $\boldsymbol{\alpha}$-separat-subgarmonik funksiyalarni analitik davom ettirish masalalarini o‘rganish muhim ahamiyatga ega.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 29-oktabrdagi PF-6097-son “Ilm-fanni 2030-yilgacha rivojlantirish Konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi va 2022-yil 28-yanvardagi PF-60-son “2022-2026-yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmonlari, 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasida ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-son qarori

takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi va 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi Qarorlari hamda ushbu faoliyat sohasiga oid boshqa me’yoriy-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishi ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Ushbu tadqiqot IV. “Matematika, mexanika va informatika” yo‘nalishida belgilangan O‘zbekiston Respublikasi fan va texnikasini rivojlantirishning ustuvor yo‘nalishlari doirasida amalga oshirildi.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Jahonda ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarni analitik davom ettirish masalalari AQSh, Germaniya, Shvetsiya, Fransiya, Rossiya (F.Hartogs, Y.Sichak, V.P. Zahariuta, T.V.Nguen, A.Zeriahi, P. Pflug, V. A. Nguen, E. M. Chirka, va b.) va O‘zbekiston (A. Sadullaev, S. A. Imomkulov, T. T. To‘ychiev, J. U. Xo‘jamov) olimlarining ishlarida o‘rganilgan. Shuningdek, P. Lelon, T. V. Nguen, V. P. Zahariuta, T. Begbi, N. Levenberg, A. Zeriahi, J. M. Hekart, A. Sadullaev, S. A. Imomkulov, Y. R. Saidov, J. S. Raymond va Z. Bloski ishlarida ko‘p o‘zgaruvchili plyurigarmonik, separat-garmonik va haqiqiy-analitik funksiyalarni analitik davom ettirish masalalari o‘rganilgan.

Mashhur Hartogs teoremasi shuni ta’kidlaydiki, $D\times G\subset\mathbb{C}^n(z)\times\mathbb{C}^m(w)$ *sohada separat-golomorf bo‘lgan* $f(z,w)$ *funksiya ushbu sohada barcha o‘zgaruvchilari bo‘yicha bir yo‘la golomorf bo‘ladi*. 1961-yilda P. Lelon separat-garmonik funksiyalar uchun ushbu teoremaning analogini isbotladi: *agar* $u(x,y)$ *funksiya* $D\times G\subset\mathbb{R}^n(x)\times\mathbb{R}^m(y)$ *sohada separat-garmonik bo‘lsa, u holda* $u(x,y)$ *ushbu sohada barcha o‘zgaruvchilari bo‘yicha bir yo‘la garmonik bo‘ladi.*

Lelon tomonidan ushbu ish nashr etilishi bilan separat-garmonik, separat R-analitik va separat-subgarmonik funksiyalar ko‘plab mualliflarning tadqiqot obyektiga aylandi. Asosiy urg‘u quyidagi muammoga qaratildi: *separat-subgarmonik funksiya barcha o‘zgaruvchilari bo‘yicha bir yo‘la subgarmonik bo‘ladimi*? Bu savolga javob salbiy, aniqrog‘i, 1988-yilda Yan Vigerink barcha o‘zgaruvchilari bo‘yicha bir yo‘la subgarmonik bo‘lmagan separat-subgarmonik funksiyaga misol tuzdi.

Qo‘shimcha shartlar qo‘yish orqali, bu masala turli mualliflar, jumladan, V. Avanissian, M. G. Arsov, J. Riihentaus, shuningdek, D. M. Armitidj va S. J. Gardnerlarning ishlarida o‘rganilib, muhim natijalarga erishildi.

Separat-subgarmonik funksiyalarni o‘rganishdagi keyingi yutuqlar qo‘shimcha shartlar bilan bog‘liq, masalan, o‘zgaruvchilarning bir guruhi bo‘yicha garmoniklik yoki haqiqiy-analitiklik kabi (S. Imomkulov, S. Kolodzey va J. Torbiornson, J. Riihentaus, U. Segrel va A. Sadullaev).

Bir va ko‘p kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyalari o‘rtasidagi farqni ko‘rsatadigan asosiy teoremalardan biri Osgud-Braun teoremasidir: *agar* f *funksiya* $\Omega\subset\mathbb{C}^n$ $(n>1)$ *sohaning, sohani bo‘lmaydigan (ya’ni* $\Omega\backslash K$ *bog‘lamli)* $K\Subset D$ *to‘plamdan tashqari, barcha nuqtalarida golomorf bo‘lsa, u holda* f *butun* Ω *sohaga* *golomorf davom etadi.* Bu teorema shuni ko‘rsatadiki, ko‘p o‘zgaruvchili golomorf funksiyalar kompakt maxsusliklarga ega bo‘la olmaydi. 2007-yilda Sachiko Hamano separat-garmonik funksiyalar uchun ushbu teoremaning analogini isbotladi: *aytaylik,* $D - \mathbb{R}^n(x)\times\mathbb{R}^m(y)$, $n,m>1$, *dagi soha,* $D \Supset K$ *– kompakt va* $D\backslash K$ *bog‘lamli. Agar* $u(x,y)$ *funksiya* $D\backslash K$ *da separat-garmonik bo‘lsa, u holda bu funksiya* D *ga separat-garmonik davom etadi.*

Mamlakatimizda golomorf, garmonik va subgarmonik funksiyalarning bartaraf etiladigan maxsusliklari haqidagi masala ko‘plab tadqiqotchilar (A. Sadullayev, B. I. Abdullayev, S. A. Imomkulov, J. R. Yarmetov va boshqalar) tomonidan batafsil o‘rganilgan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Qoraqalpoq davlat universiteti Matematik analiz kafedrasining “Kompleks potensiallar nazariyasi” mavzusidagi ilmiy tadqiqotlar rejasi (2020-2024 yillar) doirasida amalga oshirildi.

Tadqiqotning maqsadi separat-garmonik va $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalarni analitik davom ettirish masalasini o‘rganish, shuningdek, ushbu funksiyalarning bartaraf etiladigan maxsusliklarini tadqiqot qilishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

garmoniklik radiusi o‘zgaruvchan bo‘lgan seperat-garmonik funksiyalar uchun Hartogs lemmasining analogini isbotlash;

tekisliklar dastasida garmoniklik shartlarini qanoatlantiruvchi separat-garmonik funksiyalar uchun Hartogs lemmasining analogini isbotlash;

$\boldsymbol{\alpha}$-separat-subgarmonik funksiyalarning α-subgarmonikligini va $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalarning α-garmonikligini isbotlash;

$\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalar uchun Lelon teoremasining analogini isbotlash;

$\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalarni tayinlangan yo‘nalish bo‘yicha analitik davom ettirish haqidagi teoremani isbotlash, bu yerda $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha',\alpha'')$ – haqiqiy-analitik differensial biforma;

separat-garmonik funksiyalar uchun Osgud-Braun tipidagi teoremalarni isbotlash;

$\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalar uchun Osgud-Braun teoremasining analogini isbotlash;

Tadqiqot obyekti. Separat-garmonik, separat-subgarmonik, α-garmonik va α-subgarmonik, $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik va $\boldsymbol{\alpha}$-separat-subgarmonik funksiyalar.

Tadqiqot predmeti. Separat-garmonik va $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalarning garmoniklik sohalari va bartaraf etiladigan maxsusliklar to‘plami.

Tadqiqot usullari. Dissertatsiyada haqiqiy va kompleks ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi, klassik potensial nazariyasi va plyuripotensial nazariyasi, shuningdek, funksional analiz usullaridan foydalanildi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi. Dissertatsiyada olingan barcha natijalar yangi bo‘lib, ular quyidagilardan iborat:

plyurisubgarmonik funksiyalar sinfining qismi bo‘lgan $\mathcal{H}$ sinf va h-plyuripolyar to‘plamlar yordamida o‘zgaruvchan garmoniklik radiusiga ega bo‘lgan separat-garmonik funksiyalar uchun Hartogs lemmasining analogi isbotlangan;

o‘zgaruvchan garmoniklik radiusiga ega bo‘lgan separat-garmonik funksiyalar uchun Hartogs lemmasidan foydalanib, ushbu lemmani tekisliklar dastasida garmoniklik shartlarini qanoatlantiruvchi separat-garmonik funksiyalar uchun umumlashtiruvchi teorema isbotlangan;

ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi funksiyalar sinfida aniqlangan operatorlar yordamida $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik va $\boldsymbol{\alpha}$-separat-subgarmonik funksiyalarning ta’riflari kiritilgan;

$\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmoniklik va $\boldsymbol{\alpha}$-separat-subgarmoniklik tushunchalari asosida $\boldsymbol{\alpha}$-separat-subgarmonik funksiyalarning α-subgarmonikligi haqidagi va $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalarning α-garmonikligi haqidagi teorema isbotlangan;

golomorf funksiyalarga o‘tish va golomorf davom ettirish prinsiplaridan foydalanib, $\boldsymbol{\alpha}$ haqiqiy-analitik differensial biforma bo‘lganida, $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalar uchun Lelon teoremasining analogi isbotlangan;

α-garmonik funksiyalarni golomorf davom ettirish va Sichak-Zaharyuta teoremasini qo‘llash orqali, α haqiqiy-analitik differensial forma bo‘lganida, $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalarni tayinlangan yo‘nalish bo‘ylab analitik davom ettirish to‘g‘risidagi teorema isbotlangan;

separat-analitik funksiyalarni analitik davom ettirish haqidagi teorema va $\mathcal{P}$-o‘lchovning xususiyatlaridan foydalangan holda, separat-garmonik funksiyalar uchun Osgud-Braun tipidagi teoremalar isbotlangan;

$\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalar uchun Lelon teoremasining analogi va Puasson karrali integralining analogini qo‘llagan holda, $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalar uchun Osgud-Braun teoremasining analogi isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari. Funksiyalarning turli sinflari uchun $\boldsymbol{\alpha}$-separat-subgarmonik va $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalarni aniqlash usullari berilib, ular analitik davom ettirish masalalarida muvaffaqiyatli qo‘llanilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Tadqiqot natijalarining ishonchliligi asosiy natijalarning qat’iy matematik isbotlari bilan tasdiqlanadi, haqiqiy va kompleks ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalar, klassik potensiallar, pluripotensiallar nazariyasining taniqli usullari va funksional analiz usullaridan foydalanish bilan asoslanadi. Bundan tashqari, dissertatsiyada olingan natijalarning nufuzli ilmiy nashrlarda, shu jumladan impakt faktorli ilmiy jurnallarda nashr qilinganligi va ilmiy seminarlarda ishning muhokamadan o‘tkazilganligi dissertatsiya natijalarining ishonchliligini tasdiqlaydi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati separat-garmonik va $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalarni analitik davom ettirish usullari ishlab chiqilganligi va ushbu funksiyalarning bartaraf etiladigan maxsusliklari haqidagi natijalar olinganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati funksiyalarning turli sinflari uchun $\boldsymbol{\alpha}$-separat-subgarmonik va $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalarni aniqlash separat-subgarmonik va separat-garmonik funksiyalar sinfini kengaytirish imkonini berganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Dissertatsiyada olingan natijalar quyidagi ilmiy-tadqiqot loyihalarida qo‘llanilgan:

separat-analitik funksiyalarni analitik davom ettirish haqidagi ilmiy natijalardan va separat-garmonik funksiyalar uchun Osgud-Braun tipidagi teoremalar RFTJning

“Ko‘p o‘lchamli kompleks analaiz” mavzusidagi fundamental loyihasi doirasida separat-garmonik funksiyalarning bartaraf etiladigan maxsusliklarini o‘rganishda foydalanilgan (Sibir Federal universitetining 2024-yil 19-sentyabrdagi 475-sonli ma’lumotnomasi, Rossiya). Ilmiy natijalarning qo‘llanilishi ko‘p o‘lchamli kompleks analizda α-separat-garmonik funksiyalarning maxsusliklari bilan bog‘liq masalalarni yechish imkonini bergan;

o‘zgaruvchan garmoniklik radiusiga ega bo‘lgan separat-garmonik funksiyalar uchun Hartogs lemmasining analogi va ushbu lemmani tekisliklar dastasida garmoniklik shartlarini qanoatlantiruvchi separat-garmonik funksiyalar uchun umumlashtiruvchi ilmiy natijalar UT-OT-2020-1 raqamli “Monje-Amper tenglamasi va ekstremal plyurisubgarmonik funksiyalar” mavzusidagi fundamental loyihasi doirasida α-separat-garmonik funksiyalarni analitik davom ettirish va ularning bartaraf etiladigan maxsusliklarini o‘rganishga tadbiq etilgan (O‘zbekiston Milliy universitetining 2024-yil 30-oktabrdagi №04/11-9658 sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo‘llanilishi haqiqiy va kompleks fazolarda golomorf, garmonik va subgarmonik funksiyalarning davom ettirish masalalarini tadqiq qilish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining approbatsiyasi. Mazkur tadqiqot ishi natijalari 9 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan 7 ta xalqaro va 2 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan. Shuningdek, tadqiqot ishi natijalari O‘zbekiston Milliy universitetining Matematik analiz kafedrasi huzuridagi “Kompleks analizning zamonaviy muammolari” ilmiy seminari (seminar raisi: akademik A. Sadullayev va DSc K. Rahimov) va V. I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti Qoraqalpog‘iston bo‘limi va Berdaq nomidagi Qoraqalpoq davlat universitetining Matematika fakulteti qo‘shma ilmiy seminari (seminar raisi: professor K. Kudaybergenov) muhokama qilingan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Tadqiqot mavzusi bo‘yicha jami 15 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 6 ta maqola, jumladan, 2 tasi xorijiy (Scopus) va 4 tasi esa respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, to‘rtta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Har bir bobda teoremalar, takliflar, ta’riflar va formulalar alohida raqamlanadi. Dissertatsiya ishining umumiy hajmi 83 betni tashkil etadi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, ob’yekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar berilgan.

Dissertatsiyaning **“Dastlabki ma’lumotlar va masalaning qo‘yilishi”** deb nomlangan birinchi bo‘limi yordamchi xarakterga ega. Unda dissertatsiya matnini bayon qilishda muhim bo‘lgan asosiy belgilashlar va zarur ma’lumotlar, shu jumladan, ta’riflar va teoremalar keltirilgan, shuningdek, tadqiqotning vazifalari qo‘yilgan.

Birinchi bo‘limning birinchi paragrafida separat-garmonik va separat-subgarmonik funksiyalarning asosiy xossalari, shuningdek, ularning analitik davomi ko‘rib chiqiladi. Bu funksiyalarning $\mathbb{R}^n(x)\times\mathbb{R}^m(y)$ fazoning turli sohalaridagi ta’riflari keltiriladi va Lelon, Zeriahi, Sadullaev, Imomkulov teoremalari kabi asosiy natijalar hamda separat-garmonik va separat-subgarmonik funksiyalar nazariyasining asosini tashkil etuvchi boshqa muhim tasdiqlar qaraladi.

Aytaylik, $\mathbb{R}^n(x)\times\mathbb{R}^m(y)\supset D\times G$ – soha, $D\supset E$ va $G\supset F$ – ixtiyoriy qism to‘plamlar bo‘lsin. Faraz qilaylik, $E\times F$ to‘plamda dastlab aniqlangan $u(x,y)$ funksiya quyidagi xossalarga ega bo‘lsin:

a) har qanday tayinlangan $x^0\in E$ uchun $u(x^0,y)$ funksiya G sohaga garmonik davom etadi;

b) har qanday tayinlangan $y^0\in F$ uchun $u(x,y^0)$ funksiyasi D sohaga garmonik davom etadi.

U holda, $u(x,y)$ funksiyaning ushbu davomlari $X=(E\times G)\cup(D\times F)$ to‘plamda ba’zi bir funksiyani aniqlaydi va u *separat-garmonik* funksiya deyiladi.

Agar $E=D$ va $F=G$ bo‘lsa, unda $u(x,y)$ funksiya $X=D\times G$ *sohada* separat-garmonik, ya’ni o‘zgaruvchilar guruhlari bo‘yicha separat-garmonik funksiya deb ataladi.

X to‘plam, umuman olganda, soha emas. Ikki sohaning ko‘paytmasi sifatida ko‘rsatib bo‘lmaydigan ixtiyoriy soha uchun separat-garmonik funksiya quyidagicha aniqlanadi:

1-ta’rif. *Agar $u(x,y)$ funksiya $Q\subset\mathbb{R}^n(x)\times\mathbb{R}^m(y)$, $n,m>1$, sohada aniqlangan va quyidagi xossalarga ega bo‘lsa:*

1) har qanday $x^0:\{x=x^0\}\cap Q\neq\varnothing$ uchun $u(x^0,y)$ funksiya y o‘zgaruvchi boyicha $\{x=x^0\}\cap Q$ kesimda garmonik;

2) har qanday $y^0:\{y=y^0\}\cap Q\neq\varnothing$ uchun $u(x,y^0)$ funksiya x o‘zgaruvchi bo‘yicha $\{y=y^0\}\cap Q$ kesimda garmonik,

unda $u(x,y)$ funksiya Q sohada separat-garmonik funksiya deyiladi.

Separat-subgarmonik funksiyalar har bir o‘zgaruvchi uchun alohida mos keladigan subgarmoniklik shartlaridan foydalangan holda mutlaqo o‘xshash tarzda aniqlanadi.

Endi quyidagi umumiy masalani ko‘rib chiqamiz: *aytaylik,* $E \subset D \subset \mathbb{R}^n$, $F \subset G \subset \mathbb{R}^m$ *va* $u(x,y)$ *funksiya*

$$X = \left(E \times G\right) \cup \left(D \times F\right)$$

to‘plamda separat-garmonik bo‘lsin. $u(x,y)$ *funksiya barcha o‘zgaruvchilar bo‘yicha bir yo‘la garmonik davom etadigan* $\hat{X}$, $X \subset \hat{X}$ *sohani tavsiflash talab etiladi.*

Bu muammo E va F to‘plamlarga qo‘shimcha shartlar, masalan, kompakt to‘plamlarning H-regulyarligi yoki ularning plyuripolyar emasligi kabi shartlarni qo‘yish orqali hal qilingan.

2-ta’rif. $K \subset \mathbb{R}^n$ *kompakt* a *nuqtada* H*-regulyar deyiladi, agar har qanday* $b > 1$ *uchun shunday* $M > 0$ *va* a *nuqtaning* V *ochiq atrofi mavjud bo‘lib,*

$$\|p\|_V \le M b^n \|p\|_K, \ \forall p \in \mathcal{P}_k\left(\mathbb{R}^n\right), \ \forall k \in \mathbb{N},$$

bo‘lsa, bu yerda $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$ – $\mathbb{R}^n$ *dagi darajasi* k *dan katta bo‘lmagan barcha garmonik ko‘phadlar fazosi.* K *kompakt* H*-regulyar deyiladi, agar u har qanday* $a \in K$ *uchun* a *nuqtada* H*-regulyar bo‘lsa.*

3-ta’rif. *Quyidagicha olamiz:*

$$\omega_{sh}(x,E,D) = \sup\left\{u(x) : u(x) \in sh(D), u\big|_E \le 0, u\big|_D \le 1\right\}.$$

Unda

$$\omega_{sh}^*(x,E,D) = \overline{\lim_{x' \to x}}\, \omega_{sh}(x',E,D), \ x \in D,$$

E *to‘plamning* D *sohaga nisbatan garmonik o‘lchovi deb ataladi.*

1982 yilda A. Zeriahi quyidagi natijani olgan.

1-teorema (Zeriahi). *Aytaylik,* $D \times G$ – $\mathbb{R}^2(x) \times \mathbb{R}^2(y)$ *fazodagi soha va* $E \subset D$, $F \subset G$ – H*-regulyar kompakt to‘plamlar bo‘lsin. U holda* $X = \left(E \times G\right) \cup \left(D \times F\right)$ *to‘plamda separat-garmonik bo‘lgan har qanday funksiya*

$$\hat{X} = \left\{(x,y) \in D \times G : \omega_{sh}^*(x,E,D) + \omega_{sh}^*(y,F,G) < 1\right\}$$

sohaga garmonik davom etadi.

Odatda, garmonik funksiyalarni davom ettirish uchun avval ularni golomorf funksiyalarga o‘tkazishadi va keyin golomorf davom ettirish prinsiplaridan foydalanishadi.

Quyidagi natija garmonik funksiyalarning davomini o‘rganishda asosiy rol o‘ynaydi.

1-tasdiq. *Aytaylik,* $\mathbb{R}^n(x)$ *fazo* $\mathbb{C}^n(z) = \mathbb{R}^n(x) + i \cdot \mathbb{R}^n(y)$ *fazoga joylashtirilgan, bu yerda* $z = \left(z_1, \ldots, z_n\right)$, $z_j = x_j + i \cdot y_j$, $j = 1, \ldots, n$, *va* D *ushbu* $\mathbb{R}^n(x)$ *fazodagi ba’zi chegaralangan soha bo‘lsin. U holda shunday* $\hat{D} \subset \mathbb{C}^n(z)$ *soha topilib,* $D \subset \hat{D}$ *va ixtiyoriy* $u(x) \in h(D)$ *funksiya uchun* $\hat{D}$ *sohada golomorf bo‘lgan shunday* $f_u(z)$ *funksiya mavjudki,* $f_u\big|_D = u$ *bo‘ladi. Qolaversa, har qanday* $M > 1$ *soni uchun* *shunday* $\hat{D}_M \subset \hat{D}$, $D \subset \hat{D}_M$, *qism soha mavjudki,* $\forall u \in h(D) \cap L^\infty(D)$ *uchun* $\|f_u\|_{\hat{D}_M} \le M\|u\|_D$ *bo'ladi (bu yerda* $\|u\|_D = \sup\{|u(x)| : x \in D\}$ *).*

4-ta'rif. *Agar shunday* $u \in psh(D)$ *funksiya mavjud bo'lib,* $u \not\equiv -\infty$ *va* $u|_E \equiv -\infty$ *bo'lsa,* $E \subset D \subset \mathbb{C}^n$ *to'plam* D *sohada plyuripolyar deb ataladi.*

5-ta'rif. *Aytaylik,* E – $D \subset \mathbb{C}^n$ *sohadagi ixtiyoriy to'plam. Quyidagicha olamiz:*

$$\omega(z,E,D) = \sup\{u(z) : u \in psh(D), u|_E \le 0, u|_D \le 1\}.$$

Unda

$$\omega^*(z,E,D) = \varlimsup_{z' \to z} \omega(z',E,D),\ z \in D,$$

E *to'plamning* D *sohaga nisbatan* $\mathcal{P}$*-o'lchovi (plyurisubgarmonik o'lchovi) deb ataladi.*

Ushbu faktlardan foydalanib, 2006 yilda A. Sadullaev va S. Imomkulov quyidagi natijani oldilar.

2-teorema (A. Sadullaev va S. Imomkulov). *Aytaylik,* $E \subset D \subset \mathbb{R}^n$ *va* $F \subset G \subset \mathbb{R}^m$ *to'plamlar* $\mathbb{C}^n = \mathbb{R}^n + i \cdot \mathbb{R}^n$ *va* $\mathbb{C}^m = \mathbb{R}^m + i \cdot \mathbb{R}^m$ *fazolarning qism to'plamlari ma'nosida plyuripolyar bo'lmagan kompakt to'plamlar bo'lsin. U holda* $X = (E \times G) \cup (D \times F)$ *to'plamda separat-garmonik bo'lgan har qanday* $u(x,y)$ *funksiya*

$$\hat{X} = \{(x,y) \in D \times G : \omega^*(x,E,\hat{D}) + \omega^*(y,F,\hat{G}) < 1\}$$

sohaga garmonik davom etadi.

Birinchi bobning ikkinchi paragrafida garmonik funksiyalar sinfida ekstremal funksiyalar tushunchasi va ularning kompaktlarning regulyarligi bilan bog'liqligi ko'rib chiqilgan, bu esa ushbu funksiyalarning o'zini qanday tutishini tahlil qilishda muhim rol o'ynaydi.

6-ta'rif. *Aytaylik,* D – $\mathbb{R}^n$ *dagi soha va* K – D *dagi kompakt bo'lsin. Quyidagini aniqlaymiz:*

$$\chi_0(x,K,D) := \lim_{\varepsilon \to 0} \chi_\varepsilon(x,K,D),$$

bu yerda $\chi_\varepsilon(x,K,D) := \varlimsup_{y \to x} \sup\{\lambda \ln|u(y)|,\ u \in h(D),\ 0 < \lambda < \varepsilon,\ \|u\|_K \le 1,\ \|u\|_D^\lambda \le e\}.$

7-ta'rif. *Aytaylik,* $\{D_s\}_{s \in \mathbb{N}}$ – $\mathbb{R}^n$ *fazodagi* $D_s \subset D_{s+1}$, $\bigcup_{s \in \mathbb{N}} D_s = D$ *shartlarni qanoatlantiruvchi sohalar ketma-ketligi va* $\{K_r\}_{r \in \mathbb{N}}$ – D_1 *sohaning* $K_{r+1} \Subset Int\, K_r$, $\bigcap_{r \in \mathbb{N}} K_r = K$ *shartlarni qanoatlantiruvchi kompakt qism to'plamlari ketma-ketligi bo'lsin.* (K,D) *bilan bog'liq bo'lgan* Zahariuta *ekstremal funksiyasi* $h(\cdot,K,D)$ *quyidagi formula orqali aniqlanadi:*

$$h(x,K,D) := \varlimsup_{y \to x} \lim_{r \to \infty} \chi(x,K_r,D),\ x \in D,$$

bu yerda $\chi(x,K,D) := \lim_{s \to \infty} \chi_0(x,K,D_s)$.

1-eslatma. *Agar* $n=2$ *bo'lsa, V. P. Zahariuta* $h(\cdot,K,D)$ *odatdagi* $\omega_{sh}(\cdot,K,D)$ *garmonik o'lchov ekanligini isbotladi.*

$\chi(\cdot,K,D)\geq\chi_0(\cdot,K,D)$ va $\chi(\cdot,K,D)\geq h(\cdot,K,D)$ ekanligini oson ko'rish mumkin.

V.P. Zahariuta tomonidan kiritilgan yuqoridagi ekstremal funksiyadan foydalanib, J.M. Hekart separat-garmonik funksiyalarning analitik davomi haqidagi quyidagi teoremani isbotladi.

3-teorema (Hekart). *Aytaylik,* D *va* G *sohalar mos ravishda* $\mathbb{R}^n$ *va* $\mathbb{R}^m$ *fazolardan, shuningdek* $E\subset D$ *va* $F\subset G$ *ikki* H*-regulyar kompaktlar berilgan bo'lsin. U holda* $X=(E\times G)\bigcup(D\times F)$ *to'plamda separat-garmonik bo'lgan har qanday funksiya*

$$\hat{X}=\left\{(x,y)\in D\times G:\overline{h}(x,E,D)+\overline{h}(y,F,G)<1\right\}$$

sohaga garmonik davom etadi, bu yerda $\overline{h}(x,E,D)=\lim\limits_{s\to+\infty}h(x,E,D_s)$, $D_s\nearrow D$, $s\to+\infty$.

Ko'p o'lchamli kompleks analizning turli masalalarini hal qilishda muhim rol o'ynaydigan subgarmonik funksiyalarning umumlashtirilgan sinflarini o'rganishga tabiiy ehtiyoj paydo bo'ladi. Shunday sinflardan biri α- subgarmonik funksiyalar sinfidir. Birinchi bobning uchinchi paragrafida α-garmonik va α-subgarmonik funksiya ta'riflari keltirilgan, shuningdek, ularning muhim xususiyatlari ko'rib chiqilgan.

Aytaylik, α – $D\subset\mathbb{C}^n$ sohadagi ixtiyoriy yopiq qat'iy musbat $(n-1,n-1)$ bidarajali differensial forma bo'lib, quyidagicha berilgan:

$$\alpha=\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\sum_{j,k=1}^{n}\alpha_{jk}(z)dz[j]\wedge d\overline{z}[k],$$

bu yerda barcha j, k uchun $\alpha_{jk}(z)\in Lip_\lambda(D)$ va $0<\lambda<1$. Shu bilan birga, α forma yopiq:

$$d\alpha=0.$$

α ning qat'iy musbatligi shuni anglatadiki, har qanday $G\Subset D$ kompakt soha uchun $\varepsilon>0$ o'zgarmas son mavjud bo'lib, G da $\alpha-\varepsilon\beta^{n-1}$ differensial forma musbat bo'ladi, bu yerda $\beta=dd^c\left(|z|^2\right)$ – $\mathbb{C}^n$ dagi hajmning standart formasi.

8-ta'rif. *Ikki marta differensiallanuvchi* $u(z)\in C^2(D)$ *funksiya* $D\subset\mathbb{C}^n$ *sohada* α*-subgarmonik deb ataladi, agar* D *da differensial forma* $dd^cu\wedge\alpha\geq0$ *bo'lsa.* $u(z)\in L^1_{loc}(D)$ *funksiya* D *sohada* α*-subgarmonik deb ataladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:*

1) u D *da yuqoridan yarim uzluksiz, ya'ni* $\forall z^0\in D$ *uchun* $u(z^0)\geq\overline{\lim\limits_{z\to z^0}}u(z)$*;*

2) operator $dd^cu\wedge\alpha$ *umumlashgan ma'noda musbat, ya'ni*

$$\int u(z)\alpha(z)\wedge dd^c\omega(z)\geq0,\ \forall\omega\in F(D),\ \omega\geq0.$$

Agar $\alpha = \beta^{n-1} = \left(dd^c |z|^2\right)^{n-1}$ bo‘lsa, α-subgarmonik funksiyalar klassik subgarmonik funksiyalar bilan mos tushadi. Shuni ta’kidlash joizki, ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi $n=1$ funksiya uchun quyidagi tenglik bajariladi:

$$dd^c u \wedge \beta^{n-1} = (n-1)!\Delta u dV,$$

bu yerda Δ – Laplas operatori, dV esa $\mathbb{C}^n$ dagi hajm formasi. Agar $n=1$ bo‘lsa, ya’ni, soha kompleks tekislikda joylashgan bo‘lsa, funksiyaning α-subgarmonikligi uning oddiy subgarmonikligiga ekvivalent bo‘ladi. Bu holat yaxshi o‘rganilgan, shu sababli biz uni batafsil ko‘rib chiqmaymiz va keyingi izlanishlarda $n>1$ holatlarga e’tibor qaratamiz.

9-ta’rif. *Ikki marta differensiallanuvchi* $u(z) \in C^2(D)$ *funksiya* $D \subset \mathbb{C}^n$ *sohada* α*-garmonik deb ataladi, agar* D *da differensial forma* $dd^c u \wedge \alpha = 0$ *bo‘lsa.* $u(z) \in L^1_{loc}(D)$ *funksiya* $D \subset \mathbb{C}^n$ *sohada* α*-garmonik deb ataladi, agar umumlashgan ma’noda operator* $dd^c u \wedge \alpha = 0$ *bo‘lsa, ya'ni*

$$\int u(z)\alpha(z) \wedge dd^c \omega(z) = 0, \ \forall \omega \in F(D).$$

Dissertatsiyaning **“Separat-garmonik funksiyalarni tayinlangan yo‘nalish bo‘yicha davom ettirish”** deb nomlangan ikkinchi bobida, separat-garmonik funksiyalarni tayinlangan yo‘nalish bo‘ylab analitik davom ettirish masalasi o‘rganiladi. Asosiy e’tibor ma’lum bir sohada aniqlangan separat-garmonik funksiyaning undan kengroq sohalar sinfiga davom ettirilishi mumkin bo‘lgan shartlarga qaratiladi.

Ikkinchi bobning birinchi paragrafida quyidagi teorema isbotlanadi.

4-teorema. *Agar* $u(x,y)$ *funksiya*

$$D \times V_r = D \times \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : |y| < r, r > 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$$

sohada separat-garmonik bo‘lsa va har bir tayinlangan $x^0 \in D$ *uchun* $u(x^0,y)$ *funksiya* y *o‘zgaruvchi bo‘yicha* $\left\{ y \in \mathbb{R}^2 : |y| < R(x^0), R(x^0) > r \right\}$ *kattaroq doiraga garmonik davom etsa, u holda* $u(x,y)$ *funksiya* $\left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2 : |y| < R_*(x), x \in D \right\}$ *sohaga barcha o‘zgaruvchilar bo‘yicha bir yo‘la garmonik davom etadi, bu yerda* $-\ln R_*(x)$ *funksiya* $\mathcal{H}\left(\hat{D}\right)$ *sinfidagi ba’zi bir plyurisubgarmonik funksiyaning izi bo‘ladi.*

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafining asosiy natijasi quyidagi teorema bo‘lib, u bu natijani tekisliklar dastasida garmoniklik shartlarini qanoatlantiruvchi separat-garmonik funksiyalar holatiga umumlashtiradi.

5-teorema. *Agar* $u(x,y)$ *funksiya*

$$D \times V_r = D \times \left\{ y \in \mathbb{R}^2 : |y| < r, \ r > 1 \right\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^2$$

sohada separat-garmonik bo‘lsa, va h*-plyuripolyar bo‘lmagan* E *to‘plamdan olingan har bir tayinlangan* $x^0 \in E \subset D$ *uchun* $u(x^0,y)$ *funksiya* y *o‘zgaruvchi* *bo'yicha butun $\mathbb{R}^2$ tekislikga garmonik davom etsa, u holda $u(x,y)$ funksiya $D\times\mathbb{R}^2$ sohaga barcha o'zgaruvchilar bo'yicha bir yo'la garmonik davom etadi.*

Dissertatsiyaning **"$\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalar"** deb nomlangan uchinchi bobida C^2 sinfda ishlovchi operatorlar qaralgan bo'lib, ular yordamida $D\times G\subset\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m$ sohada $u(z,w)$ funksiyaning $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmoniklik va $\boldsymbol{\alpha}$-separat-subgarmoniklik kabi asosiy ta'riflari berilgan, bu yerda $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha',\alpha'')$ – biforma.

Aytaylik, α' va α'' mos ravishda $(n-1,n-1)$ va $(m-1,m-1)$ bidarajali, yopiq va qat'iy musbat differensial formalar bo'lsin. Bundan tashqari, barcha koeffitsiyentlar uchun $\alpha'_{jk}(z)\in Lip_\lambda(D)$, $\alpha''_{jk}(w)\in Lip_\lambda(G)$, $0<\lambda<1$.

C^2 fazoda quyidagi operatorlarni ko'rib chiqamiz:

$$d_z d_{\bar z}^c u(z,w)\wedge\alpha'(z)=\left[\frac{i}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 u(z,w)}{\partial z_j\partial\bar z_k}dz_j\wedge d\bar z_k\right]\wedge$$

$$\wedge\left[\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\sum_{j,k=1}^{n}\alpha'_{jk}(z)\,dz[j]\wedge d\bar z[k]\right]=$$

$$=\left(\frac{i}{2}\right)^{n}\sum_{j,k=1}^{n}(-1)^{k+j+1}\alpha'_{jk}(z)\frac{\partial^2 u(z,w)}{\partial z_j\partial\bar z_k}dz\wedge d\bar z\,,\ \forall w\in G;$$

$$d_w d_{\bar w}^c u(z,w)\wedge\alpha''(w)=\left[\frac{i}{2}\sum_{j,k=1}^{m}\frac{\partial^2 u(z,w)}{\partial w_j\partial\bar z_k}dw_j\wedge d\bar w_k\right]\wedge$$

$$\wedge\left[\left(\frac{i}{2}\right)^{m-1}\sum_{j,k=1}^{m}\alpha''_{jk}(w)\,dw[j]\wedge d\bar w[k]\right]=$$

$$=\left(\frac{i}{2}\right)^{m}\sum_{j,k=1}^{m}(-1)^{j+k+1}\alpha''_{jk}(w)\frac{\partial^2 u(z,w)}{\partial w_j\partial\bar w_k}dw\wedge d\bar w\,,\ \forall z\in D.$$

10-ta'rif. *$u(z,w)$ funksiya $D\times G$ sohada $\boldsymbol{\alpha}$-separat-subgarmonik deyiladi, bu yerda $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha',\alpha'')$ – biforma, agar u har bir o'zgaruvchi bo'yicha lokal integrallanuvchi va yuqoridan yarim uzluksiz bo'lsa, shuningdek, quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:*

1) operator $d_z d_{\bar z}^c u\wedge\alpha'$ umumlashgan ma'noda musbat bo'lsa, ya'ni

$$\int u(z)\alpha'(z)\wedge d_z d_{\bar z}^c\omega(z)\ge 0\,,\ \forall\omega\in F(D)\,,\ \omega\ge 0;$$

2) operator $d_w d_{\bar w}^c u\wedge\alpha''$ umumlashgan ma'noda musbat bo'lsa, ya'ni

$$\int u(w)\alpha''(w)\wedge d_w d_{\bar w}^c\omega(w)\ge 0\,,\ \forall\omega\in F(G)\,,\ \omega\ge 0.$$

11-ta'rif. *$u(z,w)$ funksiya $D\times G$ sohada $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik deyiladi, bu yerda $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha',\alpha'')$ – biforma, agar u har bir o'zgaruvchi bo'yicha lokal integrallanuvchi bo'lsa, shuningdek, quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:*

1) umumlashgan ma'noda operator $d_z d_{\bar z}^c u\wedge\alpha'=0$, ya'ni

$$\int u(z)\alpha'(z) \wedge d_z d_{\bar{z}}^c \omega(z) = 0\,,\ \forall \omega \in F(D)\,;$$

2) umumiy ma'noda operator $d_w d_{\bar{w}}^c u \wedge \alpha'' = 0$*, ya'ni*

$$\int u(w)\alpha''(w) \wedge d_w d_{\bar{w}}^c \omega(w) = 0\,,\ \forall \omega \in F(G)\,.$$

Keyin $\boldsymbol{\alpha}$-separat-subgarmonik funksiyalarning α-subgarmonikligi haqidagi teorema isbotlanadi, undan kelib chiqib, shuni ta'kidlash mumkinki, shunga o'xshash teorema $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalar uchun ham to'g'ri.

6-teorema. *Agar* $u(z,w) \in C^2\left(D \times G\right)$ *funksiya* $\boldsymbol{\alpha}$*-separat-subgarmonik bo'lsa, u holda barcha o'zgaruvchilar bo'yicha bir yo'la* $dd^c u(z,w) \wedge \alpha(z,w) \geq 0$*, ya'ni* $u(z,w)$ *funksiya* α*-subgarmonik bo'ladi, bu yerda* $\alpha(z,w) = \alpha'(z) \wedge \alpha''(w) \wedge \beta$ *va* $\beta = dd^c\left(|z|^2 + |w|^2\right)$.

7-teorema. *Agar* $u(z,w) \in C^2\left(D \times G\right)$ *funksiya* $\boldsymbol{\alpha}$*-separat-garmonik bo'lsa, u holda barcha o'zgaruvchilar bo'yicha bir yo'la* $dd^c u(z,w) \wedge \alpha(z,w) = 0$*, ya'ni* $u(z,w)$ *funksiya* α*-garmonik bo'ladi, bu yerda* $\alpha(z,w) = \alpha'(z) \wedge \alpha''(w) \wedge \beta$ *va* $\beta = dd^c\left(|z|^2 + |w|^2\right)$.

Albatta, savol tug'iladi: *qanday minimal shartlarda (*$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha', \alpha'')$ *va* $u(z,w)$ *uchun)* $D \times G \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$ *sohada* $\boldsymbol{\alpha}$*-separat-garmonik funksiya* α*-garmonik bo'ladi?*

Ushbu bobning asosiy maqsadi ushbu savolni o'rganishdir va ushbu bobning ikkinchi va uchinchi paragraflarida biz turli holatlar va shartlarni tahlil qilib, berilgan savolga qisman javoblar keltiramiz.

Bizga ma'lumki, agar α differensial forma haqiqiy analitik bo'lsa, unda α-garmonik funksiya ham haqiqiy analitik bo'ladi.

Quyidagi lemma o'rinli:

1-lemma. *Agar* α *differensial forma* $D \subset \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$ *sohada haqiqiy analitik bo'lsa, u holda shunday* $\tilde{D} \subset \mathbb{C}^{2n}$ *(*$\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n} \subset \mathbb{C}^{2n}$*) soha mavjudki,* D *da* α*-garmonik bo'lgan har qanday funksiya ushbu* $\tilde{D}$ *sohaga golomorf davom etadi.*

Uchinchi bobning ikkinchi paragrafida $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalar uchun Lelon teoremasining quyidagi analogi isbotlangan.

8-teorema. *Agar* α' *va* α'' *mos ravishda* $D \subset \mathbb{C}^n$ *va* $G \subset \mathbb{C}^m$ *sohalarda haqiqiy analitik differensial formalar bo'lsa, u holda* $D \times G$ *sohada* $\boldsymbol{\alpha}$*-separat-garmonik bo'lgan har qanday* $u(z,w)$ *funksiya (bu yerda* $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha', \alpha'')$*) haqiqiy analitik va barcha o'zgaruvchilar bo'yicha bir yo'la* α*-garmonik bo'ladi:* $dd^c u(z,w) \wedge \alpha = 0$, $\forall (z,w) \in D \times G$*, bu yerda* $\alpha = \alpha'(z) \wedge \alpha''(w) \wedge \beta$*,* $\beta = dd^c\left(|z|^2 + |w|^2\right)$.

Shuningdek, $\boldsymbol{\alpha}$-separat-subgarmonik funksiyalar uchun quyidagi teorema isbotlangan.

9-teorema. *Agar $D\times G$ sohada $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha',\alpha'')$ haqiqiy analitik differensial biforma berilgan bo'lsa va $u(z,w)$ funksiya $D\times G$ sohada $\boldsymbol{\alpha}$-separat-subgarmonik bo'lib, quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:*

1) har qanday tayinlangan $w^0\in G$ uchun $u(z,w^0)$ funksiya z o'zgaruvchi bo'yicha haqiqiy analitik;

2) har qanday tayinlangan $z^0\in D$ uchun $u(z^0,w)$ funksiya w o'zgaruvchi bo'yicha α''-garmonik. U holda $u(z,w)$ funksiya $D\times G$ sohada barcha o'zgaruvchilar bo'yicha bir yo'la haqiqiy analitik α-subgarmonik funksiya bo'ladi, bu yerda $\alpha=\alpha'(z)\wedge\alpha''(w)\wedge\beta$.

Uchinchi bobning uchinchi paragrafida $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalarni tayinlangan yo'nalish bo'yicha analitik davom ettirish haqida quyidagi teorema isbotlangan.

10-teorema. *Aytaylik, $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha',\alpha'')$ – chegaralangan $D\times G$ sohada haqiqiy analitik differensial biforma va $\alpha=\alpha'\wedge\alpha''\wedge\beta$ bo'lsin. Agar $u(z,w)$ funksiya $D\times U\subset D\times G$ qism sohada α-garmonik bo'lsa va har bir tayinlangan $z^0\in D$ uchun $u(z^0,w)$ funksiya G sohada w o'zgaruvchi bo'yicha α''-garmonik davom etsa, u holda $u(z,w)$ funksiya $D\times G$ sohada barcha o'zgaruvchilar bo'yicha bir yo'la α-garmonik davom etadi. Bundan tashqari, bu davom ettirish $D\times G$ sohada $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiya bo'ladi.*

Dissertatsiyaning **"Separat-garmonik va α-separat-garmonik funksiyalar uchun Osgud-Braun teoremasining analoglari"** deb nomlangan to'rtinchi bobida separat-garmonik funksiyalar uchun Osgud-Braun tipidagi teoremalar isbotlangan. Shuningdek, $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalar uchun Osgud-Braun teoremasining analogi isbotlangan bo'lib, bu $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalar, separat-garmonik funksiyalar kabi, kompakt maxsusliklarga ega emasligini ko'rsatadi.

To'rtinchi bobning birinchi paragrafida separat-garmonik funksiyalar uchun Osgud-Braun tipidagi bir nechta teoremalar isbotlangan.

11-teorema. *Agar S – $D\subset\mathbb{R}^n(x)\times\mathbb{R}^m(y)$, $n,m>1$, sohaning yopiq (D da) bo'lgan qism to'plami va uning ortogonal proyeksiyalari $S_1=\left\{x\in\mathbb{R}^n:(x,y)\in S\right\}$ va $S_2=\left\{y\in\mathbb{R}^m:(x,y)\in S\right\}$ hech qayerda zich bo'lmasa, u holda $D\backslash S$ sohada separat-garmonik bo'lgan har qanday $u(x,y)$ funksiya D sohaga garmonik davom etadi.*

12-teorema. *Aytaylik, $D\subset\mathbb{R}^n$ va $G\subset\mathbb{R}^m$ ikki soha, $E\subset D$ va $F\subset G$ ikki to'plam berilgan bo'lsin. Agar $D\Supset E$ – kompakt, F esa G sohaning to'ldiruvchisi $G\backslash F\neq\varnothing$ bo'sh bo'lmagan yopiq (G da) qism to'plami bo'lsa, u holda $(D\times G)\backslash(E\times F)$ da separat-garmonik bo'lgan har qanday $u(x,y)$ funksiya $D\times G$ sohaga garmonik davom etadi.*

13-teorema. *Aytaylik, $D\subset\mathbb{R}^n$ va $G\subset\mathbb{R}^m$ ikki soha, $E\subset D$ va $F\subset G$ ikki to'plam berilgan bo'lsin. Agar E – D sohaning hech qayerda zich bo'lmagan yopiq (D da) qism to'plami, F esa G sohaning to'ldiruvchisi $G\backslash F\neq\varnothing$ bo'sh bo'lmagan* *yopiq (G da) qism to'plami bo'lsa, u holda $(D\times G)\setminus(E\times F)$ da separat-garmonik bo'lgan har qanday $u(x,y)$ funksiya $D\times G$ sohaga garmonik davom etadi.*

To'rtinchi bobning ikkinchi paragrafida esa $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalar uchun Osgud-Braun teoremasining analogi sifatida quyidagi teorema isbotlangan.

14-teorema. *Aytaylik, $D\subset\mathbb{C}^n$ va $G\subset\mathbb{C}^m$ – sohalar, $E\Subset D$ va $F\Subset G$ esa kompakt qisim to'plamlar bo'lsin. Agar $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha',\alpha'')$ – $D\times G$ sohada haqiqiy analitik differensial biforma va $u(z,w)$ funksiya $(D\times G)\setminus(E\times F)$ sohada $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik bo'lsa, u holda $D\times G$ sohada shunday haqiqiy analitik va $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik $\tilde{u}(z,w)$ funksiya topiladi va $\tilde{u}(z,w)\big|_{(D\times G)\setminus(E\times F)}\equiv u(z,w)$ bo'ladi.*

Ushbu teoremadan kelib chiqadiki, $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalar ham kompakt maxsusliklarga ega emas.

Muallif ushbu dissertatsiya natijalarini ko'p marotaba muhokama qilgani va qimmatli maslahatlarini berganligi uchun akademik A.Sadullayevga, va dissertatsiyada ko'rilgan masalalarni qo'yish va dissertatsiya ishiga doimiy e'tiborda bo'lganligi uchun ilmiy rahbari, fizika-matematika fanlari doktori S.A. Imomkulovga chuqur minnatdorchilik bildiradi.

XULOSA

Dissertatsiya ishi separat-garmonik va $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalarni analitik davom ettirish hamda ushbu funksiyalarning bartaraf etiladigan maxsusliklarini o'rganishga bag'ishlangan, bu yerda $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha',\alpha'')$ – biforma.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

garmoniklik radiusli o'zgaruvchan separat-garmonik funksiyalar uchun Hartogs lemmasining analogi isbotlangan;

tekisliklar dastasida garmoniklik shartlarini qanoatlantiruvchi separat-garmonik funksiyalarnining davom etishi haqidagi teorema isbotlangan;

$\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik va $\boldsymbol{\alpha}$-separat-subgarmonik funksiyalarning ta'riflari kiritilgan;

$\boldsymbol{\alpha}$-separat-subgarmonik funksiyalarning α-subgarmonikligi va $\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalarning α-garmonikligi isbotlangan;

$\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalar uchun Lelon teoremasining analogi isbotlangan;

$\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalarning tayinlangan yo'nalish bo'yicha analitik davom ettirilishi haqidagi teorema isbotlangan;

separat-garmonik funksiyalar uchun Osgud-Braun tipidagi teoremalar isbotlangan;

$\boldsymbol{\alpha}$-separat-garmonik funksiyalar uchun Osgud-Braun teoremasining analogi isbotlangan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.12.2019.FM.55.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ УРГЕНЧСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ ИМЕНИ АБУ РАЙХАН БЕРУНИ

КАРАКАЛПАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

АБДИКАДИРОВ СУЛТАНБАЙ МАМУТОВИЧ

АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПРОДОЛЖЕНИЕ СЕПАРАТНО-ГАРМОНИЧЕСКИХ И α-СЕПАРАТНО-ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

01.01.01 – Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Нукус – 2025

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при министерстве Высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за № B2024.1.PhD/FM1000.

Диссертация выполнена в Каракалпакском государственном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.ik-mat.urdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный руководитель:	**Имомкулов Севдиёр Акрамович** доктор физико-математических наук
Официальные оппоненты:	**Шоимкулов Баходир Аллабердиевич** доктор физико-математических наук, профессор **Атамуратов Алимардон Абдиримович** кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Ведущая организация:	**Ташкентский государственный педагогический университет**

Защита диссертации состоится «10» мая 2025 года в 10:00 часов на заседании Научного совета PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 при Ургенчском государственном университете имени Абу Райхан Беруни. (Адрес: 220100, г. Ургенч, ул. Х. Алимджана, дом 14. Тел.: (99862)224-66-11, факс: (99862) 224-67-00, e-mail: ik-mat.urdu@umail.uz

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Ургенчского государственного университета имени Абу Райхан Беруни. (зарегистрирована за № D792). (Адрес: 220100, г. Ургенч, ул. Х.Алимджана, дом 14. Тел.: (99862) 224-66-11, факс: (99862) 224-67-00). e- mail: arm@urdu.uz

Автореферат диссертации разослан «22» апреля 2025 года.

(протокол рассылки № 2 от «22» апреля 2025 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

Б.И. Абдуллаев
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук

А.А. Рейимберганов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, кандидат физико-математических наук

Б.А. Бабажанов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В большинстве научных и прикладных исследованиях, проводимых в различных областях современной математики на мировом уровне, широко применяются голоморфные, субгармонические и гармонические функции. В настоящее время задачи аналитического продолжения сепаратно-аналитических и сепаратно-гармонических функций, а также выявления их устранимых особенностей являются одними из наиболее изучаемых направлений исследований в области теории потенциалов и плюрипотенциалов. Кроме того, исследование задачи аналитического продолжения $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций, которые являются обобщением сепаратно-гармонических функций, остаётся одной из важных задач современного математического анализа.

В настоящее время на мировом уровне одним из наиболее динамично развивающихся направлений математического анализа является исследование задач аналитического продолжения сепаратно-аналитических, сепаратно-гармонических и сепаратно-субгармонических функций в областях многомерных действительных и комплексных пространств на основе теории плюрипотенциалов. Этим вопросам уделяется особое внимание. Эти задачи связаны с перспективными направлениями современного многомерного комплексного анализа и находят широкое применение в теоретической физике, в частности, в квантовой теории поля. В частности, классы $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических и $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-субгармонических функций являются обобщением классов сепаратно-гармонических и сепаратно-субгармонических функций, что определяет новые направления исследований. В связи с этим аналитическое продолжение сепаратно-гармонических и $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций, а также изучение их устранимых особенностей, представляет собой важную научно-исследовательскую задачу.

В нашей стране усиливается внимание к областям фундаментальной науки, имеющим как теоретическое, так и практическое значение. В частности, в последние годы были достигнуты значительные результаты в изучении вопросов теории плюрипотенциалов многомерного комплексного анализа, в том числе в аналитическом продолжении сепаратно-аналитических, сепаратно-субгармонических и сепаратно-гармонических функций, а также в описании множеств устранимых особенностей таких функций. Расширение объёмов научных исследований в области математики, повышение их результативности и практической значимости определены в качестве приоритетных направлений развития исследований в области математики и её приложений[2]. В реализации этих задач особое значение имеет развитие теории плюрипотенциалов, в частности изучение проблем аналитического продолжения $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических и $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-субгармонических функций.

Представленное диссертационное исследование, в определенной мере, способствует выполнению задач, изложенных в Указах Президента Республики

[2] Постановление Президента Республики Узбекистан № PQ-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования в области математики и развитии научных исследований».

Узбекистан № УП-6097 от 29 октября 2020 года «Об утверждении Концепции развития науки до 2030 года» и № УП-60 от 28 января 2022 года «О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022–2026 годы», а также постановлениями Президента Республики Узбекистан № ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан» и № ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики».

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Настоящее исследование проведено в рамках приоритетных направлений развития науки и технологий Республики Узбекистан, определённых по направлению № Ф4 «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Во всём мире задачи аналитического продолжения функций многих переменных исследованы в трудах ученых из США, Германии, Швеции, Франции, России и Узбекистана (Ф. Хартогс, Й. Сичак, В. П. Захарюта, Т. В. Нгуен и А. Заряхи, П. Пфлуг и В. А. Нгуен, А. Садуллаев, Е. М. Чирка, С. А. Имомкулов, Т. Т. Туйчиев, Ж. У. Хужамов и др.). Также в работах П. Лелона, Т. В. Нгуена, В. П. Захарюты, Т. Бэгби, Н. Левенберга, А. Зеряхи, Ж. М. Хекарта, А. Садуллаева, С. А. Имомкулова, Й. Р. Саидова, Ж. С. Раймонда, З. Блоцки изучены задачи аналитического продолжения плюригармонических, сепаратно-гармонических и вещественно - аналитических функций многих переменных.

Известная теорема Хартогса утверждает, что *сепаратно-голоморфная в области* $D\times G\subset\mathbb{C}^n(z)\times\mathbb{C}^m(w)$ *функция* $f(z,w)$ *является голоморфной по совокупности переменных в этой области*. В 1961 году П. Лелон доказал аналог этой теоремы для сепаратно-гармонических функций: *если функция* $u(x,y)$ *является сепаратно-гармонической в области* $D\times G\subset\mathbb{R}^n(x)\times\mathbb{R}^m(y)$, *то она гармонична по совокупности переменных в этой области*.

С выходом указанной работы Лелона сепаратно-гармонические, сепаратно R-аналитические и сепаратно-субгармонические функции стали предметом исследования многих авторов. Основной упор был направлен на проблему: *является ли сепаратно-субгармоническая функция субгармонической по совокупности переменных*? Ответ на этот вопрос отрицательный, точнее в 1988 году Ян Вигеринк построил пример сепаратно-субгармонической функции, которая не является субгармонической по совокупности переменных.

При наложении дополнительных условий данный вопрос изучался в работах различных авторов, включая В. Аваниссяна, М. Г. Арсова, Й. Риихентауса, а также Д. М. Армитиджа и С. Ж. Гарднера, где были получены важные результаты.

Дальнейшие продвижения в изучении сепаратно-субгармонических функций связаны с дополнительными условиями, как гармоничность или вещественно-аналитичность по одной группе переменных (С. Имомкулов, С. Колодзейа и Я. Торбиорнсона, Й. Риихентаус, У. Сегрел и А. Садуллаев).

Одной из фундаментальных теорем, иллюстрирующих различие между теориями функций одного и нескольких комплексных переменных, является теорема Осгуда-Брауна: *если функция* f *голоморфна всюду в области* $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ *(* $n > 1$*), за исключением множества* $K \Subset D$*, не разбивающего область (т. е. такого, что* $\Omega \setminus K$ *связно), то* f *голоморфно продолжается на всю область* Ω.

Эта теорема показывает, что голоморфные функции многих переменных не могут иметь компактных особенностей. В 2007 году Сачико Хамано доказала аналог этой теоремы для сепаратно-гармонических функций: *пусть* D *область из* $\mathbb{R}^n(x) \times \mathbb{R}^m(y)$, $n, m > 1$, $D \Supset K$ *– компакт и* $D \setminus K$ *связно. Если функция* $u(x, y)$ *сепаратно-гармоническая в* $D \setminus K$*, то она сепаратно-гармонически продолжается в* D.

В нашей стране проблема устранимых особенностей голоморфных, гармонических и субгармонических функций была подробно изучена рядом исследователей, включая А. Садуллаева, Б. И. Абдуллаева, С. А. Имомкулова, Ж. Р. Ярметова и других.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в которой выполняется диссертация. Исследование выполнено в рамках научно-исследовательского плана кафедры математического анализа Каракалпакского государственного университета по теме «Теория комплексных потенциалов» на 2020–2024 годы.

Цель исследования заключается в изучении аналитического продолжения сепаратно-гармонических и $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций, а также в исследовании устранимых особенностей этих функций.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

доказать аналог леммы Хартогса для сепаратно-гармонических функций с переменным радиусом гармоничности;

доказать аналог леммы Хартогса для сепаратно-гармонических функций, которые удовлетворяют условиям гармоничности на пучках плоскостей;

доказать α-субгармоничность $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-субгармонических и α-гармоничность $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций;

доказать аналог теоремы Лелона для $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций;

доказать теорему об аналитическом продолжении $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций вдоль фиксированного направления, где α – вещественно-аналитическая дифференциальная форма;

доказать теоремы типа Осгуда-Брауна для сепаратно-гармонических функций;

доказать аналог теоремы Осгуда-Брауна для $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций.

Объект исследования. Сепаратно-гармонические, сепаратно-субгармонические, α-гармонические, α-субгармонические, $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонические и $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-субгармонические функции.

Предмет исследования. Области гармоничности и множества устранимых особенностей сепаратно-гармонических и $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций.

Методы исследования. В диссертации использовались методы теории функций многих действительных и комплексных переменных, классической теории потенциала, теории плюрипотенциала, а также методы функционального анализа.

Научная новизна исследования. Все результаты, полученные в диссертации, являются новыми. Они заключаются в следующем:

с помощью класса $\mathcal{H}$, являющегося подклассом плюрисубгармонических функций и h-плюриполярных множеств, доказан аналог леммы Хартогса для сепаратно-гармонических функций с переменным радиусом гармоничности;

используя лемму Хартогса для сепаратно-гармонических функций с переменным радиусом гармоничности, доказана теорема, обобщающая эту лемму на случай сепаратно-гармонических функций, удовлетворяющих условиям гармоничности на пучках плоскостей;

с использованием операторов, определённых в классе дважды непрерывно дифференцируемых функций, введены определения $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических и $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-субгармонических функций;

на основе понятий $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармоничности и $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-субгармоничности доказаны теоремы о α-субгармоничности $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-субгармонических функций и о α-гармоничности $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций;

используя принципы перехода к голоморфным функциям и голоморфного продолжения, доказан аналог теоремы Лелона для $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций в случае, когда $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha',\alpha'')$ является вещественно-аналитической дифференциальной биформой;

голоморфно продолжая α-гармонические функции и применяя теорему Сичака-Захарюты, доказана теорема об аналитическом продолжении $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций вдоль фиксированного направления в случае, когда α является вещественно-аналитической дифференциальной формой;

используя теорему об аналитическом продолжении сепаратно-аналитических функций и свойства $\mathcal{P}$-меры, доказаны теоремы типа Осгуда-Брауна для сепаратно-гармонических функций;

применяя аналог теоремы Лелона и кратный интеграл Пуассона для $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций, доказан аналог теоремы Осгуда-Брауна для $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций.

Практические результаты исследования. Даны способы определения $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-субгармонических и $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций для различных классов функций, которые были успешно использованы в задачах аналитического продолжения.

Достоверность результатов исследования подтверждена строгими математическими доказательствами основных результатов и обоснована применением известных методов теории функций многих действительных и комплексных переменных, классической теории потенциала, теории плюрипотенциала и методов функционального анализа. Кроме того, публикация полученных в диссертации результатов в авторитетных научных изданиях, включая научные журналы с импакт-фактором, а также их обсуждение на научных семинарах подтверждают достоверность результатов диссертационного исследования.

Научная и практическая значимость результатов исследования. Научная значимость результатов исследования объясняется разработкой методов аналитического продолжения сепаратно-гармонических и α-сепаратно-гармонических функций, а также полученными результатами о устранимых особенностях этих функций.

Практическая значимость исследования заключается в том, что определение α-сепаратно-субгармонических и α-сепаратно-гармонических функций для различных классов функций позволило расширить класс сепаратно-субгармонических и сепаратно-гармонических функций.

Внедрение результатов исследования. Полученные в диссертации результаты были использованы в следующих научно-исследовательских проектах:

научные результаты, связанные с аналитическим продолжением сепаратно-аналитических функций и теоремы типа Осгуда-Брауна для сепаратно-гармонических функций, были использованы в рамках фундаментального проекта РФФИ «Многомерный комплексный анализ» для изучения устранимых особенностей сепаратно-гармонических функций (Справка Сибирского федерального университета № 475 от 19 сентября 2024 года, Россия). Применение полученных научных результатов позволило решить задачи, связанные с особенностями α-сепаратно-гармонических функций в многомерном комплексном анализе;

аналог леммы Хартогса для сепаратно-гармонических функций с переменным радиусом гармоничности, а также научные результаты обобщающие эту лемму для сепаратно-гармонических функций, удовлетворяющих условиям гармоничности на пучках плоскостей, были применены в рамках фундаментального проекта UT-OT-2020-1 «Уравнение Монжа-Ампера и экстремальные плюрисубгармонические функции» для изучения аналитического продолжения α-сепаратно-гармонических функций и их устранимых особенностей (Справка Национального университета Узбекистана № 04/11-9658 от 30 октября 2024 года). Применение научных результатов позволило исследовать задачи продолжения голоморфных, гармонических и субгармонических функций в вещественных и комплексных пространствах.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 9 научно-практических конференциях, в том числе на 7 международных и 2 республиканских научно-практических конференциях. Кроме того, результаты исследования неоднократно обсуждалась на научном семинаре «Современные проблемы комплексного анализа» при кафедре математического анализа Национального университета Узбекистана (председатели семинара: академик А. Садуллаев и DSc К. Рахимов), а также на объединённом научном семинаре Каракалпакского отделения института математики имени В. И. Романовского и математического факультета Каракалпакского государственного университета имени Бердаха (руководитель: профессор К. Кудайбергенов).

Публикация результатов исследования. По теме исследования опубликовано в общей сложности 15 научных работ, из которых 6 статей размещены в изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов диссертаций. В частности, 2 статьи опубликованы в зарубежных журналах, индексируемых в Scopus, а 4 - в республиканских научных изданиях.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Теоремы, предложения, определения и формулы нумеруются отдельно в каждой главе. Общий объём диссертационной работы составляет 83 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и восстребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации **«Предварительные сведения и постановка задач»** носит вспомогательный характер. В ней приведены основные обозначения и необходимые сведения, которые включают в себя определения и теоремы, необходимые для изложения текста диссертации, а также постановка задач исследования.

В первом параграфе первой главы рассматриваются основные свойства сепаратно-гармонических и сепаратно-субгармонических функций, а также их аналитическое продолжение. Приводятся определения этих функций в различных областях пространства $\mathbb{R}^n(x)\times\mathbb{R}^m(y)$ и рассматриваются основные результаты, такие как теоремы Лелона, Зеряхи, Садуллаева, Имомкулова и другие важные утверждения, формирующие основу теории сепаратно-гармонических и сепаратно-субгармонических функций.

Пусть $x=(x_1,...,x_n)\in\mathbb{R}^n(x)$, $y=(y_1,...,y_m)\in\mathbb{R}^m(y)$, $\mathbb{R}^n(x)\times\mathbb{R}^m(y)\supset D\times G$ – область, а $D\supset E$ и $G\supset F$ – произвольные подмножества. Предположим, что функция $u(x,y)$, первоначально определенная на множестве $E\times F$, обладает следующими свойствами:

а) для любого фиксированного $x^0 \in E$ функция $u(x^0,y)$ гармонически продолжается в G;

б) для любого фиксированного $y^0 \in F$ функция $u(x,y^0)$ гармонически продолжается в D.

В таком случае указанные продолжения $u(x,y)$ определяют некоторую функцию на множестве $X=(E\times G)\cup(D\times F)$, которая называется *сепаратно-гармонической функцией* на X

В случае когда $E=D$ и $F=G$, функция $u(x,y)$ называется сепаратно-гармонической *в области* $X=D\times G$, т.е. гармонической по группам переменных в отдельности.

Множество X, вообще говоря, не является областью. Для произвольной области, которая непредставима в виде произведения двух областей, сепаратно-гармоническая функция определяется следующим образом:

Определение 1. *Если функция $u(x,y)$ определена в области $Q\subset\mathbb{R}^n(x)\times\mathbb{R}^m(y)$, $n,m>1$, и обладает следующими свойствами*:

1) для любого $x^0:\{x=x^0\}\cap Q\neq\varnothing$, функция $u(x^0,y)$ гармоническая по переменному y на сечении $\{x=x^0\}\cap Q$;

2) для любого $y^0:\{y=y^0\}\cap Q\neq\varnothing$, функция $u(x,y^0)$ гармоническая по переменному x на сечении $\{y=y^0\}\cap Q$,

то она называется сепаратно-гармонической функцией в области Q.

Совершенно аналогично определяются и сепаратно-субгармонические функции, используя соответствующие условия субгармоничности относительно каждой переменной отдельно.

Рассмотрим теперь следующую общую задачу: *пусть $E\subset D\subset\mathbb{R}^n$, $F\subset G\subset\mathbb{R}^m$ и $u(x,y)$ функция сепаратно-гармоническая в множестве*

$$X=(E\times G)\cup(D\times F).$$

Требуется описать область $\hat{X}$, $X\subset\hat{X}$, в которую функция $u(x,y)$ гармонически продолжается по совокупности переменных.

Эта задача была решена при наложении дополнительных условий на множества E и F, таких как H-регулярность компактных множеств или их неплюриполярность.

Определение 2. *Компакт $K\subset\mathbb{R}^n$ называется H-регулярным в точке a, если для любого $b>1$ существует $M>0$ и открытая окрестность V точки a такая, что*

$$\|p\|_V\le Mb^n\|p\|_K,\ \forall p\in\mathcal{P}_k\left(\mathbb{R}^n\right),\ \forall k\in\mathbb{N},$$

где $\mathcal{P}_k(\mathbb{R}^n)$ – пространство всех гармонических многочленов степени не больше k в $\mathbb{R}^n$. Компакт K называется H-регулярным, если при всяком $a\in K$, компакт K является H-регулярным в точке a.

Определение 3. *Положим*

$$\omega_{sh}(x,E,D)=\sup\left\{u(x):u(x)\in sh(D),u\big|_E\le 0,u\big|_D\le 1\right\}.$$

Тогда

$$\omega_{sh}^*(x,E,D)=\overline{\lim_{x'\to x}}\,\omega_{sh}(x',E,D),\ x\in D,$$

называется гармонической мерой множества E относительно области D.

В 1982 году А. Зеряхи получил следующий результат.

Теорема 1 (Зеряхи). *Пусть $D\times G$ – область пространства $\mathbb{R}^2(x)\times\mathbb{R}^2(y)$ и $E\subset D$, $F\subset G$ – H-регулярные компактные множества. Тогда любая сепаратно-гармоническая на множестве $X=(E\times G)\bigcup(D\times F)$ функция гармонически продолжается в область*

$$\hat{X}=\left\{(x,y)\in D\times G:\omega_{sh}^*(x,E,D)+\omega_{sh}^*(y,F,G)<1\right\}.$$

Обычно, для продолжения гармонических функций сначала переходят к голоморфным функциям и потом используют принципы голоморфных продолжений.

Следующий результат играет основополагающую роль в изучении продолжения гармонических функций.

Предложение 1. *Рассмотрим пространство $\mathbb{R}^n(x)$, вложенное в $\mathbb{C}^n(z)=\mathbb{R}^n(x)+i\cdot\mathbb{R}^n(y)$, где $z=(z_1,...,z_n)$, $z_j=x_j+i\cdot y_j$, $j=1,...,n$, и пусть D некоторая ограниченная область из $\mathbb{R}^n(x)$. Тогда существует область $\hat{D}\subset\mathbb{C}^n(z)$ такая, что $D\subset\hat{D}$ и для любой функции $u(x)\in h(D)$ существует голоморфная в области $\hat{D}$ функция $f_u(z)$ такая, что $f_u\big|_D=u$. Кроме того, для любого число $M>1$ существует подобласть $\hat{D}_M\subset\hat{D}$, $D\subset\hat{D}_M$, такая, что $\|f_u\|_{\hat{D}_M}\le M\|u\|_D$, $\forall u\in h(D)\bigcap L^\infty(D)$ (здесь $\|u\|_D=\sup\left\{|u(x)|:x\in D\right\}$).*

Определение 4. *Множество $E\subset D\subset\mathbb{C}^n$ называется плюриполярным в области D, если существует функция $u\in psh(D)$: $u\not\equiv-\infty$, $u|_E\equiv-\infty$.*

Определение 5. *Пусть E – произвольное множество в области $D\subset\mathbb{C}^n$. Положим*

$$\omega(z,E,D)=\sup\left\{u(z):u\in psh(D),u|_E\le 0,u|_D\le 1\right\}.$$

Тогда

$$\omega^*(z,E,D)=\overline{\lim_{z'\to z}}\,\omega(z',E,D),\ z\in D,$$

называется $\mathcal{P}$-мерой (плюрисубгармонической мерой) множества E относительно области D.

Используя эти факты в 2006 году А. Садуллаев и С. Имомкулов получили следующий результат.

Теорема 2 (А. Садуллаев и С. Имомкулов). *Пусть $E\subset D\subset\mathbb{R}^n$ и $F\subset G\subset\mathbb{R}^m$ – компактные множества, не являющиеся плюриполярными в смысле подмножеств пространств $\mathbb{C}^n=\mathbb{R}^n+i\cdot\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{C}^m=\mathbb{R}^m+i\cdot\mathbb{R}^m$. Тогда* *любая сепаратно-гармоническая на множестве* $X=(E\times G)\bigcup(D\times F)$ *функция* $u(x,y)$ *гармонически продолжается в область*

$$\hat{X}=\left\{(x,y)\in D\times G:\omega^{*}(x,E,\hat{D})+\omega^{*}(y,F,\hat{G})<1\right\}.$$

Во втором параграфе первой главы рассмотрено понятие экстремальных функций в классе гармонических функций и их связи с регулярностью компактов, что играет важную роль в анализе поведения этих функций.

Определение 6. *Пусть* D *– область в* $\mathbb{R}^n$ *и* K *– компакт в* D. *Определим*

$$\chi_0(x,K,D):=\lim_{\varepsilon\to 0}\chi_\varepsilon(x,K,D),$$

где $\chi_\varepsilon(x,K,D):=\overline{\lim_{y\to x}}\sup\left\{\lambda\ln|u(y)|,\ u\in h(D),\ 0<\lambda<\varepsilon,\ \|u\|_K\le 1,\ \|u\|_D^{\lambda}\le e\right\}.$

Определение 7. *Пусть* $\{D_s\}_{s\in\mathbb{N}}$ *– последовательность областей из* $\mathbb{R}^n$ *такая, что* $D_s\subset D_{s+1}$, $\bigcup_{s\in\mathbb{N}}D_s=D$ *и* $\{K_r\}_{r\in\mathbb{N}}$ *– последовательность компактных подмножеств* D_1 *такая, что* $K_{r+1}\Subset Int\,K_r$, $\bigcap_{r\in\mathbb{N}}K_r=K$. *Экстремальная функция Захарюты* $h(\cdot,K,D)$, *связанная с* (K,D), *определяется формулой:*

$$h(x,K,D):=\overline{\lim_{y\to x}}\lim_{r\to\infty}\chi(x,K_r,D),\ x\in D,$$

где $\chi(x,K,D):=\lim_{s\to\infty}\chi_0(x,K,D_s)$.

Замечание 1. *В случае* $n=2$ *В. П. Захарюта доказал, что* $h(\cdot,K,D)$ *– обычная гармоническая мера* $\omega_{sh}(\cdot,K,D)$.

Легко видеть, что $\chi(\cdot,K,D)\ge\chi_0(\cdot,K,D)$ и $\chi(\cdot,K,D)\ge h(\cdot,K,D)$.

Используя вышеупомянутую экстремальную функцию В. П. Захарюты, Ж. М. Хекарт доказал следующую теорему об аналитическом продолжении сепаратно-гармонических функций.

Теорема 3 (Хекарт). *Пусть* D *и* G *области из пространства* $\mathbb{R}^n$ *и* $\mathbb{R}^m$ *соответственно, а также даны две* H*-регулярные компакты* $E\subset D$ *и* $F\subset G$. *Тогда всякая сепаратно-гармоническая на множестве* $X=(E\times G)\bigcup(D\times F)$ *функция гармонически продолжается в область*

$$\hat{X}=\left\{(x,y)\in D\times G:\overline{h}(x,E,D)+\overline{h}(y,F,G)<1\right\},$$

где $\overline{h}(x,E,D)=\lim_{s\to+\infty}h(x,E,D_s)$, $D_s\nearrow D$, $s\to+\infty$.

Возникает естественная потребность в исследовании обобщенных классов субгармонических функций, которые играют важную роль в решении различных задач многомерного комплексного анализа. Одним из таких классов является класс α-субгармонических функций. В третьем параграфе первой главы представлены определения α-гармонических и α-субгармонических функций, а также рассмотрены их важные свойства.

Пусть α – произвольная замкнутая строго положительная дифференциальная форма бистепени $(n-1, n-1)$ в области $D \subset \mathbb{C}^n$, заданная как:

$$\alpha = \left(\frac{i}{2}\right)^{n-1} \sum_{j,k=1}^{n} \alpha_{jk}(z) dz[j] \wedge d\bar{z}[k],$$

где $\alpha_{jk}(z) \in Lip_\lambda(D)$ для всех j, k и $0<\lambda<1$. При этом форма α является замкнутой:

$$d\alpha = 0.$$

Строгая положительность α означает, что для любой компактной области $G \Subset D$ существует константа $\varepsilon > 0$, такая что дифференциальная форма $\alpha - \varepsilon\beta^{n-1}$ является положительной на G, где $\beta = dd^c\left(|z|^2\right)$ – стандартная форма объёма в $\mathbb{C}^n$.

Определение 8. *Дважды гладкая функция* $u(z) \in C^2(D)$ *называется* α*-субгармонической в области* $D \subset \mathbb{C}^n$*, если дифференциальная форма* $dd^c u \wedge \alpha \geq 0$ *в* D*. Функция* $u(z) \in L^1_{loc}(D)$ *называется* α*-субгармонической в области* $D \subset \mathbb{C}^n$*, если*

1) она полунепрерывна сверху в D*, т. е.* $u(z^0) \geq \overline{\lim_{z \to z^0}} u(z)$, $\forall z^0 \in D$*;*

2) оператор $dd^c u \wedge \alpha$ *положителен в обобщенном смысле, т. е.*

$$\int u(z)\alpha(z) \wedge dd^c\omega(z) \geq 0, \ \forall \omega \in F(D), \ \omega \geq 0.$$

Если $\alpha = \beta^{n-1} = \left(dd^c |z|^2\right)^{n-1}$, то α-субгармонические функции совпадает с классическими субгармоническими функциями. Заметим, что для дважды непрерывно дифференцируемой функции u выполняется равенство:

$$dd^c u \wedge \beta^{n-1} = (n-1)! \Delta u dV,$$

где Δ – оператор Лапласа, а dV – форма объёма в $\mathbb{C}^n$. В случае $n=1$, когда область находится на комплексной плоскости, α-субгармоничность функции эквивалентна её обычной субгармоничности. Этот случай хорошо изучен, и мы не рассматриваем его подробно, сосредотачиваясь далее на случаях $n>1$.

Определение 9. *Дважды гладкая в области* $D \subset \mathbb{C}^n$ *функция* $u(z) \in C^2(D)$ *называется* α*-гармонической, если* $dd^c u \wedge \alpha = 0$ *в* D*. Функция* $u(z) \in L^1_{loc}(D)$ *называется* α*-гармонической в области* $D \subset \mathbb{C}^n$*, если оператор* $dd^c u \wedge \alpha = 0$ *в обобщённом смысле, т. е.*

$$\int u(z)\alpha(z) \wedge dd^c\omega(z) = 0, \ \forall \omega \in F(D).$$

Вторая глава диссертации, названная **«О продолжении сепаратно-гармонических функций вдоль фиксированного направления»**, посвящена исследованию задачи аналитического продолжения сепаратно-гармонических функций в заданном фиксированном направлении. Основное внимание уделяется условиям, при которых сепаратно-гармоническая функция, определенная в некоторой области, может быть продолжена на более широкий класс областей.

В первом параграфе второй главы доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть функция $u(x,y)$ является сепаратно-гармонической в области $D\times V_r = D\times\left\{y\in\mathbb{R}^2 : |y|<r, r>1\right\}\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^2$ и для каждого фиксированного $x^0\in D$ функция $u(x^0,y)$ переменной y гармонически продолжается в больший круг $\left\{y\in\mathbb{R}^2 : |y|<R(x^0), R(x^0)>r\right\}$. Тогда функция $u(x,y)$ гармонически продолжается в область $\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^2 : |y|<R_*(x), x\in D\right\}$ по совокупности переменных, где функция $-\ln R_*(x)$ является следом некоторой плюрисубгармонической функции из класса $\mathcal{H}\left(\hat{D}\right)$.*

Основным результатом второго параграфа второй главы является следующая теорема, обобщающая данный результат на случай сепаратно-гармонических функций, удовлетворяющих условиям гармоничности на пучках плоскостей.

Теорема 5. *Пусть функция $u(x,y)$ является сепаратно-гармоничной в области $D\times V_r = D\times\left\{y\in\mathbb{R}^2 : |y|<r,\ r>1\right\}\subset\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^2$, и для каждого фиксированного $x^0\in E\subset D$, где множество E не является h-плюриполярным, функция $u(x^0,y)$ по переменной y гармонически продолжается на всю плоскость $\mathbb{R}^2$. Тогда функция $u(x,y)$ гармонически продолжается в область $D\times\mathbb{R}^2$ по совокупности переменных.*

В первом параграфе третьей главы диссертации, названной «**$\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонические функции**», рассматриваются операторы, действующие в классе C^2, с помощью которых вводятся основные определения, такие как $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармоничность и $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-субгармоничность функций $u(z,w)$ в области $D\times G\subset\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^m$, где $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha',\alpha'')$ – биформа.

Пусть α' и α'' – строго положительные, замкнутые дифференциальные формы бистепени $(n-1,n-1)$ и $(m-1,m-1)$ соответственно. Кроме того, предполагаем, что коэффициенты $\alpha'_{jk}(z)\in Lip_\lambda(D)$, $\alpha''_{jk}(w)\in Lip_\lambda(G)$, $0<\lambda<1$.

Рассмотрим следующие операторы, действующие в пространстве C^2:

$$d_z d_{\bar z}^c u(z,w)\wedge\alpha'(z)=\left[\frac{i}{2}\sum_{j,k=1}^{n}\frac{\partial^2 u(z,w)}{\partial z_j\partial\overline{z}_k}dz_j\wedge d\overline{z}_k\right]\wedge$$

$$\wedge\left[\left(\frac{i}{2}\right)^{n-1}\sum_{j,k=1}^{n}\alpha'_{jk}(z)\,dz[j]\wedge d\bar{z}[k]\right]=$$

$$=\left(\frac{i}{2}\right)^{n}\sum_{j,k=1}^{n}(-1)^{k+j+1}\alpha'_{jk}(z)\frac{\partial^2 u(z,w)}{\partial z_j\partial\bar{z}_k}dz\wedge d\bar{z}\,,\ \forall w\in G;$$

$$d_w d^c_{\bar{w}}u(z,w)\wedge\alpha''(w)=\left[\frac{i}{2}\sum_{j,k=1}^{m}\frac{\partial^2 u(z,w)}{\partial w_j\partial\bar{z}_k}dw_j\wedge d\bar{w}_k\right]\wedge$$

$$\wedge\left[\left(\frac{i}{2}\right)^{m-1}\sum_{j,k=1}^{m}\alpha''_{jk}(w)\,dw[j]\wedge d\bar{w}[k]\right]=$$

$$=\left(\frac{i}{2}\right)^{m}\sum_{j,k=1}^{m}(-1)^{j+k+1}\alpha''_{jk}(w)\frac{\partial^2 u(z,w)}{\partial w_j\partial\bar{w}_k}dw\wedge d\bar{w}\,,\ \forall z\in D.$$

Определение 10. *Функция $u(z,w)$ называется $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно субгармонической в области $D\times G$, где $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha',\alpha'')$ – биформа, если она локально интегрируема и полунепрерывна сверху по каждой переменной, а также удовлетворяет следующим условиям:*

1) оператор $d_z d^c_{\bar{z}}u\wedge\alpha'$ положителен в обобщённом смысле, т. е.

$$\int u(z)\alpha'(z)\wedge d_z d^c_{\bar{z}}\omega(z)\geq 0,\ \forall\omega\in F(D),\ \omega\geq 0;$$

2) оператор $d_w d^c_{\bar{w}}u\wedge\alpha''$ положителен в обобщённом смысле, т. е.

$$\int u(w)\alpha''(w)\wedge d_w d^c_{\bar{w}}\omega(w)\geq 0,\ \forall\omega\in F(G),\ \omega\geq 0.$$

Определение 11. *Функция $u(z,w)$, называется $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонической в области $D\times G$, где $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha',\alpha'')$ – биформа, если она локально интегрируема по каждой переменной и удовлетворяет следующим условиям:*

1) оператор $d_z d^c_{\bar{z}}u\wedge\alpha'=0$ в обобщённом смысле, т. е.

$$\int u(z)\alpha'(z)\wedge d_z d^c_{\bar{z}}\omega(z)=0,\ \forall\omega\in F(D);$$

2) оператор $d_w d^c_{\bar{w}}u\wedge\alpha''=0$ в обобщённом смысле, т. е.

$$\int u(w)\alpha''(w)\wedge d_w d^c_{\bar{w}}\omega(w)=0,\ \forall\omega\in F(G).$$

Далее доказывается теорема о α-субгармоничности $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-субгармонических функций, из которой как следствие следует, что аналогичная теорема верна и для $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций.

Теорема 6. *Если функция $u(z,w)\in C^2\left(D\times G\right)$ является $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-субгармонической, тогда по совокупности переменных $dd^c u(z,w)\wedge\alpha(z,w)\geq 0$, т. е. функция $u(z,w)$ является α-субгармонической, где $\alpha(z,w)=\alpha'(z)\wedge\alpha''(w)\wedge\beta$ и $\beta=dd^c\left(|z|^2+|w|^2\right)$.*

Теорема 7. *Если функция* $u(z,w) \in C^2\left(D \times G\right)$ *является* $\boldsymbol{\alpha}$*-сепаратно-гармонической, то по совокупности переменных* $dd^c u(z,w) \wedge \alpha(z,w) = 0$*, т. е. функция* $u(z,w)$ *является* α*-гармонической.*

Естественно возникает вопрос: *при каких минимальных условиях (на* $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha', \alpha'')$ *и* $u(z,w)$*)* $\boldsymbol{\alpha}$*-сепаратно-гармоническая функция является* α*-гармонической в* $D \times G \subset \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^m$?

Основной целью данной главы является исследование этого вопроса, и во втором и третьем параграфах третьей главы мы приводим частичные ответы на поставленный вопрос, анализируя различные случаи и условия.

Как нам известно, если дифференциальная форма α является вещественно аналитической, то α-гармоническая функция также является вещественно аналитической.

Имеет место следующая лемма:

Лемма 1. *Пусть дифференциальная форма* α *является вещественно аналитической в области* $D \subset \mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n}$*. Тогда существует область* $\tilde{D} \subset \mathbb{C}^{2n}$ $\left(\mathbb{C}^n \cong \mathbb{R}^{2n} \subset \mathbb{C}^{2n}\right)$ *такая, что всякая* α*-гармоническая в* D *функция голоморфно продолжается в область* $\tilde{D}$*.*

Во втором параграфе третьей главы доказан следующий аналог теоремы Лелона для $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций.

Теорема 8. *Пусть* α' *и* α'' *вещественно аналитические дифференциальные формы в областях* $D \subset \mathbb{C}^n$ *и* $G \subset \mathbb{C}^m$ *соответственно. Тогда всякая* $\boldsymbol{\alpha}$*-сепаратно-гармоническая в* $D \times G$ *функция* $u(z,w)$ *(где* $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha', \alpha'')$*) является вещественно аналитической и* α*-гармонической по совокупности переменных:* $dd^c u(z,w) \wedge \alpha = 0$, $\forall (z,w) \in D \times G$*, где* $\alpha = \alpha'(z) \wedge \alpha''(w) \wedge \beta$, $\beta = dd^c\left(|z|^2 + |w|^2\right)$.

А также доказана следующая теорема для $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-субгармонических функций.

Теорема 9. *Пусть дана вещественно аналитическая дифференциальная биформа* $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha', \alpha'')$ *в области* $D \times G$*, а функция* $u(z,w)$*, являющаяся* $\boldsymbol{\alpha}$*-сепаратно-субгармонической в* $D \times G$*, удовлетворяет следующим условиям:*

1) для любого фиксированного $w^0 \in G$ *функция* $u(z,w^0)$ *по переменному* z *является вещественно аналитической;*

2) для любого фиксированного $z^0 \in D$ *функция* $u(z^0,w)$ *по переменному* w *является* α''*-гармонической.*

Тогда $u(z,w)$ *является вещественно аналитической* α*-субгармонической функцией в области* $D \times G$ *по совокупности переменных, где* $\alpha = \alpha'(z) \wedge \alpha''(w) \wedge \beta$.

В третьем параграфе третьей главы доказана следующая теорема о аналитическом продолжение $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций вдоль фиксированного направления.

Теорема 10. *Пусть* $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha',\alpha'')$ – *вещественно аналитическая дифференциальная биформа в ограниченной области* $D\times G$ *и* $\alpha=\alpha'\wedge\alpha''\wedge\beta$. *Если функция* $u(z,w)$ *является* α*-гармонической в подобласти* $D\times U\subset D\times G$ *и для каждого фиксированного* $z^0\in D$ *функция* $u(z^0,w)$ *по переменному* w α''*-гармонически продолжается в область* G, *тогда* $u(z,w)$ *функция* α*-гармонически продолжается в область* $D\times G$ *по совокупности переменных. Более того, это продолжение является* $\boldsymbol{\alpha}$*-сепаратно-гармонической функцией в* $D\times G$.

В четвёртой главе диссертации, названной **«Аналоги теоремы Осгуда-Брауна для сепаратно-гармонических и** $\boldsymbol{\alpha}$**-сепаратно-гармонических функций»**, были доказаны теоремы типа Осгуда-Брауна для сепаратно-гармонических функций. Также был доказан аналог теоремы Осгуда-Брауна для $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций, который демонстрирует, что $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонические функции, как и сепаратно-гармонические, не имеют компактных особенностей.

В первом параграфе четвёртой главы доказаны несколько теорем типа Осгуда-Брауна для сепаратно-гармонических функций.

Теорема 11. *Пусть* S – *замкнутое (в* D*) подмножество области* $D\subset\mathbb{R}^n(x)\times\mathbb{R}^m(y)$, $n,m>1$, *и его ортогональные проекции* $S_1=\left\{x\in\mathbb{R}^n:(x,y)\in S\right\}$ *и* $S_2=\left\{y\in\mathbb{R}^m:(x,y)\in S\right\}$ *нигде не плотны. Тогда любая сепаратно гармоническая в области* $D\backslash S$ *функция* $u(x,y)$ *гармонически продолжается в область* D.

Теорема 12. *Пусть даны две области* $D\subset\mathbb{R}^n$ *и* $G\subset\mathbb{R}^m$, *и два множества* $E\subset D$ *и* $F\subset G$. *Если* $D\Supset E$ – *компакт, а* F – *замкнутое (в* G*) подмножество области* G *с непустым дополнением* $G\setminus F\neq\varnothing$, *то любая сепаратно гармоническая в* $(D\times G)\setminus(E\times F)$ *функция* $u(x,y)$ *гармонически продолжается в область* $D\times G$.

Теорема 13. *Пусть даны две области* $D\subset\mathbb{R}^n$ *и* $G\subset\mathbb{R}^m$, *и два множества* $E\subset D$ *и* $F\subset G$. *Если* E – *нигде не плотное замкнутое (в* D*) подмножество области* D, *а* F – *замкнутое (в* G*) подмножество области* G *с непустым дополнением* $G\setminus F\neq\varnothing$, *то любая сепаратно гармоническая в области* $(D\times G)\setminus(E\times F)$ *функция* $u(x,y)$ *гармонически продолжается в область* $D\times G$.

Во втором параграфе четвёртой главы доказана следующая теорема, которая является аналогом теоремы Осгуда-Брауна для $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций.

Теорема 14. *Пусть* $D\subset\mathbb{C}^n$ *и* $G\subset\mathbb{C}^m$ *− области, а* $E\Subset D$ *и* $F\Subset G$ *− компактные подмножества. Если* $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha',\alpha'')$ *− вещественно аналитическая дифференциальная биформа в области* $D\times G$, *и функция* $u(z,w)$ *является* $\boldsymbol{\alpha}$*-сепаратно-гармонической в области* $(D\times G)\setminus(E\times F)$, *то* *существует вещественно аналитическая и* $\boldsymbol{\alpha}$*-сепаратно-гармоническая в области* $D\times G$ *функция* $\tilde{u}(z,w)$ *такая, что* $\tilde{u}(z,w)\big|_{(D\times G)\setminus(E\times F)} \equiv u(z,w)$.

Из этой теоремы следует, что $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонические функции также не имеют компактных особенностей.

Автор выражает искреннюю благодарность академику А. Садуллаеву за ценные советы и многократные обсуждения результатов диссертации, и своему научному руководителю, доктору физико-математических наук С. А. Имомкулову за постановку задач и постоянное внимание к работе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению аналитического продолжения сепаратно-гармонических и $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций, а также изучению устранимых особенностей этих функций, где $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha',\alpha'')$ – биформа.

Основные результаты исследования заключаются в следующем:

Доказан аналог леммы Хартогса для сепаратно-гармонических функций с переменным радиусом гармоничности;

Доказана теорема о продолжении сепаратно-гармонических функций, удовлетворяющих условиям гармоничности на пучках плоскостей;

Введены определения $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических и $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-субгармонических функций;

Доказана α-субгармоничность $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-субгармонических функций и α-гармоничность $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций;

Доказан аналог теоремы Лелона для $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций;

Доказана теорема об аналитическом продолжении $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций вдоль фиксированного направления;

Доказаны теоремы типа Осгуда-Брауна для сепаратно-гармонических функций;

Доказан аналог теоремы Осгуда-Брауна для $\boldsymbol{\alpha}$-сепаратно-гармонических функций.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 URGENCH STATE UNIVERSITY NAMED AFTER ABU RAYHAN BERUNI

KARAKALPAK STATE UNIVERSITY

ABDIKADIROV SULTANBAY MAMUTOVICH

ANALYTIC CONTINUATION OF SEPARATLY HARMONIC AND α-SEPARATLY HARMONIC FUNCTIONS

01.01.01 – Mathematical Analysis

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOFHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATEMATICAL SCIENCES

Nukus – 2025

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher education, science and innovations of the Republic of Uzbekistan under number № B2024.1.PhD/FM1000.

Dissertation has been prepared at Karakalpak State University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.ik-mat.urdu.uz) and the "Ziyonet" Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Imomkulov Sevdiyor Akramovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Official opponents:	**Shoimkulov Bahodir Allaberdievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Atamuratov Alimardon Abdirimovich Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher
Leading organization:	**Tashkent State Pedagogical University**

Defense will take place "10" may 2025 at 10 : 00 at the meeting of Scientific Council number PhD.03/30.12.2019.FM.55.01 at Urgench State University named after Abu Rayhan Biruni. (Address: Kh. Alimdjan str. 14, Urgench, 220100, Uzbekistan, Ph.: (+99862)224-66-11, fax: (+99862)224-67-00, e-mail: info@urdu.uz

Dissertation is possible to review in Information-resource Centre at the Urgench state University named after Abu Rayhan Biruni. (is registered № D792) (Address: Kh. Alimdjan str. 14, Urgench, 220100, Uzbekistan, Ph.: (+99862) 224-66-11, fax: (+99862)224-67-00), e-mail: arm@urdu.uz

Abstract of dissertation sent out on "22" april 2025 year
(Mailing report № 2 on "22" april 2025 year)

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI URGANCH DAVLAT UNIVERSITETI

B.I. Abdullaev
Chairman of Scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

A.A. Reyimberganov
Scientific secretary of Scientific council on award of scientific degrees, Candidate of Physical and Mathematical Sciences

B.A. Babajanov
Chairman of Scientific seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences

INTRODUCTION (abstract of the PhD dissertation)

The aim of the research work is to study the analytic continuation of separatly harmonic and $\boldsymbol{\alpha}$-separatly harmonic functions, as well as to investigate the removable singularities of these functions.

The object of the research work. Separatly harmonic, separatly subharmonic, α-harmonic, α-subharmonic, $\boldsymbol{\alpha}$-separatly harmonic and $\boldsymbol{\alpha}$-separatly subharmonic functions.

Scientific novelty of the research work. All the results obtained in the dissertation are new. They are as follows:

using the class $\mathcal{H}$, which is a subclass of plurisubharmonic functions and h-pluripolar sets, an analogue of Hartogs' lemma has been established for separately harmonic functions with a variable radius of harmonicity;

using the Hartogs lemma for separately harmonic functions with a variable radius of harmonicity, a theorem is proved that generalizes this lemma to the case of separately harmonic functions satisfying the harmonicity conditions on bundles of planes;

using operators defined in the class of twice continuously differentiable functions, definitions of $\boldsymbol{\alpha}$-separately harmonicity and $\boldsymbol{\alpha}$-separately subharmonicity are formulated.

based on the introduced concepts, the theorem on α-subharmonicity of $\boldsymbol{\alpha}$-separately subharmonic functions and the theorem on α-harmonicity of $\boldsymbol{\alpha}$-separately harmonic functions are proved;

moving to holomorphic functions and using the principles of holomorphic extensions, an analogue of Lelong's theorem is proved for $\boldsymbol{\alpha}$-separately harmonic functions, where $\boldsymbol{\alpha}=(\alpha',\alpha'')$ is a real-analytic differential biform;

holomorphically continuing α-harmonic functions and applying the Sichak-Zaharyuta theorem, a theorem on the analytic continuation of $\boldsymbol{\alpha}$-separately harmonic functions along a fixed direction is proved, where α is a real-analytic differential form;

using the theorem on analytic continuation of separately analytic functions and the properties of the $\mathcal{P}$-measure, theorems of the Osgood-Brown type for separately harmonic functions are proved;

using an analogue of the Lelong theorem and the multiple Poisson integral for $\boldsymbol{\alpha}$-separately harmonic functions, an analogue of the Osgood-Brown theorem for $\boldsymbol{\alpha}$-separately harmonic functions is proved.

Implementation of the research results. The results obtained in the dissertation were used in the following research projects:

the results concerning removable singularities of separatly harmonic functions were successfully used by the staff of the Institute of Mathematics and Fundamental Informatics of the Siberian Federal University within the framework of the RFBR project "Multidimensional Complex Analysis" (Reference No. 475 of the Siberian Federal University dated September 19, 2024). These results contributed to solving problems related to the singularities of separat-harmonic functions in multidimensional complex analysis;

the results on the continuation of separatly harmonic and α-separatly harmonic functions found application in the fundamental project UT-OT-2020-1 “Monge-Ampère Equation and Extremal Plurisubharmonic Functions” carried out at the National University of Uzbekistan (Reference No. 04/11-9685 of the National University of Uzbekistan dated October 30, 2024). These results allowed us to conduct a deeper study of the extension of holomorphic, harmonic and subharmonic functions in complex spaces.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, four chapters, a conclusion and a list of references. Theorems, propositions, definitions and formulas are numbered separatly in each chapter. The total volume of the dissertation is 83 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (Часть I; Part I)

1. Имомкулов С.А., Абдикадиров С.М. Об аналоге теоремы Осгуда-Брауна для сепаратно-гармонических функций // ДАН республики Узбекистан. – 2021. – №1. – С. 3-6. (01.00.00, №7).
2. Imomkulov S.A., Abdikadirov S.M., Removable Singularities of Separately Harmonic Functions, Journal of Siberian Federal University, Mathematics & Physics, 14(3), pp. 369-375, 2021. (№59, Scopus, CiteScore 0.9).
3. Абдикадиров С.М. Об аналоге теоремы Бланшета для α-субгармонических функций // Илм сарчашмалари – научно-теоретический методический журнал. Ургенч. – 2022. – №7. – С. 53-58. (01.00.00, №12).
4. Imomkulov S.A., Abdikadirov S.M., An analogue of Hartogs lemma for separately harmonic functions with variable radius of harmonicity, Bulletin of National University of Uzbekistan: Mathematics and Natural Sciences, vol. 6, Issue 4, pp. 214-224, 2023. (01.00.00, №8).
5. Имомкулов С.А., Абдикадиров С.М. Продолжение сепаратно-гармонических функции вдоль фиксированного направления // Научный Вестник Самаркандского государственного университета. – 2024. – №1/2(143). – С. 42-46. (01.00.00, №2).
6. Imomkulov S.A., Abdikadirov S.M., Sharipov R.A., $\boldsymbol{\alpha}$-separately subharmonic functions, AIP Conference Proceedings, vol. 3147, 020007, pp. 1-9, 2024, https://doi.org/10.1063/5.0210484, (Scopus, CiteScore 0.5).

II bo‘lim (Часть II; Part II)

7. Имомкулов С.А., Абдикадиров С.М. Устранимые особенности сепаратно- гармонических функций // Сборник тезисов научной онлайн-конференции «Современные проблемы математики», – С. 107-108, 20 мая 2020 года, г. Нукус, Узбекистан.
8. Абдикадиров С.М., Шарипов Р.А. О сепаратно $\boldsymbol{\alpha}$-гармонических функциях // Тезисы докладов Республиканской научной конференции с участием зарубежных ученых «Сарымсаковские чтения», – С. 155-156, 16-18 сентября 2021 года, г. Ташкент, Узбекистан.
9. Абдикадиров С.М., Шарипов Р.А. Аналог теоремы Бланшета для α-гармонических функций // Сборник тезисов Международной конференции «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации», – С. 53-54, 4-7 октября 2021 года, г. Уфа, Россия.
10. Абдикадиров С.М. Об аналоге теоремы Бланшета для α-субгармонических функций // Тезисы международной научно-практической конференции «Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий», – С. 54-55, 11-12 мая 2022 года, г. Бухара, Узбекистан.

11. Абдикадиров С.М. α-сепаратно-субгармонические функции // Тезисы международной научной конференции «Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics», – С. 127-128, 23-24 сентября 2022 года, г. Самарканд, Узбекистан.

12. Абдикадиров С.М., Имомкулов С.А. α-сепаратно-гармонические функции // Тезисы международной научно-практической конференции «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий», – С. 154-156, 2-3 мая 2023 года, г. Нукус, Узбекистан.

13. Абдикадиров С.М. An analogue of Hartogs lemma for separatly harmonic functions with variable radius of harmonicity // Сборник материалов Международной научной конференции «Теория функций, теория операторов и квантовая теория информации», – С. 6, 8-12 июня 2024 года, г. Уфа, Россия.

14. Абдикадиров С.М. Продолжение сепаратно-гармонических функций вдоль фиксированного направления // Материалы Международной конференции «Комплексный анализ и его приложения», – С. 7, 11-13 июня 2024 года, г. Уфа, Россия.

15. Абдикадиров С.М. The Osgood-Brown theorem for α-separatly harmonic functions // Тезисы IX международной научной конференции «Actual problems of applied mathematics and information technologies Al-Khwarizmi 2024», — С. 219, 22-23 октября 2024 года, г. Ташкент, Узбекистан.

Dissertatsiya avtoreferati “Khwarezm publication” nashriyotida tahrir qilindi.

Bosishga ruxsat etildi: 16.04.2025-yil.
Bichimi 60x84 $^{1/16}$, “Times New Roman”
garniturada raqamli bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog‘i 2,7. Adadi: 60. Buyurtma: № 78
“Khwarezm travel” bosmaxonasida chop etildi
220502, Xorazm, Urganch tumani, Zargarlar mahallasi,
Marvarid ko‘cha 7-yo‘lak 4-uy