SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

MARDONOV JOLG‘OSH ABDUMAJITOVICH

LAPLAS VA ELEKTROMAGNIT MAYDONLARINI, ULARNING SOHA CHEGARASINI BIR QISMIDA BERILGAN QIYMATLARIGA KO‘RA SOHAGA DAVOM ETTIRISH

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

FIZIKA – MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Samarqand–2025

UDK: 517.929

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of the doctor of philosophy (PhD) on physical - mathematical sciences

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

MARDONOV JOLG‘OSH ABDUMAJITOVICH

LAPLAS VA ELEKTROMAGNIT MAYDONLARINI, ULARNING SOHA CHEGARASINI BIR QISMIDA BERILGAN QIYMATLARIGA KO‘RA SOHAGA DAVOM ETTIRISH

01.01.02 – Differensial tenglamalar va matematik fizika

FIZIKA – MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Samarqand–2025

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiya mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2022.4.PhD/FM790 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengashning veb-sahifasida (www.samdu.uz) va «Ziyonet» Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Sattorov Ermamat Norqulovich** fizika-matematika fanlari doktori, dotsent
Rasmiy opponentlar:	**Xalmuxamedov Alimdjan Raximovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Durdiev Durdimurod Qalandarovich fizika-matematika fanlari doktori, professor
Yetakchi tashkilot:	**Urganch davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi Samarqand davlat universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 raqamli Ilmiy kengashning 2025-yil «20 may» soat 10^{00} dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 140104, Samarqand sh., Universitet xiyoboni, 15-uy. Tel.: (+99866)231–06–32, faks: (+99866) 235–19–38, , e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertatsiya bilan Samarqand davlat universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (___ raqam bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 140104, Samarqand sh., Universitet xiyoboni, 15-uy. Tel.: (+99866) 231–06–32, faks: (+99866) 235–19–38.)

Dissertatsiya avtoreferati 2025 yil « 6 » 05 kuni tarqatildi.
(2025 yil « 6 » 05 dagi 1 raqamli reestr bayonnomasi).

A.S. Soleev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, fizika-matematika fanlari doktori, professor

A.M. Xalxo'jayev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, fizika-matematika fanlari doktori, professor

A.B. Xasanov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi, fizika-matematika fanlari doktori, professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyligi. Jahonda olib borilayotgan ko‘plab ilmiy va amaliy tadqiqotlarda matematik fizika tenglamalariga qo‘yilgan nokorrekt chegaraviy masalalarini yechish bilan bog‘liq muammolarni tadqiq qilishga alohida ahamiyat berilmoqda. Bu masalalar turli xil fizik jarayonlarni o‘rganish bilan chambarchas bog‘langan. Hozirgi kunda matematik fizikaning nokorrekt qo‘yilgan chegaraviy masalalari ko‘pgina sohalarda, jumladan, geofizika nazariyasi, gidrodinamika, signal uzatish nazariyasi, geologik qidiruv, elektrodinamika, nazariy fizika, elektronika, meteorologiya, yerning ichki qatlamlarining elektrik xossalari, zamonaviy matematik fizikaning evolyutsion tenglamalarining aniq yechimlarini izlashda muhim o‘rin tutmoqda. Nokorrekt masalalarni yechishda regulyarlashgan yechimlar oilasi korrektlik sinfi kompaktga qadar toraytirilganda turg‘un yechimni tadqiq qilishga asos sifatida xizmat qiladi. Ko‘plab mualliflarning ishlarida laplas va elektromagnit maydon tenglamalari uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalarda chegara shartlari soha chegarasining hamma joyida beriladi. Shuning uchun ham laplas va elektromagnit maydonlarni soha chegarasi qismidagi qiymatlariga ko‘ra shu sohaga davom ettirish masalasini o‘rganishga alohida e’tibor qaratilmoqda.

Jahonda laplas va elektromagnit maydon tenglamalari sistemasi uchun qo‘yilgan Koshi masalasini yechish, soha chegarasining Koshi shartlari berilmagan qismida Karleman funksiyasini qurish, qo‘yilgan nokorrekt chegaraviy masalalarning yechimi va yechim hosilasining regulyarizatsiyasi hamda shartli turg ‘unlik baholarini olishga bog‘liq muammolarni tadqiq qilishga qaratilgan ilmiy tadqiqotlar olib borilmoqda. Bu borada laplas va elektromagnit maydon tenglamalar sistemasi uchun chegaralangan sohada soha chegarasining bir qismida berilgan qiymatiga ko‘ra yechimni shu sohaga davom ettirish, Karleman funksiyasini qurish metodi yordamida Koshi masalasi yechimi va yechim hosilasining aniq va taqribiy regulyarlashgan formulalarini hosil qilish, shartli turg‘unlik baholarini olishga oid tadqiqotlarni rivojlantirish dolzarb vazifalardan hisoblanadi.

Respublikamizda amaliy va fundamental fanlarning muhim yo‘nalishlarini rivojlantirishga katta e’tibor qaratilmoqda, xususan, laplas va elektromagnit maydon tenglamalari uchun qo‘yilgan nokorrekt Koshi masalasini analitik usulda yechish va olingan natijalarni amaloytda qo‘llash bo‘yicha keng ko‘lamli chora-tadbirlar amalga oshirilmoqda. 2019-yilda qabul qilingan matematika ta’limi fanlarini yanada rivojlantirishga oid Prezident qaroriga binoan “Algebra va uning tatbiqlari, differensial tenglamalar va uning tatbiqlari, chiziqsiz tizimlar, dinamik tizimlar va ularning tatbiqlarini matematik modellashtirish, stoxastik tahlil, tibbiy-biologik informatika, hisoblash matematikasi[1]” fanlarining ustuvor yo‘nalishlar bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish matematika faninning asosiy vazifalari va faoliyat yo‘nalishlari etib belgilangan. Ushbu vazifani amalga

[1] O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlas, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori

oshirishda, xususan, laplas va elektromagnit maydon tenglamalari uchun qo‘yilgan nokorrekt Koshi masalasining regulyarlashgan yechimini topish, shartli korrektlikka tekshirish muhim ilmiy ahamiyatga ega hisoblanadi.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi PF-4947-son “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmoni, 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora tadbirlari to‘g‘risidagi va 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-sonli “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti ma’lum darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalari rivojlanishning IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Ma’lumki, analitik funksiyalar nazariyasida Koshining integral formulasi va uning analoglari muhim rol o‘ynaydi. 1948-yilda Dj.A.Stretton va L.J.Chular birinchi bo‘lib, elektromagnit maydon tenglamalariga qo‘yilgan chegaraviy masalalarni yechishda muhim rol o‘ynaydigan Koshining integral formulasining analogi bo‘lgan, ushbu ko‘rinishdagi

$$\iint_{\partial D}\left\{(\vec{n}\cdot\vec{E})gradG+[\vec{n}\times\vec{E}]\times gradG+i\omega\mu[\vec{n}\times\vec{\mathrm{H}}]G\right\}ds_y=\begin{cases}\vec{E}(x), & x\in D,\\ 0, & x\in C\overline{D}.\end{cases}\qquad(1)$$

$$\iint_{\partial D}\left\{(\vec{n}\cdot\vec{H})gradG+[\vec{n}\times\vec{H}]\times gradG-i\omega\varepsilon[\vec{n}\times\vec{E}]G\right\}ds_y=\begin{cases}\vec{\mathrm{H}}(x), & x\in D,\\ 0, & x\in C\overline{D},\end{cases}\qquad(2)$$

formulalarni hosil qildilar.

Bu formulalar yordamida, laplas va elektromagnit maydon tenglamalariga qo‘yilgan chegaraviy masalalar ushbu mualliflar V.N. Straxov, G.M.Voskoboynikov, G.Ya.Golizdr, A.V.Sirulskiy, G.C.Moisil, N.Teodoresko, A.V.Bitsadze, G.Kolbengayer, A.Sitarova, M.N. M.S.Jdanov, M.N.Berdichevskiy, E.Vargova, N.I.Musxelishvili, F.D.Gaxov, I.N.Vekua va boshqalar tomonidan o‘rganildi. Ko‘rsatilgan mualliflarning ilmiy ishlarida chegaraviy shartlar butun soha chegarasining hamma yerida berilgan. Ushbu dissertatsiya ishida esa chegaraviy shartlar soha chegarasining ma’lum bir qismida qaraladi.

1926-yilda T.Karleman maxsus ko‘rinishdagi sohalar uchun, analitik funksiyaning soha chegarasining qismidagi qiymatiga ko‘ra, funksiyaning shu soha ichidagi qiymatini aniqlash formulasini birinchi bo‘lib hosil qildi. 1933-yilda G.M.Goluzin va V.I.Krilovlar Karleman g‘oyasini istalgan sohalar uchun umumlashtirdi. 1962-yilda M.M.Lavrent’ev kompleks o‘zgaruvchili analitik funksiyalar uchun Karleman funksiyasi tushunchasini kiritdi. Karleman funksiyasi

L.A.Ayzenberg, Sh. Yarmuxamedov, N.N.Tarxanov, T.Ishankulov, A.A.Shlapunov va boshqa olimlarning ilmiy ishlarida umumlashtirildi.

Laplas va elektromagnit maydon tenglamalari elliptik tipdagi tenglamalar sinfiga qarashli bo‘lib, bu tipdagi tenglama va uning sistemalari uchun qo‘yilgan nokorrekt chegaraviy masalalar nazariyasi J.Adamar, T.Karleman, G.M.Goluzin, V.I.Krilov, N.M.Gyunter, D.Kolton, R.Kress, A.S.Il’inskiy, V.V.Kravtsov, V.G.Sveshnikov, A.Djurayev, M.A.Evgrafov, E.D.Solomentsev, A.N.Tixonov, M.M.Lavrent’ev, S.N.Mergelyan, V.K.Ivanov, L.A.Ayzenberg, Sh.Yarmuxamedov, N.N.Tarxanov, A.A.Shlapunov, E.V.Arbuzov, A.L.Buxgeym, V.A.Polunin, A.P.Soldatov, T.Ishankulov, D.Q.Durdiyev, O.I.Maxmudov, Z.Malikov, I.E.Niyozov, A.B.Hasanov, F.R.Tursunov, E.N.Sattorov, E.Ya.Jabborov, D.A.Jurayev, S.I.Kabanixin va boshqa mualliflarning ilmiy ishlarida rivoj topdi.

Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilayotgan oliy o‘quv yurtining ilmiy-tadqiqot ishlari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Samarqand davlat universitetining № OT-F1-044-“Birinchi va ikkinchi tartibli chiziqli o‘zgarmas koeffitsiyentli elliptik sistemalar uchun Koshi masalasi” (2007-2011 yillar) mavzusidagi ilmiy-tadqiqot ishlari rejasi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi. Laplas maydoni uchun Koshi tipidagi integralning Koshi integraliga aylanish masalasi, shuningdek, ixtiyoriy vektor maydon va statsionar elektromagnit maydon tenglamalari sistemasi uchun Koshi masalasi yechimi va yechim hosilasining chekli sohalarda oshkor ko‘rinishidagi regulyarizatsiyasini qurish va shartli turg‘unlik bahosini olishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

analitik funksiyalar uchun Koshi tipidagi integralning Koshi integral formulasiga aylanishi haqidagi Golubev-Privalov kriteriyasining analogini laplas vektor maydon tenglamalari sistemasi holi uchun isbotlash;

ixtiyoriy vektor maydon tenglamalari sistemasi uchun uch o‘lchovli chegaralangan sohada Koshi masalasining yechimini ifodalovchi Karleman formulasini hosil qilish;

ixtiyoriy vektor maydon tenglamalari sistemasi uchun Koshi masalasi yechimining va yechim hosilasining uch o‘lchovli chegaralangan sohada regulyarlashgan taqribiy yechimini Karleman funksiyasi orqali ifodalash;

statsionar elektromagnit maydon tenglamalari sistemasi uchun Koshi masalasi yechimi va yechim hosilasining chekli sohalarda oshkor ko‘rinishidagi regulyarizatsiyasini qurish hamda M.M.Lavrent’ev metodi bo‘yicha shartli turg‘unlik bahosini olish.

Tadqiqot ob’ekti. Laplas vektor maydoni hamda ixtiyoriy vektor va statsionar elektromagnit maydon tenglamalari sistemasidan iborat.

Tadqiqot predmeti. Karleman funksiyasidan foydalanib ixtiyoriy vektor va statsionar elektromagnit maydonlar tenglamalari sistemasi uchun nokorrekt masala yechimini topishdan iborat.

Tadqiqot usullari. Dissertatsiya ishida matematik analiz va vektor analiz, kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi, sirt potentsiali, differentsial tenglamalar hamda matematik fizika tenglamalarini yechish usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

analitik funksiyalar uchun Koshi tipidagi integral Koshi integral formulasiga aylanishining zaruriy va yetarli shartlarini ifodalovchi Golubev-Privalov kriteriyasining oʻxshashi laplas vektor maydon tenglamalari sistemasi holi uchun isbotlangan;

ixtiyoriy vektor maydon tenglamalari sistemasi uchun uch oʻlchovli chegaralangan sohada Koshi masalasining yechimini ifodalovchi Karleman formulasi hosil qilingan;

ixtiyoriy vektor maydon tenglamalari sistemasi uchun Koshi masalasi yechimining va yechim hosilasining uch oʻlchovli chegaralangan sohada regulyarlashgan taqribiy yechimi Karleman funksiyasi orqali ifodalangan;

statsionar elektromagnit maydon tenglamalari sistemasi uchun Koshi masalasi yechimi va yechim hosilasining chekli sohalarda oshkor koʻrinishidagi regulyarizatsiyasi qurilgan hamda M.M.Lavrent’ev metodi boʻyicha shartli turgʻunlik bahosi olingan.

Tadqiqotning amaliy natijalari nokorrekt masalalarning aniq va taqribiy yechimlari geofizika, elektrodinamika va geologik qidiruv masalalarini yechishga tadbiq etilgan:

yechim hosilasining regulyarizatsiyasi va turgʻunlik bahosi elastiklik masalalarida koʻchish, kuchlanish va deformatsiyani aniqlashda foydalanilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi matematik fizika tenglamalari nazariyasi, nokorrekt masalalar nazariyasi, matematik analiz usullaridan foydalanilganligi hamda matematik mulohazalar va isbotlarning qat’iyligi bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati – ishning ilmiy natijalaridan laplas va statsionar elektromagnit maydonlar tenglamalari nazariyasini yanada rivojlantirish uchun foydalanish mumkin.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati olingan ilmiy natijalarni geofizika, elektrodinamika, nazariy fizika, mexanika, geologik qidiruv, radiosignallar, matematik fizika masalalarini hal qilishda qoʻllash bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Laplas va elektromagnit maydonlarini, ularning soha chegarasini bir qismida berilgan qiymatlariga koʻra sohaga davom ettirishga oid olingan ilmiy natijalar asosida:

elliptik tipdagi tenglamalar sistemasi uchun qoʻyilgan nokorrekt Koshi masalasini Karleman funksiyasi orqali yechish usulidan foydalanib, chegaralangan sohalarda bir jinsli Maksvell tenglamalari sistemasi uchun Koshi masalasini yechish jarayonida olingan natijalar yetakchi xorijiy jurnallarda (Differential Equations, 2021, vol.57, 86–99; Mathematical Notes, 2021, vol.110, no.3, 393-408; Russian Mathematics, 2021, vol.65, no.2, 22-38) chegaralangan va cheksiz sohalarda umumlashgan Koshi-Riman tenglamalari sistemasi uchun qoʻyilgan Koshi masalasining aniq yechimini topishda Karleman formulasini hosil qilish, regulyarlashgan yechimini topishda foydalanilgan. Ilmiy natijaning qoʻllanilishi umumlashgan Koshi-Riman tenglamalari sistemasi uchun nokorrekt masalalarni taqribiy yechish algoritmlarini tuzish imkonini bergan;

uch o‘lchovli chegaralangan sohada laplas maydoni uchun Koshi tipidagi integralni Koshi integraliga aylanishi, ixtiyoriy vektor maydon uchun Karleman formulasining o‘xshashini, statsionar elektromagnit maydon uchun soha chegarasining bir qismida berilgan qiymatiga ko‘ra Koshi masalasining shartli turg‘unlik bahosi va regulyarlashgan yechimi topishga oid nazariy natijalardan «Ikki fazali muhitning termodinamik jihatdan izchil matematik modelini o‘zaro ta'sirli dispersiv yaqinlashishda matematik modellashtirish» 18-51-41002 raqamli xorijiy ilmiy loyihada foydalanilgan (Rossiya Fanlar akademiyasining Sibir filiali Hisoblash matematikasi va matematik geofizika instituti 2023-yil 20-martdagi 15301\2-01-27- son ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo‘llanishi ikki fazali muhitning termodinamik jihatdan izchil matematik modelini o‘zaro ta’sirli dispersiv yaqinlashishiga doir nokorrekt masalalarni yechish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Ushbu tadqiqot natijalari 11 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan, 9 ta xalqaro va 2 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokama qilingan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha 18 ta ilmiy ish chop etilgan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining falsafa doktori dissertatsiyalarini himoya qilishda tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 7 ta maqola, jumladan, 2 ta xorijiy va 5 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Dissertatsiya hajmi 119 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishiningi ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy–tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, ob’ekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar berilgan.

Dissertatsiyaning **“Uch o‘lchovli geofizik maydonlar nazariyasidan ba’zi bir asosiy ma’lumotlar”** deb nomlangan birinchi bobida ishning asosiy natijalarini bayon etish uchun kerak bo‘lgan zarur ma’lumotlar keltirilgan.

Birinchi bobning birinchi paragrafida maydonlar nazariyasining ba’zi bir asosiy elementlari keltirilgan.

Ikkinchi paragrafida, chegarasi ∂D silliq sirtdan iborat bo‘lgan $D\,(D \subset R^3)$ chegaralangan bir bog‘lamli sohada, ushbu

$$div\vec{F}(y) = 0\,, \quad rot\vec{F}(y) = 0, \quad y \in D \tag{3}$$

laplas vektor maydoni uchun Koshi integral formulasining uch o‘lchovli analogi (o‘xshashi) keltirilgan, ya’ni

$$-\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial D}\left\{(\vec{n}\cdot\vec{F})grad\,\frac{1}{|y-x|}+[\vec{n}\times\vec{F}]\times grad\,\frac{1}{|y-x|}\right\}ds_y=\begin{cases}\vec{F}(x), & x\in D,\\ 0, & x\in C\overline{D}.\end{cases}\qquad(4)$$

bunda $\vec{n}$ - ∂D sirtgning y nuqtasiga o‘tkazilgan tashqi birlik normal.

Uchinchi paragrafida, chegarasi ∂D silliq sirtdan iborat bo‘lgan, $D\,(D\subset R^3)$ sohada, ushbu

$$div\vec{F}(y)=\vartheta(y)\ ,\quad rot\vec{F}(y)=\vec{a}(y),\quad y\in D \qquad(5)$$

tenglamalar sistemasi uchun Pompey formulasining uch o‘lchovli analogi (o‘xshashi) keltirilgan, ya’ni

$$\vec{F}(x)=-\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial D}\left\{(\vec{n}\cdot\vec{F})grad\,\frac{1}{|y-x|}+[\vec{n}\times\vec{F}]\times grad\,\frac{1}{|y-x|}\right\}ds_y+$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iiint_{D}\vartheta(y)\cdot grad\,\frac{1}{|y-x|}dv+\frac{1}{4\pi}\iiint_{D}\vec{a}(y)\times grad\,\frac{1}{|y-x|}dv,\qquad x\in D.\qquad(6)$$

To‘rtinchi paragrafida, chegarasi ∂D silliq sirtdan iborat bo‘lgan $D\,(D\subset R^3)$ sohada bir jinsli statsionar elektromagnit maydon, ya’ni

$$rot\vec{\mathrm{E}}=i\omega\mu\vec{\mathrm{H}},\quad rot\,\vec{\mathrm{H}}=-i\omega\varepsilon\vec{\mathrm{E}},\qquad(7)$$

ko‘rinishidagi tenglamalar sistemasi uchun Koshi integral formulasining analogi bo‘lgan Stretton-Chu integral formulasi keltirilgan:

$$\iint_{\partial D}\left\{(\vec{n}\cdot\vec{E})gradG+[\vec{n}\times\vec{E}]\times gradG+i\omega\mu[\vec{n}\times\vec{\mathrm{H}}]G\right\}ds_y=\begin{cases}\vec{E}(x), & x\in D,\\ 0, & x\in C\overline{D}.\end{cases}\qquad(8)$$

$$\iint_{\partial D}\left\{(\vec{n}\cdot\vec{H})gradG+[\vec{n}\times\vec{H}]\times gradG-i\omega\varepsilon[\vec{n}\times\vec{E}]G\right\}ds_y=\begin{cases}\vec{\mathrm{H}}(x), & x\in D,\\ 0, & x\in C\overline{D},\end{cases}\qquad(9)$$

bu yerda $G=\dfrac{1}{4\pi}\dfrac{e^{i\lambda|y-x|}}{|y-x|}$, $\lambda=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ - Gel’mgolts tenglamasining fundamental yechimi, $\vec{n}$ - ∂D sirtning y nuqtasiga o‘tkazilgan tashqi birlik normal.

Dissertatsiyaning **“Uch o‘lchovli fazoda laplas maydonini davom ettirish”** deb nomlanuvchi ikkinchi bobi, uchta paragrafdan iborat bo‘lib, unda laplas vektor maydoni uchun Koshi tipidagi integralning Koshi integraliga aylanishi masalasi, shuningdek, Karleman funksiyasi yordamida uch o‘lchovli chegaralangan sohada ixtiyoriy vektor maydon tenglamalari sistemasi uchun Koshi masalasi yechimining va yechim hosilasining oshkor ko‘rinishidagi regulyarizatsiyasi hamda regulyarlashgan taqribiy yechimi keltirilgan.

Birinchi paragrafda, laplas vektor maydoni uchun Koshi tipidagi integralni Koshi integraliga aylanishining zaruriy va yetarli shartlarini ifodalovchi teoremalar isbotlangan.

Aytaylik, D, $(D\subset R^3)$ chegaralangan sohada (3) laplas vektor maydoni berilgan bo‘lsin. D sohaning S sirt bilan chegaralangan ichki qismini D_i bilan, uning tashi qismi cheksiz sohani D_e, ya’ni $D_e = R^3 \setminus \overline{D}_i$ bilan belgilaymiz. S sirtda $\vec{f}(y)$ uzluksiz vektor-funksiya berilgan bo‘lsin. U holda quyidagi

$$\vec{\mathrm{K}}(x) = -\frac{1}{4\pi}\iint_S \left((\vec{n}\cdot\vec{f})grad\,\frac{1}{|y-x|} + [\vec{n}\times\vec{f}]\times grad\,\frac{1}{|y-x|} \right) ds_y \tag{10}$$

ifodaga (3) sistema uchun Koshi tipidagi integral deyiladi. (10) integralning D_i va D_e sohalardagi qiymatlarini mos ravishda $\vec{\mathrm{K}}_i(x)$ va $\vec{\mathrm{K}}_e(x)$ bilan belgilaymiz, ya’ni

$$\vec{K}(x) = \begin{cases} \vec{K}_i(x), \; x\in D_i, \\ \vec{K}_e(x), \; x\in D_e. \end{cases} \tag{11}$$

1-masala. (11) ko‘rinishidagi Koshi tipidagi integral qanday shartlar bajarilganda $\vec{\mathrm{K}}_i(x)$ funksiya uchun Koshining integral formulasiga aylanadi.

1-teorema. Aytaylik, S sirt – sferaga gomeomorf bo‘lgan yopiq Lyapunov sirtidan iborat bo‘lib, bu sirtda berilgan $\vec{f}(y)$ vektor-funksiya Gyolder shartini qanoatlantirsin. U holda, D_i sohada Koshi tipidagi integralning Koshi integraliga aylanishi uchun, D_e sohada $\vec{K}_e(x)\equiv 0$ munosabatning bajarilishi zarur va yetarli.

2-teorema. 1-teorema shartlari bajarilsin. U holda, (3) sistema uchun Koshi tipidagi integralning Koshi integraliga aylanishi uchun x_1, x_2, x_3 o‘zgaruvchili barcha $H(x)$ garmonik ko‘phadlar uchun

$$\iint_S \left\{ (\vec{n}\cdot\vec{f})gradH(y) + (\vec{n}\times\vec{f})\times gradH(y) \right\} ds_y = 0$$

tenglikning bajarilishi zarur va yetarli.

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida Karleman funksiyasi yordamida uch o‘lchovli chegaralangan sohada ixtiyoriy vektor maydon tenglamalari sistemasi uchun Koshi masalasi yechimining va yechim hosilasining regulyarizatsiyasi oshkor ko‘rinishda qurilgan.

Faraz qilaylik, $D\subset R^3$ – bir bog‘lamli chegaralangan soha bo‘lib, uning chegarasi $T:\; y_3 = 0$ tekislikning chegaralangan qismi, hamda $y_3 > 0$ yarim fazoda joylashgan S silliq sirtdan iborat bo‘lsin, ya’ni $\partial D = S\cup T$.

$\mathrm{A}(D)$ bilan $\overline{D} = D\cup\partial D$ da uzluksiz va (5) sistemani qanoatlantiruvchi D sohadagi vektor-funksiyalar sinfini belgilaymiz. Endi shu D sohada Koshi masalasini qaraymiz.

2-masala (Koshi masalasi). Faraz qilamiz $\vec{F}(y)\in \mathrm{A}(D)$ va

$$\vec{F}(y)\Big|_S = \vec{f}(y), \quad y\in S\,, \tag{12}$$

bu yerda $\vec{f}(y)$ – funksiya soha chegarasining S qismida berilgan uzluksiz funksiya. S sirtda $\vec{f}(y)$ funksiyaning berilgan qiymatiga ko‘ra D sohada $\vec{F}(y)$ vektor funksiyani tiklash talab qilinadi.

Bu masala yechimni topishda Sh. Yarmuhamedov tomonidan Laplas tenglamasi uchun qo‘yilgan Koshi masalasini yechishda qurilgan Karleman funksiyasidan foydalanamiz.

Aytaylik $\sigma > 0$ bo‘lsin. $\Phi_\sigma(y,x)$ funksiyani[2] uch o‘lchovli fazoda quyidagicha aniqlaymiz:

$$\varPhi_\sigma(y,x) = -\frac{e^{-\sigma x_3^2}}{2\pi^2}\int_0^\infty \operatorname{Im}\left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w-x_3}\right]\frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \quad w = i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3, \qquad (13)$$

$$y' = (y_1, y_2),\ x' = (x_1, x_2),\quad \alpha = \left|y' - x'\right|, \alpha^2 = (y_1-x_1)^2 + (y_2-x_2)^2.$$

Sh. Yarmuxamedov tomonidan (13) tenglik orqali aniqlangan $\Phi_\sigma(y,x)$ funksiya $\sigma > 0$ bo‘lganda quyidagi

$$\Phi_\sigma(y,x) = -\frac{1}{4\pi r} + g_\sigma(y,x) \qquad (14)$$

ko‘rinishda tasvirlanadi, bunda $r = |y-x|$, $g_\sigma(y,x)$ - funksiya y bo‘yicha R^3 fazoda garmonik funksiya. U holda, (6) formula quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\vec{F}(x) = \iint_{\partial D}\left\{(\vec{n}\cdot\vec{f}(y))\cdot grad\Phi_\sigma(y,x) + [\vec{n}\times\vec{f}(y)]\times grad\Phi_\sigma(y,x)\right\}ds_y -$$

$$-\iiint_D \vartheta(y)\cdot grad\Phi_\sigma(y,x)dv - \iiint_D [\vec{a}(y)\times grad\Phi_\sigma(y,x)]dv. \qquad (15)$$

Quyidagi belgilashni kiritamiz

$$\vec{F}_\sigma(x) = \iint_S\left\{(\vec{n}\cdot\vec{f}(y))\cdot grad\Phi_\sigma(y,x) + [\vec{n}\times\vec{f}(y)]\times grad\Phi_\sigma(y,x)\right\}ds_y -$$

$$-\iiint_D \vartheta(y)\cdot grad\Phi_\sigma(y,x)dv - \iiint_D [\vec{a}(y)\times grad\Phi_\sigma(y,x)]dv,\quad x\in D, \qquad (16)$$

3-teorema. Agar $\vec{F}(y)\in \mathrm{A}(D)$ bo‘lib, soha chegarasining S qismida (12) shartni, soha chegarasi ∂D - ning T qismida esa

$$\left|\vec{F}(y)\right| \le M,\ y\in T, \qquad (17)$$

shartni qanoatlantirsa, u holda barcha $x\in D$ va $\sigma > 0$ uchun quyidagi

$$\left|\vec{F}(x) - \vec{F}_\sigma(x)\right| \le \mathrm{M}C_1(\sigma, x_3)\, e^{-\sigma x_3^2}, \qquad (18)$$

$$\left|\frac{\partial\vec{F}(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial\vec{F}_\sigma(x)}{\partial x_i}\right| \le \mathrm{M}\Delta_i(\sigma, x_3)e^{-\sigma x_3^2},\ i = 1,2,3, \qquad (19)$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda

---

[2] (13) tenglik bilan aniqlangan $\Phi_\sigma(y,x)$ funksiyani birinchi bo‘lib Sh.Yarmuxamedov qurgan.

$$C_1(\sigma,x_3)=\frac{3}{\pi}+\frac{3}{2\sqrt{\pi\sigma}x_3}, \tag{20}$$

$$\Delta_1(\sigma,x_3)=\frac{40\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}}+\frac{2}{\sqrt{\pi\sigma}}+\frac{21}{2\sqrt{\pi\sigma}x_3^2}+\frac{2\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}x_3^2},\ \ \Delta_2(\sigma,x_3)=\Delta_1(\sigma,x_3), \tag{21}$$

$$\Delta_3(\sigma,x_3)=\frac{8\sigma x_3+2\sqrt{\sigma}}{\pi}+\frac{24\sqrt{\sigma}+16\sigma\sqrt{\sigma}x_3^2}{\sqrt{\pi}}+\frac{8x_3^4+16}{\pi\sigma x_3^3}+\frac{54x_3+32}{27\sqrt{\pi\sigma}x_3^3}. \tag{22}$$

Bu teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1-natija. Har bir $x\in D$ uchun ushbu

$$\lim_{\sigma\to\infty}\overrightarrow{F_\sigma}(x)=\vec{F}(x),\quad \lim_{\sigma\to\infty}\frac{\partial\overrightarrow{F_\sigma}(x)}{\partial x_i}=\frac{\partial\vec{F}(x)}{\partial x_i},\ i=1,2,3$$

limitik munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

Quidagi to‘plamni kiritamiz:

$$\overline{D}_\varepsilon=\left\{x\in D,\ \varepsilon\le x_3<a,\ a=\max_T h(x_1,x_2),\ 0<\varepsilon<a\right\}.$$

Ko‘rish mumkinki $\overline{D}_\varepsilon\subset D$ to‘plam kompakt to‘plamdir.

2-natija. Agar $x\in\overline{D}_\varepsilon$ bo‘lsa, u holda $\sigma\to\infty$ da $\left\{\overrightarrow{F_\sigma}(x)\right\}$ va $\left\{\frac{\partial\overrightarrow{F_\sigma}(x)}{\partial x_i}\right\}$ funksiyalar oilasi tekis yaqinlashadi, ya’ni

$$\overrightarrow{F_\sigma}(x)\rightrightarrows\vec{F}(x),\quad \frac{\partial\overrightarrow{F_\sigma}(x)}{\partial x_i}\rightrightarrows\frac{\partial\vec{F}(x)}{\partial x_i},\ i=1,2,3.$$

Ikkinchi bobning uchinchi paragrafida Karleman funksiyasi yordamida uch o‘lchovli chegaralangan sohada ixtiyoriy (5) vektor maydon tenglamalari sistemasi uchun Koshi masalasi yechimining va yechim hosilasining regulyarlashgan taqribiy yechimi olingan.

Faraz qilamiz, S sirt $y_3=h(y_1,y_2),\ (y_1,y_2)\in\mathrm{T}$ tenglama orqali berilgan bo‘lib, $y_3=h(y_1,y_2)$ shunday bir qiymatli funksiya bo‘lsinki, S sirt Lyapunov sirti bo‘lsin. Shu o‘rinda

$$a=\max_{\mathrm{T}}h(y_1,y_2)\quad\text{va}\quad b=\max_{\mathrm{T}}\sqrt{1+h_{y_1}^{'2}(y_1,y_2)+h_{y_2}^{'2}(y_1,y_2)}$$

deb belgilaymiz.

S sirtda $\vec{f}(y)$ vektor-funksiyaning o‘rniga uning $C(S)$ sinfga tegishli bo‘lgan $\vec{f}_\delta(y)$ taqribiy qiymati $0<\delta\le\mathrm{M}e^{-\sigma a^2}$ xatolik orqali berilgan bo‘lsin, ya’ni

$$\max_S\left|\vec{f}(y)-\vec{f}_\delta(y)\right|<\delta. \tag{23}$$

Quyidagi belgilashni kiritamiz

$$\vec{F}_{\sigma(\delta)}(x)=-\iint_S\left\{(\vec{n}\cdot\vec{f}_\delta(y))\cdot grad\Phi_\sigma(y,x)+[\vec{n}\times\vec{f}_\delta(y)]\times grad\Phi_\sigma(y,x)\right\}ds_y-$$

$$-\iiint_D \vartheta(y)\cdot grad\Phi_\sigma(y,x)dv-\iiint_D[\vec{a}(y)\times grad\Phi_\sigma(y,x)]dv\ . \qquad (24)$$

4-teorema. Agar $\vec{F}(y)\in \mathrm{A}(D)$ bo‘lib, soha chegarasining S qismida (12) shartni va T qismida esa (17) shartni qanoatlantirsa, u holda barcha $x\in D$ va $\sigma>0$ uchun quyidagi

$$\left|\vec{F}(x)-\vec{F}_{\sigma(\delta)}(x)\right|\le 2C_2(\sigma,x_3)\ \mathrm{M}^{1-\frac{x_3^2}{a^2}}\delta^{\frac{x_3^2}{a^2}}, \qquad (25)$$

$$\left|\frac{\partial\vec{F}(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial\vec{F}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i}\right|\le 2\varphi_i(\sigma,x_3)\mathrm{M}^{1-\frac{x_3^2}{a^2}}\delta^{\frac{x_3^2}{a^2}},\ i=1,2,3, \qquad (26)$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. Bunda

$$\sigma(\delta)=\frac{1}{a^2}\ln\frac{M}{\delta},\ \delta<M, \qquad (27)$$

$C_2(\sigma,x_3)=\max\left(C_1(\sigma,x_3),q(\sigma,x_3)\right),\ C_1(\sigma,x_3)-\ (20)$ tenglik bilan aniqlanadi,

$$q(\sigma,x_3)=\frac{22\sqrt{\pi\sigma}ab+4\sigma ab}{\pi}+\frac{7\sqrt{\pi}b+8\sqrt{\pi}\sigma a^2b+8\sqrt{\sigma}ab}{2\pi\sqrt{\sigma}(a-x_3)} \qquad (28)$$

$\varphi_1(\sigma,x_3)=\max(\Delta_1(\sigma,x_3),\alpha(\sigma,x_3)),\ \Delta_1(\sigma,x_3)-\ (21)$ tenglik bilan aniqlanadi,

$$\alpha(\sigma,x_3)=\sqrt{\sigma}\left(\frac{(24(a+x_3)+32a+61)\,a\,b+24b}{\sqrt{\pi}}+\frac{42a\,b\,(a+x_3)}{\sqrt{\pi}(a-x_3)^2}\right)+$$

$$+\sigma\frac{88ab+16\sigma a^3b+20a^2b+32a^3b}{\pi}+\sigma\sqrt{\sigma}\,\frac{48ab+124a^2b}{\sqrt{\pi}}+$$

$$+\frac{\sigma(5\pi ab+36ab+8b)+16\sigma^2ab+4\pi ab}{4\sqrt{\pi\sigma}\,(a-x_3)}+$$

$$+\frac{26b+110\sigma ab}{\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)^2}+\frac{8\sigma^3ab+2b}{\sqrt{\pi\sigma}}+\frac{28ab}{\pi}. \qquad (29)$$

$\varphi_2(\sigma,x_3)=\max(\Delta_2(\sigma,x_3),\alpha(\sigma,x_3)),\ \Delta_2(\sigma,x_3)\ va\ \alpha(\sigma,x_3)$ - lar mos ravishda (21) va (29) tengliklar bilan aniqlanadi,

$\varphi_3(\sigma,x_3)=\max(\Delta_3(\sigma,x_3),\,p(\sigma,x_3)),\ \Delta_3(\sigma,x_3)-\left(22\right)$ tenglik bilan aniqlanadi va

$$p(\sigma,x_3)=\sqrt{\sigma}\left(\frac{28b+10ab+4abx_3}{\sqrt{\pi}}+\frac{16ab+16b}{\sqrt{\pi}(a-x_3)}+\frac{36ab+8\pi ab+2\pi\sqrt{\pi}ab(a+x_3)}{\sqrt{\pi}(a-x_3)^2}\right)+$$

$$+\sigma\sqrt{\sigma}\left(\frac{24a^2b+32ab+40abx_3}{\sqrt{\pi}}+\frac{8abx_3}{\sqrt{\pi}(a-x_3)}\right)+\frac{\sigma(40ab+8a^2bx_3)}{\pi}+$$

$$+\frac{13b+4\sigma ab}{\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)^2}+\frac{ab}{\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)}.$$

3-natija. Har bir $x\in D$ uchun ushbu

$$\vec{F}(x)=\lim_{\delta\to 0}\vec{F}_{\sigma(\delta)}(x), \qquad \frac{\partial\vec{F}(x)}{\partial x_i}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\partial\vec{F}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i},\ i=1,2,3$$

limitik munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

Quidagi to‘plamni kiritamiz:

$$\overline{D}_\varepsilon=\left\{x\in D,\ \varepsilon\le x_3<a,\ a=\max_T h(x_1,x_2),\ 0<\varepsilon<a\right\}.$$

Ko‘rish mumkinki $\overline{D}_\varepsilon\subset D$ to‘plam kompakt to‘plamdir.

4-natija. Agar $x\in\overline{D}_\varepsilon$ bo‘lsa, u holda $\delta\to 0$ da $\left\{\vec{F}_{\sigma(\delta)}(x)\right\}$ va $\left\{\frac{\partial\vec{F}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i}\right\}$ funksiyalar oilasi tekis yaqinlashadi, ya’ni

$$\vec{F}_{\sigma(\delta)}(x)\Rightarrow\vec{F}(x), \qquad \frac{\partial\vec{F}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i}\Rightarrow\frac{\partial\vec{F}(x)}{\partial x_i},\ i=1,2,3.$$

Dissertatsiyaning **“Uch o‘lchovli chegaralangan sohada elektromagnit maydon tenglamalari sistemasi uchun Koshi masalasi”** deb nomlanuvchi uchinchi bobida uch o‘lchovli chegaralangan sohada statsionar elektromagnit maydon tenglamalari sistemasi uchun Koshi masalasi yechimining va yechim hosilasining regulyarizatsiyasi hamda shatli turg‘unlik bahosi keltirilgan.

Uchinchi bobning birinchi paragrafida Karleman funksiyasi yordamida uch o‘lchovli chegaralangan sohada statsionar elektromagnit maydon tenglamalari sistemasi uchun Koshi masalasi yechimining va yechim hosilasining regulyarizatsiyasi oshkor ko‘rinishda qurilgan. Ikkinchi paragrafida esa yechim va yechim hosilasining shatli turg‘unlik bahosi olingan.

Bir bog‘lamli chegaralangan $D\subset R^3$ $(\partial D=S\cup T)$ sohada bir jinsli statsionar elekrtomagnit maydon tenglamalari sistemasini qaraymiz, ya’ni

$$\begin{cases} rot\,\vec{E}=i\omega\mu\,\vec{H}, \\ rot\,\vec{H}=-i\omega\varepsilon\,\vec{E}, \end{cases} \tag{30}$$

bu yerda $\vec{E}(y)=\left(E_1(y),E_2(y),E_3(y)\right)$ va $\vec{H}(y)=\left(H_1(y),H_2(y),H_3(y)\right)$ vektor-funksiyalar, ε va μ elektromagnit o‘zgarmaslari, ω - maydon o‘zgarish chastotasi, i- mavhum birlik.

3-masala (Koshi masalasi). (30) sistema yechimining chegaraviy qiymati soha chegarasining S qismida berilgan bo‘lsin:

$$\vec{\mathrm{E}}(y)\Big|_S=\vec{f}(y),\ \ \vec{\mathrm{H}}(y)\Big|_S=\vec{g}(y),\ \ y\in S, \tag{31}$$

bu yerda $\vec{f}(y),\ \vec{g}(y)-$ S sirtida berilgan uzluksiz vektor – funksiyalar.

(31) shartga ko‘ra D sohada $\vec{E}(y),\ \vec{\mathrm{H}}(y)-$funksiyalarni tiklash talab qilinadi. Bu masala yechimini topishda Sh. Yarmuhamedov tomonidan Gel’mgol’ts

tenglamasi uchun Koshi masalasini yechishda qurilgan Karleman funksiyasidan foydalanamiz.

Aytaylik $\sigma>0$ bo‘lsin. $\Phi_\sigma(y,x)$ funksiyani $y\neq x$ bo‘lganda uch o‘lchovli fazoda quyidagicha aniqlaymiz:

$$\Phi_\sigma(y,x)=-\frac{e^{-\sigma x_3^2}}{2\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{Im}\left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w-x_3}\right]\frac{\cos(\lambda u)du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \tag{32}$$

bunda $w=\iota\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3,\ y'=(y_1,y_2),\ x'=(x_1,x_2),\ \alpha=\left|y'-x'\right|,\ \lambda=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}.$

SH. Yarmuxamedov tomonidan (32) tenglik orqali aniqlangan $\Phi_\sigma(y,x)$ funksiya $\sigma>0$ bo‘lganda quyidagi

$$\Phi_\sigma(y,x)=\frac{e^{i\lambda r}}{4\pi r}+g_\sigma(y,x) \tag{33}$$

ko‘rinishda tasvirlanadi, bunda $r=|y-x|$, $g_\sigma(y,x)$ – funksiya y,x ning barcha qiymatlarida aniqlan va y o‘zgaruvchisi bo‘yicha Gel’mgolts tenglamasini qanoatlantiradigan funksiya, ya’ni

$$\Delta\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)g_\sigma(y,x)+\lambda^2 g_\sigma(y,x)=0,\ y\in D\,.$$

(31) tenglik bilan ifodalanuvchi Koshi masalasining berilganlarini (8) va (9) formulalarga qo‘yamiz va quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\vec{E}_\sigma(x)=\iint_S\Big\{\left(\vec{n}\cdot\vec{f}\right)grad\ \Phi_\sigma(y,x)+\left[\vec{n}\times\vec{f}\right]\times grad\ \Phi_\sigma(y,x)+$$
$$+i\omega\mu\left[\vec{n}\times\vec{g}\right]\Phi_\sigma(y,x)\Big\}ds_y \tag{34}$$

$$\vec{\mathrm{H}}_\sigma(x)=\iint_S\Big\{\left(\vec{n}\cdot\vec{g}\right)grad\ \Phi_\sigma(y,x)+\left[\vec{n}\times\vec{g}\right]\times grad\ \Phi_\sigma(y,x)+$$
$$-i\omega\varepsilon\left[\vec{n}\times\vec{f}\right]\Phi_\sigma(y,x)\Big\}ds_y. \tag{35}$$

5-teorema. Agar $\vec{E}(y),\ \vec{\mathrm{H}}(y)\in C'(D)\cap C(\overline{D})$ vektor–funksiyalar (30) sistemaning yechimidan iborat bo‘lib, soha chegarasining S qismida (31) shartni, T qismida esa, mos ravishda ushbu

$$\left|\vec{E}(y)\right|\le M,\ \left|\vec{\mathrm{H}}(y)\right|\le M,\ y\in T\,, \tag{36}$$

tengsizliklarni qanoatlantirsa, u holda barcha $x\in D$ va $\sigma>0$ uchun, quyidagi

$$\left|\vec{E}(x)-\vec{E}_\sigma(x)\right|\le M\,c_3(\sigma,x_3)e^{-\sigma x_3^2},\quad \left|\frac{\partial\vec{E}(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial\vec{E}_\sigma(x)}{\partial x_i}\right|\le M\alpha_i((\sigma,x_3)e^{-\sigma x_3^2},$$

$$\left|\vec{\mathrm{H}}(x)-\vec{\mathrm{H}}_\sigma(x)\right|\le M\,c_4(\sigma,x_3)e^{-\sigma x_3^2},\ \left|\frac{\partial\vec{\mathrm{H}}(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial\vec{\mathrm{H}}_\sigma(x)}{\partial x_i}\right|\le M\beta_i(\sigma,x_3)e^{-\sigma x_3^2},$$

$i=1,2,3,$ baholar o‘rinli bo‘ladi. Bunda

$$c_3(\sigma,x_3)=\frac{3}{\pi}+\frac{3}{2\sqrt{\pi\sigma}x_3}+\frac{\omega\mu}{2\sqrt{\pi\sigma}},\tag{37}$$

$$\alpha_1(\sigma,x_3)=\frac{40\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}}+\frac{2}{\sqrt{\pi\sigma}}+\frac{21}{2\sqrt{\pi\sigma}x_3^2}+\frac{2\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}x_3^2}+$$

$$+\omega\mu\left(\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma}x_3}\right),\qquad \alpha_1(\sigma,x_3)=\alpha_2(\sigma,x_3)\tag{38}$$

$$\alpha_3(\sigma,x_3)=\frac{8\sigma x_3+2\sqrt{\sigma}}{\pi}+\frac{24\sqrt{\sigma}+16\sigma\sqrt{\sigma}x_3^2}{\sqrt{\pi}}+\frac{8x_3^4+16}{\pi\sigma x_3^3}+\frac{54x_3+32}{27\sqrt{\pi\sigma}x_3^3}+$$

$$+\omega\mu\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}}x_3+\frac{1}{4\sqrt{\pi\sigma}x_3}\right).\tag{39}$$

c_4 va β_i lar ham, c_3 va α_i $(i=1,2,3)$ lar kabi aniqlanadi.

5- teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

5-natija. Har bir $x\in D$ uchun uchbu

$$\lim_{\sigma\to\infty}\vec{\mathrm{E}}_\sigma(x)=\vec{\mathrm{E}}(x),\qquad \lim_{\sigma\to\infty}\frac{\partial\vec{\mathrm{E}}_\sigma(x)}{\partial x_i}=\frac{\partial\vec{\mathrm{E}}(x)}{\partial x_i},\ i=1,2,3,$$

$$\lim_{\sigma\to\infty}\vec{\mathrm{H}}_\sigma(x)=\vec{\mathrm{H}}(x),\qquad \lim_{\sigma\to\infty}\frac{\partial\vec{\mathrm{H}}_\sigma(x)}{\partial x_i}=\frac{\partial\vec{\mathrm{H}}(x)}{\partial x_i},\ i=1,2,3,$$

limitik munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

Quyidagi to‘plamni kiritamiz:

$$\overline{D}_\varepsilon=\left\{x\in D,\ \varepsilon\le x_3<a,\ a=\max_T h(x_1,x_2),\ 0<\varepsilon<a\right\},$$

ko‘rish mumkinki $\overline{D}_\varepsilon\subset D$ to‘plam kompakt to‘plamdir.

6-natija. Agar $x\in\overline{D}_\varepsilon$ bo‘lsa, u holda $\sigma\to\infty$ da $\left\{\vec{\mathrm{E}}_\sigma(x)\right\},\left\{\vec{\mathrm{H}}_\sigma(x)\right\}$ va $\left\{\frac{\partial\vec{\mathrm{E}}_\sigma(x)}{\partial x_i}\right\},\left\{\frac{\partial\vec{\mathrm{H}}_\sigma(x)}{\partial x_i}\right\}$ funksiyalar oilasi tekis yaqinlashadi, ya’ni

$$\vec{\mathrm{E}}_\sigma(x)\Rightarrow\vec{\mathrm{E}}(x),\quad \frac{\partial\vec{\mathrm{E}}_\sigma(x)}{\partial x_i}\Rightarrow\frac{\partial\vec{\mathrm{E}}(x)}{\partial x_i},$$

$$\vec{\mathrm{H}}_\sigma(x)\Rightarrow\vec{\mathrm{H}}(x),\quad \frac{\partial\vec{\mathrm{H}}_\sigma(x)}{\partial x_i}\Rightarrow\frac{\partial\vec{\mathrm{H}}(x)}{\partial x_i}.$$

Aytaylik S sirt $y_3=h(y_1,y_2)$, $(y_1,y_2)\in T$ tenglama bilan berilgan bo`lib, bunda $y_3=h(y_1,y_2)$ shunday bir qiymatli funksiyaki, qaysikim $S$ sirt Lyapunov sirtidan iborat bo`lsin. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$$\max_T h=a,\quad b=\max_T\left[1+\left(\frac{dh}{dy_1}\right)^2+\left(\frac{dh}{dy_2}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

6–teorema. Agar $\vec{E}(y),\ \vec{\mathrm{H}}(y)\in C'(D)\cap C(\overline{D})$ vektor funksiyalar (30) sistemaning yechimidan iborat bo‘lib, soha chegarasining T qismida (36) shartni, soha chegarasining S qismida esa mos ravishda ushbu

$$\left|\vec{E}(y)\right|\le\delta,\ \left|\vec{\mathrm{H}}(y)\right|\le\delta,\ y\in S,\ 0<\delta\le \mathrm{M}e^{-\sigma a^2},\tag{40}$$

tengsizliklarni qanoatlantirsa, u holda barcha $x\in D$ va $\sigma>0$ uchun

$$\left|\vec{E}(x)\right|\le 2n_1(\sigma,\, x_3)M^{1-\frac{x_3^2}{a^2}}\delta^{\frac{x_3^2}{a^2}},\quad \left|\frac{\partial\vec{E}(x)}{\partial x_i}\right|\le 2n_1^i((\sigma,\, x_3)M^{1-\frac{x_3^2}{a^2}}\delta^{\frac{x_3^2}{a^2}},\ \ i=1,2,3,$$

$$\left|\vec{\mathrm{H}}(x)\right|\le 2n_2(\sigma,\, x_3)M^{1-\frac{x_3^2}{a^2}}\delta^{\frac{x_3^2}{a^2}},\quad \left|\frac{\partial\vec{\mathrm{H}}(x)}{\partial x_i}\right|\le 2n_2^i(\sigma,\, x_3)M^{1-\frac{x_3^2}{a^2}}\delta^{\frac{x_3^2}{a^2}},\ \ i=1,2,3,$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi.

$n_1(\sigma,x_3)=\max\limits_S\left(\theta(\sigma,x_3),c_3(\sigma,x_3)\right),\ c_3(\sigma,x_3)-$ (37) formula bilan aniqlanadi,

$$\theta(\sigma,x_3)=\frac{11\sqrt{\pi\sigma}ab+2\sigma ab}{\pi}+\frac{7\sqrt{\pi}b+8\sqrt{\pi}\sigma a^2b+8\sqrt{\sigma}ab}{4\pi\sqrt{\sigma}(a-x_3)}+\omega\mu\left(\frac{b}{2\sqrt{\sigma\pi}}+\frac{ab}{\pi}\right)$$

$$n_1^1=\max_S\left(\phi(\sigma,x_3),\alpha_1(\sigma,x_3)\right),\ \ n_1^2=\max_S\left(\phi(\sigma,x_3),\alpha_2(\sigma,x_3)\right),$$

$\alpha_1(\sigma,x_3)=\alpha_2(\sigma,x_3)-$ lar (38) formula bilan aniqlanadi,

$$\phi(\sigma,x_3)=\sqrt{\sigma}\left(\frac{(24(a+x_3)+32a+61)\ a\ b+24b}{\sqrt{\pi}}+\frac{42\,a\,b\,(a+x_3)}{\sqrt{\pi}(a-x_3)^2}\right)+$$

$$+\sigma\frac{88ab+16\sigma a^3b+20a^2b+32a^3b}{\pi}+\sigma\sqrt{\sigma}\,\frac{48ab+124a^2b}{\sqrt{\pi}}+$$

$$+\frac{\sigma(5\pi ab+36ab+8b)+16\sigma^2ab+4\pi ab}{4\sqrt{\pi\sigma}\,(a-x_3)}+\frac{26b+110\sigma ab}{\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)^2}+\frac{8\sigma^3ab+2b}{\sqrt{\pi\sigma}}+\frac{28ab}{\pi}+$$

$$+\omega\mu\left(\frac{b+4a^2b\sigma}{\pi}+\frac{11ab\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}}+\frac{b}{2\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)}\right).$$

$$n_1^3=\max_S\left(\tau(\sigma,x_3),\alpha_3(\sigma,x_3)\right),\quad \tau(\sigma,x_3)=\sqrt{\sigma}\left(\frac{28b+10ab+4abx_3}{\sqrt{\pi}}+\frac{16ab+16b}{\sqrt{\pi}(a-x_3)}+\right.$$

$$\left.+\frac{36ab+8\pi ab+2\pi\sqrt{\pi}ab(a+x_3)}{\sqrt{\pi}(a-x_3)^2}\right)+$$

$$+\sigma\sqrt{\sigma}\left(\frac{24a^2b+32ab+40abx_3}{\sqrt{\pi}}+\frac{8abx_3}{\sqrt{\pi}(a-x_3)}\right)+$$

$$+\sigma\frac{40ab+8a^2bx_3}{\pi}+\frac{13b+4\sigma ab}{\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)^2}+\frac{ab}{\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)}+\omega\mu\left(\frac{\sqrt{\sigma}(3ab+2b)}{\sqrt{\pi}}+\frac{2abx_3}{\pi}\right).$$

$\alpha_3(\sigma,x_3)-$ (39) formula bilan aniqlanadi.

$n_2,\ n_2^i$ lar ham $n_1,\ n_1^i\ \ (i=1,2,3)$ lar kabi aniqlanadi

Endi biz S sirtda $\vec{f}(y), \vec{g}(y)$ vektor-funksiyalarni ularning $C(S)$ sinfga tegishli, $\delta > 0$ og‘ish bilan berilgan $\vec{f}_\delta(y)$, $\vec{g}_\delta(y)$ taqribiy qiymatlarida $\vec{\mathrm{E}}(x)$, $\vec{\mathrm{H}}(x)$ larning taqribiy qiymatlarini hisoblaymiz:

$$\max_S \left|\vec{f}(y) - \vec{f}_\delta(y)\right| < \delta, \quad \max_S \left|\vec{g}(y) - \vec{g}_\delta(y)\right| < \delta.$$

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz

$$\vec{E}_{\sigma(\delta)}(x) = \iint_S \left\{ \left(\vec{n} \cdot \vec{f}_\delta\right) grad\ \Phi_\sigma + \left[\vec{n} \times \vec{f}_\delta\right] \times grad\ \Phi_\sigma + i\omega\mu\left[\vec{n} \times \vec{g}_\delta\right] \Phi_\sigma \right\} ds_y$$

$$\vec{\mathrm{H}}_{\sigma(\delta)}(x) = \iint_S \left\{ \left(\vec{n} \cdot \vec{g}_\delta\right) grad\ \Phi_\sigma + \left[\vec{n} \times \vec{g}_\delta\right] \times grad\ \Phi_\sigma - i\omega\mu\left[\vec{n} \times \vec{f}_\delta\right] \Phi_\sigma \right\} ds_y$$

bunda $\sigma(\delta) = \dfrac{1}{a^2} \ln \dfrac{\mathrm{M}}{\delta}$, $\delta < \mathrm{M}$.

7-teorema. Agar $\vec{E}(y)$, $\vec{\mathrm{H}}(y) \in C'(D) \cap C(\overline{D})$ vektor funksiyalar (30) sistemaning yechimidan iborat bo‘lib, soha chegarasining S qismida (31) shartni, T qismida esa (36) shartni qanoatlanlantirsa, u holda, barcha $x \in D$ va $\sigma > 0$ uchun

$$\left|\vec{E}(x) - \vec{E}_{\sigma(\delta)}(x)\right| \le 2n_1(\sigma, x_3) M^{1-\frac{x_3^2}{a^2}} \delta^{\frac{x_3^2}{a^2}},$$

$$\left|\frac{\partial \vec{E}(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial \vec{E}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i}\right| \le 2n_1^i((\sigma, x_3) M^{1-\frac{x_3^2}{a^2}} \delta^{\frac{x_3^2}{a^2}},$$

$$\left|\vec{\mathrm{H}}(x) - \vec{H}_{\sigma(\delta)}(x)\right| \le 2n_2(\sigma, x_3) M^{1-\frac{x_3^2}{a^2}} \delta^{\frac{x_3^2}{a^2}},$$

$$\left|\frac{\partial \vec{\mathrm{H}}(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial \vec{H}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i}\right| \le 2n_2^i(\sigma, x_3) M^{1-\frac{x_3^2}{a^2}} \delta^{\frac{x_3^2}{a^2}},$$

$i = 1, 2, 3,$ tengsizliklar o`rinli bo`ladi.

Bunda $n_1,\ n_1^i,\ n_1,\ n_2^i$ lar yuqoridagi 6 – teoremadagi kabi aniqlanadi.

7-natija. Har bir $x \in D$ uchun

$$\lim_{\delta \to 0} \vec{\mathrm{E}}_{\sigma(\delta)}(x) = \vec{\mathrm{E}}(x), \quad \lim_{\delta \to 0} \frac{\partial \vec{\mathrm{E}}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \vec{\mathrm{E}}(x)}{\partial x_i}, \ i = 1, 2, 3$$

$$\lim_{\delta \to 0} \vec{\mathrm{H}}_{\sigma(\delta)}(x) = \vec{\mathrm{H}}(x), \quad \lim_{\delta \to 0} \frac{\partial \vec{\mathrm{H}}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \vec{\mathrm{H}}(x)}{\partial x_i}, \ i = 1, 2, 3$$

limitik munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

8-natija. Agar $x \in \overline{D}_\varepsilon$ bo‘lsa, u holda $\left\{\vec{\mathrm{E}}_{\sigma(\delta)}(x)\right\}$, $\left\{\vec{\mathrm{H}}_{\sigma(\delta)}(x)\right\}$ va $\left\{\dfrac{\partial \vec{\mathrm{E}}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i}\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial \vec{\mathrm{H}}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i}\right\}$ funksiyalar oilasi $\delta \to 0$ da tekis yaqinlashadi, ya’ni

$$\vec{E}_{\sigma(\delta)}(x) \Rightarrow \vec{E}(x), \quad \frac{\partial \vec{E}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial \vec{E}(x)}{\partial x_i},$$

$$\vec{H}_{\sigma(\delta)}(x) \Rightarrow \vec{H}(x), \quad \frac{\partial \vec{H}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial \vec{H}(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1,2,3.$$

XULOSA

Dissertatsiya ishi laplas va bir jinsli statsionar elektromagnit maydon tenglamalari sistemasi uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalarni o‘rganishga bag‘ishlangan.

Asosiy tadqiqot natijalari quyidagilardan iborat:

1. Analitik funksiyalar uchun Koshi tipidagi integral Koshi integral formulasiga aylanishining zaruriy va yetarli shartlarini ifodalovchi Golubev-Privalov kriteriyasining o‘xshashi laplas vektor maydon tenglamalari sistemasi holi uchun isbotlangan;

2. Ixtiyoriy vektor maydon tenglamalari sistemasi uchun uch o‘lchovli chegaralangan sohada Koshi masalasining yechimini ifodalovchi Karleman formulasi hosil qilingan;

3. Ixtiyoriy vektor maydon tenglamalari sistemasi uchun Koshi masalasi yechimining va yechim hosilasining uch o‘lchovli chegaralangan sohada regulyarlashgan taqribiy yechimi Karleman funksiyasi orqali ifodalangan;

4. Statsionar elektromagnit maydon tenglamalari sistemasi uchun Koshi masalasi yechimi va yechim hosilasining chekli sohalarda oshkor ko‘rinishidagi regulyarizatsiyasi qurilgan hamda M.M.Lavrent’ev metodi bo‘yicha shatli turg‘unlik bahosi olingan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.02.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ

САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
ШАРОФА РАШИДОВА

МАРДОНОВ ЖОЛГОШ АБДУМАЖИТОВИЧ

О ПРОДОЛЖЕНИИ ЛАПЛАСОВА И ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЕЙ ПО ИХ ЗАДАННЫМ ЗНАЧЕНИЯМ НА ЧАСТИ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ

01.01.02 - Дифференциальные уравнения и математическая физика

АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Самарканд – 2025

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за номером B2022.4.PhD/FM790.

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете имени Шарофа Рашидова.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Сатторов Эрмамат Норкулович** доктор физико-математических наук, доцент
Официальные оппоненты:	**Халмухамедов Алимджан Рахимович** доктор физико-математических наук, профессор
	Дурдиев Дурдимурод Каландарович доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Ургенчский государственный университет**

Защита диссертации состоится «20» мая 2025 г. в 10^{00} часов на заседании научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (99866) 231-06-32, факс: (99866) 235-19-38,e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственном университета (зарегистрирована за №____). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (99866) 231-06-32, факс: (99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан «6» мая 2025 года
(Протокол рассылки № 1 от «6» мая 2025 года)

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

А.С.Солеев
Председатель научного совета по присуждению научныху степеней, доктор физико-математических наук, профессор

А.М.Халхужаев
Ученый секретарь научного совета по присуждению учёных степеней, доктор физико-математических наук, профессор

А.Б.Хасанов
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению учёных степеней, доктор физико-математических наук, профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Большинство научных и практических исследований, проводимых в мире, связаны с решением некорректных краевых задач, решаемых в уравнениях математической физики. Эти вопросы тесно связаны с изучением различных физических процессов. В настоящее время в развитых странах некорректные краевые задачи математической физики занимают важное место в различных областях, в том числе в теории геофизики, гидродинамике, теории передачи сигналов, геологоразведке, электродинамике, теоретической физике, электронике, метеорологии, при изучении электрических свойств внутренни слоев земли, в поиске точных решений эволюционных уравнений современной математической физики. При решении некорректных задач семейство регуляризованных решений служит основой для исследования устойчивых решений при сужении класса корректности до компактного. В краевых задачах, рассматриваемых для лапласовых и стационарных электромагнитных полей в работах многих авторов, граничные условия задаются всюду на границе области. Поэтому особое внимание уделяется изучению задачи продолжения лапласовых и стационарных электромагнитных полей в область по их значениям на части границы этой области.

В мире большое значение при решении задачи Коши, поставленной для системы уравнений лапласова и электромагнитного полей, имеет построение функции Карлемана в той части границы поля, где не заданы условия Коши, решение некорректных краевых задач и регуляризация производной решения, а также исследование вопросов, связанных с получением оценок условной устойчивости. В этой связи развитие исследований по расширению решения на ограниченную область по заданному значению в части границы области для системы уравнений лапласова и электромагнитного полей, разработка точных и приближенных регуляризованных формул для решения и производной задачи Коши с использованием метода построения функции Карлемана, а также развитие исследований по получению оценок условной устойчивости представляются актуальными научными исследованиями.

В нашей республике большое внимание уделяется развитию важных направлений прикладной и фундаментальной науки, в частности, проводятся масштабные мероприятия по решению некорректных задач для уравнений lапласова и электромагнитного полей с использованием аналитических методов и применению полученных результатов на практике. Согласно Указу Президента о дальнейшем развитии математического образования, принятому в 2019 году, основными задачами и направлениями деятельности математической науки являются проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Алгебра и ее приложения, дифференциальные уравнения и их приложения, математическое моделирование нелинейных систем, динамические системы и их приложения, стохастический анализ, медико-биологическая информатика, вычислительная математика»[3]. При реализации этой задачи, в частности, большое научное значение имеет нахождение регуляризованного решения некорректной задачи Коши для уравнений лапласова и электромагнитного полей и проверка его условной корректности.

Настоящее диссертационное исследование служит в определенной степени реализации задач, определенных в решениях : “О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан” от 7 февраля 2017 года № ПФ-4947, “О государственной поддержке дальнейшего развития математического образования и науки, а также мерах по коренному совершенствованию деятельности Института математики Академии наук Республики Узбекистан имени В. И. Романовского” от 9 июля 2019 года № ПФ-4387 и “О мерах по повышению качества образования в области математики и развитию научных исследований” от 7 мая 2020 года № ПП-4708, а также в других нормативных правовых актах, касающихся данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий Республики Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Известно, что в теории аналитических функций формула интеграла Коши и его аналоги играют важную роль. В 1948 году Дж.А.Стрэттон и Л.Ж.Чу впервые получили аналог интегральной формулы Коши в следующем виде:

$$\iint\limits_{\partial D}\left\{(\vec{n}\cdot\vec{E})gradG+[\vec{n}\times\vec{E}]\times gradG+i\omega\mu[\vec{n}\times\vec{\mathrm{H}}]G\right\}ds_y=\begin{cases}\vec{E}(x), & x\in D,\\ 0, & x\in C\overline{D}.\end{cases} \quad (1)$$

$$\iint\limits_{\partial D}\left\{(\vec{n}\cdot\vec{H})gradG+[\vec{n}\times\vec{H}]\times gradG-i\omega\varepsilon[\vec{n}\times\vec{E}]G\right\}ds_y=\begin{cases}\vec{\mathrm{H}}(x), & x\in D,\\ 0, & x\in C\overline{D}.\end{cases} \quad (2)$$

Граничные задачи, налагаемые на уравнения лапласова и электромагнитное поле были изучены В.Н.Страховым, Г.М.Воскобойниковым, Г.Я.Голиздра, А.В.Цирульским, Г.С.Моисилом, Н.Теодореско, А.В.Бицадзе, Г.Колбенгайером, А.Ситаровым, М.С.Ждановым, М.Н.Бердичевским, Е.Варговым, Н.И.Мусхелишвили, Ф.Д.Гаховым, И.Н.Векуа при помощи этих формул. В этих работах авторы задают краевые условия на всей границе области. В данной диссертации граничные условия задаются на части границы области.

В 1926 году Т. Карлеманом для областей специального вида была впервые получена формула продолжения аналитической функции комплексной переменной по значениям на части границы области в эту

[3] Постановление Президента Республики Узбекистан №PQ-4387 от 9 июля 2019 года “О государственной поддержке дальнейщего развития математического образования и науки, а также мерах по коренному совершенствованию деятельности Института математики Академии наук Республики Узбекистан имени В.И.Романовского”.

область. В 1933 году Г.М.Голузин и В.И.Крылов обобщили идею Карлемана для произвольных областей. В 1962 году М.М.Лаврентьев ввел понятие функции Карлемана для аналитических функций комплексной переменной. Понятие функции Карлемана былы обощены в работах Л.А.Айзенберга, Ш.Ярмухамедова, Н.Н.Тарханова, Т.Ишанкулова, А.А.Шлапунова и других авторов.

Уравнения лапласова и электромагнитного полей относятся к классу уравнений эллиптического типа. Теория некорректных краевых задач для уравнений эллиптического типа и их систем развивалась в научных работах Ж.Адамара, Т.Карлемана, Е.В.Голузина, В.И.Крылова, Н.М.Гюнтера, Д.Колтона, Р.Кресса, А.С.Ильинского, В.В.Кравцова, В.Г.Свешникова, А.Джураева, М.А.Евграфова, Е.Д.Соломенцева, А.Н.Тихонова, М.М.Лаврентьева, С.Н.Мергеляна, В.К.Иванова, Л.А.Айзенберга, Ш.Ярмухамедова, Н.Н.Тарханова, А.А.Шлапунова, Е.В.Арбузова, А.Л.Бухгейма, Е.В.Арбузова, В.А.Полунина, А.П.Солдатова, Т.Ишанкулова, Д.К.Дурдиева, Н.Н.Тарханова, И.Э.Ниёзова, З.Маликова, К.О.Махмудова, О.И.Махмудова, А.Б.Хасанова, Ф.Р.Турсунова, Э.Н.Сатторова, Д.А.Жураева, Э.Я.Жабборова, С.И.Кабанихина и других.

Связь темы диссертации с научно-исслдедовательскими работами высшего образовательного или научно-исследовательского учреждения, где выполнена диссертации. Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научно-исследовательской работы Самаркандского государственного университета имени Шарофа Рашидова в рамках комплексной научной работы № ОТ-Ф1-044 «Теория задачи Коши для линейных эллиптических систем первого и второго порядка с постоянными коэффициентами» (2007-2011гг.).

Целью исследования задача преобразования интеграла типа Коши для лапласова поля в интеграл Коши, а также решение задачи Коши для системы уравнений произвольного векторного поля и стационарного электромагнитного поля и построение регуляризации производная решения в явном виде в конечных областях и получение оценки условной устойчивости.

Задачи исследования, решаемые в данной работе следующие:

доказать аналог критерия Голубева-Привалова о преобразовании интеграла типа Коши в интегральную формулу Коши для аналитических функций в случае системы уравнений векторного лапласова поля;

построение функции Карлемана в трехмерной ограниченной области для системы уравнений произвольного векторного поля;

построение в явном виде регуляризации решения и ее производной задачи Коши для системы произвольного векторного поля в трехмерной ограниченной области;

построение в явном и приближенном виде решения задачи Коши, а также их производных для системы уравнений стационарного электромагнитного поля в ограниченной области, получение оценки условной устойчивости.

Объект исследования. Векторное лапласово поле, а также состоит из произвольного вектора и системы стационарных уравнений электромагнитного поля.

Предмет исследования. Нахождении решения некорректной задачи для системы уравнений произвольного вектора и стационарного электромагнитного поля с помощью функции Карлемана.

Методы исследования. В диссертационной работе использовались математический анализ и векторный анализ, теория функций комплексной переменной, поверхностный потенциал, методы решения дифференциальных уравнений и уравнений математической физики.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

для случая системы уравнений векторного лапласова поля доказан аналог критерия Голубева-Привалова, выражающего необходимые и достаточные условия преобразования интеграла типа Коши в интегральную формулу Коши для аналитических функций;

построение формулы Карлемана, представляющей решение задачи Коши в трехмерной ограниченной области для системы уравнений произвольного векторного поля;

в трехмерной ограниченной области построены регуляризованное приближенное решение задачи Коши и производная решения с помощью функции Карлемана для произвольных системы уравнений векторного поля;

для системы стационарных уравнений электромагнитного поля построено решение задачи Коши, регуляризация производной решения в явном виде и получена оценка условной устойчивости по методу М.М.Лаврентьева в ограниченных областях.

Практические результаты исследования являются следующие:

точные и приближенные решения некорректных задач применяются при решении задач геофизики, электродинамики и геологоразведки;

регуляризация производной решения и оценка устойчивости используются для определения смещения, напряжения и деформации в задачах упругости.

Достоверность результатов исследования обоснована на теории уравнений математической физики, теории некорректных задач, использовании методов математического анализа, строгости математических рассуждений и доказательств.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научное значение результатов исследования заключается в том, что их можно использовать для дальнешего развития теории уравнений лапласова и стационарного электромагнитного поля.

Практическая значимость результатов исследования объясняется применением полученных научных результатов при решении задач геофизики, электродинамики, теоретической физики, механики, георазведки, радиосигналов, математической физики.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных результатов Лапласово и электромагнитных полей по заданным значениям на частях границы области:

результаты, полученные в процессе решения задачи Коши для системы однородных уравнений Максвелла в ограниченных областях с использованием функций Карлемана решения некорректной задачи Коши для системы уравнений эллиптического типа, опубликованных в ведущих зарубежных журналах (Differential Equations, 2021, vol.57, 86–99; Mathematical Notes, 2021, vol.110, no.3, 393-408; Russian Mathematics, 2021, vol.65, no.2, 22-38) были использованы для вывода формулы Карлемана и нахождения регуляризованного решения задачи Коши для системы обобщенных уравнений Коши–Римана в ограниченных и бесконечных областях. Применение научного результата позволило разработать алгоритмы приближенного решения некорректных задач для обобщенной системы уравнений Коши-Римана;

результаты, связанные с построением регуляризованного решения задачи Коши и обращения интеграла типа Коши в интегральную формулу Коши для лапласова поля, задачи продолжения произвольного векторного поля ограниченной трехмерной области по их значениям на части границы, вопросы устойчивости и регуляризации задачи Коши для уравнения стационарного электромагнитного поля. Эти результаты были использованы сотрудниками института вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения РАН в рамках научных исследований по гранту, 18-51-41002 «Математическое моделирование термодинамически согласованной математической модели двухфазных сред в дисспативном приближении с перекрестными эффектами», 2019-2020 гг. (ИВМ и МГ СО РАН, №15301\2-01-27, 20.03.2023 г.).

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены на 11 научно-практических конференциях, в том числе на 9 международных и 2 республиканских научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 18 научных работ, из них 5 статей в национальных журналах, 2 статей в зарубежных журналах, 11 тезисов в научных конференциях.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, выводов, заключения и списка использованной литературы.Объем диссертации составляет 119 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и восстребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Первая глава диссертации под названием **«Некоторые основные сведения из теории трехмерного геофизического поля»** содержит необходимые сведения, необходимые для описания основных результатов работы.

В первом параграфе первой главы представлены некоторые основные элементы теории поля.

Во втором параграфе первой главы для векторного уравнение лапласова поля

$$div\vec{F}(y)=0\ ,\quad rot\vec{F}(y)=0,\quad y\in D, \tag{3}$$

заданного в ограниченной односвязной области D, с гладкой границы ∂D, приведён трехмерный аналог интегральной формулы Коши, т.е.

$$-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial D}\left\{(\vec{n}\cdot\vec{F})grad\,\frac{1}{|y-x|}+[\vec{n}\times\vec{F}]\times grad\,\frac{1}{|y-x|}\right\}ds_y=\begin{cases}\vec{F}(x), & x\in D,\\ 0, & x\in C\overline{D}.\end{cases} \tag{4}$$

В третьем параграфе в ограниченной области D, с гладкой границы ∂D, для системы уравнений

$$div\vec{F}(y)=\vartheta(y)\,,\quad rot\vec{F}(y)=\vec{a}(y) \tag{5}$$

приведён трехмерный аналог формулы Помпея, т.е.

$$\vec{F}(x)=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\partial D}\left\{(\vec{n}\cdot\vec{F})grad\,\frac{1}{|y-x|}+[\vec{n}\times\vec{F}]\times grad\,\frac{1}{|y-x|}\right\}ds_y+`$$

$$+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D}\vartheta(y)\cdot grad\,\frac{1}{|y-x|}dv+\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_{D}\vec{a}(y)\times grad\,\frac{1}{|y-x|}dv\ ,\ \ x\in D. \tag{6}$$

где $\vec{n}$ – единичный вектор внешней нормали к ∂D в точке $y\in\partial D.$

В четвёртом параграфе для однородное стационарное электромагнитное поле

$$rot\vec{\mathrm{E}}=i\omega\mu\vec{\mathrm{H}},\quad rot\,\vec{\mathrm{H}}=-i\omega\varepsilon\vec{\mathrm{E}}, \tag{7}$$

заданного в ограниченной области D, с гладкой границы ∂D, приведена интегральная формула Стреттона-Чу, являющаяся аналогом интегральной формулы Коши, т.е.

$$\iint_{\partial D}\left\{(\vec{n}\cdot\vec{E})gradG+[\vec{n}\times\vec{E}]\times gradG+i\omega\mu[\vec{n}\times\vec{\mathrm{H}}]G\right\}ds_y=\begin{cases}\vec{E}(x), & x\in D,\\ 0, & x\in C\overline{D}.\end{cases} \quad (8)$$

$$\iint_{\partial D}\left\{(\vec{n}\cdot\vec{H})gradG+[\vec{n}\times\vec{H}]\times gradG-i\omega\varepsilon[\vec{n}\times\vec{E}]G\right\}ds_y=\begin{cases}\vec{\mathrm{H}}(x), & x\in D,\\ 0, & x\in C\overline{D}.\end{cases} \quad (9)$$

где $G=\frac{1}{4\pi}\frac{e^{i\lambda|y-x|}}{|y-x|}$, $\lambda=\omega\sqrt{\varepsilon\mu}$ - фундаментальное решение уравнения Гельмгольца, $\vec{n}$ — внешняя единица, нормальная к точке y поверхности ∂D.

Вторая глава диссертации, получившая название **«Продолжение лапласова поля в трехмерном пространстве»**, состоит из трех параграфов, в которых рассматривается задача преобразования интеграла типа Коши в интеграл Коши для векторного уравнение лапласова поля, а также представлены произвольный вектор в трехмерном ограниченном поле с использованием регуляризации функции Карлемана решения задачи Коши, производной решения системы полевых уравнений и регуляризованного приближенного решения.

В первом параграфе приводятся теоремы, выражающие необходимые и достаточные условия обращения интеграла типа Коши в интеграл Коши для лапласова поля.

Пусть D_i- ограниченная область с кусочно-гладкой замкнутой поверхностью S в пространстве R^3 и D_e внешняя неограниченная область, то есть $D_e=R^3\setminus\overline{D}_i$.

Когда $\vec{f}(y)$заданная вектор-функция на S, выражение

$$\vec{\mathrm{K}}(x)=-\frac{1}{4\pi}\iint_S\left((\vec{n}\cdot\vec{f})grad\frac{1}{|y-x|}+[\vec{n}\times\vec{f}]\times grad\frac{1}{|y-x|}\right)ds_y \quad (10)$$

называется интегралом типа Коши для системы (3). Обозначим через $\vec{\mathrm{K}}_i(x)$ и $\vec{\mathrm{K}}_e(x)$ значения интеграла (10) в области D_i и D_e соответственно, т.е.

$$\vec{\mathrm{K}}(x)=\begin{cases}\vec{\mathrm{K}}_i(x), & x\in D_i\\ \vec{\mathrm{K}}_e(x), & x\in D_e.\end{cases} \quad (11)$$

Задача 1. При каких условиях выполнение интеграла типа Коши (11) обращается в интеграл Коши для функции $\vec{\mathrm{K}}_i(x)$.

Теорема 1. Пусть S — гомеоморфная в сфере замкнутая поверхность Ляпунова, $\vec{f}(y)$— заданная на S вектор - функция удовлетворяющая условию Гельдера. Для того, чтобы интеграл типа Коши обращался в интеграл Коши, необходимо и достаточно чтобы $\vec{\mathrm{K}}_e(x)\equiv 0$ в области D_e.

Теорема 2. Пусть выполнены условия теоремы 1. Для того чтобы интеграл типа Коши для системы (3) обращался в интеграл Коши, необходимо и достаточно, чтобы для всех гармонических полиномов $H(x)$ от переменных x_1, x_2, x_3 выполнялось равенство

$$\iint_S \left\{ \left(\vec{n}\cdot\vec{f}\right) gradH(y) + \left(\vec{n}\times\vec{f}\right)\times gradH(y) \right\} ds_y = 0.$$

Во втором параграфе второй главы строится регуляризация решения задачи Коши и производная решения для произвольного векторного поля в трехмерной ограниченной области.

Пусть $D \in R^3$ – ограниченная односвязная область с кусочно-гладкой границей ∂D, состоящей из плоскости T: $y_3 = 0$ и гладкой поверхности S, лежащей в полупространстве $y_3 > 0$, т.е. $\partial D = S \cup \mathrm{T}$.

В области D рассмотрим произвольного векторного поля (5):

$$\mathrm{div}\vec{F}(y) = \vartheta(y), \quad \mathrm{rot}\vec{F}(y) = \vec{a}(y), \quad y \in D,$$

где $\vartheta(y)$ – скалярное поле, $\vec{a}(y)$ – векторное поле.

Мы будем предполагать, что заданные поля $\vartheta(y)$ и $\vec{a}(y)$ дифференцируемы в области D.

Обозначим через $\mathrm{A}(D)$ класс вектор-функций в области D, непрерывных на $\overline{D} = D \bigcup \partial D$ и удовлетворяющих системе (5). Теперь рассмотрим задачу Коши в этой области.

Задача 2 (задача Коши). Пусть $\vec{F}(y) \in \mathrm{A}(D)$ и

$$\vec{F}(y)\Big|_S = \vec{f}(y), \quad y \in S, \tag{12}$$

где $\vec{f}(y)$— заданная непрерывная вектор – функция на S.

Требуется восстановить функцию $\vec{F}(y)$ в D, исходя из заданной $\vec{f}(y)$.

Находя это решение, мы используем функцию Карлемана, построенную Ярмухамедовым для уравнения Лапласа.

Пусть $\sigma > 0$. Функцию[4] $\Phi_\sigma(y,x)$ при $y \neq x$ определим следующими равенствами:

$$\varPhi_\sigma(y,x) = -\frac{e^{-\sigma x_3^2}}{2\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{Im}\left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w - x_3}\right]\frac{du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \quad w = \imath\sqrt{u^2+\alpha^2} + y_3, \tag{13}$$

$$y' = (y_1, y_2),\ x' = (x_1, x_2),\ \alpha = \left|y' - x'\right|, \alpha^2 = (y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2$$

Ш. Ярмухамедовым доказан, что функцию $\Phi_\sigma(y,x)$ определенная равенствами (13) представима при $\sigma > 0$ в виде

$$\Phi_\sigma(y,x) = -\frac{1}{4\pi|y-x|} + g_\sigma(y,x) \tag{14}$$

где $g_\sigma(y,x)$ – гармоническая функция по y в R^3.

---

[4] Функция, $\Phi_\sigma(y,x)$ определяемая равенством (13), была впервые построена Ш.Ярмухамедовым.

Тогда интегральная формула (6) имеет вид

$$\vec{F}(x)=\iint\limits_{\partial D}\left\{(\vec{n}\cdot\vec{F})\cdot grad\Phi_{\sigma}(y,x)+[\vec{n}\times\vec{F}]\times grad\Phi_{\sigma}(y,x)\right\}ds_y-$$

$$-\iiint\limits_{D}\vartheta(y)\cdot grad\Phi_{\sigma}(y,x)dv-\iiint\limits_{D}[\vec{a}(y)\times grad\Phi_{\sigma}(y,x)]dv\,. \qquad (15)$$

Обозначим

$$\vec{F}_{\sigma}(x)=\iint\limits_{S}\left\{(\vec{n}\cdot\vec{f}(y))\cdot grad\Phi_{\sigma}(y,x)+[\vec{n}\times\vec{f}(y)]\times grad\Phi_{\sigma}(y,x)\right\}ds_y-$$

$$-\iiint\limits_{D}\vartheta(y)\cdot grad\Phi_{\sigma}(y,x)dv-\iiint\limits_{D}[\vec{a}(y)\times grad\Phi_{\sigma}(y,x)]dv\,,\quad x\in D, \qquad (16)$$

Теорема 3. Пусть $\vec{F}(y)\in \mathrm{A}(D)$ удовлетворяет условию (12) на части S границы области D и на части T границы области D неравенству

$$\left|\vec{F}(y)\right|\le M,\ y\in T, \qquad (17)$$

то при $x\in D$ и $\sigma>0$ справедливы оценки

$$\left|\vec{F}(x)-\vec{F}_{\sigma}(x)\right|\le \mathrm{M}C_1(\sigma,x_3)\,e^{-\sigma x_3^2}, \qquad (18)$$

$$\left|\frac{\partial\vec{F}(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial\vec{F}_{\sigma}(x)}{\partial x_i}\right|\le \mathrm{M}\Delta_i(\sigma,x_3)e^{-\sigma x_3^2},\ i=1,2,3; \qquad (19)$$

Здесь

$$C_1(\sigma,x_3)=\frac{3}{\pi}+\frac{3}{2\sqrt{\pi\sigma}x_3}, \qquad (20)$$

$$\Delta_1(\sigma,x_3)=\frac{40\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}}+\frac{2}{\sqrt{\pi\sigma}}+\frac{21}{2\sqrt{\pi\sigma}x_3^2}+\frac{2\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}x_3^2},\ \ \Delta_2(\sigma,x_3)=\Delta_1(\sigma,x_3), \qquad (21)$$

$$\Delta_3(\sigma,x_3)=\frac{8\sigma x_3+2\sqrt{\sigma}}{\pi}+\frac{24\sqrt{\sigma}+16\sigma\sqrt{\sigma}x_3^2}{\sqrt{\pi}}+\frac{8x_3^4+16}{\pi\sigma x_3^3}+\frac{54x_3+32}{27\sqrt{\pi\sigma}x_3^3} \qquad (22)$$

Следствие 1. При каждом $x\in D$ справедливо равенство

$$\lim_{\sigma\to\infty}\vec{F}_{\sigma}(x)=\vec{F}(x),\ \lim_{\sigma\to\infty}\frac{\partial\vec{F}_{\sigma}(x)}{\partial x_i}=\frac{\partial\vec{F}(x)}{\partial x_i},\ i=1,2,3.$$

Обозначим через $\overline{D}_{\varepsilon}$ множество

$$\overline{D}_{\varepsilon}=\left\{x\in D,\ \varepsilon\le x_3<a,\ a=\max_{T}h(x_1,x_2),\ 0<\varepsilon<a\right\}.$$

Легко заметить, что множество $\overline{D}_{\varepsilon}\subset D$ является компактным.

Следствие 2. Если $x\in\overline{D}_{\varepsilon}$, то семейство функций $\left\{\vec{F}_{\sigma}(x)\right\}$ и $\left\{\frac{\partial\vec{F}_{\sigma}(x)}{\partial x_i}\right\}$ сходится равномерно при $\sigma\to\infty$, т.е.

$$\vec{F}_\sigma(x) \underset{\to}{\to} \vec{F}(x), \quad \frac{\partial \vec{F}_\sigma(x)}{\partial x_i} \underset{\to}{\to} \frac{\partial \vec{F}(x)}{\partial x_i}, \; i=1,2,3.$$

В третьем параграфе второй главы с помощью функции Карлемана получено регуляризованное приближенное решение задачи Коши и производная решения системы уравнений произвольного векторного поля в трехмерной ограниченной области.

Предположим, что поверхность S задана уравнением $y_3 = h(y_1, y_2)$, $(y_1, y_2) \in \mathrm{T}$, где h - однозначная функция такая, что поверхность S является поверхностью Ляпунова. Обозначим

$$a = \max_T h, \quad b = \max_T \left[1 + (\frac{dh}{dy_1})^2 + (\frac{dh}{dy_2})^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Пусть $\vec{F}(y) \in \mathrm{A}(D)$ и вместо $\vec{F}(y)$ на S заданы её непрерывные приближения $\vec{f}(y)$, соответственно, с погрешностью $0 < \delta < \mathrm{M} e^{-\sigma a^2}$,

$$\max_S \left| \vec{f}(y) - \vec{f}_\delta(y) \right| < \delta. \tag{23}$$

Положим

$$\vec{F}_{\sigma(\delta)}(x) = -\iint_S \left\{ (\vec{n} \cdot \vec{f}_\delta(y)) \cdot grad \Phi_\sigma(y,x) + [\vec{n} \times \vec{f}_\delta(y)] \times grad \Phi_\sigma(y,x) \right\} ds_y -$$
$$-\iiint_D \vartheta(y) \cdot grad \Phi_\sigma(y,x) dv - \iiint_D [\vec{a}(y) \times grad \Phi_\sigma(y,x)] dv. \tag{24}$$

Теорема 4. Если $\vec{F}(y) \in \mathrm{A}(D)$ удовлетворяет условиям (12) и (17), то при $x \in D$ справедливы неравенства

$$\left| \vec{F}(x) - \vec{F}_{\sigma(\delta)}(x) \right| \le 2C_2(\sigma, x_3)\, \mathrm{M}^{1-\frac{x_3^2}{a^2}} \delta^{\frac{x_3^2}{a^2}}, \tag{25}$$

$$\left| \frac{\partial \vec{F}(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial \vec{F}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i} \right| \le 2\varphi_i(\sigma, x_3) \mathrm{M}^{1-\frac{x_3^2}{a^2}} \delta^{\frac{x_3^2}{a^2}}, \; i = 1,2,3, \tag{26}$$

где

$$\sigma(\delta) = \frac{1}{a^2} \ln \frac{M}{\delta}, \; \delta < M, \tag{27}$$

$C_2(\sigma, x_3) = \max\left(C_1(\sigma, x_3), q(\sigma, x_3) \right)$, $C_1(\sigma, x_3) -$ определяется по формуле (20),

$$q(\sigma, x_3) = \frac{22\sqrt{\pi\sigma}ab + 4\sigma ab}{\pi} + \frac{7\sqrt{\pi}b + 8\sqrt{\pi}\sigma a^2 b + 8\sqrt{\sigma}ab}{2\pi\sqrt{\sigma}(a - x_3)} \tag{28}$$

$\varphi_1(\sigma, x_3) = \max(\Delta_1(\sigma, x_3), \alpha(\sigma, x_3))$, $\Delta_1(\sigma, x_3) -$ определяется по формуле (21),

$$\alpha(\sigma, x_3) = \sqrt{\sigma} \left(\frac{(24(a + x_3) + 32a + 61)\, a\, b + 24b}{\sqrt{\pi}} + \frac{42\, a\, b\, (a + x_3)}{\sqrt{\pi}(a - x_3)^2} \right) +$$

$$+\sigma\frac{88ab+16\sigma a^3b+20a^2b+32a^3b}{\pi}+\sigma\sqrt{\sigma}\frac{48ab+124a^2b}{\sqrt{\pi}}+$$

$$+\frac{\sigma(5\pi ab+36ab+8b)+16\sigma^2ab+4\pi ab}{4\sqrt{\pi\sigma}\,(a-x_3)}+$$

$$+\frac{26b+110\sigma ab}{\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)^2}+\frac{8\sigma^3ab+2b}{\sqrt{\pi\sigma}}+\frac{28ab}{\pi}. \qquad (29)$$

$\varphi_2(\sigma,x_3)=\max(\Delta_2(\sigma,x_3),\alpha(\sigma,x_3)),\ \Delta_2(\sigma,x_3)-$ определяется по формуле (21), и $\alpha(\sigma,x_3)-$ определяется по формуле (29),

$\varphi_3(\sigma,x_3)=\max(\Delta_3(\sigma,x_3),p(\sigma,x_3)),\ \Delta_3(\sigma,x_3)-$ определяется по формуле (22) и

$$p(\sigma,x_3)=\sqrt{\sigma}\left(\frac{28b+10ab+4abx_3}{\sqrt{\pi}}+\frac{16ab+16b}{\sqrt{\pi}(a-x_3)}+\frac{36ab+8\pi ab+2\pi\sqrt{\pi}ab(a+x_3)}{\sqrt{\pi}(a-x_3)^2}\right)+$$

$$+\sigma\sqrt{\sigma}\left(\frac{24a^2b+32ab+40abx_3}{\sqrt{\pi}}+\frac{8abx_3}{\sqrt{\pi}(a-x_3)}\right)+\frac{\sigma(40ab+8a^2bx_3)}{\pi}+$$

$$+\frac{13b+4\sigma ab}{\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)^2}+\frac{ab}{\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)}.$$

Следствие 3. При каждом $x\in D$ справедливо равенство

$$\vec{F}(x)=\lim_{\delta\to 0}\vec{F}_{\sigma(\delta)}(x),\qquad \frac{\partial\vec{F}(x)}{\partial x_i}=\lim_{\delta\to 0}\frac{\partial\vec{F}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i},\ i=1,2,3$$

Следствие 4. Если $x\in\overline{D}_\varepsilon$, то семейство функций $\left\{\vec{F}_{\sigma(\delta)}(x)\right\}$ и $\left\{\frac{\partial\vec{F}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i}\right\}$ сходится равномерно при $\delta\to 0$, т.е.

$$\vec{F}_{\sigma(\delta)}(x)\Rightarrow\vec{F}(x),\qquad \frac{\partial\vec{F}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i}\Rightarrow\frac{\partial\vec{F}(x)}{\partial x_i},\ i=1,2,3.$$

В третьей главе диссертации, названной **«Задача Коши для системы уравнений электромагнитного поля в трехмерной ограниченной области»** построены с использованием функции Карлемана регуляризированное решение задачи Коши для системы стационарных уравнений электромагнитного поля и получена оценка условной устойчивости решения задача Коши в трёхмерной ограниченной области.

В ограниченной области $D\in R^3$ $(\partial D=S\cup T)$ рассмотрим систему однородных стационарных уравнений электромагнитного поля:

$$\begin{cases} rot\,\vec{E}=i\omega\mu\,\vec{H}, \\ rot\,\vec{H}=-i\omega\varepsilon\,\vec{E}, \end{cases} \tag{30}$$

где $\vec{E}(x)=(E_1(x), E_2(x), E_3(x))$, $\vec{H}(x)=(H_1(x), H_2(x), H_3(x))$– вектор-функции, μ и ε – электромагнитные постоянны, ω – частота изменения поля, i - мнимая единица.

Задача 3 (задача Коши). Известны данные Коши решения системы (30) на поверхности S :

$$\vec{\mathrm{E}}(y)\Big|_S=\vec{f}(y), \quad \vec{\mathrm{H}}(y)\Big|_S=\vec{g}(y), \quad y\in S \tag{31}$$

где $\vec{f}(y), \vec{g}(y)$- заданные непрерывные вектор – функции. Требуется восстановить $\vec{\mathrm{E}}(y)$ и $\vec{\mathrm{H}}(y)$ в области D, исходя из $\vec{f}(y)$ и $\vec{g}(y)$. Находя это решение, мы используем функцию Карлемана, построенную Ярмухамедовым для уравнения Гельмгольца.

Пусть $\sigma>0$. Функцию $\Phi_\sigma(y,x)$ при $y\neq x$ определим следующими равенствами:

$$\Phi_\sigma(y,x)=-\frac{e^{-\sigma x_3^2}}{2\pi^2}\int_0^\infty \mathrm{Im}\left[\frac{e^{\sigma w^2}}{w-x_3}\right]\frac{\cos(\lambda u)du}{\sqrt{u^2+\alpha^2}}, \tag{32}$$

где $w=i\sqrt{u^2+\alpha^2}+y_3$, $y'=(y_1,y_2)$, $x'=(x_1,x_2)$, $\alpha=\left|y'-x'\right|$, $\lambda=\omega\sqrt{\mu\varepsilon}$.

Ш. Ярмухамедовым доказан, что функцию $\Phi_\sigma(y,x)$ определенной равенствами (32) представима при $\sigma>0$ в виде

$$\Phi_\sigma(y,x)=\frac{e^{i\lambda r}}{4\pi r}+g_\sigma(y,x) \tag{33}$$

где $r=|y-x|$, $g_\sigma(y,x)$ – некоторая функция, определенная для всех значений y,x и удовлетворяющая уравнению Гельмгольца

$$\Delta\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)g_\sigma(y,x)+\lambda^2 g_\sigma(y,x)=0, \; y\in D.$$

Подставим условия задачи Коши в формулы (8) и (9) и введем следующие обозначения:

$$\vec{E}_\sigma(x)=\iint_S\left\{\left(\vec{n}\cdot\vec{f}\right)grad\;\Phi_\sigma(y,x)+(\vec{n}\times\vec{f})\times grad\;\Phi_\sigma(y,x)+i\omega\mu(\vec{n}\times\vec{g})\Phi_\sigma(y,x)\right\}ds_y \tag{34}$$

$$\vec{H}_\sigma(x)=\iint_S\left\{\left(\vec{n}\cdot\vec{g}\right)grad\,\Phi_\sigma(y,x)+(\vec{n}\times\vec{g})\times grad\,\Phi_\sigma(y,x)-i\omega\varepsilon(\vec{n}\times\vec{f})\;\Phi_\sigma(y,x)\right\}ds_y \tag{35}$$

Теорема 5. Если $\vec{\mathrm{E}}(y), \vec{\mathrm{H}}(y)\in C'(D)\cap C(\overline{D})$ являются решением системы (30) и на части S границы ∂D, удовлетворяющее начальному условие (31) а на части T границы ∂D выполняются неравенства

$$\left|\vec{E}(y)\right|\le M, \; \left|\vec{\mathrm{H}}(y)\right|\le M, \; y\in T, . \tag{36}$$

то при $x \in D$ и $\sigma > 0$ справедливы оценки

$$\left|\vec{E}(x) - \vec{E}_\sigma(x)\right| \le MC_3(\sigma, x_3)e^{-\sigma x_3^2}, \qquad \left|\frac{\partial \vec{E}(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial \vec{E}_\sigma(x)}{\partial x_i}\right| \le M\alpha_i((\sigma, x_3)e^{-\sigma x_3^2},$$

$$\left|\vec{\mathrm{H}}(x) - \vec{\mathrm{H}}_\sigma(x)\right| \le MC_4(\sigma, x_3)e^{-\sigma x_3^2}, \ \left|\frac{\partial \vec{\mathrm{H}}(x)}{\partial x_i} - \frac{\partial \vec{\mathrm{H}}_\sigma(x)}{\partial x_i}\right| \le M\beta_i(\sigma, x_3)e^{-\sigma x_3^2}, \ i = 1, 2, 3,$$

где
$$C_3(\sigma, x_3) = \frac{3}{\pi} + \frac{3}{2\sqrt{\pi\sigma}x_3} + \frac{\omega\mu}{2\sqrt{\pi\sigma}}, \tag{37}$$

$$\alpha_1(\sigma, x_3) = \frac{40\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi\sigma}} + \frac{21}{2\sqrt{\pi\sigma}x_3^2} + \frac{2\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}x_3^2} +$$

$$+\omega\mu\left(\frac{1}{\pi} + \frac{1}{2\sqrt{\pi\sigma}x_3}\right), \qquad \alpha_1(\sigma, x_3) = \alpha_2(\sigma, x_3) \tag{38}$$

$$\alpha_3(\sigma, x_3) = \frac{8\sigma x_3 + 2\sqrt{\sigma}}{\pi} + \frac{24\sqrt{\sigma} + 16\sigma\sqrt{\sigma}x_3^2}{\sqrt{\pi}} + + \frac{8x_3^4 + 16}{\pi\sigma x_3^3} + \frac{54x_3 + 32}{27\sqrt{\pi\sigma}x_3^3} +$$

$$+\omega\mu\left(\frac{\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}}x_3 + \frac{1}{4\sqrt{\pi\sigma}x_3}\right) \tag{39}$$

Следствие 5. При каждом $x \in D$ справедливо равенство

$$\lim_{\sigma\to\infty} \vec{\mathrm{E}}_\sigma(x) = \vec{\mathrm{E}}(x), \qquad \lim_{\sigma\to\infty} \frac{\partial \vec{\mathrm{E}}_\sigma(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \vec{\mathrm{E}}(x)}{\partial x_i}, \ i = 1, 2, 3,$$

$$\lim_{\sigma\to\infty} \vec{\mathrm{H}}_\sigma(x) = \vec{\mathrm{H}}(x), \qquad \lim_{\sigma\to\infty} \frac{\partial \vec{\mathrm{H}}_\sigma(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial \vec{\mathrm{H}}(x)}{\partial x_i}, \ i = 1, 2, 3.$$

Следствие 6. Если $x \in \overline{D}_\varepsilon$, то семейство функций $\left\{\vec{\mathrm{E}}_\sigma(x)\right\}, \left\{\vec{\mathrm{H}}_\sigma(x)\right\}$ и $\left\{\frac{\partial \vec{\mathrm{E}}_\sigma(x)}{\partial x_i}\right\}, \left\{\frac{\partial \vec{\mathrm{H}}_\sigma(x)}{\partial x_i}\right\}$ сходится равномерно при $\sigma \to \infty$, т.е.:

$$\vec{\mathrm{E}}_\sigma(x) \Rightarrow \vec{\mathrm{E}}(x), \ \frac{\partial \vec{\mathrm{E}}_\sigma(x)}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial \vec{\mathrm{E}}(x)}{\partial x_i}, \ \vec{\mathrm{H}}_\sigma(x) \Rightarrow \vec{\mathrm{H}}(x), \ \frac{\partial \vec{\mathrm{H}}_\sigma(x)}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial \vec{\mathrm{H}}(x)}{\partial x_i}.$$

Теорема 6. Если функции $\vec{\mathrm{E}}(y), \vec{\mathrm{H}}(y) \in C'(D) \cap C(\overline{D})$ являются решением системы (30) и на части T границы ∂D выполняется условие (36), а на части S границы ∂D неравенства

$$\left|\vec{E}(y)\right| \le \delta, \ \left|\vec{\mathrm{H}}(y)\right| \le \delta, \ y \in S, \ 0 < \delta \le \mathrm{M}e^{-\sigma a^2}, \tag{40}$$

то при $x \in D$ и $\sigma > 0$ справедливы неравенства

$$\left|\vec{E}(x)\right| \le 2n_1(\sigma,\omega,\mu,x_3)M^{1-\frac{x_3^2}{a^2}}\delta^{\frac{x_3^2}{a^2}}, \quad \left|\frac{\partial\vec{E}(x)}{\partial x_i}\right| \le 2n_1^i((\sigma,\omega,\mu,x_3)M^{1-\frac{x_3^2}{a^2}}\delta^{\frac{x_3^2}{a^2}}, \ i=1,2,3,$$

$$\left|\vec{\mathrm{H}}(x)\right| \le 2n_2(\sigma,\omega,\varepsilon,x_3)M^{1-\frac{x_3^2}{a^2}}\delta^{\frac{x_3^2}{a^2}}, \quad \left|\frac{\partial\vec{\mathrm{H}}(x)}{\partial x_i}\right| \le 2n_2^i(\sigma,\omega,\varepsilon,x_3)M^{1-\frac{x_3^2}{a^2}}\delta^{\frac{x_3^2}{a^2}}, \ i=1,2,3.$$

Здесь $n_1(\sigma,x_3)=\max\limits_S\left(\theta(\sigma,x_3),c_3(\sigma,x_3)\right)$, $c_3(\sigma,x_3)-$ определяется по формуле (37),

$$\theta(\sigma,x_3)=\frac{11\sqrt{\pi\sigma}ab+2\sigma ab}{\pi}+\frac{7\sqrt{\pi}b+8\sqrt{\pi}\sigma a^2b+8\sqrt{\sigma}ab}{4\pi\sqrt{\sigma}(a-x_3)}+\omega\mu\left(\frac{b}{2\sqrt{\sigma\pi}}+\frac{ab}{\pi}\right)$$

$$n_1^1=\max\limits_S\left(\phi(\sigma,x_3),\alpha_1(\sigma,x_3)\right),\quad n_1^2=\max\limits_S\left(\phi(\sigma,x_3),\alpha_2(\sigma,x_3)\right),$$

$\alpha_1(\sigma,x_3)=\alpha_2(\sigma,x_3)-$определяется по формуле (38),

$$\phi(\sigma,x_3)=\sqrt{\sigma}\left(\frac{(24(a+x_3)+32a+61)\,a\,b+24b}{\sqrt{\pi}}+\frac{42a\,b\,(a+x_3)}{\sqrt{\pi}(a-x_3)^2}\right)+$$

$$+\sigma\frac{88ab+16\sigma a^3b+20a^2b+32a^3b}{\pi}+\sigma\sqrt{\sigma}\,\frac{48ab+124a^2b}{\sqrt{\pi}}+$$

$$+\frac{\sigma(5\pi ab+36ab+8b)+16\sigma^2ab+4\pi ab}{4\sqrt{\pi\sigma}\,(a-x_3)}+$$

$$+\frac{26b+110\sigma ab}{\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)^2}+\frac{8\sigma^3ab+2b}{\sqrt{\pi\sigma}}+\frac{28ab}{\pi}+$$

$$+\omega\mu\left(\frac{b+4a^2b\sigma}{\pi}+\frac{11ab\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\pi}}+\frac{b}{2\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)}\right)$$

$n_1^3=\max\limits_S\left(\tau(\sigma,x_3),\alpha_3(\sigma,x_3)\right)$, $\alpha_3(\sigma,x_3)-$ определяется по формуле (39),

$$\tau(\sigma,x_3)=\sqrt{\sigma}\left(\frac{28b+10ab+4abx_3}{\sqrt{\pi}}+\frac{16ab+16b}{\sqrt{\pi}(a-x_3)}+\right.$$

$$\left.+\frac{36ab+8\pi ab+2\pi\sqrt{\pi}ab(a+x_3)}{\sqrt{\pi}(a-x_3)^2}\right)+$$

$$+\sigma\sqrt{\sigma}\left(\frac{24a^2b+32ab+40abx_3}{\sqrt{\pi}}+\frac{8abx_3}{\sqrt{\pi}(a-x_3)}\right)+$$

$$+\sigma\frac{40ab+8a^2bx_3}{\pi}+\frac{13b+4\sigma ab}{\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)^2}+\frac{ab}{\sqrt{\pi\sigma}(a-x_3)}+$$

$$+\omega\mu\left(\frac{\sqrt{\sigma}(3ab+2b)}{\sqrt{\pi}}+\frac{2abx_3}{\pi}\right).$$

Пусть $\vec{\mathrm{E}}(y),\vec{\mathrm{H}}(y)\in C'(D)\cap C(\overline{D})$, и вместо $\vec{\mathrm{E}}(y)$. $\vec{\mathrm{H}}(y)$ на S заданы ее непрерывные приближения $\vec{f}_\delta(y)$, $\vec{g}_\delta(y)$, соответственно, с погрешностью $0<\delta<\mathrm{M}e^{-\sigma a^2}$,

$$\max_S\left|\vec{\mathrm{E}}(y)-\vec{f}_\delta(y)\right|<\delta,\quad \max_S\left|\vec{\mathrm{H}}(y)-\vec{g}_\delta(y)\right|<\delta$$

Положим

$$\vec{E}_{\sigma(\delta)}(x)=\iint_S\left\{\left(\vec{n}\cdot\vec{f_\delta}\right)grad\ \Phi_\sigma+\left[\vec{n}\times\vec{f}_\delta\right]\times grad\ \Phi_\sigma+i\omega\mu\left[\vec{n}\times\vec{g}_\delta\right]\Phi_\sigma\right\}ds_y$$

$$\vec{\mathrm{H}}_{\sigma(\delta)}(x)=\iint_S\left\{\left(\vec{n}\cdot\vec{g}_\delta\right)grad\ \Phi_\sigma+\left[\vec{n}\times\vec{g}_\delta\right]\times grad\ \Phi_\sigma-i\omega\mu\left[\vec{n}\times\vec{f}_\delta\right]\Phi_\sigma\right\}ds_y$$

где $\sigma(\delta)=\dfrac{1}{a^2}\ln\dfrac{\mathrm{M}}{\delta}$, $\delta<\mathrm{M}$.

Теорема 7. Если функции $\vec{\mathrm{E}}(y),\vec{\mathrm{H}}(y)\in C'(D)\cap C(\overline{D})$ являются решением системы (30) и на части S границы ∂D выполняется условие (31), а на части Т границы ∂D неравенство (36), то при $x\in D$ и $\sigma>0$ верны неравенства

$$\left|\vec{E}(x)-\vec{E}_{\sigma(\delta)}(x)\right|\le 2n_1(\sigma,\ x_3)M^{1-\frac{x_3^2}{a^2}}\delta^{\frac{x_3^2}{a^2}},$$

$$\left|\frac{\partial\vec{E}(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial\vec{E}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i}\right|\le 2n_1^i((\sigma,\ x_3)M^{1-\frac{x_3^2}{a^2}}\delta^{\frac{x_3^2}{a^2}},$$

$$\left|\vec{\mathrm{H}}(x)-\vec{H}_{\sigma(\delta)}(x)\right|\le 2n_2(\sigma,\ x_3)M^{1-\frac{x_3^2}{a^2}}\delta^{\frac{x_3^2}{a^2}},$$

$$\left|\frac{\partial\vec{\mathrm{H}}(x)}{\partial x_i}-\frac{\partial\vec{H}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i}\right|\le 2n_2^i(\sigma,\ x_3)M^{1-\frac{x_3^2}{a^2}}\delta^{\frac{x_3^2}{a^2}},$$

В этом случае n_1,n_2,n_1^i,n_2^i-определяются как в теорема 6 выше.

Следствие 7. Для любого $x\in D$ справедливы предельные равенства

$$\lim_{\delta\to0}\vec{\mathrm{E}}_{\sigma(\delta)}(x)=\vec{\mathrm{E}}(x),\ \lim_{\delta\to0}\frac{\partial\vec{\mathrm{E}}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i}=\frac{\partial\vec{\mathrm{E}}(x)}{\partial x_i},\ i=1,2,3$$

$$\lim_{\delta\to0}\vec{\mathrm{H}}_{\sigma(\delta)}(x)=\vec{\mathrm{H}}(x),\ \lim_{\delta\to0}\frac{\partial\vec{\mathrm{H}}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i}=\frac{\partial\vec{\mathrm{H}}(x)}{\partial x_i},\ i=1,2,3$$

Следствие 8. Если $x \in \overline{D}_\varepsilon$, то семейство функций $\left\{\vec{\mathrm{E}}_{\sigma(\delta)}(x)\right\}$, $\left\{\vec{\mathrm{H}}_{\sigma(\delta)}(x)\right\}$ и $\left\{\dfrac{\partial\vec{\mathrm{E}}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i}\right\}$, $\left\{\dfrac{\partial\vec{\mathrm{H}}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i}\right\}$ сходится равномерно при $\delta \to 0$, т.е.:

$$\vec{\mathrm{E}}_{\sigma(\delta)}(x) \Rightarrow \vec{\mathrm{E}}(x), \qquad \frac{\partial\vec{\mathrm{E}}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial\vec{\mathrm{E}}(x)}{\partial x_i},$$

$$\vec{\mathrm{H}}_{\sigma(\delta)}(x) \Rightarrow \vec{\mathrm{H}}(x), \qquad \frac{\partial\vec{\mathrm{H}}_{\sigma(\delta)}(x)}{\partial x_i} \Rightarrow \frac{\partial\vec{\mathrm{H}}(x)}{\partial x_i}, \quad i=1,2,3.$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая диссертационная работа посвящена изучению продолжения решений уравнений лапласова и стационарного электромагнитного поля.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Для случая системы уравнений векторного лапласова поля доказан аналог критерия Голубева-Привалова, выражающего необходимые и достаточные условия преобразования интеграла типа Коши в интегральную формулу Коши для аналитических функций;

2. Построение формулы Карлемана, представляющей решение задачи Коши в трехмерной ограниченной области для системы уравнений произвольного векторного поля;

3. В трехмерной ограниченной области построены регуляризованное приближенное решение задачи Коши и производная решения с помощью функции Карлемана для произвольных систем уравнений векторного поля;

4. Для системы стационарных уравнений электромагнитного поля построено решение задачи Коши, регуляризация производной решения в явном виде и получена оценка условной устойчивости по методу М.М.Лаврентьева в ограниченных областях.

.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 AT SAMARKAND STATE UNIVERSITY

SAMARKAND STATE UNIVERSITY NAMED AFTER SHAROF RASHIDOV

MARDONOV ZHOLGOSH ABDUMAJITOVICH

ON THE CONTINUATION OF THE LAPLACE AND THE ELECTROMAGNETIC FIELD WITH GIVEN VALUES ON A PART OF THE BOUNDARY OF THE DOMAIN

01.01.02-Differential equations and mathematical physics

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Samarkand – 2025

The theme of the dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry higher education, science and innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2022.4.PhD/FM790

Dissertation was prepared at Samarkand State University named after Sharof Rashidov.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.samdu.uz) and the «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor:	**Sattorov Ermamat Norkulovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Docent
Official opponents:	**Khalmukhamedov Alimdjan Rakhimovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Durdiyev Durdimurod Qalandarovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	**Urganch state university**

Defense will take place «20» мая 2025 at 10⁰⁰ at the meeting of Scientific Council number DSc. 03/30.12.2019.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: 140104, Uzbekistan, Samarkand city, University Boulevard 15, Ph.: (+99866) 231-06-32, fax: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at Samarkand State University (is registered №______) (Address: 140104, Uzbekistan, Samarkand city, University Boulevard 15, Ph.: (+99866) 231-06-32, fax: (+99866) 235-19-38).

Abstract of dissertation sent out on « 6 » 05 2025 year

(Mailing report № 1 on « 6 » 05 2025 year)

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI

A.S.Soleev
Chairman of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

A.M.Khalkhuzhaev
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

A.B.Khasanov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

INTRODUCTION (abstract of the PhD thesis)

The aim of the research work is the study problem of transforming a Cauchy-type integral for the laplace field into a Cauchy integral, as well as solving the Cauchy problem for a system of equations of an arbitrary vector field and a stationary electromagnetic field and constructing a regularization of the derivative of the solution in explicit form in bounded domains and obtaining an estimate of conditional stability.

The object of study consists of the laplace and arbitrary vector fields, also system of the stationary equations of the electromagnetic field.

Scientific novelty of the research work is as follows:

the case of a system of laplace vector field equations, an analogue of the Golubev-Privalov criterion was proven, expressing the necessary and sufficient conditions for transforming a Cauchy-type integral into a Cauchy integral formula for analytic functions;

Carleman formula representing the solution of the Cauchy problem in a three-dimensional bounded domain for a system of equations of an arbitrary vector field;

in a three-dimensional bounded domain, a regularized approximate solution of the Cauchy problem and the derivative of the solution are constructed using the Carleman function for an arbitrary system of vector field equations;

for the system of stationary equations of the electromagnetic field, a solution of the Cauchy problem was constructed, the derivative of the solution was regularized in explicit form, and an estimate of conditional stability was obtained using the M.M. Lavrentiev method in bounded domains.

Implementation of the research results. Based on the scientific results obtained regarding the continuation of laplace and electromagnetic fields into the domain, given the values at a part of the domain boundary:

the results obtained in the process of solving the Cauchy problem for a system of homogeneous Maxwell equations in bounded domains using the Carleman functions of solving the ill-posed Cauchy problem for a system of elliptic equations, published in leading foreign journals (Differential Equations, 2021, vol.57, 86–99; Mathematical Notes, 2021, vol.110, no.3, 393–408; Russian Mathematics, 2021, vol.65, no.2, 22–38) the results were used to derive the Carleman formula and find a regularized solution to the Cauchy problem for a system of generalized Cauchy–Riemann equations in bounded and infinite domains.

the theoretical results on the transformation of the Cauchy-type integral for the laplace field into the Cauchy integral for a three-dimensional bounded field, the analogue of the Carleman formula for an arbitrary vector field, the conditional stability estimate and regularized solution of the Cauchy problem for a stationary electromagnetic field given its value in a part of the boundary of the field were used in the framework of the scientific research project "Mathematical modeling of a thermodynamically consistent mathematical model of a two-phase medium in the interactive dispersive approximation" (Reference No. 15301\2-01-27 of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences dated March 20, 2023). The application of the scientific results made it possible to solve ill-posed problems on the interactive dispersive approximation of a thermodynamically consistent mathematical model of a two-phase medium

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation is 119 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI

СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ

LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo'lim (I часть; I part)

1. Сатторов Э.Н., Мардонов Ж.А. Задача Коши для системы уравнений Максвелла // Сибирский математический журнал. - Новосибирск, 2003. - Т.44.- №4. -С. 851-861. (№40. Research Gate. IF=0.334).
2. Мардонов Ж.А. Регуляризация решения задачиКоши для системы уравнений Максвелла // Узбекский математический журнал. – Ташкент, 2010. - №3.-С.58-65.(01.00.00;№6).
3. Мардонов Ж.А. О продолжении Лапласового поля // Известия вузов. Математика. 2019. №8. – С.39-45. Россия (Scopus IF=0.373).
4. Mardonov J.A. Uch o'lchovli fazoda Laplas maydoni uchun Karleman formulasi // SamDU ilmiy axborotnomasi, 2023, №1. – B. 136–140 (01.00.00; №02).
5. Мардонов Ж.А. Задача Коши для неоднородного Лапласова поля // Научный вестник Самаркандского университета, 2023, №3. – С. 56 – 61 (01.00.00; №02).
6. Мардонов Ж.А., Абдумажитов Х.Ж. Задача Коши для уравнений электромагнитного поля // Научный вестник Самаркандского университета, 2024, №3. – С. 121-131 (01.00.00; №02).
7. Мардонов Ж.А. Формула Карлемана для системы уравнений электромагнитного поля в пространстве // Научный вестник Бухарского государственного университета, 2024, №7. – С. 60-70 (01.00.00; №03).

II бўлим (II часть; II part)

8. Мардонов Ж.А. Задача Коши для системы уравнений Максвелла. Алгоритмический анализ некорректных задач. Тезисы докладов Всероссийской научной конференции, посвященной памяти В.К.Иванова – Екатеринбург, 2 – 6 февраля 1998. - С.157.
9. Сатторов Э.Н., Мардонов Ж.А. Регуляризация решения задачи Коши для однородной системы уравнения Максвелла // Тезисы докладов международной научной конференции по вырождающимся дифференциальным уравнениям и уравнения смешенного типа посвященная 1200 летию Ахмада Ал-Фергани. – Фергана, 16-19 ноября 1998. – С. 107-108.
10. Сатторов Э.Н., Мардонов Ж.А. О задаче Коши для системы уравнений Максвелла // Abstracts of international conference ILL – posed and non-classical problems of mathematical physics and analysis. – Samarkand, september 11 - 15, 2000. – С. 77.
11. Sattorov E.N., Mardonov J. About the Cauchy problem for the homogeneous sustem of Maxwell equations in three dimensional domain //

International conference III – Posed and inverse problems dedicated to prof. M.M.Lavrent'ev on the occasion of his 70th anniversary. – Novosibirsk, 2002. – P. 146.

12. Мардонов Ж.А. Регуляризация решения задачи Коши для однородной системы уравнения Максвелла // Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики. Труды международной конференции. – Тошкент, 16-19 ноябрь, 2004. – С. 241-244.

13. Ишанкулов Т.И., Мардонов Ж.А. О продолжение Лапласова поля // Международная конференция, посвященная 80–летию со дня рождения академика Михаила Михайловича Лаврентьева'' Обратные и некорректные задачи математической физики''. – Новосибирск, Россия, 5-12 августа 2012. – С. 134.

14. Ишанкулов Т., Мардонов Ж.А. Интегральные представления Лапласовых полей в пространстве // Некорректные и неклассические задачи математической физики и анализа. Тезисы научно – практического семинара. – Самарканд, 5 – 6 июля 2012 . – С. 35 – 36.

15. Мардонов Ж.А. Задача Коши для системы уравнений Максвелла на плоскости // International conference on nonlinear analysis and its applications. September 19-21, 2016, Samarkand, Uzbekistan, – С.105-106.

16. Сатторов Э.Н., Мардонов Ж.А. Problem Cauchy for the laplace field in bounded domain // International conference "Mathematical analysis and its applications in moderm mathematical physics''. Samarkand, September 23–24, 2022.

17. Мардонов Ж.А. Задача Коши для неоднородного Лапласова поля. Ali Qushchi tavalludining 620 yilligi hamda O'zbekiston respublikasi fanlar akademiyasining 80 yilligiga bag'ishlangan "Ali Qushchi – Mirzo Ulug'bek ilmiy maktabining buyuk elchisi" mavzusidagi xalqaro ilmiy anjuman materiallari 2023-yil 21-22 sentyabr. Samarqand. – B. 245 – 251.

18. Сатторов Э.Н., Мардонов Ж.А. Регуляризация решения задачи Коши для лапласова поля в ограниченной области. Zamonaviy analiz va matematik fizika masalalari : Respublika ilmiy – amaliy konferensiya materiallari to'plami. 2024-yil, 16-17 sentyabr, Samarkand. – B. 282.

Avtoreferatning oʻzbek, rus va ingliz (rezyume) tillaridagi nusxalari
Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universitetining
“Ilmiy axborotnomasi” jurnali tahririyatida tahrirdan oʻtkazildi (03.05.2025-yil).

Bosmaxona tasdiqnomasi

8136

2025-yil 3-mayda bosishga ruxsat etildi:
Ofset bosma qogʻozi. Qogʻoz bichimi 60x84 $^{1}/_{16}$.
“Times” garniturasi. Ofset bosma usuli.
Shartli b.t. 2,75. Adadi 50 nusxa. Buyurtma 7/4.

“Sardor poligraf” OK bosmaxonasida chop etildi.
Manzil: Samarqand viloyati, Samarqand tumani, Xishrav MFY.