

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT
UNIVERSITETI

AZIMOV ALIJON AXMADOVICH

ALGEBRAIK KO'PXILLIKNING MAXSUSLIKLARI ATROFIDA
PARAMETRIK YOYILMALARI

01.01.01 – Matematik analiz

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO'YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Samarqand – 2025

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)
dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD)
по физико-математическим наукам**

**Contents of dissertation abstract of the doctor of philosophy (PhD)
on physical-mathematical sciences**

Azimov Alijon Axmadovich

Algebraik ko'pxillikning maxsusliklari atrofida parametrik yoyilmalari 3

АЗИМОВ АЛИЖОН АХМАДОВИЧ

Параметрические разложения алгебраического многообразия вблизи его особенностей..... 19

Azimov Alijon Axmadovich

Parametric expansions of an algebraic variety near its singularities 35

E'lon qilingan ishlar ro'uxati

Список опубликованных работ

List of published works 39

SAMARQAND DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

SHAROF RASHIDOV NOMIDAGI SAMARQAND DAVLAT
UNIVERSITETI

AZIMOV ALIJON AXMADOVICH

ALGEBRAIK KO'PXILLIKNING MAXSUSLIKLARI ATROFIDA
PARAMETRIK YOYILMALARI

01.01.01 – Matematik analiz

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO'YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Samarqand – 2025

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiya mavzusi O'zbekiston respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2024.3.PhD/FM1170 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universitetida bajarilgan.
Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengashning veb-sahifasida (www.samdu.uz) va «Ziyonet» Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:

Soleyev Axmadjon

fizika-matematika fanlari doktori, professor

Rasmiy opponentlar:

Nikonorov Yuriy Gennadievich

fizika-matematika fanlari doktori, professor

Ikromov Isroil Akramovich

fizika-matematika fanlari doktori, professor

Yetakchi tashkilot:

**V.A. Steklov nomidagi matematika institutining
Sankt-Peterburg bo'limi, RFA (Rossiya)**

Dissertatsiya himoyasi Samarqand davlat universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 raqamli Ilmiy kengashning 2025 yil «___» _____ soat ___ dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 140104, Samarqand sh., Universitet xiyoboni, 15-uy. Tel.: (+99866)231-06-32, faks: (+99866) 235-19-38, , e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertatsiya bilan Samarqand davlat universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (___ raqam bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 140104, Samarqand sh., Universitet xiyoboni, 15-uy. Tel.: (+99866) 231-06-32, faks: (+99866) 235-19-38.)

Dissertatsiya avtoreferati 2025 yil «___» _____ kuni tarqatildi.
(2025 yil «___» _____ dagi _____ raqamli reestr bayonnomasi).

S.N. Laqev

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash rais o'rinbosari, fizika-matematika fanlari doktori, professor, akademik

A.M. Xalxo'jayev

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, fizika-matematika fanlari doktori, professor

I.A. Ikromov

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar rais o'rinbosari, fizika-matematika fanlari doktori, professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahonda olib borilayotgan ilmiy va amaliy tadqiqotlar ko‘plab jarayonlarning matematik modellari uchun darajali geometriya, noxiziqli analiz, algebraik tenglamalarning yechimlarini maxsus nuqtalari atrofida va maxsus nuqtalar egri chiziqlari yaqinidagi asimptotik yoyilmasini topish masalalarini tadqiq qilishga olib kelinadi. Hozirgi kunda algebraik ko‘pxilliklarning maxsusliklari atrofida parametrik yoyilmasini topish fizika, populyatsion biologiya jarayonlarini modellashtirish, robototexnika, gidrodinamika, bir jinsli fazo geometriyasi, osmon jismlari mexanikasi, dinamik sistemalar va boshqa ko‘plab sohalaridagi tadqiqotlarning eng ko‘p o‘rganilayotgan muhim masalalaridan hisoblanadi. Bu borada darajali geometriya, jumladan Nyuton ko‘pyoqliklari usullari ko‘plab noxiziqli masalalarni tadqiq qilishning eng samarali usullardan biri bo‘lib kelmoqda va boshqa amaliy muammolarni hal qilish bilan bog‘liq masalalarni tadqiq qilishga alohida e‘tibor qaratilmoqda.

Jahonda noxiziqli muammolarni hal qilish uchun darajali geometriya metodlarini takomillashtirishga qaratilgan ilmiy tadqiqotlar olib borilmoqda. Ushbu yo‘nalishda darajali geometriya usullarini noxiziqli algebraik tenglamalar va differensial tenglamalarga qo‘llanilishiga hamda bu usullar asosida kompyuter dasturlari ishlab chiqishga oid tadqiqotlar muhim ahamiyat kasb etmoqda. Bu ishlab chiqilayotgan metod va algoritmlarni ko‘plab noxiziqli masalalarga qo‘llanilishiga, masalaning ishonchli yechimini hosil qilishga va yuqori darajadagi murakkab masalalarga tatbiq etilishiga imkon yaratadi. Ushbu yo‘nalishda algebraik tenglamalar, oddiy va xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemalarining yechimlarini maxsusliklar atrofida parametrlash masalalariga oid tadqiqotlarni olib borish dolzarb vazifalardan hisoblanmoqda.

Respublikamizda noxiziqli analiz va darajali geometriya metodlari yordamida algebraik ko‘pxilliklarning maxsusliklarini tadqiq etishning samarali usullarini aniqlash hamda topilgan yechimlarni amaliyotda qo‘llash bo‘yicha keng ko‘lamli chora-tadbirlar amalga oshirilmoqda. 2019-yilda qabul qilingan matematika ta‘limi va fanlarini yanada rivojlantirishga oid Prezident qaroriga binoan “Algebra va uning tatbiqlari, differensial tenglamalar va uning tatbiqlari, chiziqsiz tizimlar, dinamik tizimlar va ularning tatbiqlarini matematik modellashtirish, stoxastik tahlil, tibbiy-biologik informatika, hisoblash matematikasi”¹ fanlarining ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish matematika fanining asosiy vazifalari va faoliyat yo‘nalishlari etib belgilangan. Ushbu vazifalarni amalga oshirishda, xususan zamonaviy noxiziqli analiz va darajali geometriyaning Nyuton ko‘pyoqlari, normallashtirilgan Richchi oqimining tenglamasi, ko‘pxilliklarning maxsusliklari atrofida parametrlash nazariyalarini rivojlantirish muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

¹ O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019 yil 9 iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta‘limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” gi qarori.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi PF-4947-son “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmoni, 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Mazkur dissertatsiya respublika fan va texnologiyalari rivojlantirishning IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Differensial geometriya va nazariy fizikada Eynshteynning invariant metrikalarini o‘rganishda uch o‘zgaruvchili o‘n ikkinchi darajali algebraik tenglama bilan ifodalanadigan algebraik ko‘pxillikni o‘rganishga ehtiyoj tug‘ildi. Ba’zi bir ishlarda maxsus bir jinsli fazolarning uch parametrli oilasi normallashtirilgan Richchi oqimi nuqtai nazaridan o‘rganib chiqilgan. So‘ngi paytlarda normallashtirilgan Richchi oqimini bir jinsli fazolarda o‘rganishga qiziqish ortib bormoqda. Richchi oqimlari Riman metrikasining ko‘pxilliklardagi evolyutsiyasini beradi. Richchining normallashtirilgan oqimining tenglamasi bir nechta oddiy differensial tenglamalar sistemasiga keltiriladi. Bunday sistemaning maxsus nuqtalariga Eynshteynning invariant metrikalari mos keladi. Shuning uchun bunday sistemalarning maxsus nuqtalarini o‘rganish dolzarb masalalardan hisoblanadi. Ushbu ishda darajali geometriyaning algoritmlari va kompyuter algebrasining dasturlari yordamida maxsus nuqtalar va maxsus nuqtalar egri chiziqlari atrofida ko‘pxillikning lokal parametrizatsiyalari olingan.

Nikonorovning 2000-yildagi ishida uch-lokal simmetrik deb nomlangan umumlashgan Uollax fazosi kiritilgan. Bu ishda bunday fazoning har birida (o‘xshashlik aniqligigacha) hech bo‘lmaganda bitta Eynshteynning invariant metrikasiga ega ekanligi isbotlangan. A.M. Lomshakov, Y.G. Nikonorov, E.B. Firsovlarning ishlarida uchta lokal-simmetrik fazolarda Eynshteynning invariant metrikalarining mavjudligi va ularning miqdori masalalari 2003-yildagi maqolada qarab chiqilgan. Bunda Eynshteynning invariant metrikalari soni bittadan to‘rttagacha (o‘xshashlik aniqligigacha) bo‘lishi mumkinligi isbotlangan. Olingan natijalarga asoslanib, Eynshteynning yangi metrikalariga doir misollar keltirilgan.

N.A. Abiev, A.Arvanitoyorgos, Y.G.Nikonorov, P.Siasos ishlarida Uollaxning umumlashgan fazolarida normallashtirilgan Richchi oqimlarining asimptotik xossalari qarab chiqilgan bo‘lib, ular tekis dinamik sistema bilan ifodalangan. Uollaxning simmetrik bo‘lmagan umumlashgan fazolari uchta maxsus musbat sonlar uchligi bilan parametrizatsiyalanadi. Bunda strukturali hamma fazolarda normallashtirilgan Richchi oqimlarining maxsus nuqtalari tiplari to‘la aniqlangan. Hozirgi vaqtda “Uollaxning umumlashgan fazosi“ atamasi ko‘p ishlarda foydalaniladi. Jumladan, A. Arvanitoyeorgos, Y.Wang (2017), A.Arvanitoyeorgos, N.P.Souris (2015) maqolalarida ixtiyoriy invariant Riman

metrikasidagi umumlashgan Uollax fazolarida berilgan bir jinsli geodezik chiziqlar tadqiq qilingan va misollar keltirilgan.

Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilayotgan oliy o'quv yurtining ilmiy-tadqiqot ishlari bilan bog'liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti ilmiy-tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq №SMat-03 raqamli "Nochiziqli analiz masalalarini darajali geometriya va kompyuter algebrasi tizimlari yordamida tadqiq qilish va tasniflash" nomli ilmiy-tadqiqot ishlari rejasida doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi darajali geometriya algoritmlari va kompyuter algebrasi dasturlari yordamida algebraik ko'pxilliklarning maxsus nuqtalari va maxsus nuqtalaridan iborat egri chiziqlari yaqinidagi parametrik yoyilmalarini topishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

koordinatalari butun sonlardan iborat bo'lgan n -o'lchovli vektorlar yordamida unimodulyar matritsalarini tuzish va darajali almashtirishlarga qo'llash;

nochiziqli algebraik tenglamalarning yechimlarini maxsus nuqtalar yaqinidagi asimptotikasi va asimptotik yoyilmasi topish;

n ikkinchi darajali uch o'zgaruvchili algebraik ko'phad bilan ifodalanadigan algebraik ko'pxillikning maxsus nuqtalari va maxsus nuqtalari egri chiziqlarini aniqlash;

barcha maxsus nuqtalar va maxsus nuqtalar egri chiziqlari yaqinida Ω ko'pxillikning tuzilishi fazoning chekli qismida va cheksizlikda darajali geometriya metodlari yordamida tadqiq qilish va Nyuton ko'pyoqligini qurish.

Tadqiqot obyekti algebraik ko'phad, Nyuton ko'pyoqliligi, algebraik ko'pxilliklar, Richchi oqimi, Eynshteynning metrik invariantlaridan iborat.

Tadqiqot predmeti unimodulyar matritsa, ikkinchi va uchunchi tartibli maxsus nuqtalar, maxsus nuqtalar egri chiziqlari, ko'pyoqlining grafi, darajali almashtirishlar tashkil etgan.

Tadqiqot usullari. Dissertatsiya ishida darajali geometriya, kompyuter algebrasi, Nyuton ko'pyoqligi, parametrik yoyilma, oshkormas funksiya haqidagi umumiy teorema yordamida darajali yoyilmalarni topish usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

koordinatalari butun sonlardan iborat bo'lgan n o'lchovli vektorlar asosida unimodulyar matritsalarini tuzish usuli isbotlangan va darajali almashtirishlarga qo'llanilib, bu matritsa bilan chiziqli almashtirish qism fazosini koordinatalar fazosiga o'tkazilishi asoslangan;

nochiziqli algebraik tenglamalarning yechimlarining maxsus nuqtalari atrofida asimptotik yoyilmalarini topish usuli darajali geometriya metodlari yordamida ishlab chiqilgan va bu yoyilmalarning xossalari isbotlangan;

n ikkinchi darajali uch o'zgaruvchili algebraik ko'phad bilan ifodalanadigan Ω algebraik ko'pxillikning maxsus nuqtalari va maxsus nuqtalar egri chizig'i atrofida Ω ko'pxillikning lokal parametrik yoyilmalari topilgan;

fazoning chekli qismida hamda cheksizlikda Ω ko'pxillikning maxsusliklarining kichik atrofida Nyuton ko'pyoqlari qurilgan, har bir maxsuslik atrofida qisqartma tenglamalari topilgan va bu tenglamalar uchun parametrik yoyilmalarini topish usuli isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

Ω algebraik ko'pxillikning maxsus nuqtalari atrofida lokal parametrik yoyilmalari topilgan, chiziqli almashtirishning unimodulyar matritsasini tuzish algoritmi keltirilgan;

algebraik ko'pxillikning shoxalarini maxsus nuqtalari yaqinida, maxsus nuqtalari egri chiziqlari yaqinida va cheksizlikda hisoblash metodlari ishlab chiqilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi Nyutonning ko'pyoqliklari usullarini, darajali geometriya usullari, kompyuter algebra, parametrizatsiyalash usullari, darajali almashtirishlar, PolyhedralSets CKA Maple 2021 paketlarining qo'llanilishi va isbotlangan teoremlar hamda matematik mulohazalarning qat'iyligi bilan asoslanadi.

Tadqiqotning ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati algebraik tenglama bilan ifodalangan algebraik ko'pxillikning maxsus nuqtalari va maxsus nuqtalaridan iborat egri chiziqlari yaqinidagi yechimlarini topish uchun yangi algoritm taklif etilishi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati olingan ilmiy natijalarning algebraik ko'pxillikning maxsus nuqtalari yaqinidagi parametrik yoyilmalari, differensial geometriyada Richchining normallashtirilgan oqimini o'rganishda kelib chiqadigan o'n ikkinchi darajali algebraik tenglamalarining yechimlarini topish, shu bilan birga Ω ko'pxillikning maxsus nuqtalar atrofidagi tuzilish xususiyatlarini tahlil qilish kabi jarayonlarning modellariga tadbiq etilishi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Algebraik ko'pxillikning maxsusliklari atrofida parametrik yoyilmalari bo'yicha olingan natijalar asosida:

dissertatsiya ishi doirasida olingan natijalardan №FFMN-2022-0004 - "Непрерывные и дискретные модели математической физики и асимптотические методы" mavzusidagi ilmiy-tadqiqot ishida foydalanilgan (Moskva shahrining M.V.Keldysh nomidagi Rossiya Fanlar Akademiyasi Amaliy matematika institutining 2024-yil 28-maydagi 11103-9422/484-sonli ma'lumotnomasi). Ilmiy natijalarning qo'llanilishi nohiziq xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasining yechimlari asimptotikasini hisoblashda darajali-logarifmik almashtirishni qo'llash, astrofizikada o'rganiladigan uch parametrli aynigan Richchi oqimlarining parametrik yoyilmalarini hisoblash imkonini bergan;

darajali almashtirishda unimodulyar matritsalarini hisoblash masalasini yechish jarayonida olingan ilmiy natijalar yetakchi xorijiy jurnallarda (Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2023, Vol. 63, No. 5, pp. 687-703; Programming and Computer Software, 2023, Vol. 49, No. 8, pp. 842-853; Mathematics in Computer Science, 2024, Vol. 18, No. 22, pp. 1-21) Hamilton

sistemasini yechimini topishda foydalanilgan. Ilmiy natijalarning qo‘llanilishi Hamilton sistemalarida rezonans holatlarini hisoblash, ko‘p parametrlil muvozanat nuqtalarining turg‘unligini tadqiq etish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiyaning asosiy natijalari 7 ta xalqaro va 2 ta Respublika miqiyosidagi, jami 9 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda muhokamadan o‘tgan.

Tadqiqot natijalarining e‘lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 17 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining dissertatsiyalar asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 8 ta, jumladan 4 tasi xorijiy va 4 tasi Respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat bo‘lib, 114 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, ob‘ekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma‘lumotlar berilgan.

Dissertatsiyada quyidagi natijalar olingan.

1. Algebraik ko‘pxillikning maxsusligini yechish usuli parametrik yoyilma ko‘rinishida ishlab chiqilgan. Ω algebraik ko‘pxillik quyidagi tenglama bilan berilgan bo‘lsin,

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

bunda f – haqiqiy koeffitsiyentli ko‘phad. $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) = X^0$ nuqta *maxsus nuqta* deb aytiladi, agar bu nuqtada barcha xususiy hosilalar $\partial f / \partial x_i = 0, i = 1, \dots, n$ bo‘lsa. Quyidagi yoyilmani hisoblash usuli ishlab chiqilgan.

$$x_i = x_i^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{ik}(T) \|X - X^0\|, \quad i = 1, \dots, n,$$

bunda $T = (t_1, \dots, t_n)$ – global parametr, φ_{ik} – ratsional funksiyalar va $\|X - X^0\|$ – norma. Xuddi shunday natija maxsus nuqtalar egri chizig‘i uchun yechilgan. Bu masalalar I, II boblarda keltirilgan.

2. Agar $f(X)$ ko‘phad kvazibirjinsli bo‘lsa u holda shunday $\alpha = (\alpha_{ij})$

unimodulyar matritsa topiladiki, bunday matritsali

$$x_i = y_1^{\alpha_{i1}} y_2^{\alpha_{i2}} \dots y_n^{\alpha_{in}}, i = 1, \dots, n$$

darajali almashtirish $f(X)$ ko‘phadni $g(y_1, \dots, y_{n-1})$ ko‘phadga o‘tkazadi. Bu masala I bobda yechilgan.

3. Bu metodlarning kompyuterda qo‘llanilishi berilgan. Kompyuter algebrasi algoritmlari yordamida φ_{ik} funksiyalarni hisoblash usuli ko‘rsatilgan. Bu masala I bobda yechilgan.

4. Yuqorida keltirilgan natijalar o‘n ikkinchi darajali algebraik ko‘pxillikning maxsus nuqtalari va maxsus nuqtalari egri chiziqlari yaqinida parametrik yoyilmalarini hisoblash uchun qo‘llanilgan. Bu ko‘pxillik bir jinsli fazolar geometriyasida kelib chiqib quyidagi ko‘phad bilan beriladi:

$$\begin{aligned}
 Q(s_1, s_2, s_3) \stackrel{\text{def}}{=} & (2s_1 + 4s_3 - 1)(64s_1^5 - 64s_1^4 + 8s_1^3 + 240s_1^2s_3 - 1536s_1s_3^2 \\
 & - 4096s_3^3 + 12s_1^2 - 240s_1s_3 + 768s_3^2 - 6s_1 + 60s_3 + 1) - \\
 & - 8s_1s_2(2s_1 + 4s_3 - 1)(2s_1 - 32s_3 - 1)(10s_1 + 32s_3 - 5) - \\
 & - 16s_1^2s_2^2(52s_1^2 + 640s_1s_3 + 1024s_3^2 - 52s_1 - 320s_3 + 13) + \\
 & + 64(2s_1 - 1)s_2^3(2s_1 - 32s_3 - 1) + 2048s_1(2s_1 - 1)s_2^4 = 0 \quad (1)
 \end{aligned}$$

bunda s_1, s_2, s_3 – elementar simmetrik ko‘phadlar bo‘lib, mos ravishda quyidagilardan iborat

$$s_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad s_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3, \quad s_3 = a_1a_2a_3.$$

Bu natijalarning hammasi aktual va talabga ega. Bulardan birinchi natija eng muhimdir, chunki ko‘p masalalarda bir nechta noma’lumli algebraik tenglamalarni yechish lozimdir.

To‘rtinchi masalaning muhimligi shundan iboratki, Riman ko‘pxilligida Riman metrikasining bir parametrli oilasi uchun normallashtirilgan Richchi oqimi tenglamasini o‘rganish R.Gamilton tomonidan boshlangan. Richchining normallashtirilgan oqimining tenglamasi Uollaxning umumlashtirilgan fazosida quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric_g + 2g(t) \frac{S_g}{n}, \quad (2)$$

bunda Ric_g va S_g – mos ravishda Richchi egriligining formasi va skalyar egriligini M^n silliq ko‘pxilligida $g(t)$ Riman metrikasining bir parametrli oilasida ifodalaydi. Bu tenglama Eynshteynning invariant metrikalarini o‘rganishda va Richchining normallashtirilgan oqimining ayrim asimptotik xossalarini invariant Riman metrikalari uchun umumlashtirilgan Uollax fazolarida o‘rganishda paydo bo‘ladi.

Uollaxning umumlashgan fazosi (“uchta lokal – simmetrik fazo” nomi bilan) (Y.G.Nikonorov, 2000) ishida kiritilgan bo‘lib, har qanday bunday fazo hech bo‘lmaganda bitta (o‘xshashlik aniqligigacha) Eynshteynning invariant metrikasiga ega bo‘lishi isbot qilingan. Bunday har bir fazo bittadan to‘rttagacha Eynshteyn metrikasiga (o‘xshashlik aniqligigacha) ega bo‘lishi (A.M.Lomshakov, Y.G.Nikonorov, E.B.Firsov, 2003) ishida isbot qilingan. Bu fazolarning klassifikatsiyasi deyarli bir vaqtda (Y.G.Nikonorov, 2016) bunda “Uollaxning umumlashgan fazosi” atama ishlatilgan va deyarli shu vaqtda (Z.Chen, Y.Kang, K.Liang, 2016) olingan. Hozirgi vaqtda “Uollaxning

umumlashgan fazosi“ atamasi ko‘p ishlarda foydalaniladi. Masalan, [J.Lauret , C.Will -2022, A.Arvanitoyeorgos, Y.Wang -2017, A.Arvanitoyeorgos, N.P.Souris -2015].

(2) tenglamani invariant Riman metrikasining (x_1, x_2, x_3) parametrlariga nisbatan birinchi tartibli uchta oddiy differensial tenglamalar sistemasi bilan ifodalash mumkin.

$dx_1/dt = f(x_1, x_2, x_3)$, $dx_2/dt = g(x_1, x_2, x_3)$, $dx_3/dt = h(x_1, x_2, x_3)$, (3) bunda $x_i = x_i(t) > 0$ – invariant metrikaning parametrlari.

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, x_3) &= -1 - a_1 x_1 \left(\frac{x_1}{x_2 x_3} - \frac{x_2}{x_1 x_3} - \frac{x_3}{x_1 x_2} \right) + x_1 B, \\ g(x_1, x_2, x_3) &= -1 - a_2 x_2 \left(\frac{x_2}{x_1 x_3} - \frac{x_3}{x_1 x_2} - \frac{x_1}{x_2 x_3} \right) + x_2 B, \\ h(x_1, x_2, x_3) &= -1 - a_3 x_3 \left(\frac{x_3}{x_1 x_2} - \frac{x_1}{x_2 x_3} - \frac{x_2}{x_1 x_3} \right) + x_3 B, \\ B &= \left(\frac{1}{a_1 x_1} + \frac{1}{a_2 x_2} + \frac{1}{a_3 x_3} - \left(\frac{x_1}{x_2 x_3} + \frac{x_2}{x_1 x_3} + \frac{x_3}{x_1 x_2} \right) \right) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right)^{-1} \end{aligned}$$

$a_i \in (0, 1/2]$, $i = 1, 2, 3$ parametrlar ko‘rilayotgan Uollaxning umumlashgan fazosi bilan aniqlanadi.

Bu ishda $a = (a_1, a_2, a_3)$ parametrning shunday qiymatlari qarab chiqiladiki, ular uchun (3) tenglamalar sistemasi Eynshteynning invariant metrikalariga mos keluvchi maxsus nuqtalarga egadir. $a = (a_1, a_2, a_3)$ parametrning shunday Ω to‘plami o‘rganilganki ular uchun (3) tenglamalar sistemasi degeneratsiyalangan (aynigan) maxsus nuqtaga ega.

(3) tenglamalar sistemasi kamida bitta aynigan maxsus nuqtaga ega bo‘ladigan $a = (a_1, a_2, a_3)$ parametrning qiymatlari to‘plami Ω (1) tenglama bilan ifodalanishi haqidagi teorema N.A.Abiev, A.Arvanitoyorgos, Y.G.Nikonorov, P.Siasos ishlarida isbot qilingan.

A.D.Bryuno va A.B.Batxin ishida simmetriya mulohazalariga ko‘ra $a = (a_1, a_2, a_3)$ koordinatalardan $A = (A_1, A_2, A_3)$ koordinatalarga o‘tilgan bo‘lib, Ω ko‘pxillikning hamma maxsus nuqtalari A koordinatalarda topilgan. Bu yerda uchunchi tartibli beshta nuqta, ikkinchi tartibli uchta nuqta va birinchi tartibli maxsus nuqtalarning 9 ta algebraik egri chiziqlari mavjud.

Bunda uchta uchunchi tartibli, bitta ikkinchi tartibli va uchta maxsus nuqtalar egri chiziqlari asosiy bo‘lib, qolgan maxsus nuqtalar bulardan A_1, A_2 tekislikni $\pm 2\pi/3$ burchakka burish natijasida hosil bo‘ladi.

Bundan tashqari, shu ishda Ω ko‘pxillik bilan $A_3 = const$ tekisliklarning kesimlari ham hisoblangan va fazoning cheklangan qismi $\mathbb{R}^3 = \{A_1, A_2, A_3\}$ da Ω ko‘pxillik bir o‘lchovli F_1, F_2, F_3 va ikki o‘lchovli G_1, G_2, G_3 shoxalardan iborat ekanligi, hamda chegaralari $A_3 = 1/2$ tekislikda bo‘lgan F_i^\pm, G_i^\pm bo‘laklarga bo‘linganligi isbot qilingan.

Bu dissertatsiyada darajali geometriya algoritmlari va kompyuter algebrasi programmalarini yordamida 4 ta asosiy maxsus nuqtalar va 3 ta birinchi tartibli maxsus nuqtalarning 3 ta egri chiziqlarining yaqin atrofida ko'pxillikning lokal parametrizatsiyalari olingan.

Birinchi bobda quyidagi 4 ta masalalar yechiladi.

1-masala. n – o'lchovli haqiqiy \mathbb{R}^n fazoda m , ($m < n$) – ta butun koordinatali A_1, \dots, A_m vektorlar berilgan bo'lsin. Uning chiziqli qobig'i

$$L = \left\{ X = \sum_{j=1}^m \lambda_j A_j, \lambda_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, m \right\}$$

\mathbb{R}^n fazoning qism fazosini tashkil qiladi. Shunday α unimodulyar matritsani topish kerakki,

$$X\alpha = Y$$

almashtirish L qism fazoni koordinatalar qism fazosi M ga akslantirsin:

$$M = \{Y: y_{n-l+1} = \dots = y_n = 0\},$$

bunda $l = \dim L$. Matritsa unimodulyar deb aytiladi, agar uning hamma elementlari butun sonlardan iborat bo'lib, $\det \alpha = \pm 1$ bo'lsa.

2-masala. Ikkita butun musbat a_1 va a_2 sonlar berilgan bo'lsin. Ularning eng katta umumiy bo'luvchisi $\text{EKUB}(a_1, a_2)$ ni topish kerak.

3-masala. Ikkita butun musbat a_1 va a_2 sonlar berilgan bo'lsin. Shunday α unimodulyar matritsani hisoblash kerakki, $(a_1, a_2)\alpha = (a_k, 0)$ yoki $(0, a_k)$ bo'lsin, bunda butun son $a_k > 0$.

4-masala. n – o'lchovli butun koordinatali $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ vektor berilgan bo'lsin. Shunday n – o'lchovli unimodulyar α matritsani topish kerakki, $A\alpha = C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ vektor faqat bitta noldan farqli $c_n \neq 0$ koordinataga ega bo'lsin.

1.1-teorema. *Eyler algoritmi yordamida shunday unimodulyar α matritsa hisoblanadiki, u to'rtinchi masalaning yechimini beradi.*

1.2-teorema. *Takroriy Eyler algoritmi shunday α matritsani hisoblash imkonini beradiki, u birinchi masalaning yechimidan iborat bo'ladi.*

$$X = (x_1, \dots, x_n), Q = (q_1, \dots, q_n)$$

berilgan bo'lsin, u holda

$$X^Q = x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n}$$

$f(X)$ ko'phadni quyidagi ko'rinishda yozamiz

$$f(X) = \sum f_Q X^Q,$$

bunda f_Q – o‘zgarmas koeffitsientlar va o‘xshash hadlar keltirilgan. $\mathbf{S} = \mathbf{S}(f) = \{Q: f_Q \neq 0\}$ to‘plam $f(X)$ to‘plamning tashuvchisi deb aytiladi. Uning qavariq qobig‘i $\Gamma(f)$ Nyuton ko‘pyoqligi deb aytiladi. Uning $\partial\Gamma(f)$ chegarasi umumlashgan $\Gamma_j^{(d)}$ yoqlardan iboratdir, bunda d – uning o‘lchovidir, $0 \leq d \leq n - 1$, j – esa uning raqamidir. Har bir $\Gamma_j^{(d)}$ yoqga

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = \sum f_Q X^Q \text{ po } Q \in \mathbf{S} \cap \Gamma_j^{(d)}$$

qisqartma ko‘phad mos keladi.

1.3-teorema. $\Gamma_j^{(d)}$ yoq uchun

$$\ln Y = \ln X \cdot \alpha$$

shunday α unimodulyar matritsali darajali almashtirish mavjudki, bunda

$\ln Y = (\ln y_1, \dots, \ln y_n)$, $\ln X = (\ln x_1, \dots, \ln x_n)$, bo‘lib qisqartirilgan yig‘indi

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = \sum f_Q X^Q \text{ po } Q \in \Gamma_j^{(d)} \cap \mathbf{S}$$

ni d ta koordinatali g ko‘phadga o‘tkazadi, ya‘ni

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = Y^T g(y_1, \dots, y_d),$$

bunda, $T = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Algebraik ko‘pxillikning maxsus nuqtalari yaqinida va maxsus nuqtalari egri chiziqlari yaqinida parametrik yoyilmalarining hisoblashning umumiy nazariyasi bayon qilingan. Ikki o‘lchovli ko‘pxillik o‘rganilayotganligi uchun bitta parametri kichik bo‘lib, ikkinchisi esa \mathbb{R} da o‘zgaradi. Bu holda faqat kichik parametr bo‘yicha yoyilmaning birinchi darajali hadlari hisoblanadi.

1.4-teorema.

$$f(X, \varepsilon, T) = \sum a_{Q,r}(T) X^Q \varepsilon^r$$

bo‘lsin, bunda $0 \leq Q \in \mathbb{Z}^n$, $0 \leq r \in \mathbb{Z}$, yig‘indi cheklidir, $a_{Q,r}(T)$ lar

$T = (t_1, \dots, t_m)$, argumentli funksiyalar bo‘lib $a_{00}(T) \equiv 0$, $a_{01}(T) \not\equiv 0$. U holda $f(X, \varepsilon, T) = 0$ tenglamaning yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$\varepsilon = \sum b_R(T) X^R,$$

bunda $0 \leq R \in \mathbb{Z}^n$, $0 < \|R\|$, $b_R(T)$ – koeffitsientlar T ning funksiyalari bo‘lib $a_{Q,r}(T)$ ning ratsional funksiyalardan iborat va $\|Q\| + r \leq \|R\|$ ni $a_{01}^{2\|R\|-1}$ ga bo‘linganidan iborat. ε ning yoyilmasi yagonadir. Bunda $\|Q\| = |q_1| + \dots + |q_n|$.

1.5-teorema. $\Gamma_j^{(d)}$ yoq uchun α unimodulyar matritsali shunday darajali almashtirish mavjudki, qisqartirilgan yig'indi $\hat{f}_j^{(d)}(X)$ ni d ta koordinatali yig'indi $\ln Y = (\ln y_1, \dots, \ln y_n), \ln X = (\ln x_1, \dots, \ln x_n), d$ ta koordinatali

$\hat{f}_j^{(d)}(X) = Y^S \hat{g}_j^{(d)}(Y)$, yig'indiga keltiradi, bunda

$$(\ln y_1, \dots, \ln y_n) = \ln Y = (\ln X)\alpha$$

$\hat{g}_j^{(d)}(Y) = \hat{g}_j^{(d)}(y_1, \dots, y_d) - ko'phad.$ Bu yerda $S \in \mathbb{Z}^n$. Qo'shimcha y_{d+1}, \dots, y_n koordinatalar lokal (kichik)dir.

Bundan tashqari, ushbu bobda α unimodulyar matritsasini hisoblash algoritmi, Nyuton ko'pyoqlisi qurish nazariyasi va polinomial tenglama yechimlarini parametrik ajratish usuli keltirilgan.

Ikkinchi bobda I bobda olingan natijalari Ω ko'pxillikning maxsus nuqtalari va maxsus nuqtalar egri chiziqlari yaqinida tadqiq qilish uchun tadbqiq qilinadi.

A.D.Bryuno va A.B.Batxinning ishida topilgan barcha maxsus nuqtalar va maxsus nuqtalar egri chiziqlari 2.1 paragrafda sanab o'tilgan. Shu paragrafda maxsus nuqta yaqinida ko'pxillikning parametrik yoyilmasini olish uchun 8 ta qadamdan iborat ketma-ketlik ko'rsatilgan.

§2.2 da quyidagilar isbot qilingan.

2.1-teorema. $P_1^{(3)}: (A_1, A_2, A_3) = (0, 0, 3/4)$ maxsus nuqta atrofida Ω ko'pxillik lokal parametrik yoyilmaga egadir

$$A_1 = [b_1(t) + \varepsilon]y_3^2, \quad A_2 = [b_2(t) + \varepsilon]y_3^2, \quad A_3 = \frac{3}{4} + y_3,$$

$$\varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)y_3^k \quad (4)$$

bunda $b_1(t), b_2(t), c_1(t)$ lar t ga bog'liq muayyan ratsional funksiyalardir.

§2.2 da $b_1(t), b_2(t), c_1(t)$ funksiyalar oshkor ko'rinishda ko'rsatilgan. Bu shoxalar birlashmasi $F_3^+ \cup G_3^+$ bo'laklarining yoyilmasi bo'lib, $y_3 = 0$ bo'lganda $P_1^{(3)}$ nuqtaga intiladi (o'tadi).

2.2-teorema. $P_2^{(3)}: (A_1, A_2, A_3) = (0, 0, -3/2)$ maxsus nuqta atrofida Ω ko'pxillik lokal parametrik yoyilmaga egadir.

$$A_1 = [b_1(t) + \varepsilon]y_3, \quad A_2 = [b_2(t) + \varepsilon]y_3, \quad A_3 = -\frac{3}{2} + y_3,$$

(4) bunda $b_1(t), b_2(t), c_k(t)$ lar t ning muayyan ratsional funksiyalaridir. §2.2 $b_1(t), b_2(t), c_1(t)$ funksiyalar oshkor ko'rinishda ko'rsatilgan. Bu shoxalar birlashmasi $F_2^- \cup G_2^-$ bo'laklarining yoyilmasi bo'lib, $y_3 = 0$ bo'lganda $P_2^{(3)}$ nuqtaga intiladi (o'tadi), G_2^- va G_3^- shoxalar ustma-ust tushadi.

2.3-teorema. $P_5^{(3)}: (A_1, A_2, A_3) = (1, 1, 1/2)$ maxsus nuqta atrofida Ω ko'pxillik uchta lokal yoyilmaga ega.

$$\begin{aligned}
 1. \quad A_1 &= 1 + \frac{1}{2}z_3 + \frac{2\sqrt{3}+3}{12}(b_1(t_1) + \varepsilon)z_3^2 + \frac{3-2\sqrt{3}}{12}(b_2(t_1) + \varepsilon)z_3^2, \\
 A_2 &= 1 + \frac{1}{2}z_3 + \frac{\sqrt{3}}{12}(b_1(t_1) + \varepsilon)z_3^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}(b_2(t_1) + \varepsilon)z_3^2, \\
 A_3 &= \frac{1}{2} + z_3, \quad \varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t_1) \cdot z_3^k,
 \end{aligned} \tag{5}$$

bunda $b_1(t_1), b_2(t_1), c_k(t_1)$ lar t_1 ning muayyan ratsional funksiyalari bo'lib, $b_1(t_1)$ va $b_2(t_1)$ lar 2.2 bo'limda oshkor ko'rinishda yozilgandir;

$$\begin{aligned}
 2. \quad A_1 &= 1 + \frac{(2\sqrt{3}+3)}{12}(b_1(t) + \varepsilon)z_3 + \frac{(3-2\sqrt{3})}{12}(b_2(t) + \varepsilon) + \frac{1}{2}z_3, \\
 A_2 &= 1 + \frac{\sqrt{3}}{12}(b_1(t) + \varepsilon)z_3 - \frac{\sqrt{3}}{12}(b_2(t) + \varepsilon) + \frac{1}{2}z_3, \quad A_3 = \frac{1}{2} + z_3,
 \end{aligned} \tag{6}$$

bunda $b_1(t), b_2(t), c_k(t)$ lar t ning muayyan ratsional funksiyalari bo'lib, $b_1(t)$ va $b_2(t)$ lar 2.2 bo'limda oshkor holda yozilgan.

$$\begin{aligned}
 3. \quad &(z_1, z_2, \alpha) \rightarrow (z_2, z_1, -\alpha), \\
 &((b_1(t), b_2(t)) \rightarrow (b_2(t), b_1(t)))
 \end{aligned}$$

o'rin almashtirishlar bo'yicha (6) ga simmetrik bo'lgan (5) yoyilma F_1 va G_2 shoxalar qismlarini $P_5^{(3)}$ nuqta yaqinida tasvirlaydi. (6) yoyilma va uning simmetriyalari F_1 va G_2 shoxalarning

$$A_1 = 1 + \frac{(-2 + \sqrt{3})\sqrt{3}}{12}z_2, \quad A_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{12}z_2, \quad A_3 = -\frac{1}{2}.$$

yaqinida va unga simmetrik shoxalarni tasvirlaydi. $z_3 \rightarrow 0$ uchun F_1 va G_2 shoxalar bu chiziqlarning qismi bilan ustma-ust tushadi.

2.4-teorema. $P_3^{(2)}: (A_1, A_2, A_3) = (-1/2, -1/2, 1/2)$ maxsus nuqta atrofida Ω ko'pxillik maxsus lokal parametrik yoyilmaga ega

$$\begin{aligned}
 x_1 &= b_1(t)y_3, \quad x_2 = b_2(t)y_3 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)y_3^{k+1}, \quad x_3 = y_3^2. \\
 A_1 &= -\frac{1}{2} + b_1(t)y_3 - b_2(t)y_3, \quad A_2 = -\frac{1}{2} + (b_1(t) + b_2(t))y_3, \\
 A_3 &= \frac{1}{2} + y_3^2.
 \end{aligned}$$

Ω ko'pxillik maxsus nuqtalar to'g'ri chizig'i \mathfrak{S} ning yaqinida va maxsus nuqtalar chiziqlari \mathcal{H}, \mathcal{F} larning yaqinida o'rganiladi. §2.3 da hisoblashlar ketma-ketligi ko'rsatilgan.

2.5-teorema. *Maxsus nuqtalar to'g'ri chizig'i \mathfrak{S} ning yaqin atrofida Ω ko'pxillik ikkita G_2^\pm shoxalardan iborat bo'lib, $A_3 = 1/2$ bo'lganda \mathfrak{S} to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi, $P_3^{(3)}$ va $P_4^{(3)}$ nuqtalar orasidagi kesmadan tashqari ularning parametrik yoyilmasi qatorlari quyidagichadir:*

$$A_1 = -\frac{1}{2} + (b_1(t) + \varepsilon)x_3 - b_2(t), \quad A_2 = -\frac{1}{2} + (b_1(t) + \varepsilon)x_3 + b_2(t),$$

$$A_3 = \frac{1}{2} + x_3, \quad \varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \cdot y_3^k,$$

$$\begin{cases} b_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} (5t^2 + 2t - 1)/(19t^2 + 22t + 7), \\ b_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} -(19t^2 + 22t + 7)/(8(2t^2 + 3t + 1)). \end{cases}$$

Bunda ikkita $\varphi_1\varphi_3$ va $\varphi_2\varphi_4$ bo'laklar bitta shoxaga qarashlidir. \mathfrak{S} to'g'ri chizig'ining $P_3^{(3)}$ va $P_4^{(3)}$ maxsus nuqtalari orasidagi kesmasi Ω ko'pxillikda ajralgandir.

2.6-teorema. *Maxsus nuqtalar egri chizig'i \mathcal{H} ning yaqinida Ω ko'pxillik ikkita parametrik yoyilmaga ega*

$$A_1^{(1)} = b_1(t) + \varepsilon^{(1)} = b_1(t) + \mu(\delta_1 + \kappa_1) = b_1(t) + \delta_1(t)\mu + \mu \sum_{k=1}^{\infty} c_{1k}(t)\mu^k,$$

$$A_1^{(2)} = b_1(t) + \varepsilon^{(2)} = b_1(t) + \mu(\delta_2 + \kappa_2) = b_1(t) + \delta_2\mu + \mu \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}(t)\mu^k,$$

$$A_2 = b_2(t) = -\frac{9(t^2 + 1)}{4(t + 1)(t^2 - 4t + 1)}.$$

Ular mos ravishda G^+ va G^- shoxalarning qismidan iboratdir. $A_3 = 3/4$ bo'lganda ular \mathcal{H} egri chiziq bilan ustma-ust tushadi.

2.7-teorema. *Maxsus nuqtalar egri chizig'i \mathcal{F} atrofida Ω ko'pxillik*

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)D^k.$$

$$\varepsilon = \delta D^2 = (\delta_0(t) + c_1(t)D)D^2 \approx \delta_0(t)D^2 + c_1(t)D^3,$$

$$B_2 = (\delta_0(t) + c_1(t)D)D^3 \approx \delta_0(t)D^3 + c_1(t)D^4.$$

$$A_3 = B_3 = b_2(t) = \frac{11t^3 - 48t^2 - 48t - 16}{6t(t^2 - 16t - 8)}.$$

parametrik yoyilmalarga ega. Ular mos ravishda G_1^\pm, G_2, G_3^\pm shoxalarning qismlaridan iboratdir. $A_1 = A_2$ bo'lganda ular \mathcal{F} egri chiziq bilan ustma-ust tushadi.

Uchinchi bobda Ω ko'pxillikning cheksizlikdagi shoxalari va ularning yoyilmalari topilgan.

3.1-teorema. Ω algebraik ko'pxillik $(\infty, \infty, 0)$ nuqta atrofida

$$A_1 = B_1 B_3, \quad A_2 = B_2 B_3, \quad A_3 = B_3$$

almashtirishdan keyin parametrik ko'rinishda berilgan

$$A_1 = B_1 B_3 = b_1(t) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) + b_2(t) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) + c_1(t) M_3 - \frac{1}{M_3},$$

$$A_2 = B_2 B_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b_1(t) + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b_2(t) - \frac{1}{M_3}.$$

munosabatlar bilan berilgan A_1, A_2 tekislikda parametrik yoyilmaga keltiriladi.

Bunday natijalar qolgan hollarda ham A_1, A_2 tekislikda olingan bo'lib, ularning natijalari sakkizinchi ishda (I qism) chop etilgan.

XULOSA

Dissertatsiya ishi algebraik ko'pxilliklarning maxsusliklari atrofida parametrik yoyilmalarini tadqiq qilishga bag'ishlangan.

Dissertatsiya ishining asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

Yevklid algoritmini n o'lchovli butun koordinatali vektorlar uchun umumlashtiruvchi Eyler algoritmi tasvirlangan. Ushbu algoritmni qo'llash uchun dastur ishlab chiqilgan. Darajali almashtirishlar qarab chiqilgan va bu almashtirishlarning unimodulyar matritsalarini hisoblangan va ularni amalga oshirish uchun algoritmlar va dasturlar ishlab chiqilgan;

darajali geometriya metodlari yordamida noxiziqli algebraik tenglamalarning yechimlarini maxsus nuqtalar yaqinidagi asimptotikasi va asimptotik yoyilmasini topish usullari ko'rsatilgan;

Eynshteynning invariant metrikasini o'rganish jarayonida hosil bo'lgan algebraik ko'pxillik o'n ikkinchi darajali uch o'zgaruvchili ko'phad bilan ifodalanadi, bu ko'pxillik bir nechta maxsus nuqtalarga va maxsus nuqtalar egri chiziqlariga ega bo'lishi aniqlangan;

barcha maxsus nuqtalar va maxsus nuqtalar egri chiziqlari yaqinida Ω ko'pxillikning tuzilishi fazoning chekli qismida va cheksizlikda darajali geometriya metodlari bilan tadqiq qilingan, har bir hol uchun qisqartma tenglamalari hosil qilingan, Nyuton ko'pyoqligi tuzilgan, hosil qilingan qisqartma tenglamasi noxiziqli ko'paytuvchiga ega bo'lgan holda o'zgaruvchilarning darajali almashtirishi qo'llanilgan.

Umumiy holda algebraik ko'pxillikning tuzilishini (strukturasini) tahlil qilish uchun ishlab chiqilgan metod samarali ekanligi ko'rsatilgan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.02.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
САМАРКАНДСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

**САМАРКАНДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
ШАРОФА РАШИДОВА**

АЗИМОВ АЛИЖОН АХМАДОВИЧ

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЕ РАЗЛОЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКОГО
МНОГООБРАЗИЯ ВБЛИЗИ ЕГО ОСОБЕННОСТЕЙ**

01.01.01 – Математический анализ

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Самарканд–2025

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за номером B2024.3.PhD/FM1170

Диссертация выполнена в Самаркандском государственном университете им. Ш. Рашидова.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (www.samdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziynet» (www.ziynet.uz).

Научный руководитель:

Солеев Ахмаджон

доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Никоноров Юрий Геннадьевич

доктор физико-математических наук, профессор

Икромов Исроил Акрамович

доктор физико-математических наук, профессор

Ведущая организация:

Санкт - Петербургское отделение

**Математического института имени В.А.Стеклова
РАН (Россия)**

Защита диссертации состоится « ____ » _____ 2025 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 при Самаркандском государственном университете. (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Самаркандского государственного университета (зарегистрирована за № ____). (Адрес: 140104, г. Самарканд, Университетский бульвар, 15. Тел.: (+99866) 231-06-32, факс: (99866) 235-19-38).

Автореферат диссертации разослан « ____ » _____ 2025 года.
(протокол рассылки № ____ от « ____ » _____ 2025 года).

С.Н. Лакаев

Заместитель председателя научного совета по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук, профессор, академик

А.М. Халхужаев

Ученый секретарь научного совета по присуждению научных степеней, доктор физико-математических наук, профессор

И.А. Икромов

Заместитель председателя научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук, профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В настоящее время во многочисленных научных и практических исследованиях проводимых в мире, особенно в математических моделях многих процессов возникает необходимость изучения вопросов нахождения асимптотики решений алгебраических уравнений в малой окрестности особых точек, а также вблизи кривых особых точек и их асимптотического разложения методами степенной геометрии и нелинейного анализа. Нахождение параметрического разложения алгебраического многообразия вблизи особых точек является предметом исследований в таких областях, как физика, моделирование процессов популяционной биологии, робототехника, гидродинамика, геометрия однородных пространств, механика небесных тел, динамические системы и другие. В этих исследованиях приведение задачи к изучению многочлена Ньютона, построение многогранника Ньютона и исследование задач через укорочения многочлена является наиболее эффективным методом решения и основной теорией степенной геометрии.

В этом направлении методы степенной геометрии применяются к нелинейным алгебраическим уравнениям и обыкновенным дифференциальным уравнениям. На основании этих методов разработаны компьютерные программы для этой теории, что создало основу для достоверного решения и их применения для решения более сложных задач. Развитие исследований в этом направлении, связанных с решением задач параметризации алгебраических уравнений систем обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных вблизи их особенностей, является одним из актуальных и важных научных исследований.

В нашей Республике уделяется большое внимание нахождению эффективных способов решения задач по параметрическим разложениям алгебраического многообразия вблизи его особенностей и применение найденных решений к практическим задачам. Согласно Указу Президента о дальнейшем развитии математического образования и науки, принятому в 2019 году, основными задачами и направлениями деятельности дисциплины математика определено проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям дисциплин «Алгебры и ее приложений, дифференциальных уравнений и их приложений, математического моделирования нелинейных систем, динамических систем и их приложений, стохастического анализа, медико-биологической информатики, вычислительной математика²». При реализации данной задачи важное значение имеет развитие методов нелинейного анализа, степенной

²Постановление Президента Республики Узбекистан №PQ-4387 от 9 июля 2019 года «О государственной поддержке дальнейшего развития математического образования и науки, а также мерах по коренному совершенствованию деятельности Института математики Академии наук Республики Узбекистан имени В. И. Романовского».

геометрии, многогранники Ньютона, параметризация многообразия вблизи его особых точек, уравнений нормализованных потоков Риччи.

Настоящее диссертационное исследование служит в определенной степени реализации задач, определенных в решениях : “О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан” от 7 февраля 2017 года № ПФ-4947, “О государственной поддержке дальнейшего развития математического образования и науки, а также мерах по коренному совершенствованию деятельности Института математики Академии наук Республики Узбекистан имени В. И. Романовского” от 9 июля 2019 года № ПФ-4387 и “О мерах по повышению качества образования в области математики и развитию научных исследований” от 7 мая 2020 года № ПП-4708, а также в других нормативных правовых актах, касающихся данной деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологии республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. В дифференциальной геометрии и теоретической физике при изучении инвариантных метрик Эйнштейна возникает необходимость изучения алгебраического многообразия, которое описывается алгебраическим уравнением двенадцатой степени от трех переменных. В ряде работ проведено исследование трёхпараметрического семейства специальных однородных пространств с точки зрения нормализованного потока Риччи. В последнее время наметился рост интереса к исследованию нормализованного потока Риччи на однородных пространствах. Потоки Риччи описывают эволюцию римановых метрик на многообразии. Уравнение нормализованного потока Риччи на однородном пространстве сводится к системе нескольких обыкновенных дифференциальных уравнений. Особым точкам такой системы соответствуют инвариантные метрики Эйнштейна. Поэтому изучение особых точек таких систем является актуальной задачей. В настоящей работе с помощью алгоритмов степенной геометрии и программ компьютерной алгебры получены локальные параметризации многообразия вблизи особых точек и кривых особых точек.

Обобщённое пространство Уоллаха известно как три-локально-симметрических было введено в работе Никонорова Ю.Г. в 2000 году. В этой работе доказано, что любое такое пространство имеет по крайней мере одну инвариантную метрику Эйнштейна (с точностью до подобия). В работе Ломшакова А.М., Никонорова Ю.Г. и Фирсова Е.Б. (2003 год) исследованы вопросы существования и количества инвариантных метрик Эйнштейна на трёх локально-симметрических пространствах. В частности, было доказано, что число инвариантных метрик Эйнштейна (с точностью до подобия) может варьироваться от одной до четырёх. На основе полученных результатов приведены примеры новых метрик Эйнштейна.

В работах Н.А. Абиева, А. Арванитойоргоса, Ю.Г. Никонорова и П. Сиасоса изучены асимптотические свойства нормализованных потоков Риччи на обобщённых пространствах Уоллаха, которые описываются плоской динамической системой. Несимметричные обобщённые пространства Уоллаха параметризуются тройками специальных положительных чисел. При этом для всех структурированных пространств полностью определены типы особых точек нормализованных потоков Риччи.

В настоящее время термин "Обобщённое пространство Уоллаха" широко используется в научных работах. В частности, в работах Арванитойоргоса А. и Ванга Ю. (2017), а также Арванитойоргоса А. и Соуриса Н.П. (2015) исследованы однородные геодезические линии, заданные на обобщённых пространствах Уоллаха с произвольной инвариантной римановой метрикой, и приведены соответствующие примеры.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего образовательного или научно-исследовательского учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научно-исследовательской работы Самаркандского государственного университета имени Шарофа Рашидова в рамках комплексной научной работы № SMat-03 «Исследование и классификация задач нелинейного анализа методами степенной геометрии и компьютерной алгебры».

Целью исследования является получение локальных параметризаций алгебраического многообразия вблизи его особых точек и кривых особых точек с помощью алгоритмов степенной геометрии и программ компьютерной алгебры.

Задачи исследования состоят в следующем:

построение унимодулярных матриц с помощью n -мерного целочисленного вектора и применения к степенным преобразованиям;

нахождение асимптотики и асимптотических разложений решений нелинейных алгебраических уравнений вблизи особых точек;

нахождение особых точек и кривых особых точек алгебраического многообразия, заданного алгебраическим многочленом двенадцатой степени с тремя переменными;

методами степенной геометрии исследуется строение многообразия Ω вблизи особых точек и кривых особых точек как в конечной части пространства, так и в бесконечности, а также построение многогранников Ньютона.

Объектом исследования являются алгебраический многочлен, многогранник Ньютона, алгебраическое многообразие, потоки Риччи, инвариантные метрики Эйнштейна.

Предметом исследования являются унимодулярная матрица, особые точки второго и третьего порядка, кривые особых точек, графы многогранника, степенные преобразования.

Методы исследования. В работе применяются методы степенной геометрии, компьютерной алгебры, методы многогранников Ньютона, параметрические разложения, степенное разложение с помощью обобщенной теоремы о неявной функции.

Научная новизна исследования заключается в следующем: с помощью целочисленных векторов построены унимодулярные матрицы и эти матрицы применяются к степенным преобразованиям, которые преобразуют подпространство линейного преобразования в пространство координат;

разработан метод асимптотических разложений решений нелинейных алгебраических уравнений в окрестности особых точек с использованием методов степенной геометрии, и доказаны свойства этих разложений;

для алгебраического многообразия Ω , заданного многочленом двенадцатой степени от трёх переменных, найдены особые точки, кривые особых точек и локальные параметрические разложения алгебраического многообразия Ω в окрестности особых точек и кривых особых точек;

изучены строения многообразия Ω вблизи особых точек и кривых особых точек как в конечной части пространства, так и в бесконечности, построен многогранник Ньютона и для этих укороченных уравнений доказан метод нахождения параметрических разложений.

Практическими результатами исследования являются следующие:

найжены локальные параметрические разложения многообразия Ω вблизи особых точек, приведён алгоритм построения унимодулярной матрицы линейного преобразования;

разработаны методы вычисления ветвей алгебраического многообразия вблизи особых точек, вблизи кривых особых точек и в бесконечности.

Достоверность результатов исследования обосновано применением методов многогранников Ньютона, методов степенной геометрии, компьютерной алгебры, метода параметризации, степенных преобразований, применением пакетов PolyhedralSets СКА Maple 2021, строгостью доказанных теорем и математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научное значение результатов исследования заключается в том, что предложен новый алгоритм для нахождения решений алгебраического уравнения, задающее алгебраическое многообразие вблизи особых точек и кривых особых точек.

Практическая значимость полученных результатов состоит в том, что найдены параметрические разложения алгебраического многообразия вблизи его особых точек, получены решения алгебраического уравнения двенадцатой степени, которое возникает в дифференциальной геометрии при изучении нормализованного потока Риччи, а также изучены структурные особенности строения многообразия Ω вблизи его особых точек.

Внедрение результатов исследования. Параметрические разложения алгебраического многообразия вблизи его особенностей позволили:

по результатам диссертационной работы разработан алгоритм построения унимодулярной матрицы линейного преобразования, переводящего линейное m -мерное подпространство, порожденное целочисленными векторами в координатное подпространство n -мерного пространства, найден метод вычисления ветвей алгебраического многообразия вблизи его особых точек, вблизи кривой особых точек при выполнении научно-исследовательской работы по теме: «Непрерывные и дискретные модели математической физики и асимптотические методы», №FFMN-2022-0004, выполненные в ИПМ им.М.В Келдыша РАН, г. Москва (справка от 28 мая 2024 года ИПМ им.М.В Келдыша РАН, г. Москва, за номером 11103-9422/484). Эти методы позволили реализовать степенно-логарифмические преобразования, используемые при вычислении асимптотик решений системы нелинейных уравнений в частных производных, вычислить параметрические разложения многообразия трёх параметров вырожденных потоков Риччи, изучаемых в астрофизике;

результаты, полученные при вычислении унимодулярных матриц степенного преобразования использованы при нахождении решений системы Гамильтона в ведущих научных журналах (Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2023, Vol. 63, No. 5, pp. 687–703; Programming and Computer Software, 2023, Vol. 49, No. 8, pp. 842–853; Mathematics in Computer Science, 2024, Vol. 18, No. 22, pp. 1–21). Применение научных результатов позволили вычислить резонансные случаи системы Гамильтона, а также при исследовании состояния равновесия многопараметрической системы Гамильтона;

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации обсуждались на 7 международных и 2 республиканских научно-практических конференциях, всего 9 научно-практических конференций.

Опубликованность результатов исследования. Основные результаты диссертации опубликованы в 17 научных работ, из них 8 опубликованы в научных изданиях, рекомендованных к публикации основных научных результатов диссертаций ВАК Республики Узбекистан в том числе 4 зарубежных и 4 в республиканских журналах.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы. Объём диссертации составляет 114 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведены обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и степень изученности проблемы, сформулированы цель и задачи, выявлены объект и

предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследований, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

Изложение содержания диссертации:

В диссертации получены следующие результаты.

1. Разработан метод разрешения особенности алгебраического многообразия в виде его параметрического разложения. Пусть алгебраическое многообразие Ω задано уравнением

$$f(x_1, \dots, x_n) = 0,$$

где f – многочлен с вещественными коэффициентами. Точка $X = (x_1, \dots, x_n) = X^0$ называется *особой*, если в ней $f(X^0) = 0$ и все частные производные $\partial f / \partial x_i = 0, i = 1, \dots, n$. Найден метод вычисления разложений

$$x_i = x_i^0 + \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_{ik}(T) \|X - X^0\|, \quad i = 1, \dots, n,$$

где $T = (t_1, \dots, t_n)$ – глобальный параметр, φ_{ik} – рациональные функции и $\|X - X^0\|$ – это норма. Аналогичные результаты получены для кривой особых точек. Эти результаты приведены в главах I и II.

2. Если многочлен $f(X)$ квазиоднородный, то найдется такая унимодулярная матрица $\alpha = (\alpha_{ij})$, что степенные преобразования

$$x_i = y_1^{\alpha_{i1}} y_2^{\alpha_{i2}} \dots y_n^{\alpha_{in}}, \quad i = 1, \dots, n$$

с матрицей $\alpha = (\alpha_{ij})$, переводит многочлен $f(X)$ в многочлен $g(y_1, \dots, y_{n-1})$.

Эта задача решена в гл. I.

3. Дана компьютерная реализация этого метода. Указан способ вычисления функций φ_{ik} с помощью алгоритмов компьютерной алгебры. Это сделано в главе I.

4. Все эти результаты применяются для вычисления параметрических разложений алгебраического многообразия 12 степени вблизи его особых точек и кривых особых точек. Это многообразие, возникло в геометрии однородных пространств и задано многочленом:

$$\begin{aligned} Q(s_1, s_2, s_3) \stackrel{\text{def}}{=} & (2s_1 + 4s_3 - 1)(64s_1^5 - 64s_1^4 + 8s_1^3 + 240s_1^2s_3 - 1536s_1s_3^2 \\ & - 4096s_3^3 + 12s_1^2 - 240s_1s_3 + 768s_3^2 - 6s_1 + 60s_3 + 1) - \\ & - 8s_1s_2(2s_1 + 4s_3 - 1)(2s_1 - 32s_3 - 1)(10s_1 + 32s_3 - 5) - \\ & - 16s_1^2s_2^2(52s_1^2 + 640s_1s_3 + 1024s_3^2 - 52s_1 - 320s_3 + 13) + \\ & + 64(2s_1 - 1)s_2^3(2s_1 - 32s_3 - 1) + 2048s_1(2s_1 - 1)s_2^4 = 0, \quad (1) \end{aligned}$$

где s_1, s_2, s_3 – элементарные симметрические многочлены, равные соответственно

$$s_1 = a_1 + a_2 + a_3, \quad s_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3, \quad s_3 = a_1a_2a_3.$$

Все эти результаты актуальны и востребованы. В особенности это относится к результату 1, ибо имеется много задач, где надо решать алгебраические уравнения со многими переменными.

Что касается результата 4, то изучение уравнения нормализованного потока Риччи для однопараметрического семейства римановых метрик на римановом многообразии было начато Р. Гамильтоном. Уравнение нормализованного потока Риччи на обобщенных пространствах Уоллаха имеет вид:

$$\frac{\partial}{\partial t} g(t) = -2Ric_g + 2g(t) \frac{S_g}{n}, \quad (2)$$

где Ric_g и S_g – соответственно форма кривизны Риччи и скалярная кривизна однопараметрического семейства римановых метрик $g(t)$ на гладком многообразии M^n . Это уравнение появилось при изучении инвариантных метрик Эйнштейна и при исследовании некоторых асимптотических свойств нормализованного потока Риччи для инвариантных римановых метрик на обобщенных пространствах Уоллаха.

Обобщенные пространства Уоллаха (под именем «три-локально-симметрические пространства») были введены в работе [Никоноров Ю. Г., 2000], где было доказано, что каждое такое пространство имеет по крайней мере одну (с точностью до подобия) инвариантную метрику Эйнштейна. В работе [Ломшаков А.М., Никоноров Ю. Г., Фирсов Е. В., 2003] было доказано, что каждое такое пространство допускает от 1 до 4 (включительно) метрик Эйнштейна (с точностью до подобия). Классификация этих пространств была получена независимо практически одновременно в работах [Nikonov Yu.G., 2016] (там уже использован термин «обобщенные пространства Уоллаха (ОПУ для краткости) и в [Chen Z., Kang Y., Liang K., 2016]. Сейчас ОПУ использованы во многих публикациях. Например, в: [Lauret J., Will C.-2022, Arvanitoyeorgos A., Wang Y.-2017, Souris N.P., Arvanitoyeorgos A.-2015].

Уравнение (2) можно представить в виде системы трёх обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) первого порядка относительно параметров (x_1, x_2, x_3) инвариантной римановой метрики

$$dx_1/dt = f(x_1, x_2, x_3), \quad dx_2/dt = g(x_1, x_2, x_3), \quad dx_3/dt = h(x_1, x_2, x_3), \quad (3)$$

где $x_i = x_i(t) > 0$ – параметры инвариантной метрики.

$$f(x_1, x_2, x_3) = -1 - a_1 x_1 \left(\frac{x_1}{x_2 x_3} - \frac{x_2}{x_1 x_3} - \frac{x_3}{x_1 x_2} \right) + x_1 B,$$

$$g(x_1, x_2, x_3) = -1 - a_2 x_2 \left(\frac{x_2}{x_1 x_3} - \frac{x_3}{x_1 x_2} - \frac{x_1}{x_2 x_3} \right) + x_2 B,$$

$$h(x_1, x_2, x_3) = -1 - a_3 x_3 \left(\frac{x_3}{x_1 x_2} - \frac{x_1}{x_2 x_3} - \frac{x_2}{x_1 x_3} \right) + x_3 B,$$

$$B = \left(\frac{1}{a_1 x_1} + \frac{1}{a_2 x_2} + \frac{1}{a_3 x_3} - \left(\frac{x_1}{x_2 x_3} + \frac{x_2}{x_1 x_3} + \frac{x_3}{x_1 x_2} \right) \right) \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} \right)^{-1}$$

а вещественные параметры $a_i \in (0, 1/2], i = 1, 2, 3$, определяются рассматриваемым обобщенным пространством Уоллаха.

В настоящей работе изучаются те значения параметров $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, для которых система уравнений (3) имеет особые точки, которым соответствуют инвариантные метрики Эйнштейна. Изучено множество Ω значений параметров $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$, при которых система уравнений (3) имеет вырожденную особую точку.

В работах Н.А.Абиев, А.Арванитойоргос, Ю.Г.Никоноров, П.Сиасос доказывается теорема, что множество Ω значений параметров a_1, a_2, a_3 , при которых система (3) имеет хотя бы одну вырожденную особую точку, описывается уравнением (1).

В работе А.Д.Брюно и А.Б.Батхина из соображений симметрии от координат $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ был осуществлен переход к координатам $\mathbf{A} = (A_1, A_2, A_3)$ и найдены все особые точки многообразия Ω в координатах \mathbf{A} . Имеется пять точек третьего порядка, три точки второго порядка и 9 алгебраических кривых особых точек первого порядка.

При этом основными являются 3 точки третьего порядка, 1 точка второго порядка и 3 кривые особых точек. Остальные получаются из них поворотом плоскости A_1, A_2 на углы $\pm 2\pi/3$.

Более того, в этой же работе, были вычислены сечения многообразия Ω плоскостями $A_3 = const$, и было показано что в конечной части пространства $\mathbb{R}^3 = \{A_1, A_2, A_3\}$ многообразие Ω состоит из одномерных ветвей F_1, F_2, F_3 и двумерных ветвей G_1, G_2, G_3 , разбитых на части F_i^\pm, G_i^\pm с границами на плоскости $A_3 = 1/2$.

В данной диссертационной работе с помощью алгоритмов степенной геометрии и программ компьютерной алгебры получены локальные параметризации многообразия вблизи всех основных 4 особых точек и 3 основных кривых особых точек первого порядка.

В главе I решаются 4 задачи:

Задача 1. Пусть в n -мерном вещественном пространстве \mathbb{R}^n задано m , ($m < n$) целочисленных векторов A_1, \dots, A_m . Их линейная оболочка

$$L = \left\{ X = \sum_{j=1}^m \lambda_j A_j, \lambda_j \in \mathbb{R}, j = 1, \dots, m \right\}$$

образует линейное подпространство в \mathbb{R}^n . Требуется вычислить такую унимодулярную матрицу α , что преобразование

$$X\alpha = Y$$

переводит подпространство L в координатное подпространство

$$M = \{Y: y_{n-l+1} = \dots = y_n = 0\},$$

где $l = \dim L$. Матрица α называется *унимодулярной*, если все её элементы целые и $\det \alpha = \pm 1$. Вектор это вектор строка.

Задача 2. Пусть заданы 2 целых положительных числа a_1 и a_2 . Надо найти их наибольший общий делитель (НОД).

Задача 3. Пусть заданы 2 целых положительных числа a_1 и a_2 . Надо вычислить такую унимодулярную матрицу α , что $(a_1, a_2)\alpha = (a_k, 0)$ или $(0, a_k)$, где целое число $a_k > 0$.

Задача 4. Пусть задан n -мерный целочисленный вектор $A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$. Надо найти такую n -мерную унимодулярную матрицу α , что вектор $A\alpha = C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ содержит только одну координату c_n , отличную от нуля.

Теорема 1.1. Алгоритмом Эйлера вычисляется унимодулярная матрица α , дающая решение задачи 4.

Теорема 1.2. Повторный алгоритм Эйлера позволяет вычислить матрицу α , дающую решение задачи 1.

Пусть $X = (x_1, \dots, x_n)$, $Q = (q_1, \dots, q_n)$, тогда $X^Q = x_1^{q_1} \dots x_n^{q_n}$. Запишем многочлен $f(X)$ в виде

$$f(X) = \sum f_Q X^Q,$$

где f_Q – постоянные коэффициенты и подобные члены приведены. Множество $S = S(f) = \{Q: f_Q \neq 0\}$ называется носителем многочлена $f(X)$. Его выпуклая оболочка $\Gamma(f)$ называется многогранником Ньютона. Граница $\partial\Gamma(f)$ состоит из обобщённых граней $\Gamma_j^{(d)}$, где d – это её размерность

$0 \leq d \leq n - 1$, а j – её номер. Каждой грани $\Gamma_j^{(d)}$ соответствует укороченный многочлен

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = \sum f_Q X^Q \text{ по } Q \in S \cap \Gamma_j^{(d)}.$$

Теорема 1.3. Для грани $\Gamma_j^{(d)}$ существует степенное преобразование

$$\ln Y = \ln X \cdot \alpha$$

где $\ln Y = (\ln y_1, \dots, \ln y_n)$, $\ln X = (\ln x_1, \dots, \ln x_n)$, с унимодулярной матрицей α , которое переводит укороченную сумму

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = \sum f_Q X^Q \text{ по } Q \in \Gamma_j^{(d)} \cap S$$

в многочлен g от d координат, т. е.

$$\hat{f}_j^{(d)}(X) = Y^T g(y_1, \dots, y_d),$$

где $T = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$.

Изложена общая теория вычисления параметрических разложений алгебраического многообразия вблизи его особых точек и кривых особых точек. Поскольку изучается двумерное многообразие, то один параметр мал, а другой изменяется на \mathbb{R} . При этом вычисляются только члены разложений первой степени по малому параметру.

Теорема 1.4. Пусть

$$f(X, \varepsilon, T) = \sum a_{Q,r}(T) X^Q \varepsilon^r,$$

где $0 \leq Q \in \mathbb{Z}^n, 0 \leq r \in \mathbb{Z}$, сумма конечна, $a_{Q,r}(T)$ – некоторые функции от

$T = (t_1, \dots, t_m)$, причём $a_{00}(T) \equiv 0, a_{01}(T) \not\equiv 0$. Тогда решение уравнения $f(X, \varepsilon, T) = 0$ имеет вид

$$\varepsilon = \sum b_R(T) X^R,$$

где $0 \leq R \in \mathbb{Z}^n, 0 < \|R\|$, коэффициенты $b_R(T)$ – функции от T , являющиеся рациональными функциями от $a_{Q,r}(T)$ с $\|Q\| + r \leq \|R\|$, деленными на $a_{01}^{2\|R\|-1}$. Разложение ε является единственным. Здесь $\|Q\| = |q_1| + \dots + |q_n|$.

Теорема 1.5. Для грани $\Gamma_j^{(d)}$ существует такое степенное преобразование

$$(\ln y_1, \dots, \ln y_n) \stackrel{\text{def}}{=} \ln Y = (\ln X) \alpha$$

с унимодулярной матрицей α , которое сводит укороченную сумму $\hat{f}_j^{(d)}(X)$ к сумме от d координат, т.е. $\hat{f}_j^{(d)}(X) = Y^S \hat{g}_j^{(d)}(Y)$, где

$$\ln Y = (\ln y_1, \dots, \ln y_n), \ln X = (\ln x_1, \dots, \ln x_n),$$

$\hat{g}_j^{(d)}(Y) = \hat{g}_j^{(d)}(y_1, \dots, y_d)$ – многочлен. Здесь, $S \in \mathbb{Z}^n$. Дополнительные координаты y_{d+1}, \dots, y_n являются локальными (малыми).

Кроме того, в этой главе приведены алгоритм вычисления унимодулярной матрицы α , теория построения многогранника Ньютона и параметрическое разложение решений полиномиального уравнения.

Во второй главе результаты, полученные в главе I применяются для исследования многообразия Ω вблизи его особых точек и кривых особых точек.

В §2.1 перечислены все особые точки и кривые особых точек, найденные в работе А.Д.Брюно и А.Б.Батхин. В этом же параграфе указана последовательность 8 шагов для получения очередного отрезка параметрического разложения многообразия вблизи особой точки.

В §2.2 доказаны

Теорема 2.1. В окрестности особой точки $P_1^{(3)}: (A_1, A_2, A_3) = (0, 0, 3/4)$ многообразие Ω имеет локальное параметрическое разложение

$$A_1 = [b_1(t) + \varepsilon]y_3^2, \quad A_2 = [b_2(t) + \varepsilon]y_3^2, \quad A_3 = \frac{3}{4} + y_3, \\ \varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)y_3^k \quad (4)$$

где $b_1(t), b_2(t), c_1(t)$ суть определенные рациональные функции от t .

В §2.2 явно указаны функции $b_1(t), b_2(t), c_1(t)$. Это разложение кусков объединения ветвей $F_3^+ \cup G_3^+$, которые при $y_3 = 0$ стягиваются в точку $P_1^{(3)}$.

Теорема 2.2. В окрестности особой точки $P_2^{(3)}: (A_1, A_2, A_3) = (0, 0, -3/2)$ многообразие Ω имеет локальное параметрическое разложение

$$A_1 = [b_1(t) + \varepsilon]y_3, \quad A_2 = [b_2(t) + \varepsilon]y_3, \quad A_3 = -\frac{3}{2} + y_3,$$

(4), где $b_1(t), b_2(t), c_k(t)$ – определенные рациональные функции от t . В §2.2 явно указаны функции $b_1(t), b_2(t), c_1(t)$. Это разложение кусков объединения ветвей $F_2^- \cup G_2^-$, которые при $y_3 = 0$ стягиваются в точку $P_2^{(3)}$, а ветви G_2^- и G_3^- совпадают.

Теорема 2.3. В окрестности особой точки $P_5^{(3)}: (A_1, A_2, A_3) = (1, 1, 1/2)$ многообразие Ω имеет 3 локальных параметрических разложения:

$$1. \quad A_1 = 1 + \frac{1}{2}z_3 + \frac{2\sqrt{3} + 3}{12}(b_1(t_1) + \varepsilon)z_3^2 + \frac{3 - 2\sqrt{3}}{12}(b_2(t_1) + \varepsilon)z_3^2, \\ A_2 = 1 + \frac{1}{2}z_3 + \frac{\sqrt{3}}{12}(b_1(t_1) + \varepsilon)z_3^2 - \frac{\sqrt{3}}{12}(b_2(t_1) + \varepsilon)z_3^2, \quad (5) \\ A_3 = \frac{1}{2} + z_3, \quad \varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t_1) \cdot z_3^k,$$

где $b_1(t_1), b_2(t_1), c_k(t_1)$ суть определенные рациональные функции от t_1 причем $b_1(t_1)$ и $b_2(t_1)$ выписаны явно в §2.2;

$$2. \quad A_1 = 1 + \frac{(2\sqrt{3}+3)}{12}(b_1(t) + \varepsilon)z_3 + \frac{(3-2\sqrt{3})}{12}(b_2(t) + \varepsilon) + \frac{1}{2}z_3, \\ A_2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{12}(b_1(t) + \varepsilon)z_3 - \frac{\sqrt{3}}{12}(b_2(t) + \varepsilon) + \frac{1}{2}z_3, \quad A_3 = \frac{1}{2} + z_3, \quad (6)$$

(4), где $b_1(t), b_2(t), c_k(t)$ суть определенные рациональные функции от t , $b_1(t)$ и $b_2(t)$ выписаны в разделе 2.2; и

3. симметричное к (6) по перестановкам

$$(z_1, z_2, \alpha) \rightarrow (z_2, z_1, -\alpha),$$

$$((b_1(t), b_2(t)) \rightarrow (b_2(t), b_1(t)))$$

Разложение (5) описывает части ветвей F_1 и G_2 вблизи точки $P_5^{(3)}$. Разложения (6) и их симметрии описывают ветви F_1 и G_2 вблизи линии

$$A_1 = 1 + \frac{(-2+\sqrt{3})\sqrt{3}}{12}z_2, \quad A_2 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{12}z_2, \quad A_3 = -\frac{1}{2}.$$

и ветви, симметричные к ним. Для $z_3 \rightarrow 0$ ветви F_1 и G_2 совпадают с частями этих линий.

Теорема 2.4. В окрестности особой точки $P_3^{(2)}: (A_1, A_2, A_3) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ многообразие Ω имеет локальное особое параметрическое разложение

$$x_1 = b_1(t)y_3, \quad x_2 = b_2(t)y_3 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)y_3^{k+1}, \quad x_3 = y_3^2.$$

$$A_1 = -\frac{1}{2} + b_1(t)y_3 - b_2(t)y_3, \quad A_2 = -\frac{1}{2} + (b_1(t) + b_2(t))y_3, \quad A_3 = \frac{1}{2} + y_3^2.$$

Изучается многообразие Ω вблизи его прямой особых точек \mathfrak{Z} и кривых особых точек \mathcal{H} , \mathcal{F} . В §2.3 указана последовательность вычислений.

Теорема 2.5. Вблизи прямой особых точек \mathfrak{Z} многообразие Ω состоит из двух ветвей G_2^\pm , которые при $A_3 = 1/2$ пересекаются по прямой \mathfrak{Z} , исключая отрезок между точками $P_3^{(3)}$ и $P_4^{(3)}$. Их параметрические разложения в ряды суть

$$A_1 = -\frac{1}{2} + (b_1(t) + \varepsilon)x_3 - b_2(t), \quad A_2 = -\frac{1}{2} + (b_1(t) + \varepsilon)x_3 + b_2(t),$$

$$A_3 = \frac{1}{2} + x_3, \quad \varepsilon = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \cdot y_3^k,$$

$$\begin{cases} b_1(t) \stackrel{\text{def}}{=} (5t^2 + 2t - 1)/(19t^2 + 22t + 7), \\ b_2(t) \stackrel{\text{def}}{=} -(19t^2 + 22t + 7)/(8(2t^2 + 3t + 1)). \end{cases}$$

При этом пара кусков $\varphi_1\varphi_3$ и $\varphi_2\varphi_4$ относятся к одной ветви. Отрезок прямой \mathfrak{Z} между особыми точками $P_3^{(3)}$ и $P_4^{(3)}$ является изолированным на многообразии Ω .

Теорема 2.6. Вблизи кривой \mathcal{H} особых точек многообразие Ω имеет два параметрических разложения

$$A_1^{(1)} = b_1(t) + \varepsilon^{(1)} = b_1(t) + \mu(\delta_1 + \kappa_1) = b_1(t) + \delta_1(t)\mu + \mu \sum_{k=1}^{\infty} c_{1k}(t)\mu^k,$$

$$A_1^{(2)} = b_1(t) + \varepsilon^{(2)} = b_1(t) + \mu(\delta_2 + \kappa_2) = b_1(t) + \delta_2\mu + \mu \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k}(t)\mu^k,$$

$$A_2 = b_2(t) = -\frac{9(t^2 + 1)}{4(t + 1)(t^2 - 4t + 1)}.$$

Они представляют собой части ветвей G^+ и G^- соответственно. При $A_3 = 3/4$ они совпадают с кривой \mathcal{H} .

Теорема 2.7. В окрестности кривой \mathcal{F} особых точек многообразие Ω имеет параметрические разложения

$$\xi = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t)D^k.$$

$$\varepsilon = \delta D^2 = (\delta_0(t) + c_1(t)D)D^2 \approx \delta_0(t)D^2 + c_1(t)D^3,$$

$$B_2 = (\delta_0(t) + c_1(t)D)D^3 \approx \delta_0(t)D^3 + c_1(t)D^4.$$

$$A_3 = B_3 = b_2(t) = \frac{11t^3 - 48t^2 - 48t - 16}{6t(t^2 - 16t - 8)}.$$

Они представляют собой части ветвей G_1^\pm, G_2, G_3^\pm . При $A_1 = A_2$ они совпадают с кривой \mathcal{F} , но не пересекаются.

В главе III найдены ветви многообразия Ω в бесконечности и их разложения.

Теорема 3.1. Алгебраические многообразия Ω в окрестности точки $(\infty, \infty, 0)$ после преобразования

$$A_1 = B_1B_3, \quad A_2 = B_2B_3, \quad A_3 = B_3$$

сводится к многообразию, заданную в параметрическом виде соотношениями в плоскости A_1, A_2

$$A_1 = B_1B_3 = b_1(t) \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{3} \right) + b_2(t) \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{3} \right) + c_1(t)M_3 - \frac{1}{M_3},$$

$$A_2 = B_2B_3 = -\frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b_1(t) + \frac{\sqrt{3}}{6} \cdot b_2(t) - \frac{1}{M_3}.$$

Аналогичные результаты получены и для остальных случаев. Эти результаты опубликованы в восьмой работе, I часть.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению параметрических разложений алгебраического многообразия вблизи его особенностей.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

описан алгоритм Эйлера, который обобщает алгоритм Евклида на n -мерный целочисленный вектор. Составлена программа для реализации этого алгоритма. Рассмотрены степенные преобразования и вычислены унимодулярные матрицы этих преобразований, для которых составлены алгоритмы и программы для их реализации;

показано, как методами степенной геометрии можно найти асимптотики и асимптотические разложения решений нелинейных алгебраических уравнений вблизи их особенностей;

при изучении инвариантных метрик Эйнштейна получено алгебраическое многообразие, которое описывается алгебраическим уравнением 12 го порядка от трёх переменных. Это многообразие имеет несколько особых точек и кривых особых точек;

вблизи всех особых точек и кривых особых точек методами степенной геометрии вычисляются локальные параметрические разложения алгебраического многообразия. С их помощью вблизи особых точек и кривых особых точек изучено строение многообразия Ω как в конечной части пространства, так и в бесконечности. Для каждого случая вычисляется укороченное уравнение, строится многогранник Ньютона. Если укороченные уравнения содержат нелинейные множители, то применяется степенное преобразование переменных.

В целом разработанный метод анализа структуры алгебраического многообразия оказался эффективным.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 AT SAMARKAND STATE UNIVERSITY**

**SAMARKAND STATE UNIVERSITY NAMED AFTER SHAROF
RASHIDOV**

AZIMOV ALIJON AKHMADOVICH

**PARAMETRIC EXPANSIONS OF AN ALGEBRAIC VARIETY
NEAR ITS SINGULARITIES**

01.01.01 - Mathematical Analysis

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY
(PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

Samarkand – 2025

The theme of the dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry higher education, science and innovations of the Republic of Uzbekistan under number B2024.3.PhD/FM1170

The dissertation was carried out at Samarkand State University named after Sh.Rashidov.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (www.samdu.uz) and the «Ziyonet» Information and educational portal (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor: **Soleev Akhmadjon**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Official opponents: **Nikonorov Yuri Gennadievich**
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Ikromov Isroil Akramovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Leading organization: **St.Petersburg Department of the Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences (Russia)**

Defense will take place « ____ » _____ 2025 at ____ at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.02.01 at Samarkand State University. (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32, fax: (+99866) 235-19-38, e-mail: patent@samdu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Samarkand State University (is registered № _____) (Address: University Boulevard 15, Samarkand, 140104, Uzbekistan, Ph.: (+99866) 231-06-32).

Abstract of dissertation sent out on « ____ » _____ 2025 year
(Mailing report № _____ on « ____ » _____ 2025 year)

S.N. Lakaev
Vice-Chairman of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician

A.M.Khalkhuzhaev
Scientific secretary of scientific council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor.

I.A. Ikromov
Vice-Chairman of the Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD thesis)

The aim of the research work is to obtain local parametrizations of the algebraic manifold Ω near its singular points and curves of singular points by means of algorithms of power geometry and computer algebra programs.

The object of the research work is to algebraic polynomial, Newton polyhedron, algebraic manifold, Ricci flows, Einstein invariant metrics.

Scientific novelty of the research work is as follows:

- unimodular matrices are constructed using integer vectors, and these matrices are applied to power transformations that convert the subspaces of a linear transformation into a coordinate space;
- a method for asymptotic expansions of solutions to nonlinear algebraic equations near singular points using methods of power geometry has been developed, and the properties of these expansions have been proven;
- for the algebraic variety Ω defined by a twelfth-degree polynomial in three variables, singular points, curves of singular points, and local parametric expansions of the algebraic variety Ω in the vicinity of singular points and curves of singular points have been found;
- the structure of the variety Ω near singular points and curves of singular points has been studied both in the finite part of the space and at infinity. The Newton polyhedron has been constructed, and a method for finding parametric expansions for these truncated equations has been proven.

Implementation of the research results. Parametric expansions of an algebraic variety near its singularities have enabled the following:

based on the results of the dissertation, an algorithm has been developed for constructing a unimodular matrix of a linear transformation that maps an m -dimensional linear subspace generated by integer vectors into a coordinate subspace of an n -dimensional space. A method has been found for computing the branches of an algebraic variety near its singular points and near curves of singular points. This work was carried out as part of the scientific research project "Continuous and Discrete Models of Mathematical Physics and Asymptotic Methods" (No. FFMN-2022-0004) at the M.V. Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences (KIAM RAS), Moscow (Reference No. 11103-9422/484 dated May 28, 2024, from KIAM RAS, Moscow). These methods have made it possible to implement power-logarithmic transformations used in computing the asymptotics of solutions to systems of nonlinear partial differential equations, as well as to compute parametric expansions of the three-parameter variety of degenerate Ricci flows studied in astrophysics;

the results obtained in the computation unimodular matrices of power transformations were used in finding solutions to the Hamiltonian system, as published in leading scientific journals (Computational Mathematics and Mathematical Physics, 2023, Vol. 63, No. 5, pp. 687–703; Programming and Computer Software, 2023, Vol. 49, No. 8, pp. 842–853; Mathematics in Computer Science, 2024, Vol. 18, No. 22, pp. 1–21). The application of these scientific results

allowed for the computation of resonant cases of the Hamiltonian system, as well as for the study of equilibrium states in multiparameter Hamiltonian system.

The structure and volume of the dissertation. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 114 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo'lim (I часть; I part)

1. Azimov A.A. A method for finding a unimodular matrix of a power transformation using continued fractions in three-dimensional space // Samarkand scientific journal, Samarkand 2020. -№5, -pp.40-46. (01.00.00; №02)
2. Azimov A.A. Power transformations of nonlinear algebraic equations in the plane // Samarkand scientific journal, Samarkand 2022. -№ 1, -pp.78-88. (01.00.00; №02)
3. Брюно А.Д., Азимов А.А. Вычисление унимодулярных матриц // Препринты ИПМ им. М.В.Келдыша, Москва, 2022. -№ 36, -С. 1-20. (01.00.00; CrossRef, 35)
4. Брюно А.Д., Азимов А.А. Локальная параметризация алгебраического многообразия вблизи некоторых его особенностей // Научный вестник СамГУ, Самарканд, 2022. -№5, -С.42-53. (01.00.00; №02)
5. Солеев А.С., Азимов А. А. Степенные преобразования для систем нелинейных алгебраических уравнений // Илм сарчашмалари, Ургенч, 2023. - № 10, -С.17-33. (01.00.00; №12)
6. Bruno A.D., Azimov A.A. Computing unimodular matrices of power transformations // Programming and Computer Softwear, 2023 Vol.49, -pp. 32-41. (Scopus IF=1.6)
7. Bruno A.D., Azimov A.A. Parametric expansions of an algebraic variety near its singularities // Axioms 2023, 12(5), 469. (Scopus IF=1.9)
8. Bruno A.D., Azimov A.A. Parametric expansions of an algebraic variety near its singularities II // Axioms 2024, 13(2), 106. (Scopus IF=1.9)

II bo'lim (II часть; II part)

9. Bruno A.D., Azimov A.A. Parametric expansions of an algebraic variety near its singularities // International Conference on Polynomial Computer Algebra St.Petersburg, April 17-22, 2023. -pp.22-26. ISSN 978-5-9651-1473-3.
10. Bruno A.D., Azimov A.A. Computing unimodular matrices of power transformations // International Conference on Polynomial Computer Algebra St.Petersburg, April 17-22, 2023. -pp.27-31. ISSN 978-5-9651-1473-3.
11. Bruno A.D., Azimov A.A. On Computation of Power Transformations // COMPUTER ALGEBRA 5th International Conference Materials Moscow, June 26–28, 2023. -pp.37-40. ISBN 978-5-98354-067-5.
12. Bruno A.D., Azimov.A.A. Asymptotic expansions of a manifold near its curve of singular points // International Conference on Polynomial Computer Algebra St.Petersburg, April 15-20, 2024. -pp.23-27. ISSN 978-5-9651-1566-2.
13. Брюно А.Д., Азимов А.А. Вычисление унимодулярных матриц степенных преобразований // Abstracts of the international conference”

Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics”. Samarkand, September 23-24, -pp.121, 2022.

14. Брюно А.Д., Азимов А.А. Локальная параметризация алгебраического многообразия вблизи его особых точек // Abstracts of the international conference “Mathematical analysis and its applications in modern mathematical physics”. Samarkand September 23-24, -pp.122, 2022.

15. Azimov A.A. The local parametrization of an algebraic variety near its third-order singular point $P_5^{(3)}$ // Of the 8th international conference “Actual problems of applied mathematics and information technologies” - Al-Khwarizmi 2023. September 25-26, -pp.153, 2023 SamSU, Samarkand, Uzbekistan.

16. Azimov A.A. Нахождение корней многочлена с помощью степенной геометрии // International Scientific and Practical Conference “Modern problems of mathematical physics and mathematical modeling”. December 3-4, 2021 Qarshi. -pp.374-377.

17. Soleev A.S, Azimov A.A. Properties of power transformations for system of nonlinear algebraic equations // Topical issues of algebra and analysis collection of materials of the Republican scientific and practical conference. November 18-19, -pp. 57-60, 2022 Termez.

Avtoreferat Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universitetining
“SamDU ilmiy axborotnomasi” jurnali tahririyatida tahrir qilindi. (01.05.2025 yil).

01.05.2025 yilda bosishga ruxsat etildi.
Bichimi 60x84 ¹/₁₆. “Times New Roman” garniturasida.
Ofset qog‘ozi. Shartli bosma tabog‘i 2,5.
Nashriyot hisob tabog‘i 2,5. Adadi 70 nusxa.7 /1-buyurtma.

“Sardor poligraf” OK bosmaxonasida chop etildi.
Manzil: Samarqand viloyati, Samarqand tumani, “Xishrov” MFY.