

**O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA’LIM, FAN VA
INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI**

**ALFRAGANUS UNIVERSITY
NODAVLAT TA’LIM TASHKILOTI**

SHAMSIYEV RAHIM NAJMIDDINOVICH

DIFFERENSIAL VA INTEGRAL HISOB

DARSLIK

I QISM

60610500 - Kompyuter injiniringi, 60610600 - Dasturiy injiniring,
60612100 - Kiberxafvsizlik injiniringi bakalavr ta’lim yo’nalishlarining
talabalariga tavsiya qilinadi

TOSHKENT 2025

UDK 517

BBK 22.16

R.N. Shamsiyev “Differensial va integral hisob” I qism. Darslik. – «Alfraganus university», 2025, -298 b.

Mazkur darslik oliy ta’lim muassasalarining oliy matematikani turli hajmlarda o’rganuvchi barcha texnika yo’nalishlari bakalavrlari uchun mo’ljallangan.

Darslik kompyuter, kiberxavfsizlik injineri, dasturiy injineri va sun’iy intellekt yo’nalishlarining “Hisob” fani dasturi asosida yozilgan bo’lib, I qismda fanning matematik analizga kirish, bir o’zgaruvchili funksiyaning differensial va integral hisobi, ularning tadbiqlari va II qismda ikki o’zgaruvchili funksiyaning differensial va integral hisobi, ularning tadbiqlari, maydonlar nazariyasi, qatorlar nazariyasi va kompleks o’zgaruvchili funksiyalar nazariyasi mavzulari bayon qilingan. Paragraflarning har birida mavzuga oid asosiy tushunchalar keltirilgan, tegishli teoremlar isboti bilan berilgan va unga doir namunaviy misollar yechimlari bilan berilgan. Mavzuga oid mustaqil yechish uchun misollar ham berilgan.

Taqrizchilar:

A.E.Mamatov	Toshkent axborot texnologiyalari universiteti «Oliy matematika» kafedrasida dotsenti, f.-m.f.n.
A.R.Azamatov	Alfraganus Universiteti «Matematika va fizika» kafedrasida dotsenti, f.-m.f.n.

Ushbu darslik Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligining 2024-yil 27-dekabr 485-son buyrug’i bilan nashrga tavsiya etilgan.

© **Shamsiyev R.N.**
© **«Alfraganus university», 2025**

KIRISH

Yurtimizning ta'lim tizimidagi keng ko'lamli islohatlar zamonaviy, jahon talablariga javob beradigan yuqori malakali, raqobatbardosh kadrlar tayyorlash muammolari bilan uzviy bog'langanligi barchamizga ma'lum. Bu islohatlar o'z navbatida oliy maktab professor-o'qituvchilari oldiga ta'lim maqsadi va mazmunini jahon andozalariga moslashtirishdek ma'suliyatli vazifalarni yuklaydi. Bu vazifalar orasida bo'lajak mutaxassislarning fundamental fanlarni chuqur egallashiga doir qat'iy talablarini qondira oladigan yangi o'quv adabiyotlarini yaratish dolzarb masalasi yotadi.

Ana shu dolzarb masalani hal etishda oz bo'lsada o'z hissasini qo'shish maqsadida muallif tomonidan I.A.Karimov nomidagi Toshkent Davlat texnika universiteti, Alfraganus universiteti talabalariga bir qancha yillar davomida o'qigan ma'ruzalari va olib borgan amaliy mashg'ulotlari asosida to'plangan tajribalarga tayangan holda differensial va integral hisob kursidan darslik yozishga jazm etdi.

Kitobxon e'tiboriga havola etilayotgan mazkur "Differensial va integral hisob" darsligi oliy o'quv yurtlarining texnika yo'nalishlari talabalari uchun mo'ljallangan. Unda keltirilgan mavzular oliy o'quv yurtlarining barcha texnika yo'nalishlari uchun tasdiqlangan namunaviy fan dasturiga to'liq mos keladi.

Darslikdagi ayrim teoremlar isbotsiz keltirilgan. Teoremlarning ana shu isbotlari bilan qiziquvchi kitobxon ularni adabiyotlar ro'yxatidagi asosiy adabiyotlardan topishi mumkin.

Kitobda mavzular, ta'riflar, teoremlar, misollar va rasmlarning tartib raqamlari har bir bob uchun alohida qo'yilgan. Teorema isbotining, hamda misol va masala yechimining boshiga ►, oxiriga esa ◀ belgi qo'yilgan.

Muallif mazkur darslikni yozishni fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent marhum G'.Shodmonov tavsiya qilganini va qo'l yozma yozilish jarayonida u o'zining qimmatbaho maslahatlarini ayamaganligini chuqur hurmat bilan e'tirof etadi.

Muallif kitob haqida bildirilgan har qanday fikr-mulohazalarni kitobning sifatini yaxshilash uchun ko'rsatilgan yordam sifatida minnatdorchilik bilan qabul qiladi (shamsievrahim@rambler.ru).

Muallif.

I BOB. SONLI TO‘PLAMLAR. SONLI KETMA-KETLIKLAR

1.1. To‘plamlar nazariyasi elementlari

To‘plam tushunchasi. Matematik to‘plam tushunchasi majmua, yig‘indi, birlashma, birikmalar kabi tushunchalardan sekin-asta shakllanib kelgan. G.Kantor to‘plamni “bizning ongimizda yoki intuitsiyalarimizda farqlanadigan ob’ektlarning bir butun bo‘lib yig‘ilgan yig‘indisi” deb ta’rif beradi.

N.Burbaki taxallusi bilan ijod qilishgan bir guruh fransuz matematiklari tomonidan yo‘zilgan “To‘plamlar nazariyasi” (1939) kitobining birinchi nashrida “To‘plam ayrim xossalarga ega va o‘zaro yoki boshqa to‘plamlar elementlari bilan ba’zi munosabatlarda bo‘ladigan elementlardan tashkil topadi” deb to‘plamga tushuncha berilgan. To‘plam tushunchasini aniqlashda qanday qiyinchiliklar tug‘ilishidan qat’iy nazar, bu tushunchaning o‘zi qaralayotgan ob’ektlarni o‘rganishda kuchli qurol hisoblanishini ta’kidlab o‘tish kerak.

Shunday qilib, to‘plam tushunchasi boshlang‘ich tushuncha bo‘lib: unga qat’iy ta’rif berilmaydi, ammo u misollarda izohlanishi mumkin. Masalan, guruhdagi talabalar to‘plami, kutubxonani tashkil qiluvchi kitoblar to‘plami, to‘g‘ri chiziqning barcha nuqtalari to‘plami, berilgan tenglamaning yechimlari to‘plami, barcha juft sonlar to‘plami haqida gapirish mumkin.

To‘plamlarni katta $A, B, \dots, X, Y, Z$ harflar bilan belgilaymiz, ularning elementlarini esa kichik $a, b, \dots, x, y, z$ harflar bilan belgilaymiz. Bu qoidaga har doim ham rioya qilib bo‘lmaydi, chunki ba’zan to‘plamning o‘zlari ham boshqa bir to‘plamning elementi bo‘lib kelishi mumkin. x element E to‘plamning elementi ekanligi $x \in E$ ko‘rinishda belgilanadi va x element E to‘plamga tegishli deb aytiladi. $x \notin E$ yozuv “ x element E to‘plamga tegishli emas” degan ma’noni anglatadi. Agar E to‘plamga x, y, z elementlar tegishli bo‘lsa, $x \in E, y \in E, z \in E$ deb yozish o‘rniga $x, y, z \in E$ ko‘rinishda yoziladi.

Ikkita A va B to‘plamlar bir xil elementlardan tashkil topishgan bo‘lsa, ular *teng* ($A = B$) deb ataladi. Agar biz to‘plamning elementlarini bilsak yoki topa olsak. Bu to‘plam berilgan deb hisoblanadi. To‘plamni uning elementlarini ro‘yxat qilib ko‘rsatib ham aniqlash mumkin. To‘plam elementlarining ro‘yxati figurali qavs ichiga yoziladi. Masalan, elementlari faqat 1, 2, 3, 4 sonlar bo‘lgan to‘plam $A = \{1, 2, 3, 4\}$ ko‘rinishda yoziladi. Bitta a elementdan iborat to‘plam $\{a\}$ ko‘rinishda belgilanadi.

To'plamni uning ixtiyoriy elementini tavsiflovchi xossani ko'rsatish yordamida berish keng qo'llaniladi. $q(x)$ xossaga ega elementlar to'plami $\{x: q(x)\}$ ko'rinishda belgilanadi. Masalan, A — O'zbekistonning shaharlari to'plami bo'lsa, ya'ni

$$A = \{x: x \text{ — O'zbekistondagi shahar}\},$$

ixtiyoriy x elementning tavsiflovchi $q(x)$ xossasi, x ning O'zbekistonning shahri ekanligini anglatadi.

Ko'rsatilgan tavsiflovchi $q(x)$ xossaga hech bir element ega bo'lmasligi ham mumkin. Bunday holda bu xossa *bo'sh to'plamni* aniqlaydi va bu to'plam $\emptyset$ ko'rinishda belgilanadi. Agar to'plam chekli sondagi elementlardan iborat bo'lsa, u *chekli to'plam*, aks holda *cheksiz to'plam* deyiladi.

Qism to'plam. Agar A to'plamning har bir elementi B to'plamga ham tegishli bo'lsa, A to'plam B to'plamning *qism to'plami* deb ataladi va bu munosabat $A \subset B$ ko'rinishda yoziladi. B to'plamning o'zi va $\emptyset$ bosh to'plam B to'plamning qism to'plami bo'ladi. B to'plamning barcha qism to'plamlari to'plami boshqa bir yangi to'plam bo'ladi va u $P(B)$ orqali belgilanadi.

1.1-Misol. Agar $E = \{a, b, c\}$ bo'lsa, $P(E)$ to'plamni tuzing.

► $P(E) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$. ◀

Umuman olganda, agar E to'plam n ta elementdan iborat bo'lsa, u holda $P(E)$ to'plam 2^n ta elementdan iborat bo'ladi.

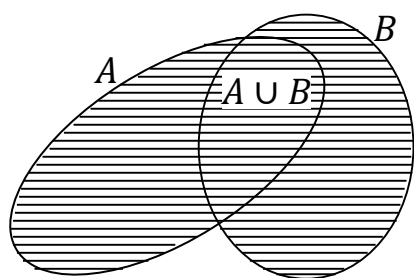
To'plamlarning tengligini qism to'plam tushunchasi bilan ham berish mumkin. Agar $A \subset B$ va $B \subset A$, ya'ni A to'plamning har bir elementi B to'plamning ham va aksincha bo'lsa, A va B to'plamlar teng deyiladi va $A = B$ ko'rinishda yoziladi.

Agar $A \subset B$, ammo $A \neq B$ bo'lsa, A to'plam B to'plamning *to'g'ri qismi* (B to'plamning *chin qism to'plami*) deb ataladi.

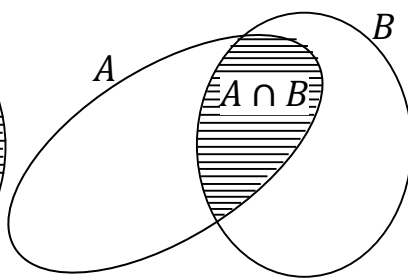
To'plamlar ustida amallar. A va B to'plamlar berilgan bo'lsin. Bu to'plamlarning *yig'indisi* yoki *birlashmasi* deb, A va B to'plamlarning hech bo'lmaganda biriga tegishli bo'lgan elementlardangina tashkil topgan $C = A \cup B$ to'plamga aytiladi (1.1-rasm).

A va B to'plamlarning *kesishmasi* deb, A to'plamga ham, B to'plamga ham tegishli bo'lgan elementlardan tashkil topgan $C = A \cap B$ to'plamga aytiladi (1.2-rasm).

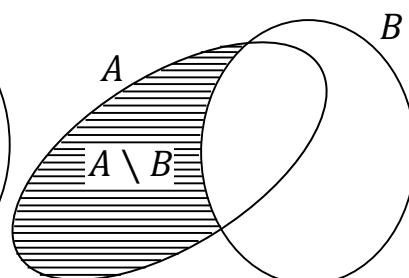
A va B to'plamlarning *ayirmasi* deb, A to'plamning B to'plamga kirmagan elementlaridan tashkil topgan $C = A \setminus B$ to'plamga aytiladi (1.3-rasm).



1.1-rasm



1.2-rasm



1.3-rasm

Masalan, agar $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ va $B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ bo'lsa, u holda $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $A \cap B = \{4, 5\}$, $A \setminus B = \{1, 2, 3\}$, $B \setminus A = \{6, 7, 8\}$ bo'ladi.

Ixtiyoriy sondagi to'plamlarning birlashmasi va kesishmasi xuddi shu singari aniqlanadi.

Agar $A \cap B = \emptyset$ bo'lsa, A va B to'plamlar kesishmaydi deb aytiladi.

A va B to'plamlar berilgan bo'lsin. Agar A to'plamning har bir elementiga B to'plamning yagona elementi mos qoyilgan bo'lib, bunda: 1) A to'plamning har xil elementlariga B to'plamning har xil elementlari mos qo'yilgan va 2) B to'plamning har bir elementi A to'plamning qandaydir elementi mos qo'yilgan bo'lsa, A va B to'plamlar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan deb aytiladi. Agar chekli A va B to'plamlar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lsa, ulardagi elementlar soni teng. Agar A va B to'plamlar o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, ular *ekvivalant* to'plamlar deb ataladi va $A \sim B$ ko'rinishda belgilanadi.

Agar cheksiz A to'plam bilan $\mathbb{N}$ natural sonlar to'plami o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin bo'lsa, ya'ni $A \sim \mathbb{N}$ bo'lsa, A to'plam sanoqli to'plam deb ataladi. Har qanday cheksiz to'plam tarkibida sanoqli qism to'plam mavjud.

1.2. Sonli to'plamlar

Haqiqiy sonlar.

1.1-Ta'rif. Koordinatalar boshi deb ataluvchi O nuqta, masshtab va yo'nalish aniqlangan l to'g'ri chiziq son o'qi deb ataladi.

Har bir r songa son o'qining faqat bitta nuqtasi mos keladi va aksincha, ya'ni son o'qining har bir nuqtasiga faqat bitta haqiqiy son mos keladi. Boshqacha qilib aytganda haqiqiy sonlar bilan son o'qining nuqtalari o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan.

Haqiqiy sonlar tartiblanganlik xususiyatiga ega: agar a va b haqiqiy sonlar bo'lsa, u holda yoki $a = b$, yoki $a < b$, yoki $a > b$. Haqiqiy sonlar

son o'qida o'sish tartibida tasvirlanadi. Haqiqiy sonlar to'plami $\mathbb{R}$ orqali belgilanadi.

Agar $\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar to'plamini ikkita $+\infty$ va $-\infty$ elementlar bilan to'ldirilsa, u holda kengaytirilgan son o'qi va kengaytirilgan $\overline{\mathbb{R}}$ haqiqiy sonlar to'plamiga ega bo'lamiz. Bunda ta'rifga ko'ra quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

1. $\forall x \in \mathbb{R}$ uchun $-\infty < x < +\infty$, $x + \infty = +\infty$, $x - \infty = -\infty$;
2. $\forall x > 0$ uchun $x \cdot (+\infty) = +\infty$, $x \cdot (-\infty) = -\infty$;
3. $\forall x < 0$ uchun $x \cdot (+\infty) = -\infty$, $x \cdot (-\infty) = +\infty$;
4. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$;
5. $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$;
6. $(+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty$;
7. $(+\infty) \cdot (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$;
8. $(+\infty) + (-\infty)$ va $\frac{+\infty}{-\infty}$ amallar aniqlanmagan.

Haqiqiy sonning moduli.

1.2-Ta'rif. x haqiqiy sonning moduli deb

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{agar } x \geq 0 \\ -x, & \text{agar } x < 0 \end{cases}$$

shart bilan aniqlanuvchi manfiy bo'lmagan $|x|$ songa aytiladi.

Agar $\varepsilon > 0$ ixtiyoriy son bo'lsa, u holda $|x| \leq \varepsilon$ tengsizlikdan $-\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ yoki $x \in [-\varepsilon; \varepsilon]$ ekanligi kelib chiqadi.

Haqiqiy son modulining xossalari.

a va b ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo'lsin. U holda:

1. $|ab| = |a||b|$;
2. $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|}$, ($b \neq 0$);
3. $|a + b| \leq |a| + |b|$ (Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi);
4. $|a - b| \geq |a| - |b|$;

Chegaralangan to'plamlar. $D \subset \mathbb{R}$ sonli to'plam berilgan bo'lsin.

1.3-Ta'rif. Shunday b haqiqiy son topilib, ixtiyoriy $x \in D$ element uchun $x \leq b$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, D to'plam yuqoridan chegaralangan deyiladi.

1.4-Ta'rif. Shunday a haqiqiy son topilib, ixtiyoriy $x \in D$ element uchun $x \geq a$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, D to'plam quyidan chegaralangan deyiladi.

1.5-Ta’rif. Agar D to‘plam yuqoridan va quyidan chegaralangan bo‘lsa, D to‘plam chegaralangan to‘plam deyiladi. Boshqacha qilib aytganda, agar D to‘plam chekli $[a; b]$ kesmada joylashgan bo‘lsa, u chegaralangan deyiladi.



1.4-rasm

Chekli sondagi nuqtalardan iborat to‘plam chekli deyiladi.

1.2-Misollar.

1. Natural sonlar to‘plami $a \leq 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy a son bilan quyidan chegaralangan.
2. Manfiy sonlar to‘plami ixtiyoriy $b \geq 0$ son bilan yuqoridan chegaralangan.

1.6-Ta’rif. Yuqoridan yoki quyidan chegaralangan to‘plam, chegaralangan to‘plam deb ataladi.

1.1-Teorema. Agar ixtiyoriy $M > 0$ son uchun shunday $x \in D$ element topilib, ular uchun $|x| > M$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, D to‘plam chegaralanmagan bo‘ladi.

► Teskarisidan faraz qilamiz, ya’ni D to‘plam chegaralangan bo‘lsin, ya’ni D to‘plam quyidan a son bilan yuqoridan b son bilan chegaralangan bo‘lsin. U holda D to‘plamning ixtiyoriy x elementi uchun $a \leq x \leq b$, tengsizlik o‘rinli bo‘ladi, ya’ni D to‘plamning barcha elementlari $[a; b]$ kesmada yotadi. Ammo teorema shartiga ko‘ra $M = \max\{|a|, |b|\}$ son uchun shunday $x \in D$ element topilib, ular uchun $|x| > M$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi, ya’ni D to‘plamning $[a; b]$ kesmaga tushmaydigan x elementi mavjud ekan. Qarama-qarshilikka duch keldik. Ana shu qarama-qarshilik qilingan farazning noto‘g‘riligini anglatadi. ◀

1.3-Misol.

1. Z butun sonlar to‘plami chegaralanmagan.
2. $(-\infty; +\infty), (-\infty; b), (a; +\infty)$ intervallar chegaralanmagan.

To‘plamning quyi va yuqori chegaralari. Agar D to‘plam yuqoridan b son bilan chegaralangan bo‘lsa, b soni D to‘plamning yuqori chegarasi deyiladi. b sonidan katta har qanday son ham D to‘plamning yuqori chegarasi deyiladi.

1.7-Ta’rif.

- Agar
- 1) ixtiyoriy $x \in D$ son uchun $x \leq M$;
 - 2) ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $x^* \in D$ topilib, ular uchun $M - \varepsilon < x^* \leq M$ tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, M soni D to‘plamning aniq yuqori chegarasi deyiladi.

Boshqacha qilib aytganda D to‘plam yuqori chegaralarining eng kichigi uning aniq yuqori chegarasi deyiladi.

D to‘plamning aniq yuqori chegarasi

$$M = \sup D \text{ yoki } M = \sup_{x \in D} \{x\}$$

ko‘rinishda belgilanadi (lotincha *supremum* –eng katta ma’noni anglatadi).

Yuqoridan chegaralanmagan D to‘plam uchun uning aniq yuqori chegarasini $(+\infty)$ deb qabul qilamiz va

$$\sup D = +\infty$$

ko‘rinishda yozamiz.

Agar D to‘plam quyidan a soni bilan chegaralangan bo‘lsa, bu a sonini D to‘plamning quyi chegarasi deb ataymiz. a sonidan kichik har qanday son ham D to‘plamning quyi chegarasi bo‘lishi ravshan.

1.8-Ta’rif. Agar

1) ixtiyoriy $x \in D$ son uchun $x \geq m$;

2) ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $x^* \in D$ topilib, ular uchun $m \leq x^* < m + \varepsilon$ tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, m soni D to‘plamning aniq quyi chegarasi deyiladi.

Shunday qilib, D to‘plam quyi chegaralarining eng kattasi bu to‘plamning aniq quyi chegarasi bular ekan.

D to‘plamning aniq quyi chegarasi

$$m = \inf D \text{ yoki } m = \inf_{x \in D} \{x\}$$

ko‘rinishda belgilanadi (lotincha *infimum*–eng kichik ma’noni anglatadi). Quyidan chegaralanmagan D to‘plam uchun

$$\inf D = -\infty$$

deb hisoblaymiz.

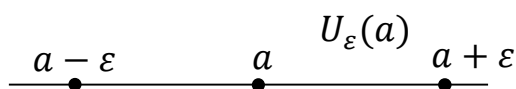
Masalan. $\sup [a; b] = b$, $\inf [a; b] = a$, $\sup [a; +\infty) = +\infty$, $\inf (-\infty; b] = -\infty$, $\sup Z = +\infty$, $\inf Z = -\infty$.

Nuqtaning atrofi. x_1 va x_2 orasidagi masofa deb $\rho(x_1, x_2) = |x_1 - x_2|$ songa aytiladi.

1.9-Ta’rif. $a \in \mathbb{R}$ nuqtaning ε atrofi deb

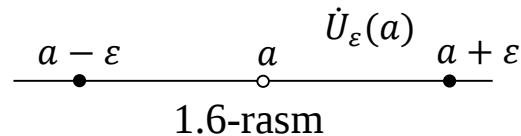
$$U_\varepsilon(a) = \{x: a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\}$$

to‘plamga aytiladi (1.5-rasm).



1.5-rasm

1.10-Ta’rif. a nuqtaning $U_\varepsilon(a)$ atrofidan a nuqtani olib tashlanishidan hosil bo‘lgan $\dot{U}_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ to‘plamga a nuqtaning o‘zi kirmagan atrofi deb ataladi (1.6-rasm).



Agar a nuqtaning atrofini olishda $\varepsilon > 0$ qiymatini ko‘rsatish shart bo‘lmasa biz umumiyashtirib a nuqtaning biror atrofi deb aytamiz va uni $U(a)$ (nuqtaning o‘zi kirmagan atrofini esa $\dot{U}(a)$) orqali belgilaymiz.

1.3. Sonli ketma-ketlik va uning limiti

1.11-Ta’rif. Agar har bir n natural son uchun biror x_n son mos qo‘yilgan bo‘lsa, u holda

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

ketma-ketlik berilgan deyiladi, u $\{x_n\}$ orqali belgilanadi. x_n -ketma-ketlikning umumiy hadi deb ataladi.

Ketma-ketliklarga misollar.

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

$$\{2^n\} = 2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$$

$$\{1\} = 1, 1, 1, \dots, 1, \dots$$

$$\{\sin n\} = \sin 1, \sin 2, \sin 3, \dots, \sin n, \dots$$

Ketma-ketlikning limiti. $\{x_n\}$ ketma-ketlik va a soni berilgan bo‘lsin.

1.12-Ta’rif. Agar ixtiyoriy yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday musbat butun $N = N(\varepsilon)$ son topilib, $n \geq N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha n natural sonlarda $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deb ataladi va

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$$

ko‘rinishda belgilanadi.

1.4-misol. $\{x_n\} = \left\{\frac{2n-5}{4n+2}\right\}$ ketma-ketlik $a = \frac{1}{2}$ limitga ega ekanligini isbotlang.

$$\blacktriangleright |x_n - a| = \left| \frac{2n-5}{4n+2} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{-12}{2(4n+2)} \right| = \frac{3}{2n+1} < \varepsilon$$

Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladigan N musbat butun sonni topamiz. Buning uchun $\frac{3}{2n+1} < \varepsilon$ tengsizlikni yechamiz. $n > \frac{3-\varepsilon}{2\varepsilon} = \frac{3}{2\varepsilon} - \frac{1}{2}$. N sifatida $N = \left[\frac{3}{2\varepsilon} \right]$ deb olamiz, bu yerda $[c]$ orqali c sonining butun qismi belgilangan. Agar $\varepsilon = 0,01$ bo‘lsa $N = \left[\frac{3}{2 \cdot 0,01} \right] = 150$. $n > 150$ uchun

$$|x_n - a| = \frac{3}{2n+1} < \frac{3}{2 \cdot 150 + 1} < \frac{3}{300} = \frac{1}{100} = 0,01,$$

ya’ni $a = \frac{1}{2}$ soni berilgan ketma-ketlikning limiti bo‘lar ekan. ◀

1.13-Ta’rif. Ixtiyoriy $M > 0$ son uchun shunday N natural son topilib, barcha $n > N$ uchun $|x_n| > M$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz katta deb ataladi va u $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$ ko‘rinishda yoziladi.

Agar ixtiyoriy $M > 0$ son uchun shunday N natural son topilib, barcha $n > N$ uchun $x_n > M$ (mos ravishda $x_n < -M$) tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, bu holda ham ketma-ketlik cheksiz katta deb ataladi va u $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = +\infty$ (mos ravishda $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = -\infty$) ko‘rinishda yoziladi.

Agar ketma-ketlik (chekli) limitga ega bo‘lsa, uni biz *yaqinlashuvchi*, limitga ega bo‘lmasa, *uzoqlashuvchi* ketma-ketlik deb ataymiz.

Quyida muhim ahamiyatga ega bo‘lgan tasdiqni isbotsiz keltiramiz.

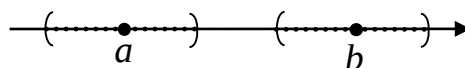
1.1-Lemma. (Kantor) $\sigma_n = [a_n; b_n]$ $n = 1, 2, 3, \dots$ kesmalar to‘plami bir-birining ichiga joylashtirilgan, ya’ni $\sigma_{n+1} \subset \sigma_n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) va $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$ bo‘lsin. U holda barcha σ_n kesmalarga tegishli bo‘lgan yagona nuqta mavjud.

Bu lemma haqiqiy sonlar to‘plamining uzluksizlik xossasini yoki son o‘qining to‘lalik xossasini ifodalaydi.

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari.

1.2-Teorema (ketma-ketlik limitining yagonaligi). Yaqinlashuvchi ketma-ketlik yagona limitga ega.

► $\{x_n\}$ ketma-ketlik a limitga ega bo‘lsin. Har qanday $b \neq a$ son $\{x_n\}$



1.7-rasm

ketma-ketlikning limiti bo‘la olmasligini isbotlaymiz. Buning uchun $\varepsilon > 0$ sonni a va b nuqtalarning $U_\varepsilon(a)$, $U_\varepsilon(b)$ atroflari kesishmaydigan qilib tanlaymiz, masalan $\varepsilon = |b - a|/3$ deb olamiz (1.7-rasm).

Shartga ko‘ra $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ u holda $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ intervaldan tashqarida, xususan $(b - \varepsilon; b + \varepsilon)$ intervalda $\{x_n\}$ ketma-ketlikning chekli

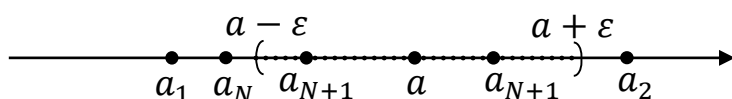
sondagi hadlari yotishi mumkin. Shuning uchun b soni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti bo'la olmaydi. ◀

1.14-Ta'rif. Agar ketma-ketlik qiymatlari to'plami yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi.

1.15-Ta'rif. Agar ketma-ketlik yuqoridan ham, quyidan ham chegaralangan bo'lsa, u chegaralangan ketma-ketlik deb ataladi.

1.3-Teorema. (Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning chegaralanganligi) Har qanday yaqinlashuvchi ketma – ketlik chegaralangan, ya'ni ketma – ketlikning hamma hadlari uchun $m \leq x_n \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan m va M sonlari mavjud.

► $\{x_n\}$ ketma – ketlik a limitga ega bo'lsin. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olamiz. U holda shunday N natural son topiladiki, $n > N$ bo'ladigab barcha n larda $\{x_n\}$ ketma – ketlikning hadlari $U_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ intervalga tushadi. Bu intervaldan tashqarida esa faqat $a_1; a_2; \dots; a_N$ hadlar yotadi (1.8-rasm). Ularning soni chekli.



1.8-rasm

Shuning uchun ularning eng chapdagisi a_- va eng o'ngdagisi a^+ mavjud. a_- va $a - \varepsilon$ sonlarning eng kichigini m orqali belgilaymiz.

$$m = \min(a_-; a - \varepsilon)$$

M orqali esa a_+ va $a + \varepsilon$ sonlarning kattasini belgilaymiz.

$$M = \max(a_+; a + \varepsilon)$$

U holda $[m; M]$ kesmada $a_1; a_2; \dots; a_N$ nuqtalar hamda $n \geq N + 1$ tartiq raqamli $\{a_n\}$ nuqtalar yotuvchi $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ interval yotadi. Shuning uchun $[m; M]$ kesmada $\{x_n\}$ ketma – ketlikning barcha hadlari yotadi. Bu esa uning chegaralanganligini anglatadi. ◀

1.4-Teorema. Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$ bo'lsa, biror N tartib raqamidan boshlab ketma – ketlik hadlari ishorasi a limit ishorasi bilan bir xil bo'ladi.

► Umumiylikni buzmasdan $a > 0$ deb faraz qilamiz. $\varepsilon > 0$ sonni $\varepsilon < a$ bo'ladigan qilib tanlaymiz. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \neq 0$ bo'lganligi uchun biror N tartib raqamidan boshlab $\{x_n\}$ ketma – ketlikning qolgan barcha hadlari $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ intervalga tushadi, ya'ni $0 < a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$. Bu tengsizliklar esa $\{x_n\}$ ketma – ketlikning N dan keyingi hadlari musbat, ya'ni a limitning ishorasi bilan bir xil ekanligini anglatadi. ◀

Natija. Agar $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ va $a < b$ bo'lsa, u holda biror N tartib raqamidan boshlab $x_n < y_n$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

1.5-Teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma – ketliklar yaqinlashuvchi va $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ bo'lsa, $\{x_n + y_n\}$ ketma – ketlik ham yaqinlashuvchi bo'ladi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a + b \quad (1.1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

► $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N_1 tartib raqam tanlanadiki, bunda $n > N_1$ bo'lganda

$$|x_n - a| < \varepsilon/2 \quad (1.2)$$

bo'ladi. Xuddi shu singari shunday N_2 tartib raqam tanlanadiki bunda $n > N_2$ bo'lganda

$$|y_n - b| < \varepsilon/2 \quad (1.3)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. $N = \max\{N_1; N_2\}$ deb olamiz. U holda $n > N$ bo'lganida (1.2), (1.3) tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Shuning uchun $n > N$ bo'lganida

$$\begin{aligned} |(x_n + y_n) - (a + b)| &= |(x_n - a) + (y_n - b)| \leq \\ &\leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

bundan esa limitning ta'rifiga ko'ra (1.1) tenglikning o'rinli ekanligini anglatadi. ◀

Xuddi shu singari mulohaza yuritib quyidagi tasdiqlarni isbotlash mumkin.

1.6-Teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma – ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, $\{x_n - y_n\}$ ketma – ketlik ham yaqinlashuvchi va $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ tenglik o'rinli bo'ladi.

1.7-Teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma – ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, $\{c \cdot x_n\}$ ketma – ketlik ham yaqinlashuvchi hamda $\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot x_n = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ tenglik o'rinli bo'ladi.

1.8-Teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma – ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, $(x_n \cdot y_n)$ ketma – ketlik ham yaqinlashuvchiva $\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ tenglik o'rinli bo'ladi.

1.9-Teorema. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma – ketliklar yaqinlashuvchi, hamda ixtiyoriy n uchun $y_n \neq 0$ va $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n \neq 0$ bo'lsa, u holda $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ ketma – ketlik ham yaqinlashuvchi va $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

► $\{y_n\}$ ketma – ketliklar yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun u chegaralangan bo'ladi. Shuning uchun shunday N_0 tartib raqami mavjudki, $n > N_0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha n natural sonlarda ketma-ketlikning hadlari uchun $m \leq |y_n| \leq M$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi m, M sonlar mavjud bo'ladi. $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, b \neq 0$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N_1 tartib raqam tanlanadiki, bunda $n > N_1$ bo'lganda

$$|x_n - a| < m\varepsilon/2 \quad (1.4)$$

bo'ladi. Xuddi shu singari shunday N_2 tartib raqam tanlanadiki bunda $n > N_2$ bo'lganda

$$|y_n - b| < \varepsilon/2: (|a|/|b|m) \quad (1.5)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. $N = \max\{N_0; N_1; N_2\}$ deb olamiz. U holda $n > N$ bo'lganida (1.4), (1.5) tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Shuning uchun $n > N$ bo'lganida

$$\begin{aligned} \left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| &= \left|\frac{bx_n - ay_n}{by_n}\right| = \left|\frac{bx_n - ab + ab - ay_n}{by_n}\right| \\ &= \left|\frac{b(x_n - a) + a(b - y_n)}{by_n}\right| \leq \\ &\leq \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|a|}{|by_n|} |y_n - b| \leq \frac{|x_n - a|}{m} + \frac{|a|}{|b|m} |y_n - b| \leq \\ &\leq \frac{m\varepsilon}{2} \frac{1}{m} + \frac{|a|}{|b|m} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{|a|}{|b|m} \frac{\varepsilon}{2} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Limitning ta'rifiga ko'ra bu hosil qilingan tengsizlik $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}$ tenglining o'rinli ekanligini anglatadi. ◀

Qisman ketma-ketliklar. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan va uning ayrim x_{n_k} hadlaridan tartib raqamlari o'sib borish tartibida ($k > k'$ ekanligidan $n_k > n_{k'}$ kelib chiqadi va aksincha) tuzilgan yangi $\{x_{n_k}\}$ ketma-ketlik $\{x_n\}$ ketma-ketlikning qisman ketma-ketligi deb ataladi.

$\{x_{n_k}\}$ qismaniy ketma-ketlikda k bu ketma-ketlik hadining tartib raqami bo'ladi, n_k esa uning dastlabki ketma-ketlikdagi tartib raqami bo'ladi. Barcha $k = 1, 2, \dots$ natural sonlarda $n_k > k$ ekanligi ravshan, shuning uchun $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$ bo'ladi.

Yuqorida agar ketma-ketlik chegaralangan bo'lsa, u yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatgan edik. Aksincha albatta o'rinli emas. Masalan, $x_n = (-1)^n, n = 1, 2, \dots$, ketma-ketlik chegaralangan, ammo u limitga ega emas. Shuning bilan birga chegaralangan ketma-ketliklarning shunday muhim bir xossasi borki, u quyidagi teoremda keltirilgan.

1.10-Teorema (Bolsano-Veyershtass). Har qanaday chegaralangan ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismaniy ketma-ketlik tuzish mumkin.

► $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lsin, ya'ni $m \leq x_n \leq M, n = 1, 2, \dots$, tengsizlikni qanoatlantiradigan m, M sonlar topiladi.

$[m, M]$ kesmani $(m + M)/2$ nuqta yordamida ikkita har xil kesmaga ajratamiz. U holda bu kesmalardan kamida bittasida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari yotadi va biz uni $[m_1, M_1]$ orqali belgilaymiz. Ketma-ketlikning $[m_1, M_1]$ kesmada yotgan ixtiyoriy bitta hadini tanlaymiz. Uning tartib raqami n_1 bo'lsin:

$$x_{n_1} \in [m_1, M_1], \quad M_1 - m_1 = (M - m)/2 \quad (1.6)$$

Yuqoridagi singari $[m_1, M_1]$ kesmani ham ikkita har xil kesmaga ajratamiz, ulardan kamida bittasida ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari yotadi va biz uni $[m_2, M_2]$ orqali belgilaymiz. $[m_2, M_2]$ kesmada ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari yotganligi uchun, ular orasida tartib raqami n_1 natural sondan katta bo'lganlari ham bor. Ulardan birini tanlaymiz. Agar uning tartib raqami n_2 bo'lsa, u holda

$$x_{n_2} \in [m_2, M_2] \subset [m_1, M_1], \quad n_2 > n_1 \quad (1.7)$$

$$M_2 - m_2 = (M_1 - m_1)/2 = (M - m)/2^2 \quad (1.8)$$

Bu jarayonni davom ettirib, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning shunday $\{x_{n_k}\}$ qismaniy ketma-ketligini hosil qilamizki, uning uchun

$$m_k \leq x_k \leq M_k \quad (1.9)$$

$$[m_k, M_k] \subset [m_{k-1}, M_{k-1}] \quad (1.10)$$

$$M_k - m_k = (M - m)/2^k, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1.11)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (M_k - m_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M - m}{2^k} = 0$$

shartlar o‘rinli bo‘ladi. Biz uzunliklari nolga intiluvchi biri-birining ichiga joylashgan $[m_k, M_k], k = 1, 2, \dots$, kesmalar ketma-ketligini hosil qildik. Kantor lemmasiga ko‘ra bu kesmalar ketma-ketligining barchasiga tegishli bo‘lgan yagona ξ nuqta mavjud bo‘ladi va $\lim_{k \rightarrow \infty} m_k = \lim_{k \rightarrow \infty} M_k = \xi$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. (1.9) tengsizlikga ko‘ra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi.$$

Bu esa $\{x_{n_k}\}$ qisman ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekanligidan dalolat beradi. ◀

1.16-Ta’rif. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N tartib raqami topilib, $n > N, m > N$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha n, m tartib raqamlari uchun

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad (1.12)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik fundamental ketma-ketlik deb ataladi.

Bu shart Koshi sharti deb ataladi.

1.2-Lemma. Agar fundamental ketma-ketlikning biror qisman ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo‘lsa, u holda uning limiti asosiy ketma-ketlikning ham limiti bo‘ladi.

► $\{x_n\}$ ketma-ketlik fundamental, $\{x_{n_k}\}$ esa uning qisman ketma-ketligi va

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a \quad (1.13)$$

bo‘lsin. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olamiz. Koshi shartiga ko‘ra shunday bir N tartib raqami topiladiki, $n, m > N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha n, m natural sonlarda

$$|x_n - x_m| < \varepsilon/2 \quad (1.14)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. k_0 tartib raqamini barcha $k > k_0$ uchun

$$n_k > N$$

bo‘ladigan qilib tanalymiz ($\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$ bo‘lganligi uchun bunday k_0 tartib raqamini tanlash mumkin). U holda barcha $n > N$ va $k > k_0$ uchun

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon/2$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda $k \rightarrow \infty$ deb limitga o‘tamiz, (1.13) tenglikni inobatga olsak, barcha $n > N$ uchun

$$|x_n - a| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu esa $\lim_{k \rightarrow \infty} x_n = a$ degan ma’noni anglatadi. ◀

Quyidagi teorema ketma-ketlik limitining mavjudligi uchun zaririy va yetarli shartni beradi.

1.11-Teorema (Koshi kriteriyasi). $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishligi uchun u Koshi shartini qanoatlantirishi zarur va yetarli.

► **Zarurligi.** $\{x_n\}$ ketma-ketlik chekli a limitga ega bo'lsin. U holda limitning ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N tartib raqami topiladiki, $n > N, m > N$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha n, m tartib raqamlari uchun

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. U holda

$$\begin{aligned} |x_n - x_m| &= |(x_n - a) + (a - x_m)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| \leq \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Bu esa shartning zarurligini ko'rsatadi.

Yetarliligi. Dastlab agar ketma-ketlik Koshi shartini qanoatlantirsa, ya'ni u fundamental bo'lsa, uning chegaralangan ekanligini ko'rsatamiz. Koshi shartiga ko'ra shunday N tartib raqami topiladiki, barcha $n, m > N$ uchun

$$|x_n - x_m| < 1 \quad (1.15)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi ($\varepsilon = 1$ deb olindi). Bu yerda $m = N + 1$ deb olsak, (1.15) tengsizlik $|x_n - x_{N+1}| < 1$ ko'rinishni oladi. Bundan esa

$$x_{N+1} - 1 < x_n < x_{N+1} + 1, n = N + 1, N + 2, \dots,$$

ya'ni $\{x_n\}$ ketma-ketlikning dastlabki N hadini tashlab yuborishdan hosil bo'lgan ketma-ketlik chegaralangan ekan. Shuning uchun $\{x_n\}$ ketma-ketlikning o'zi ham chegaralangan.

Shunday qilib $\{x_n\}$ chegaralangan ketma-ketlik ekan. Shuning uchun Bolsano-Veyershtas teoremasiga ko'ra $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlik ajratib olish mumkin. U holda 1.2-Lemmaga ko'ra ajratib olingan qisman ketma-ketlikning limitiga berilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashadi. ◀

Monoton ketma – ketliklar. $\{x_n\}$ ketma – ketlik berilgan bo'lsin.

1.17-Ta'rif. Agar $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \dots \leq x_n \leq x_{n+1} \leq \dots$ o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ kamaymaydian ketma-ketlik deb ataladi. Agar $x_1 < x_2 < x_3 \dots < x_n < x_{n+1} < \dots$ o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ qat'iy o'suvchi ketma-ketlik deb ataladi.

1.18-Ta'rif. Agar $x_1 \geq x_2 \geq x_3 \dots \geq x_n \geq x_{n+1} \geq \dots$ o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ o'smaydigan ketma-ketlik deb ataladi. Agar $x_1 > x_2 > x_3 \dots > x_n > x_{n+1} > \dots$ o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ qat'iy kamayuvchi ketma-ketlik deb ataladi.

O'smaydigan va kamaymaydigan ketma – ketliklar monoton ketma ketliklar deb ataladi.

Monoton o'suvchi ketma- ketliklar o'zining birinchi hadi bilan quyidan chegaralangan, monoton kamayuvchi ketma ketliklar esa o'zining birinchi hadi bilan yuqoridan chegaralangan bo'ladi.

Agar kamayadigan ketma –ketlik yuqordan chegaralangan bo'lsa, ya'ni shunday M soni topilib, bunda ixtiyoriy n sonda $x_n < M$ bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ chegaralangan bo'ladi.

Haqiqatan ham bu holda ketma-ketlik hadlari $[x_1, M]$ kesmada yotadi. Agar o'smaydigan ketma-ketlik quyidan chegaralangan bo'lsa, ya'ni shunday m soni topilib ketma-ketlikning barcha hadlari uchun $x_n \geq m$ bo'lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi.

1.12-Teorema (Veyersstrass alomati). Har qanday monoton chegaralangan ketma-ketlik limitga ega.

► $\{x_n\}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'lgani uchun uning hadlari to'plami aniq quyi va aniq yuqori chegaraga ega bo'ladi. M soni $\{x_n\}$ ketma-ketlik hadlari to'plamining aniq yuqori chegarasi bo'lsin. Agar $\{x_n\}$ kamaymaydigan ketma-ketlik bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = M$ ekanligini ko'rsatamiz.

Aniq yuqori chegara ta'rifidan, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday x_n element topilib, bu element uchun $x_n > M - \varepsilon$ va $a_n < M$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu ikki tengsizlikdan $0 \leq M - X_n < \varepsilon$ quyi twngsizlik hosil bo'ladi. $\{x_n\}$ kamaymaydigan ketma-ketlik bo'lgani uchun ixtiyoriy $n \geq N$ uchun $0 \leq M - X_n \leq M - X_n$ o'rinli bo'ladi. Bundan esa $0 \leq M - X_n < \varepsilon$ yoki ixtiyoriy $n > N$ uchun $|M - X_n| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu esa M soni $\{x_n\}$ ketma-ketlik limiti ekanligidan dalolat beradi.

Agar $\{x_n\}$ o'smaydigan chegaralangan ketma-ketlik va m ketma-ketlik elementlari to'plamining aniq quyi chegarasi bo'lsa, u holda $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = m$ ekanligi xuddi shu singari isbotlanadi. ◀

Mulohaza. Monotonlik ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lishligi uchun zaruriy shart emas. Masalan, monoton bo'lmagan $\{(-1)^n/n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi: $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$

e soni. Dastlab matematik induksiya metodiga asoslanib ixtiyoriy $n \in N$ va $n > -1$ uchun Bernulli nomi bilan ataluvchi quyidagi tengsizlikni isbotlaymiz:

$$(1 + h)^n \geq 1 + n \cdot h. \quad (1.15)$$

Bu tengsizlik $n = 1$ uchun o‘rinli. Faraz qilaylik, tengsizlik biror $n = m > 1$ uchun isbotlangan ya’ni $(1 + h)^m \geq 1 + m \cdot h$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsin va u $n = m + 1$ uchun ham o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz. So‘nggi tengsizlikning ikkala tomonini $1 + h > 0$ songa ko‘paytiramiz.

$$(1 + h)^{m+1} \geq (1 + mh)(1 + h) = 1 + (m + 1)h + mh^2$$

O‘ng tomondagi ifodada manfiy bo‘lmagan mh^2 hadni tashlab yuborsak, $(1 + h)^{m+1} \geq 1 + (m + 1)h$ tengsizlikka ega bo‘lamiz, ya’ni tengsizlik $n = m + 1$ uchun ham o‘rinli ekan. Shuning uchun matematik induksiya prinsipiga asosan (1.15) tengsizlik ixtiyoriy natural n soni uchun o‘rinli.

Endi $\{x_n\} = \left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$ ketma – ketlikni qaraymiz. Bernulli tengsizligiga asosan $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \geq 1 + n \cdot \frac{1}{n} = 2$. Berilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan boshqa $y_n = x_n \left(1 + \frac{1}{n}\right) > 2$ ketma – ketlikni tuzamiz. U holda y_n ketma – ketlik uchun $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ va bundan

$$\begin{aligned} \frac{y_n}{y_{n+1}} &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} : \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = \frac{(n+1)^{2n+3}}{n^{n+1} \cdot (n+2)^{n+2}} = \\ &= \frac{n}{n+1} \left[\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 - 1} \right]^{n+2} = \frac{n}{n+1} \left[1 + \frac{1}{(n+1)^2 - 1} \right]^{n+2} \end{aligned}$$

O‘ng tomondan ikkinchi ko‘paytuvchiga Bernulli tengsizligini qo‘llaymiz

$$\left[1 + \frac{1}{(n+1)^2 - 1} \right]^{n+2} \geq 1 + \frac{n+2}{(n+1)^2 - 1} = 1 + \frac{n+2}{(n)^2 + 2n} = 1 + \frac{1}{n}$$

U holda

$$\frac{y_n}{y_{n+1}} \geq \frac{n}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1,$$

ya’ni $y_n \geq y_{n+1}$.

Shunday qilib y_n o‘smaydigan ketma-ketlik va u quyidan 2 bilan chegaralandan shuning uchun u limitga ega. U holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik ham limitga ega va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_n}{1 + \frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n.$$

Bu limitni biz e orqli belgilaymiz va uning qiymati

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182818459 \dots$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

1.4. Kompleks sonlar va ular ustida amallar

Kompleks son tushunchasi. Kompleks sonning algebraik shakli.

1.19-Ta’rif. Kompleks son deb,

$$z = x + iy \quad (1.16)$$

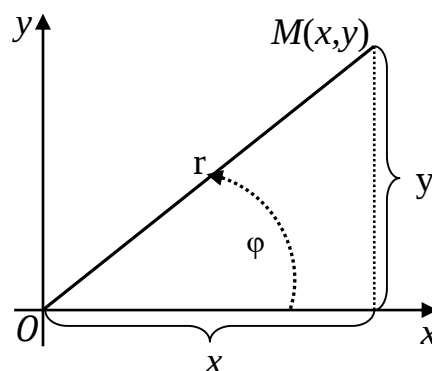
ko‘rinishdagi ifodaga aytamiz, bu yerda x va y haqiqiy sonlar bo‘lib, ular z kompleks sonning mos ravishda haqiqiy va mavhum qismi deb ataladi va ular

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$

ko‘rinishda belgilanadi, i esa $i^2 = -1$ xossaga ega bo‘lgan mavhum bir deb ataladi. $z = x + i0$ ko‘rinishdagi kompleks sonni x haqiqiy son bilan bir deb hisoblanadi.

Kompleks sonning algebraik, trigonomentrik va ko‘rsatkichli shakllari mavjud. (1.16) tenglik bilan ifodalangan shakl, kompleks sonning algebraik shakli deb yuritiladi.

Dekart koordinatalar sistemasida $z = x + iy$ kompleks sonni geometrik jihatdan $M(x, y)$ nuqta sifatida, yoki $O(0, 0)$ koordinatalar boshini $M(x, y)$ nuqta bilan tutashtiruvchi vektor sifatida, yoki proyeksiyalari (x, y) bo‘lgan $\bar{r}$ radius vektor sifatida talqin qilish mumkin (1.9-rasm).



1.9-rasm

Kompleks son tasvirlanadigan tekislik (Z) kompleks tekislik deb ataladi.

Agar kompleks son $z = x + i0$ ko‘rinishda, ya’ni u haqiqiy sondan iborat bo‘lsa, u holda unga mos keluvchi nuqta Ox o‘qda yotadi, shuning uchun absissalar o‘qi haqiqiy o‘q deb ataladi.

Sof mavhum $z = iy$ kompleks son Oy o‘qda tasvirlanadi, shuning uchun ham ordinatalar o‘qi mavhum o‘q deb ataladi.

Algebraik shakldagi kompleks sonlar ustida amallar. Agar ikkita $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks sonlar uchun $x_1 = y_1, x_2 = y_2$ tengliklar o‘rinli bo‘lsa, ular teng kompleks sonlar deb ataladi: $z_1 = z_2$.

Ikkita $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks sonlarning yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasdi va nisbati quyidagicha aniqlanadi:

$$1. z_1 \pm z_2 = (x_1 + iy_1) \pm (x_2 + iy_2) = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$

$$2. z_1 z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$3. \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

Kompleks sonlarni qo'shish va ko'paytirish amallari quyidagi xossalarga ega:

1. Kommutativlik

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1; \quad z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1$$

2. Assotsiativlik

$$(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3); \quad (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 = z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3);$$

3. Distributivlik

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

i mavhum birni darajaga ko'targanda, quyidagi qiymatlarni qo'yish kerak: $i^2 = -1$; $i^3 = -i$; $i^4 = 1$; $i^5 = i$; $i^6 = -1$; $i^7 = -i$ va hokazo.

$\bar{z} = x - iy$ kompleks son $z = x + iy$ kompleks songa qo'shma deb ataladi. Qo'shma kompleks sonlar uchun ayrim xossalarini ko'rsatib o'taylik:

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x;$$

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2$$

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2; \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2; \quad \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

1.5- Misol. Ko'rsatilgan amallarni bajaring:

$$1. (2 + 4i)(4 - i); \quad 2. \frac{\sqrt{3} - i}{3 + i\sqrt{3}}; \quad 3. (2 - \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) + \frac{2 - \sqrt{3}i}{3\sqrt{3} + i}.$$

$$\blacktriangleright 1. (2 + 4i)(4 - i) = 8 - 2i + 16i - 4i^2 = 12 + 14i, (i^2 = -1).$$

$$2. \frac{\sqrt{3} - i}{3 + i\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3} - i)(3 - i\sqrt{3})}{(3 + i\sqrt{3})(3 - i\sqrt{3})} = \frac{3\sqrt{3} - 6i + i^2\sqrt{3}}{9 + 3} = \frac{2\sqrt{3} - 6i}{12} = \frac{\sqrt{3}}{6} - \frac{i}{2}.$$

$$3. (2 - \sqrt{3}i)(\sqrt{3} + i) + \frac{2 - \sqrt{3}i}{3\sqrt{3} + i} = 3\sqrt{3} - i + \frac{2 - \sqrt{3}i}{3\sqrt{3} + i} = 3\sqrt{3} - i +$$

$$+ \frac{(2 - \sqrt{3}i)(3\sqrt{3} - i)}{(3\sqrt{3} + i)(3\sqrt{3} - i)} = 3\sqrt{3} - i + \frac{6\sqrt{3} - 2i - 9i + \sqrt{3}i^2}{27 + 1} =$$

$$= 3\sqrt{3} - i + \frac{5\sqrt{3} - 11i}{28} = \frac{84\sqrt{3} - 28i + 5\sqrt{3} - 11i}{28} = \frac{89\sqrt{3}}{28} - \frac{39}{28}i.$$

Kompleks sonning trigonometrik va ko'rsatkichli shakli. z kompleks soniga mos keluvchi $\bar{r}$ radius-vektor uzunligi kompleks sonning moduli deb ataladi va

$$|\overrightarrow{OM}| = r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (1.17)$$

formula bilan hisoblanadi. $\overrightarrow{OM}$ vektor va Ox o'qning musbat yo'nalishi orasidagi φ burchak z kompleks sonning argumenti deyiladi va $\text{Arg } z$ ko'rinishda belgilanadi, ya'ni $\varphi = \text{Arg } z$. Bunda φ burchak soat strelkasi harakatiga qarama-qarshi yo'nalishda hisoblansa musbat deb olinadi, aks holda, ya'ni soat strelkasi yo'nalishida hisoblansa manfiy deb olinadi. Argument bir qiymatli aniqlanmaydi, 2π ga karrali bo'lgan qo'shiluvchi aniqligida aniqlanadi:

$$\text{Arg } z = \arg z + 2k\pi,$$

bu yerda $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ va $\arg z$ bosh qiymat bo'lib, u quyidagi shartlarda aniqlanadi:

$$\arg z = \begin{cases} -\pi < \arg z \leq \pi \text{ yoki } 0 \leq \arg z < 2\pi \\ \arctg(y/x), & x > 0, \\ \pi + \arctg(y/x), & x < 0, y \geq 0, \\ -\pi + \arctg(y/x), & x < 0, y < 0, \\ \pi/2, & x = 0, y > 0, \\ -\pi/2, & x = 0, y < 0. \end{cases} \quad (1.18)$$

1.9-rasmdan ko'rinib turibdiki

$$x = r \cos \varphi; y = r \sin \varphi.$$

Shuning uchun $z = x + iy$ kompleks sonning trigonometrik shakli

$$z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi \text{ yoki } z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (1.19)$$

ko'rinishni oladi, bu yerda r kompleks sonning moduli, φ esa argumentning bosh qiymati bo'lib, u $\text{tg } \varphi = y/x$ tenglikni qanoatlantiradi.

Algebraik shakldan trigonometrik shaklga o'tish

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ va } \cos \varphi = x/r, \sin \varphi = y/r \quad (1.20)$$

formulalar orqali amalga oshiriladi.

1.6-Misol. Ushbu kompleks sonning moduli va argumentini toping

$$z = -\sin \frac{\pi}{8} - i \cos \frac{\pi}{8}.$$

► Haqiqiy va mavhum qismi uchun

$$x = -\sin \frac{\pi}{8} < 0, \quad y = -\cos \frac{\pi}{8} < 0.$$

(1.18) formulaga ko'ra argumentning bosh qiymati

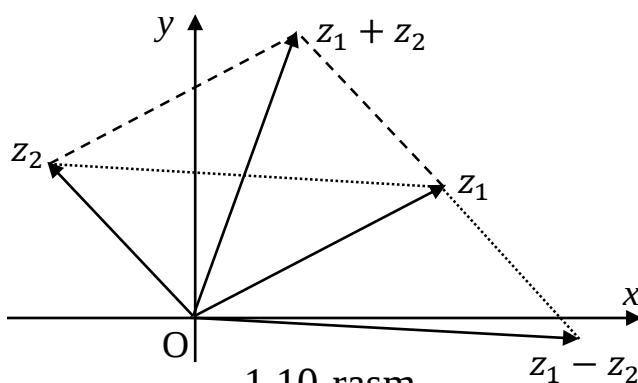
$$\begin{aligned}\arg z &= -\pi + \operatorname{arctg} \left(\operatorname{ctg} \frac{\pi}{8} \right) = -\pi + \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{8} \right) \right] = \\ &= -\pi + \operatorname{arctg} \left(\operatorname{tg} \frac{3\pi}{8} \right) = -\pi + \frac{3\pi}{8} = -\frac{5\pi}{8}\end{aligned}$$

bo'lganligi uchun

$$\operatorname{Arg} z = -\frac{5\pi}{8} + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots;$$

$$|z| = \sqrt{\sin^2 \frac{\pi}{8} + \cos^2 \frac{\pi}{8}} = 1. \blacktriangleleft$$

Yuqorida keltirilgan kompleks sonlar va vektorlar orasidagi moslik kompleks sonlarni qo'shish va ayirish amallarini geometrik talqin qilish imkonini beradi (1.10-rasmda z_1 va z_2 kompleks sonlarning yig'indisi va ayirmasi tasvirlangan).



1.10-rasm

Kompleks sonlar ustida qo'shish va ayirish amallari uchun quyidagi tengsizliklar bajarilishini osongina ko'rsatish mumkin:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2| \quad (1.21)$$

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|$$

Kompleks sonlar uchun muhim formulani keltiramiz:

$$\cos \varphi + i \sin \varphi = e^{i\varphi} \quad (1.22)$$

(1.22) formula Eyler formulasi deb yuritiladi. Bu formulaning ma'nosini va isbotini keyinroq beramiz. U holda (1.19) formulaga (1.22) formulani qo'llasak

$$z = r e^{i\varphi} \quad (1.23)$$

kompleks sonning ko'rsatkichli shaklini hosil qildik.

Kompleks sonning trigonometrik va ko'rsatkichli shakllari kompleks sonlar ustida ko'paytirish va bo'lish amallarini bajarishga juda qulay. Agar $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$ va $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$ bo'lsa, u holda

$$r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \quad (1.24)$$

(1.24) tenglikni osongina isbotlash mumkin:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 e^{i\varphi_1} \cdot r_2 e^{i\varphi_2} = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = \\ &= r_1 r_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + \\ &\quad + i (\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \sin \varphi_2 \cos \varphi_1)] = \\ &= r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}. \end{aligned}$$

Shunday qilib kompleks sonlar ko'paytirilganda ularning modullari ham ko'paytiriladi, argumentlari esa qo'shilar ekan:

$$|z_1 z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \quad \arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2. \quad (1.25)$$

Agar $r_2 \neq 0$ bo'lsa xuddi shu singar kompleks sonlarning nisbati uchun

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\varphi_1}}{r_2 e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad (1.26)$$

tenglikni hosil qilish mumkin. (1.26) tenglikdan ko'rinib turibdiki

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \quad \arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 \quad (1.27)$$

z kompleks sonni n natural darajaga ko'tarish amalini kiritamiz:

$$z^n = \underbrace{z \cdot \dots \cdot z}_{n \text{ marta}}.$$

(1.24) formulaga ko'ra $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ kompleks sonni n darajaga ko'tarish

$$z^n = (r e^{i\varphi})^n = r^n e^{in\varphi} = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (1.28)$$

qoidaga ko'ra amalga oshiriladi. So'ngi tenglikda $r = 1$ bo'lsa

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi \quad (1.29)$$

Muavr formulasini hosil qilamiz.

Kompleks sondan ildiz chiqarish amali quyidagicha amalga oshiriladi.

Agar

$$w^n = z \quad (1.30)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, w kompleks soni z kompleks sonning n darajali ildizi deb ataladi va u $w = \sqrt[n]{z}$ ko'rinishda belgilanadi.

Ixtiyoriy $z \neq 0$ uchun $\sqrt[n]{z}$ ildiz n turli qiymat qabul qilishini ko'rsatamiz. (1.30) formulaga $z = r e^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$ ifodalarni qoyib

$$\rho^n e^{in\theta} = r e^{i\varphi} \quad (1.31)$$

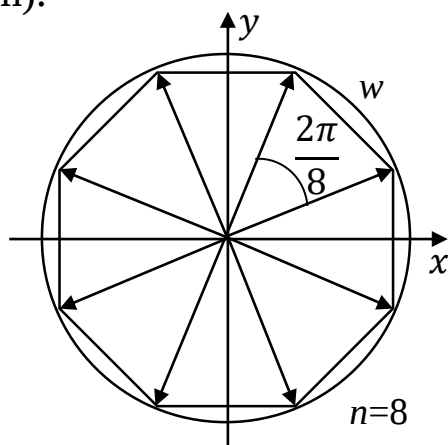
tenglikka ega bo'lamiz. Ikki kompleks sonning tengligidan, ular modullarining tengligi, argumentlari esa teng bo'lishi yoki bir biridan 2π ga karrali bo'lgan qo'shiluvchi bilan farq qilishi kelib chiqadi. Shuning uchun (1.31) munosbatdan

$$\rho^n = r, \quad n\theta = \varphi + 2k\pi$$

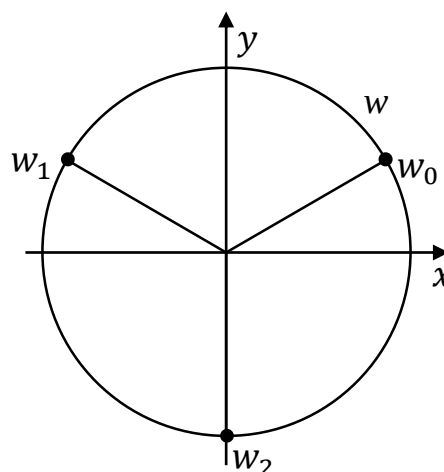
yoki

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad (1.32)$$

formulani hosil qildik. (1.32) formuladagi birinchi tenglikdan z kompleks sonning n darajali ildizlarining barchasi bir xil modulga ega ekanligini, ikkinchi tenglikdan qo'shiluvchi bilan farq qilishini ko'rish mumkin. Bundan esa $z \neq 0$ kompleks sonning n darajali ildizlarining turli qiymatlariga mos keluvchi nuqtalar markazi $w = 0$ nuqtada va radiusi $\sqrt[n]{|z|}$ bo'lgan aylanaga ichki chizilgan n burchak uchlarida yotishi kelib chiqadi (1.11-rasm).



1.11-rasm



1.12-rasm

(1.32) formulada k soniga $0, 1, \dots, n-1$ qiymatlarni berib

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} (\cos(\varphi/n + 2k\pi/n) + i \sin(\varphi/n + 2k\pi/n)), \quad (1.33)$$

yoki

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{n}}, \quad (1.34)$$

n turli kompleks sonlarni hosil qilamiz.

1.7-Misol. $\sqrt[3]{i}$ ildizning barcha qiymatlarini toping (1.12-rasm).

► $z = i$ kompleks sonni ko'rsatkichli shaklda yozamiz

$$z = i = e^{i\frac{\pi}{2}}.$$

(1.34) formulaga asosan

$$w_k = e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi k}{3}\right)}, \quad k = 0, 1, 2.$$

Bu yerdan

$$w_0 = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3} + i}{2},$$

$$w_1 = e^{i\frac{5\pi}{6}} = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} = \frac{-\sqrt{3} + i}{2},$$

$$w_2 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i. \quad \blacktriangleleft$$

Kompleks sonlar ketma-ketligining limiti. $\{z_n\}$ kompleks sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin.

1.20-Ta'rif. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ tartib raqami topilib, $n \geq N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha n natural sonlarda

$$|z_n - z| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, z kompleks soni $\{z_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va u

$$z = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \text{ yoki } z_n \rightarrow \infty \quad (1.35)$$

ko'rinishda yoziladi. z limitga ega bo'lgan $\{z_n\}$ ketma-ketlik z soniga intiladi deb aytiladi.

$\{z_n\}$ ketma-ketlikning har bir $z_n = x_n + i y_n$ hadi bir juft x_n va y_n haqiqiy sonlar bilan aniqlanadi. Shuning uchun $\{z_n\}$ kompleks sonlar ketma-ketligiga bu ketma-ketlik z_n hadlarining haqiqiy va mavhum qismlaridan tuzilgan ikkita $\{x_n\}, \{y_n\}$ haqiqiy sonlar ketma-ketligi mos keladi.

1.13-Teorema. $\{z_n\}$ kompleks sonlar ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo'lishligi uchun, $\{x_n\}, \{y_n\}$ haqiqiy sonlar ketma-ketligining ikkalasi ham bir vaqtda yaqinlashuvchi bo'lishligi zarur va yetarli.

► **Zarurligi.** $\{z_n\}$ ketma-ketlik z soniga intilsin. U holda ta'rifga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N tartib raqami topiladiki, $n \geq N$ shartni qanoatlantiruvchi barcha n natural sonlarda $|z_n - z| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Ma'lumki

$$\begin{aligned} |z_n - z| &= |(x_n + i y_n) - i(x + i y)| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \geq \\ &\geq |x_n - x|, \end{aligned}$$

$$|z_n - z| = |(x_n + i y_n) - i(x + i y)| = |(x_n - x) + i(y_n - y)| \geq |y_n - y|.$$

Shuning uchun $n \geq N$ shartni qanoatlantiruvchi barcha n natural sonlarda

$$|x_n - x| \leq |z_n - z| < \varepsilon \text{ va } |y_n - y| \leq |z_n - z| < \varepsilon$$

tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi, bundan esa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \quad (1.36)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Agar (1.36) o‘rinli bo‘lsa, u holda haqiqiy sonlar ketma-ketligi limitining ta‘rifiga ko‘ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday N_1 tartib raqami topiladiki, $n \geq N_1$ shartni qanoatlantiruvchi barcha n natural sonlarda

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}, \quad |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Shuning uchun

$$|z_n - z| = |(x_n + i y_n) - i(x + i y)| = \sqrt{(x_n - x)^2 + (y_n - y)^2} < \varepsilon.$$

Bu esa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + i y_n) = x + i y$$

ekanligidan dalolat beradi. ◀

Isbotlangan tasdiq haqiqiy sonlar ketma-ketligi uchun olingan barcha natijalarni kompleks sonlar ketma-ketligiga ham o‘tkazish imkonini beradi.

Ko‘phadning kompleks ildizlari. $a_0, a_1, \dots, a_n$ koeffitsiyentlari haqiqiy sonlardan iborat

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

ifodaga n –darajali haqiqiy koeffitsiyentli ko‘phad deyiladi, bunda $a_0 \neq 0$.

Agar $P_n(c) = 0$ bo‘lsa, $x = c$ soni $P_n(x)$ ko‘phadning noli yoki ildizi deb ataladi.

1.14-Teorema. Agar $z_0 = \alpha + \beta i$ kompleks son $P_n(x)$ haqiqiy koeffitsiyentli ko‘phadning ildizi bo‘lsa, uning qo‘shmasi $\bar{z}_0 = \alpha - \beta i$ kompleks son ham $P_n(x)$ ko‘phadning ildizi bo‘ladi.

► z_0 kompleks son $P_n(x)$ ko‘phadning ildizi bo‘lsin, ya‘ni

$$a_0(z_0)^n + a_1(z_0)^{n-1} + \dots + a_n = 0. \quad (1.37)$$

U holda bu tenglik chap tomonidagi ifodaning qo‘shmasi ham nolga teng bo‘ladi:

$$\overline{a_0(z_0)^n + a_1(z_0)^{n-1} + \dots + a_n} = 0. \quad (1.38)$$

Ixtiyoriy z_0 va $\bar{z}_0$ kompleks sonlar uchun

$$\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2 \text{ va } \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

ekanligini inobatga olsak, (1.38) tenglikdan

$$a_0(\bar{z}_0)^n + a_1(\bar{z}_0)^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad (1.39)$$

yoki $P_n(\bar{z}_0) = 0$ tenglikga ega bo'lamiz. ◀

Xususiyl holda, diskriminanti manfiy, ya'ni $p^2 - 4q < 0$ bo'lgan kvadrat $x^2 + px + q = 0$ tenglamaning ildizlari o'zaro qo'shma

$$z_0 = -\frac{p}{2} - \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}i, \quad \bar{z}_0 = -\frac{p}{2} + \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}i$$

kompleks sonlar bo'ladi.

1.8-Misol. $x^2 - 4x + 13 = 0$ tenglamani yeching.

► Tenglamaning diskriminantini topamiz:

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 13 = 16 - 52 = -36.$$

U holda tenglamaning ildizlari

$$x_1 = \frac{4 - \sqrt{-36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 - 6i}{2} = 2 - 3i,$$

$$x_2 = \frac{4 + \sqrt{-36}}{2 \cdot 1} = \frac{4 + 6i}{2} = 2 + 3i$$

o'zaro qo'shma kompleks sonlardan iborat. ◀

Endi matematika fanining eng katta yutuqlaridan biri bo'lgan, algebraning asosiy teoremasini keltiramiz. Bu teorema ilm-fanning juda ko'p sohalarida tadbiiq qilinadi.

1.15-Teorema. Darajasi birdan kichik bo'lmagan ixtiyoriy sonli koefitsiyentli har qanday tenglama kamida bitta ildizga ega va umumiy holda bu ildiz kompleks son bo'ladi.

Nazorat savollari

1. Qanday to'plamlar chegaralangan to'plam deyiladi?
2. To'plamning aniq yuqori va aniq quyi chegarasiga ta'rif bering?
1. Nuqtaning atrofi deb qanday to'plamga aytiladi?
4. Sonli ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
5. Qanday ketma-ketliklar yaqinlashuvchi deyiladi?
6. Qanday ketma-ketliklar cheksiz kichik va cheksiz katta bo'ladi?
7. Chegaralangan ketma-ketlik har doim ham yaqinlashuvchi bo'ladimi?
8. Kompleks sonning qanday ko'rinishlari mavjud?
9. Qanday kompleks son sof mavhum deb ataladi?
10. Kompleks sonning moduli va argumenti deb nimaga aytiladi?

Mashqlar.

1. $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ ketma-ketlikning limiti nol ekanligini isbotlang. Agar: a) ixtiyoriy $\varepsilon > 0$; b) $\varepsilon = 0,1$; v) $\varepsilon = 0,01$ bo'lsa, n tartib raqamimning qanday qiymatlarida $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

2. $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ ketma-ketlikning limiti bir ekanligini isbotlang.

Limitlarni toping:

1. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-3)^2}{n^2}.$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^4 + 3n^3 - 5n + 7}{n^3 + 7n^2 - 8n - 11}.$

5. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 - 6n + 8}{5n^2 - 8}.$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^3 - 6n + 8}}{9n - 1}.$

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^2 - 6n + 2} - 2n}{\sqrt[3]{n^3 - 3n^2 + 8n + 1} - \sqrt[4]{n^3 + 5n - 4}}.$

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{n^4 - 6n + 1} + \sqrt[5]{2n - 1}}{\sqrt[4]{n^4 - 7n + 1} - \sqrt[3]{4n^4 - 6}}.$

(**Ko'rsatma.** n o'zgaruvchi ko'phadlari nisbatining limitini hisoblashda surat va maxrajni dastlab n^p ifodaga bo'lib olgan maqsadga muvofiq bo'ladi, bu yerda p maxrajdagi ko'phadning eng katta darajasi. Bu usul irratsional ifodani saqlagan kasrlarning limitini topishda ham qo'llaniladi.)

Limitlarni toping:

9. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)! - n!}.$

10. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{3^n}\right).$

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1 + 2 + \dots + n).$

12. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \sin 5n}{n^2 + 2}.$

11. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}).$

14. $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + 3n - 1} - n).$

15. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{(n-1) \cdot n}\right).$

16. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n - 1}{2^n + 1}.$

17. Kompleks sonning moduli va argumentning bosh qiymatini toping:

a) $\frac{7 + i24}{5};$

b) $-2 + 2\sqrt{3}i;$

c) $-\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7};$

d) $\sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3}$; e) $1 - \sqrt{3}i$.

18. Kompleks sonni trigonometrik va ko'rsatkichli shaklda yozing:

a) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$; b) $\frac{1-i}{1+i}$; c) i ; d) $-\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

19. Quyidagi tenglamalarning haqiqiy yechimlarini toping:

a) $(1+i)x + (-2+5i)y = -4+17i$;

b) $(2-3i)x + (3+2i)y = 4-19i$

20. Hisoblang:

a) $(1-2i)(2+i)^2$; b) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3$; c) $\left(\frac{i^5+2}{i^{19}+1}\right)^2$.

21. Ildizlarning barcha qiymatlarini toping:

a) $\sqrt{i}$; b) $\sqrt[4]{-1}$; v) $\sqrt[4]{-9}$; g) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$

22. Limitni hisoblang.

a) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(2 - i + \frac{1}{n}(1+i)\right)$; b) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n}{3n+2} \cdot \frac{in^2}{n^2+n-4i}$.

c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i^n}{n}\right)$.

23. Tenglamalarni yeching:

a) $x^2 + 6x + 25 = 0$; b) $x^2 - 8x + 41 = 0$; c) $x^2 - 6x + 13 = 0$.

Javoblar.

1. a) $1/\sqrt{\varepsilon} < n$. b) $3 < n$. v) $10 < n$. 1. 1. 4. ∞ . 5. $1/5$. 6. $1/9$. 7. -2 . 8.

-4 . 9. 0. 10. $1/2$. 11. $1/2$. 12. 0. 11. 0. 14. $3/2$. 15. 1. 16. 1. 17. a) $|z| = 5$,

$\arg z = \arctg \frac{24}{7} + 2k\pi$. b) $|z| = 4$, $\arg z = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$.

c) $|z| = 1$, $\arg z = \frac{6\pi}{7} + 2k\pi$. d) $|z| = 1$, $\arg z = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$.

e) $|z| = 2$, $\arg z = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$. 18. a) $\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

b) $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = e^{-i\frac{\pi}{2}}$. c) $\cos\frac{\pi}{2} + i \sin\frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$.

d) $2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \sin\frac{3\pi}{4}\right) = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$. **19.** a) $x = 2, y = 3$; b) $x = 5, y = -2$.

20. a) $11 - 2i$; b) i ; c) $(1 + 3i)/2$. **21.** a) $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), w_1 =$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$. b) $w_0 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), w_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 + i), w_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1 - i),$

$w_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$. c) $w_0 = \frac{\sqrt{6}}{2}(1 + i), w_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}(-1 + i),$

$w_2 = \frac{\sqrt{6}}{2}(-1 - i), w_3 = \frac{\sqrt{6}}{2}(1 - i)$. d) $w_0 = \sqrt{3} + i, w_1 = -\sqrt{3} - i$. **22.**

a) $2 - i$; b) $5i/3$; c) 1. **23.** a) $x_1 = -3 - 4i, x_2 = -3 + 4i$; b) $x_1 = 4 - 5i, x_2 = 4 + 5i$; c) $x_1 = 3 - 2i, x_2 = 3 + 2i$.

II BOB. BIR O'ZGARUVCHIILI FUNKSIYANING LIMITI VA UZLUKSIZLIGI

2.1. Funksiya tushunchasi. Funksiyalarning berilish usullari

Funksiya tushunchasi. Birorta X, Y haqiqiy sonlar to'plamlari berilgan bo'lsin.

2.1-Ta'rif. Agar har bir $x \in X$ son uchun birorta qonun-qoida asosida aniq bir $y \in Y$ soni mos qo'yilgan bo'lsa, X to'plamda funksiya aniqlangan deyiladi va

$$y = f(x) \text{ yoki } y = y(x), \quad x \in X \text{ yoki } f: X \rightarrow Y$$

ko'rinishida yoziladi. Bunday funksiylarni sonli funksiylar deb ataymiz. X to'plam funksiyaning aniqlanish sohasi, x erkli o'zgaruvchi yoki argument deb ataladi. $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(y)$ yoki $D(f)$ orqali belgilanadi. Y to'plam esa funksiyaning qiymatlar sohasi deb ataladi va u $E(y)$ yoki $E(f)$ orqali belgilanadi.

Ba'zi funksiylarni ko'rsatishda $f(x)$ o'rniga f belgi ham ishlatiladi. Shunday qilib, agar:

1. X aniqlanish sohasi;

2. Har bir $x \in X$ songa funksiyaning $y = f(x)$ qiymatini mos qo'yuvchi f moslik berilgan bo'lsa, funksiya aniqlangan bo'ladi.

Agar f va g funksiyaning aniqlanish sohasi ustma – ust tushsa va aniqlanish sohasidan olingan har bir x uchun $f(x) = g(x)$ o'rinli bo'lsa, ular teng funksiylar deb ataladi. Ushbu $y = x^2, -\infty < x < \infty$ va $y = x^2, 0 \leq x \leq 1$ funksiylar teng emas; ular faqat $[0; 1]$ kesmadagina teng.

Funksiyaga misollar.

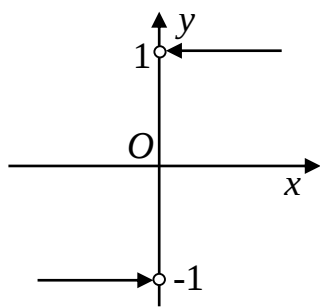
1. $\{x_n\}$ ketma-ketlik natural sonlar to'plamida aniqlangan butun argumentli funksiya bo'ladi va $f(n) = x_n, (n = 1, 2, 3, \dots)$

$$2. y = \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & \text{agar } x > 0 \\ 0, & \text{agar } x = 0 \\ -1, & \text{agar } x < 0 \end{cases}$$

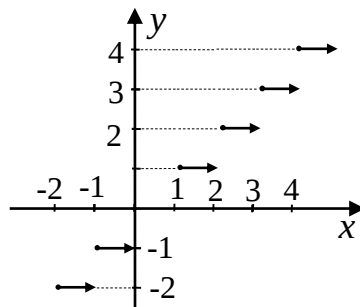
sign belgisi lotincha *signum* - ishora so'zidan olingan. Bu funksiya $-\infty < x < \infty$ son o'qining hamma joyida aniqlangan; qiymatlar to'plami esa uchta $\{-1, 0, 1\}$ sonlardan iborat (2.1-rasm).

3. $y = [x]$ bu yerda $[x]$ sifatida x sonning butun qismi olingan, ya'ni $[x]$ qiymat x dan katta bo'lmagan eng katta butun songa teng. $n < x < n + 1$ uchun $[x] = n, n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$ bu funksiya son o'qining hamma joyida aniqlangan, qiymatlari to'plami esa butun sonlardan iborat (2.2-rasm).

Endi funksiyalar uchun muhim bo'lgan ayrim tushunchalarni kiritamiz.



2.1-rasm



2.2-rasm

2.2-Ta'rif. Agar har bir $x \in D(f)$ nuqta uchun bitta $f(x) \in E(f)$ nuqta mos qo'yilgan bo'lsa, $y = f(x)$ bir qiymatli funksiya, aks holda ko'p qiymatli deyiladi.

$E(f)$ to'plamda birorta $y = y_0$ nuqtani olamiz; u holda $D(f)$ to'plamda kamida bitta shunday x_0 nuqta topiladiki, uning uchun $y_0 = f(x_0)$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bunday nuqtalar bir nechta, hattoki cheksiz ko'p ham bo'lishi mumkin. Shunday qilib, $E(f)$ to'plamdan olingan har bir y nuqta uchun $D(f)$ to'plamdan bitta yoki bir nechta x nuqta mos qo'yildi. Natijada bir yoki ko'p qiymatli $x = g(y)$ funksiyani hosil qildik. Bu funksiya $y = f(x)$ funksiyaga teskari funksiya deyiladi va u $x = f^{-1}(y)$ orqali belgilanadi. Agar f^{-1} funksiya ham bir qiymatli bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya o'zaro bir qiymatli deb ataladi.

Funksiyaning berilish usullari. Funksiya uch xil: analitik, grafik va jadval usul bilan beriladi.

Analitik usul. Agar $y = f(x)$ funksiya x o'zagruvchining qiymati ustida qandaydir amallar bajarilishini ko'rsatib turuvchi formula bilan aniqlansa, bu funksiyani biz analitik usul bilan berilgan deb ataymiz. Masalan ,

$$y = x^3 + 1, -\infty < x < \infty$$

funksiya analitik usul bilan berilgan.

Bu holda funksiyaning aniqlanish sohasi deganda (agar u alohida ko'rsatilmagan bo'lsa) x argumentning funksiyani aniqlovchi analitik ifoda haqiqiy va chekli qiymatni qabul qildiradigan barcha haqiqiy sonlar to'plami tushuniladi. Bunday ma'noda funksiyaning aniqlanish sohasini yana mavjudlik sohasi deb ham yuritiladi.

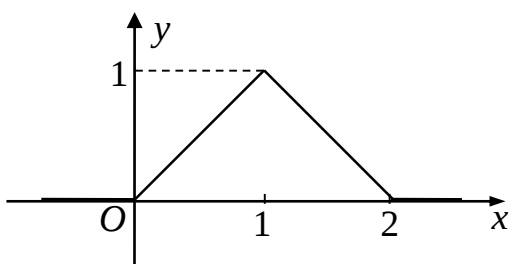
$y = \sqrt{4 - x^2}$ funksiya aniqlanish sohasi $-2 \leq x \leq 2$ kesmadan iborat.

$y = x^2 + 5x + 7$ funksiyaning aniqlanish sohasi $-\infty < x < \infty$ son o'qining barcha joyidan iborat.

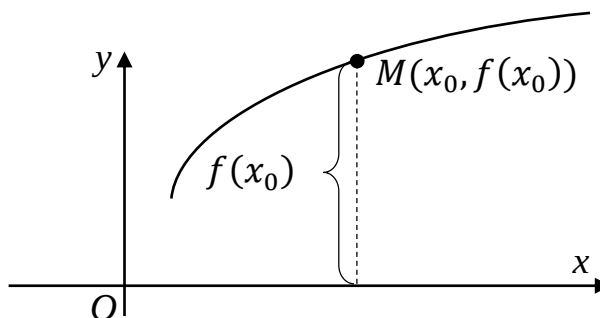
Har qanday formula har doim ham funksiyani aniqlayvermaydi. Masalan, $y = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{x^2 - 4}$ formula hech qanday funksiyani aniqlamaydi, chunki yuqoridagi ikkala ildiz ham bir vaqtda haqiqiy sonni aniqlaydigan x argumentning haqiqiy qiymati mavjud emas.

Funksiyaning analitik berilishi murakkab ko'rinishda ham bo'lishi mumkin. Xususiyl holda, funksiya ozining aniqlanish sohasining turli qismlarida turli formulalar bilan aniqlanishi mumkin. Masalan funksiya quyidagi ko'rinishda berilgan bo'lishi mumkin (2.3-rasm)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0; \\ x, & 0 \leq x \leq 1; \\ 2 - x, & 1 < x \leq 2; \\ 0, & x > 2. \end{cases}$$



2.3-rasm



2.4-rasm

Grafik usul. Agar $y = f(x)$ funksiya grafigi berilgan bo'lsa, u grafik usul bilan berilgan deyiladi. Bunda grafik $(x, f(x))$ nuqtalar to'plami ko'rinishida berilgan bo'lib, uning absissasi funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli, ordinatasi esa funksiyaning mos qiymatiga teng bo'ladi (2.4-rasm).

Har qanday funksiyaning grafigini ham chizmada tasvirlab bo'lmaydi. Masalan, Dirixle funksiyasini

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x - \text{ratsional} \\ 0, & \text{agar } x - \text{irratsional} \end{cases}$$

chizmada tasvirlanmaydi. $D(x)$ funksiya son o'qining hamma joyida aniqlangan, qiymatlari esa ikkita 0 va 1 sonidan iborat.

Jadval usul: Argumentning bir nechta qiymatiga mos keluvchi funksiyaning qiymatlari biror jadvalda keltirilgan bo'lsa, funksiya jadval usulda berilgan deyiladi. Funksiya jadval usulda berilganida uning

aniqlanish sohasi jadvalda keltirilgan $x_1, x_2, x_3 \dots x_n$ qiymatlaran iborat bo'ladi.

Murakkab funksiyalar. Ba'zan $y = f(u)$ funksiyaning u argumenti erkin o'zgaruvchi bo'lamsdan, u ham o'z navbatida boshqa bir o'zgaruvchiga, masalan x o'zgaruvchiga $u = g(x)$ ko'rinishda bog'liq bo'lgan holga duch kelamiz. Bunday holda y o'zgaruvchining x o'zgaruvchiga bog'liqligini ifodalash uchun u oraliq o'zgaruvchi o'rniga $g(x)$ ifoda qo'yiladi: $y = f(g(x))$. Bu qoida bo'yicha ifodalangan funksiyaning murakkab funksiya yoki f va g funksiyalarning superpozitsiyasi deb ataladi. Ba'zan bu yozuv o'rniga $y = f \circ g(x)$ ifoda yoziladi va u f va g funksiyalarning kompozitsiyasi deb ataladi.

Murakkab funksiyaning qiymatini hisoblashda dastlab x o'zgaruvchining qiymati bo'yicha oraliq u o'zgaruvchining qiymati hisoblanadi. So'ngra esa hisoblangan u qiymat bo'yicha $y = f(u)$ qiymat hisoblanadi. $y = f(u)$ va $u = g(x)$ funksiyalar $y = f(g(x))$ superpozitsiya tashkil qilishlari uchun birinchisining aniqlanish sohasi bilan ikkinchisining qiymatlari sohasi bo'sh bo'lmagan kesishmaga ega bo'lishlari lozim, ya'ni $D(f) \cap E(g) \neq \emptyset$. Bunda murakkab funksiyaning $D(f \circ g)$ aniqlanish sohasi $g(x)$ funksiya aniqlanish sohasining $u = g(x)$ qiymatlar $f(u)$ funksiya aniqlanish sohasida chiqib ketmaydigan qismidan iborat bo'ladi.

Ushbu misolni qaraymiz: $f(u) = \sqrt{u}$, $u = g(x) = x - 1$ bo'lsin. U holda $D(f) = [0, +\infty)$, $D(g) = \mathbb{R}$ bo'ladi. Demak $D(f \circ g) = [1, +\infty)$. Murakkab funksiyaning o'zi esa $y = f(g(x)) = \sqrt{x - 1}$ ko'rinishda bo'ladi.

Funksiyalarning ayrim xossalari.

Davriy funksiyalar.

2.3-Ta'rif. $X \subseteq \mathbb{R}$ to'plamda aniqlangan $f(x)$ funksiyaning *davri* deb, shunday $T > 0$ songa aytiladiki, bunda ixtiyoriy $x \in X$ nuqta uchun $(x - T, x + T) \in X$ munosabat va

$$f(x + T) = f(x - T) = f(x) \quad (2.1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

$nT, n \in \mathbb{N}$ son ham funksiyaning davri bo'ladi. Masalan, T berilgan $f(x)$ funksiyaning davri bo'lsa $2T$ ham uning davri bo'lishini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, ixtiyoriy $x \in X$ nuqta uchun, birinchidan $x \pm 2T = ((x \pm T) \pm T) \in X$ va ikkinchidan (2.1) tenglikka ko'ra

$$f(x \pm 2T) = f(x \pm T \pm T) = f(x \pm T) = f(x).$$

Bundan keyin funksiyaning davri deganda uning davrlarining eng kichigi tushuniladi.

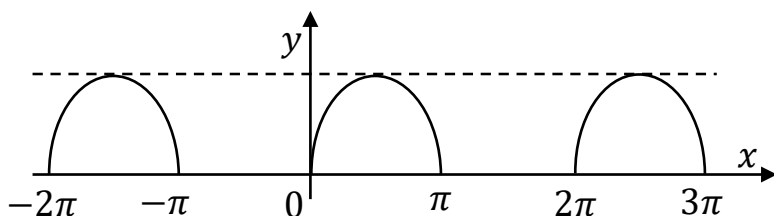
Agar $f(x)$ funksiyaning davri T bo'lsa, $g(x) = f(ax + b)$ funksiyaning davri T/a bo'ladi, bu yerda $a > 0, b$ o'zgarmas sonlar. Haqiqatdan ham, (2.1) tenglikka ko'ra

$$g\left(x + \frac{T}{a}\right) = f\left(a\left(x + \frac{T}{a}\right) + b\right) = f(ax + b + T) = f(ax + b) = g(x).$$

Davrga ega bo'lgan funksiyaning davriy funksiya deb ataymiz.

Davri T bo'lgan $X \subseteq \mathbb{R}$ to'plamda aniqlangan $f(x)$ funksiyaning grafigini yasash uchun, uning grafigini ixtiyoriy $[a, a + T]$ kesmada yasash yetarli, bu yerda $a \in X$ —birorta son. So'ngra Ox koordinata o'qi bo'ylab $\pm T, \pm 2T, \dots$, davrga suriladi.

2.5-rasmda davri $T = 2\pi$ bo'lgan $y = 2\sqrt{\sin x}$ funksiyaning grafigi keltirilgan.



2.5-rasm

Monoton funksiya. $f(x)$ funksiya $X \subseteq \mathbb{R}$ to'plamda aniqlangan va x_1, x_2 bu to'plamning ixtiyoriy nuqtalari bo'lib, ular uchun $x_1 < x_2$ tengsizlik o'rinli bo'lsin.

1) Agar $f(x_1) < f(x_2)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi;

2) agar $f(x_1) \leq f(x_2)$ bo'lsa, kamaymaydigan;

3) agar $f(x_1) > f(x_2)$ bo'lsa, kamayuvchi;

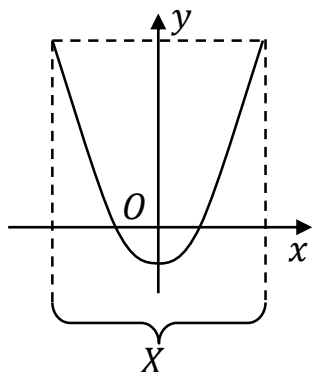
4) agar $f(x_1) \geq f(x_2)$ bo'lsa o'smaydigan funksiya deb ataladi.

Barcha to'rt holda funksiyaning X to'plamda monoton deb ataladi, 1) va 3) hollarda qat'iy monoton deb ataladi. Qat'iy monoton funksiyaning teskarisi mavjudligi va teskari funksiya ham qat'iy monoton bo'lishi ravshan.

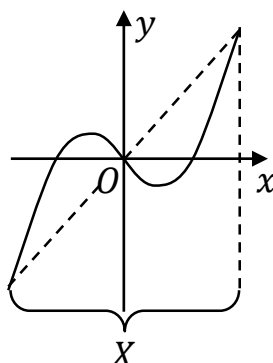
2.1-Misol. ► $y = x, y = x^3$ funksiya $\mathbb{R}$ son o'qida o'suvchi bo'ladi, $y = x^2$ funksiya esa $(-\infty, 0)$ intervalda kamayuvchi va $(0, +\infty)$ intervalda o'suvchi bo'ladi, ammo $x = 0$ nuqtani o'zida saqllovchi har qanday intervalda monoton bo'lmaydi. $y = c = \text{const}$, funksiyaning bir vaqtning o'zida ham kamaymaydigan, ham o'smaydigan funksiya deb hisoblash mumkin. ◀

Juft va toq funksiyalar. $f(x)$ funksiyaning $D(f) = X \subseteq \mathbb{R}$ aniqlanish sohasi O koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'lsin (2.6-rasm), ya'ni agar $x \in X$ bo'lsa, $-x \in X$ bo'ladi.

2.4-Ta'rif. Agar ixtiyoriy $x \in X$ nuqta uchun $f(-x) = f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, $X \subseteq \mathbb{R}$ to'plamda aniqlangan $f(x)$ funksiyani *juft*, agar $f(-x) = -f(x)$ bo'lsa *toq* funksiya deb ataymiz.



2.6-rasm



2.7-rasm

Juft funksiyaning grafigi Oy o'qqa nisbatan simmetrik (2.6-rasm), toq funksiyaning grafigi esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik (2.7-rasm) bo'ladi. $f(x)$ funksiyaning juft yoki toqligini aniqlash uchun $f(-x)$ funksiyani tahlil qilish kerak. Har doim ham bir qarashdan funksiyaning juft yoki toqligini aniqlab bo'lmaydi. Bunday hollarda ayniy almashtirishlarni bajarish kerak.

2.2-Misol. Ushbu

$$f(x) = \log_a \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right), x \in \mathbb{R}$$

funksiya toq ekanligini ko'rsatamiz.

► Haqiqatdan ham

$$\begin{aligned} f(-x) &= \log_a \left(-x + \sqrt{x^2 + 1} \right) = \\ &= \log_a \frac{(-x + \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = \\ &= \log_a \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} = -\log_a \left(x + \sqrt{x^2 + 1} \right) = -f(x). \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

2.1-Teorema. $[-a, a]$ kesmada aniqlangan har qanday funksiyani juft va toq funksiyaning yig'indisi shaklida ifodalash mumkin va bu tasvir yagona bo'ladi.

► $f(x) = \varphi(x) + \psi(x)$ yig'indini yozamiz, bu yerda $\varphi(x)$ - juft funksiya, $\psi(x)$ esa toq. U holda $f(-x) = \varphi(-x) + \psi(-x) = \varphi(x) -$

$\psi(x)$ tenglik hosil bo'ladi. $f(x)$ va $f(-x)$ uchun tuzilgan tengliklarni hadma-had qo'shib

$$\varphi(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad \psi(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

izlanayotgan funksiyalarni topdik. Bu esa $f(x)$ funksiyani yagona usul bilan juft va toq funksiyalarning yig'indisi shaklida tasvirlash mumkinligini ko'rsatadi. ◀

Funksiya oldidagi ishoraning o'zgarishi funksiyaning juft yoki toqligiga ta'sir qilmaydi. Faqat juft yoki faqat toq funksiyalarni qo'shganda ularning yig'indisi yana juft yoki toq bolib qolaveradi. Ixtiyoriy sondagi juft funksiyalarning ko'paytmasi yana juft bo'ladi, toq funksiyalarning ko'paytmasi esa ko'paytuvchilar soniga bog'liq: ko'paytuvchilar soni juft bo'lsa ko'paytma juft, ko'paytuvchilar soni toq bo'lsa ko'paytma toq bo'ladi.

Juft ham toq ham bo'lmagan funksiyalarni umumiy ko'rinishdagi funksiyalar deb ataymiz.

Chegaralangan funksiyalar. $D \subseteq \mathbb{R}$ to'plamda aniqlangan $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

2.5-Ta'rif. Agar shunday M (mos ravishda m) o'zgarmas son topilib, barcha $x \in D$ nuqtalar uchun $f(x) \leq M$ (mos ravishda $f(x) \geq m$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya D to'plamda yuqoridan (mos ravishda quyidan) chegaralangan deyiladi.

2.6-Ta'rif. Agar shunday $C > 0$ o'zgarmas son topilib, barcha $x \in D$ nuqtalar uchun $|f(x)| < C$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya D to'plamda chegaralangan deyiladi.

Funksiya D to'plamda chegaralangan bo'lishligi uchun u quyidan ham, yuqoridan ham chegaralangan bo'lishi kerakligi ravshan. Agar D to'plam funksiyaning aniqlanish sohasi bilan ustma-ust tushsa va funksiya bu to'plamda chegaralangan bo'lsa, uni biz chegaralangan funksiya deb ataymiz. Aks holda funksiyani bu to'plamda chegaralanmagan deb ataymiz. Bu esa, ixtiyoriy $C > 0$ son uchun $|f(a)| > C$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $a \in D$ nuqta topiladi degan ma'noni anglatadi.

2.3-Misol. $\mathbb{R}$ son oqida aniqlangan

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

funksiya $D = \mathbb{R}$ to'plamda chegaralangan, chunki ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}$ uchun $0 < f(x) \leq 1$ tengsizlik o'rinli.

2.4-Misol. $g(x) = 1/x$ funksiya $[1, +\infty)$ yarim intervalda chegaralangan, chunki ixtiyoriy $x \in [1, +\infty)$ uchun $0 < g(x) \leq 1$ tengsizlik o‘rinli. Xuddi shu funksiya $(0, +\infty)$ intervalda chegaralanmagan.

Elementar funksiyalar. Quyidagi funksiyalarni asosiy elementar funksiyalar deb ataymiz:

1. $y = x^\alpha$ darajali funksiya, bunda $\alpha \in \mathbb{R}$. Umumiy holda uning aniqlanish sohasi $(0; +\infty)$ son o‘qining yarmidan iborat. Agar $\alpha = n \in \mathbb{N}$ bo‘lsa, x^α funksiya $(-\infty; +\infty)$ son o‘qining hamma joyida aniqlangan.

2. $y = a^x$ ko‘rsatgichli funksiya, bunda $a > 0$, $a \neq 1$. U son o‘qining hamma joyida aniqlangan.

3. $y = \log_a x$ logarifmik funksiya, bunda $a > 0$, $a \neq 1$. Uning aniqlanish sohasi $(0; +\infty)$ intervaldan iborat.

4. $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ trigonometrik funksiyalar. $y = \sin x$, $y = \cos x$ funksiyalar son o‘qining hamma joyida aniqlangan. $y = \operatorname{tg} x$ funksiya $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ bo‘lganda aniqlangan. $y = \operatorname{ctg} x$ funksiya esa $x \neq k\pi$ bo‘lganda aniqlangan, bu yerda k ixtiyoriy butun son.

5. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ teskari trigonometrik funksiyalar. $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$ funksiyalarning aniqlanish sohasi $[-1; 1]$ kesmadan iborat. $y = \operatorname{arctg} x$, $y = \operatorname{arcctg} x$ funksiyalar esa son o‘qining hamma joyida aniqlangan.

Bu elementar funksiyalarning grafigini chizish o‘quvchiga mustaqil bajarishga qoldirildi.

2.2. Funksiyaning limiti

Funksiyaning nuqtadagi limiti. Funksiyaning limiti matematik tahlildagi markaziy tushuncha hisoblanadi.

$f(x)$ funksiya a nuqtaning biror $U(a)$ atrofida aniqlangan bo‘lsin (a nuqtaning o‘zida aniqlanmagan ham bo‘lishi mumkin).

2.7-Ta’rif (Koshi). Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib,

$$|x - a| < \delta \quad (2.2)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in \dot{U}(a)$ uchun

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad (2.3)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, A soni $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti deyiladi va u $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ko‘rinishda yoziladi.

2.5-Misol. $f(x) = c = \text{const}$ funksiya uchun $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$ ekanligini ko'rsatamiz.

► Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son va x uchun $f(x) - c = c - c = 0 < \varepsilon$. Shuning uchun δ sifatida ixtiyoriy musbat sonni olish mumkin. ◀

2.6-Misol. $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ ekanligini isbotlang.

► Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olamiz va $|x - 0| = |x| < \varepsilon$ bo'sin. $\delta = \varepsilon$ deb olsak ta'rifning shartlari bajariladi. ◀

2.7-Misol. $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4$ ekanligini isbotlang.

► Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olamiz va $|x^2 - 4| < \varepsilon$ bo'sin.

$$\begin{aligned} |x^2 - 4| &= |(x - 2)(x + 2)| = |x - 2| \cdot |(x - 2) + 4| \leq \\ &\leq |x - 2|(|x - 2| + 4) \end{aligned}$$

ekanligini inobatga olsak $|x - 2|^2 + 4|x - 2| < \varepsilon$ tengsizlikni qarash yetarli. Bu tengsizlik esa

$$|x - 2| < -2 + \sqrt{4 + \varepsilon}$$

tengsizlikka teng kuchli. Shuning sababli $|x^2 - 4| < \varepsilon$ tengsizlikning bajarilishi uchun (2.2) munosabatda $\delta = -2 + \sqrt{4 + \varepsilon}$ deb olish yetarli. ◀

2.8-Misol. Tenglikni isbotlang: $\lim_{x \rightarrow a} |x| = |a|$.

► Ixtiyoriy haqiqiy a, b sonlar uchun o'rinli bo'lgan $||a| - |b|| \leq |a - b|$ tengsizlikdan foydalanamiz. U holda $||x| - |a|| \leq |x - a|$ va (2.2) munosabatda $\delta = \varepsilon$ deb olish kifoya. Haqiqatan ham $|x - a| < \delta = \varepsilon$ bo'lsa,

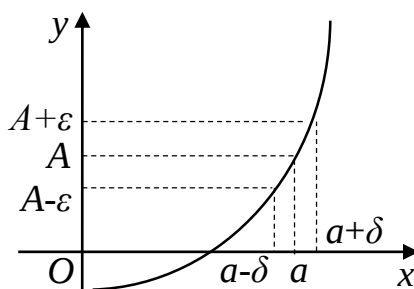
$$||x| - |a|| \leq |x - a| < \delta = \varepsilon$$

bo'ladi. ◀

Topshiriq. Quyidagi limitlarni tengsizliklar yordamida ($\varepsilon - \delta$ tilida) ifodalang

1) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$; 2) $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 4$; 3) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = -7$; 4) $\lim_{x \rightarrow -6} f(x) = -8$.

$y = f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limitining geometrik talqini 2.8-rasm tasvirlangan. Tasvirga ko'ra a nuqtaning δ atrofidan olingan barcha x nuqtalarga mos keluvchi $f(x)$ qiymatlar A nuqtaning ε atrofiga tushadi.



2.8-rasm

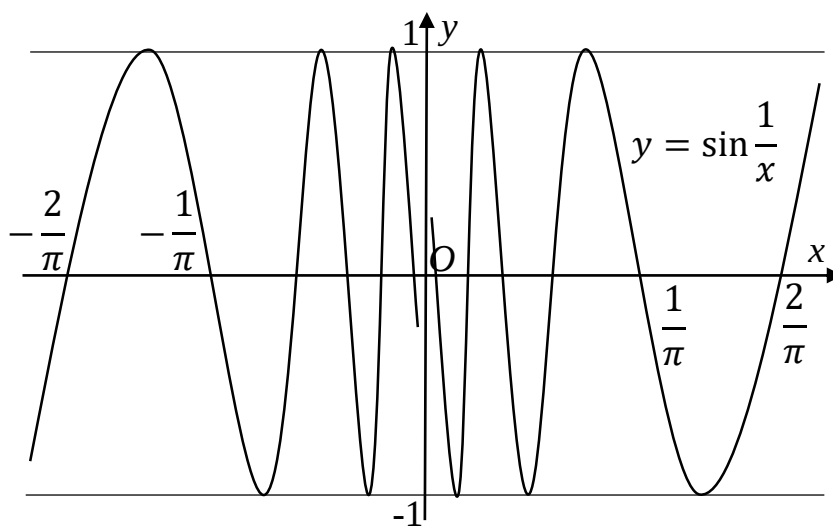
$y = f(x)$ funksiya a nuqtaning biror $U(a)$ atrofida aniqlangan bo'lsin (a nuqtaning o'zida aniqlanmagan ham bo'lishi mumkin).

2.8-Ta'rif (Geyne). Agar x argument qiymatlarining a nuqtaga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketligiga mos keluvchi $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik A soniga intilsa, bu A soni $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti deyilaadi.

Keltirilgan ta'rifdan $f(x)$ funksiyaning a nuqtada limiti yo'qligini ko'rsatishda foydalanish qulay. Buning uchun limiti mavjud bo'lmagan birorta $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlikni topish yetarli, yoki turli limitlarga ega bo'lgan ikkita $\{f(x_n)\}$ va $\{f(x'_n)\}$ ketma-ketliklarni ko'rsatish kerak.

Misol sifatida $x = 0$ nuqtada boshqa hamma joyda aniqlangan $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada limiti mavjud emasligini isbotlaymiz (2.9-rasm).

► $x = 0$ nuqtaga intiluvchi ikkita $\left\{\frac{1}{n\pi}\right\}$ va $\left\{\frac{1}{\frac{\pi}{2} + n\pi}\right\}$ ketma-ketliklarni qaraymiz. Funksiya qiymatlarining mos ketma-ketliklari turli limitlarga intiladi: $\{\sin n\pi\}$ ketma-ketlik nolga, $\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)\right\}$ ketma-ketlik esa birga intiladi. Bu esa $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada limiti mavjud emasligini anglatadi. ◀



2.9-rasm

Mulohaza. Funksiyaning nuqtadagi limitining ikkala ta'rifi (Koshi ta'rifi, Geyne ta'rifi) teng kuchli.

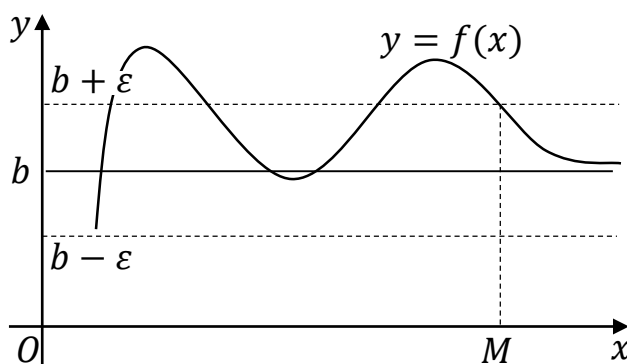
Funksiyaning cheksizlikdagi limiti.

2.9-Ta'rif. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $M > 0$ son topilib, barcha $x > M$ uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, A soni $f(x)$

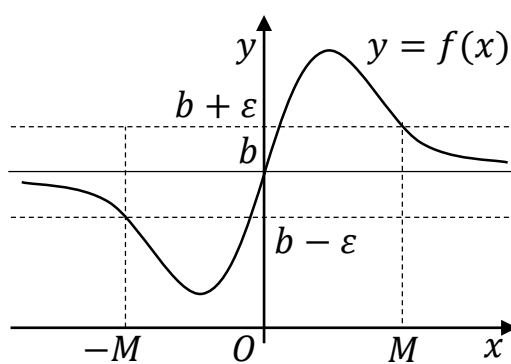
funksiyaning x argumenti $+\infty$ ga intilgandagi limiti deyiladi va u $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ ko‘rinishda yoziladi.

Cheksizlikdagi limitning geometrik talqini 2.10-rasmda keltirilgan. Rasmda ε – ning berilgan qiymatiga ko‘ra M nuqtani ta’rifning sharti bajariladigan qilib qanday tanlash kerakligi ko‘rsatilgan. $x \rightarrow +\infty$ da funksiyaning grafigi $y = b$ gorizontaal to‘g‘ri chiziqqa cheksiz yaqinlashib boradi.

$x \rightarrow -\infty$ dagi limit ham xuddi shu singari kiritiladi. $x \rightarrow \infty$ dagi limitning ta’rifini beramiz: Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $M > 0$ son topilib, barcha $|x| > M$ uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, A soni $f(x)$ funksiyaning x argumenti ∞ ga intilgandagi limiti deyiladi va u $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A$ ko‘rinishda yoziladi. Bu holda funksiya grafigi ikki tomonlama $y = b$ gorizontaal asimptotaga ega bo‘ladi (2.11-rasm).



2.10-rasm



2.11-rasm

2.9-Misol. $0 < a < 1$ uchun $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ ekanligini ko‘rsatamiz.

► Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $a^x < \varepsilon$ bajariladi deb faraz qilamiz. $0 < a < 1$ bo‘lganda $\log_a x$ funksiyaning xossalaridan foydalanib $a^x < \varepsilon$ tengsizlik o‘rniga $x > \log_a \varepsilon$ tengsizlikni olamiz. $M = \log_a \varepsilon$ deb olsak ta’rifning sharti bajariladi. ◀

2.10-Misol. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$ ekanligini isbotlaymiz.

► Dastlab ixtiyoriy ε musbat son uchun $\frac{1}{x^2} < \varepsilon$ bo‘lsin. U holda $x^2 > 1/\varepsilon$, yoki $|x| > 1/\sqrt{\varepsilon}$. Agar ta’rifdagi M sifatida $M = 1/\sqrt{\varepsilon}$ sonni olsak $|x| > M$ uchun $\left| \frac{1}{x^2} - 0 \right| < \varepsilon$ orinli bo‘ladi. ◀

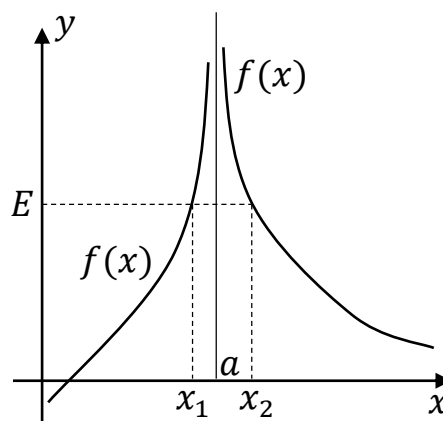
Funksiyaning cheksizlikka intilishi.

2.10-Ta’rif. $E > 0$ son qanday bo‘lishidan qat’iy nazar shunday $\delta > 0$ son topilib, a nuqtaning o‘zi kirmagan $\dot{U}_\delta(a)$ atrofidagi barcha x nuqtalar uchun $f(x) > E$ tengsizlik bajarilsa, $+\infty$ berilgan $f(x)$

funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti deyiladi va u $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ko‘rinishda yoziladi.

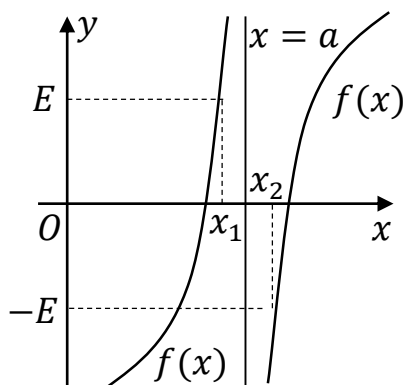
2.12-rasmda E ning qiymati bo‘yicha $\delta = \min\{a - x_1, x_2 - a\}$ qiymatini ta’rifning sharti bajariladigan qilib qanday tanlash ko‘rsatilgan. x argument a nuqtaga intilganda funksiyaning grafigi *vertikal asimptota* deb ataluvchi $x = a$ to‘g‘ri chiziqqa cheksiz yaqinlashadi.

$-\infty$ funksiyaning biror nuqtadagi limiti bo‘lish ta’rifi ham xuddi shu singari kiritiladi. Buni o‘quvchiga mustaqil bajarishiga qoldiramiz.

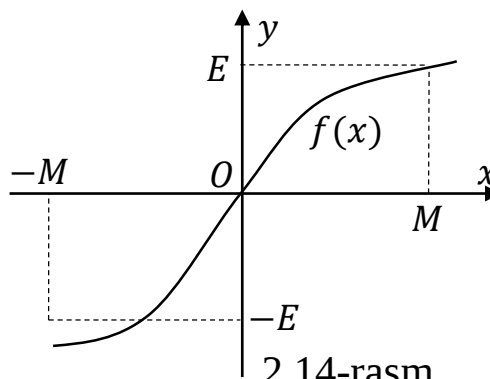


2.12-rasm

2.11-Ta’rif. $E > 0$ son qanday bo‘lishidan qat’iy nazar shunday $\delta > 0$ son topilib, a nuqtaning o‘zi kirmagan $\dot{U}_\delta(a)$ atrofidagi barcha x nuqtalar uchun $|f(x)| > E$ tengsizlik bajarilsa, ∞ berilgan $f(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtadagi limiti deyiladi va u $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ko‘rinishda yoziladi.



2.13-rasm



2.14-rasm

2.13-rasmda E ning qiymati bo‘yicha $\delta = \min\{a - x_1, x_2 - a\}$ qiymatini ta’rifning sharti bajariladigan qilib qanday tanlash ko‘rsatilgan. x argument a nuqtaga intilganda funksiyaning grafigi *vertikal asimptota* deb ataluvchi $x = a$ to‘g‘ri chiziqqa cheksiz yaqinlashadi.

Endi x argument cheksizlikka intilganda $f(x)$ funksiya qiymati ham cheksizlikka intilish ta’rifini beramiz.

2.12-Ta’rif. $E > 0$ son qanday bo‘lishidan qat’iy nazar shunday $M > 0$ son topilib, barcha $|x| > M$ nuqtalar uchun $|f(x)| > E$ tengsizlik

bajarilsa, ∞ berilgan $f(x)$ funksiyaning x argumenti cheksizlikka intilgandagi limiti deyiladi va u $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ ko‘rinishda yoziladi.

2.14-rasmda E qiymat bo‘yicha ta’rifdagi shartni qanoatlantiruvchi M sonini topish usuli ko‘rsatilgan.

2.11-Misol. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ ekanligini isbotlaymiz.

► Dastlab ixtiyoriy E musbat son uchun $\frac{1}{x^2} > E$ o‘rinli bo‘lsin. U holda $x^2 < \frac{1}{E}$ yoki $|x| < \frac{1}{\sqrt{E}}$. Agar ta’rifdagi δ sifatida $\delta = \frac{1}{\sqrt{E}}$ sonni olsak $|x| < \delta$ uchun $\left| \frac{1}{x^2} \right| = \frac{1}{x^2} > E$ o‘rinli bo‘ladi. Bu esa ta’rifga ko‘ra $x \rightarrow 0$ da $\frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty$ degan ma’noni anglatadi. ◀

2.12-Misol. $\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 = \infty$ ekanligini tekshiramiz.

► Ixtiyoriy $E > 0$ soni uchun $|x^3| > E$ bo‘lsin. Bundan esa $|x| > \sqrt[3]{E}$ tengsizlikni hosil qilamiz. Ta’rifdagi M sifatida $M = \sqrt[3]{E}$ sonni olsak ta’rif sharti bajariladi. ◀

Bir tomonlama limitlar. Yuqorida $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limitiga ta’rif berishda x argument a nuqtaga uning o‘zi kirmagan biror $\dot{U}(a)$ atrofi doirasida qanday ko‘rinishda intilishiga hech qanday chegaralash qo‘yilmagan edi. Biroq a nuqta funksiyaning $D(f)$ aniqlanish sohasida o‘zi kirmagan atrofga ega bo‘lmasligi ham mumkin (masalan, $f(x) = \sqrt{x}$ funksiya uchun $D(f) = \{x \in \mathbb{R}: x \geq 0\}$ sohada $x = 0$ nuqtaning o‘zi kirmagan atrofi mavjud emas). Bunday holda x argumentning a nuqtaga intilishi a nuqtaning bir tomonlama bo‘lgan o‘zi kirmagan yarim atrofi doirasida ma’noga ega bo‘ladi. Ammo funksiya a nuqtaning o‘zi kirmagan atrofida aniqlangan taqdirda ham x argument a nuqtaga intilganda funksiyaning o‘zgarish xususiyatini o‘zi kirmagan yarim atrof doirasida amalga oshirilish maqsadga muvofiq bo‘ladi. Bunday chegaralash bir tomonlama limit tushunchasini kiritishga olib keladi.

a nuqtaning chap yarim δ atrofi deb

$$U_{\delta}^{-}(a) = \{x: x \leq a, a - x < \delta\}$$

to‘plamga, o‘zi kirmagan chap yarim δ atrof deb

$$\dot{U}_{\delta}^{-}(a) = U_{\delta}^{-}(a) \setminus \{a\}$$

to‘plamga aytiladi.

2.13-Ta'rif. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, a nuqtaning o'zi kirmagan chap yarim $\dot{U}_{\delta}^{-}(a)$ atrofidan olingan barcha $x \in \dot{U}_{\delta}^{-}(a)$ nuqtalarda

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa A soni $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi chap limiti deb ataladi va u $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$ ko'rinishda yoziladi.

a nuqtaning o'ng yarim atrofi $U_{\delta}^{+}(a) = \{x: x \geq a, x - a < \delta\}$ va o'zi kirmagan o'ng yarim atrofi esa $\dot{U}_{\delta}^{-}(a) = U_{\delta}^{+}(a) \setminus \{a\}$ ko'rinishda aniqlanadi. Funksiyaning a nuqtadagi o'ng limiti ham xuddi chap limit singari aniqlanadi.

Funksiyaning a nuqtadagi chap va o'ng limitlarining qiymatlari uchun

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0), \quad \lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0)$$

belgilashlar ishlatiladi.

Funksiyaning nuqtadagi limitini bir tomonlama limitlardan farqlash uchun uni biz ikki tomonlama limit deb ataymiz. Funksiyaning nuqtadagi ikki tomonlama va bir tomonlama limitlarining mavjudligi orasidagi bog'liqlik ushbu teoremda keltiriladi.

2.2-Teorema. A soni $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi ikki tomonlama limiti bo'lishligi uchun A soni bir vaqtning o'zida ham chap, ham o'ng limit bo'lishi zarur va yetarli.

► **Zarurligi.** $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ bo'lsin. Ta'rifga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni, shu jumladan $x < a, a - x < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu esa bir tomonlama limitning ta'rifiga ko'ra $f(a-0)$ chap limitning mavjudligini va uning A soniga tengligini anglatadi. Xuddi shu singari $f(a+0)$ o'ng limitning mavjudligi va u A soniga tengligi ko'rsatiladi.

Yetarliligi. $f(a-0)$ va $f(a+0)$ limitlar mavjud va ular A soniga teng bo'lsin. Bir tomonlama limitlarning ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta_1, \delta_2 > 0$ sonlar topiladiki, $x < a, a - x < \delta_1$ va $x > a, x - a < \delta_2$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ deb olsak $|a - x| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x nuqtalar yoki $a - x < \delta_1$ yoki $x - a < \delta_2$ tengsizlikni qanoatlantiradi va ular uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ o'rinli. Bu esa ikki tomonlama limitning ta'rifiga ko'ra $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ekanligini anglatadi. ◀

2.3. Limitlar haqida teoremlar

2.3-Teorema (limitning yagonaligi). Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada limitga ega bo'lsa, bu limit yagonadir.

► $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ bo'lsin. Har qanday $B \neq A$ soni $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti bo'lmasligini isbotlaymiz. $|f(x) - B|$ ayirma modulini baholash uchun $||a| - |b|| \leq |a - b|$ tengsizlikdan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} |f(x) - B| &= |(f(x) - A) - (B - A)| \geq ||f(x) - A| - |B - A|| = \\ &= ||B - A| - |f(x) - A||. \end{aligned} \quad (2.4)$$

$\varepsilon = \frac{|B-A|}{2} > 0$ deb olamiz. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ bo'lganligi uchun, olingan $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $|x - a| < \delta$, $x \neq a$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. U holda (2.4) munosabatdan $|f(x) - B| \geq \frac{|B-A|}{2} = \varepsilon$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Shunday qilib shunday $\varepsilon > 0$ son topildiki, $\delta > 0$ son qanday bo'lishidan qat'iy nazar shunday $x \neq a$ nuqtalar topiladiki, $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlik bilan bir qatorda $|f(x) - B| \geq \varepsilon$ tengsizlik ham bajariladi. Bu esa $B \neq \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ekanligini anglatadi. ◀

2.14-Ta'rif. Agar shunday $M > 0$ va $\delta > 0$ sonlar topilib, a nuqtaning $U_\delta(x_0)$ atrofidan olingan barcha x nuqtalar uchun $|f(x)| \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtaning atrofida chegaralangan deyiladi.

2.4-Teorema (limitga ega funksiyaning chegaralanganligi). Agar $f(x)$ funksiya a nuqtaning atrofida aniqlangan va a nuqtada limitga ega bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya bu nuqtaning biror atrofida chegaralangan bo'ladi.

► $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$, xususan, $\varepsilon = 1$ uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun

$$|f(x) - A| < 1$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Har doim

$$|f(x)| - |A| \leq |f(x) - A|$$

ekanligidan

$$|f(x)| < |A| + 1$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. $M = \max \{|A| + 1, |f(a)|\}$ deb olamiz. U holda a nuqtaning $U_\delta(x_0)$ atrofidan olingan har qanday x nuqtada

$$|f(x)| \leq M$$

tengsizlik bajariladi. Bu esa ta'rifga ko'ra $f(x)$ funksiyaning a nuqta atrofida chegaralanganligini anglatadi. ◀

Aksincha, $f(x)$ funksiyaning a nuqta atrofida chegaralanganligidan $f(x)$ funksiyaning a nuqtada limiti mavjudligi kelib chiqmaydi. Masalan, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ funksiya $x = 0$ nuqtaning atrofida chegaralangan: barcha $x \neq 0$ nuqtalarda

$$\left| \sin \frac{1}{x} \right| \leq 1,$$

ammo uning bu nuqtada limiti mavjud emasligini §2.2 da ko'rgan edik.

2.5-Teorema. $f(x)$ funksiya a nuqtada A limitga ega bo'lsin. Agar a nuqtaning biror $U_{\delta'}(a)$ atrofidagi barcha x nuqtalar uchun $f(x) \geq 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsa (a nuqtaning o'zida esa o'rinli bo'lmasligi mumkin), $A \geq 0$ bo'ladi.

► Teskarisidan faraz qilaylik, ya'ni $A < 0$ bo'lsin. U holda a nuqtaning yuqorida aytib o'tilgan $U_{\delta'}(a)$ atrofida $f(x) - A \geq 0$ o'rinli bo'ladi. $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi limiti A soniga teng bo'lganligi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta'' > 0$ son topiladiki $|x - a| < \delta''$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda $|f(x) - A| = f(x) - A < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar $\varepsilon = -A$ deb olsak oxirgi tengsizlik $f(x) - A < -A$ ko'rinishni oladi. Bundan esa $f(x) < 0$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Agar $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ deb olsak barcha $x \in U_{\delta}(a)$ nuqtalarda $f(x) < 0$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu esa teoremadagi $f(x) \geq 0$ shartga zid. Ana shu zidlikdan teoremaning isboti kelib chiqadi. ◀

2.6-Teorema. $f(x)$ funksiya a nuqtada $A > 0$ ($A < 0$) limitga ega bo'lsin. U holda a nuqtaning shunday $U_{\delta'}(a)$ atrofi topilib, bu atrofdan olingan barcha x nuqtalar uchun $f(x) > 0$ ($f(x) < 0$) tengsizlik o'rinli bo'ladi (a nuqtaning o'zida esa o'rinli bo'lmasligi mumkin).

► $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$, xususan, $0 < \varepsilon < A$ uchun shunday $\delta' > 0$ son topiladiki, $|x - a| < \delta'$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun

$$|f(x) - A| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu tengsizlikni

$$A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$$

ko‘rinishda yozishimiz mumkin. $A - \varepsilon > 0$ ekanligini inobatga olsak, so‘ngi tengsizlikdan $U_{\delta'}(a)$ atrofida olingan barcha x nuqtalar uchun $f(x) > 0$ tengsizlik bajarilishi kelib chiqadi.

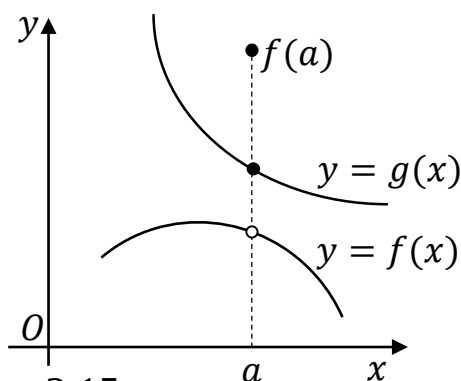
$A < 0$ bo‘lgan hol ham xuddi shu singari isbotlanadi. ◀

2.7-Teorema(tengsizlikda limitga o‘tish). Agar a nuqtaning biror atrofida barcha x nuqtalarda $f(x) \leq g(x)$ tengsizlik o‘rinli (a nuqtaning o‘zida esa o‘rinli bo‘lmasligi mumkin) va bu $f(x), g(x)$ funksiyalar a nuqtada limitga ega bo‘lsa,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi (2.15-rasm).

► Teskarisidan faraz qilamiz, ya‘ni $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = B$ va $A > B$ bo‘lsin. Teorema shartiga ko‘ra a nuqtaning biror $U_{\delta'}(a)$ atrofida barcha x nuqtalarda $\varphi(x) - f(x) \geq 0$. Bundan tashqari $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ va $\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = B$ bo‘lganligi



tufayli ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday

$\delta'' > 0$ son topilib, barcha $x \in U_{\delta''}(a)$ nuqtalar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon/2$, $|\varphi(x) - B| < \varepsilon/2$ tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi. $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ deb olsak, barcha $x \in U_{\delta}(a)$ nuqtalarda

$$g(x) - f(x) + A - B \geq 0$$

hamda

$$\begin{aligned} g(x) - f(x) + A - B &= |g(x) - B + A - f(x)| \leq \\ &\leq |g(x) - B| + |f(x) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

o‘rinli bo‘ladi. $\varepsilon = A - B$ deb olsak

$$\varphi(x) - f(x) + A - B < A - B \quad \text{yoki} \quad \varphi(x) - f(x) < 0$$

tengsizlik barcha $U_{\delta}(a)$ nuqtalarda o‘rinli bo‘ladi. Bu esa teoremadagi shartga ziddir. Bu zidlikdan teoremaning isboti kelib chiqadi. ◀

$f(x) < g(x)$ qat‘iy tengsizlikdan ularning limitlari uchun ham qat‘iy tengsizlik o‘rinli bo‘lishi kelib chiqmasligini aytib o‘tish kerak. Bu limitlar mavjud bo‘lsa, u holda ular uchun

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

bo‘lishinigina tasdiqlay olishimiz mumkin. Masalan,

$$f(x) = x^2 \text{ va } g(x) = \begin{cases} 2x^2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

funksiyalar uchun $f(x) < g(x)$ tengsilik o‘rinli, ammo ularning limitlari teng:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0.$$

2.8-Teorema (oraliq funksiyaning limiti). Agar a nuqtaning biror atrofidagi barcha x nuqtalarda $g(x) \leq f(x) \leq \varphi(x)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa (a nuqtaning o‘zida esa o‘rinli bo‘lmasligi mumkin) va $g(x), \varphi(x)$ funksiyalar a nuqtada bitta A limitga ega bo‘lishsa, u holda $f(x)$ funksiya ham a nuqtada A soniga teng bo‘lgan limitga ega bo‘ladi (2.16-rasm).

► a nuqtaning $U_{\delta'}(a)$ atrofidagi barcha x nuqtalarda $g(x) \leq f(x) \leq \varphi(x)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsin. $\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$

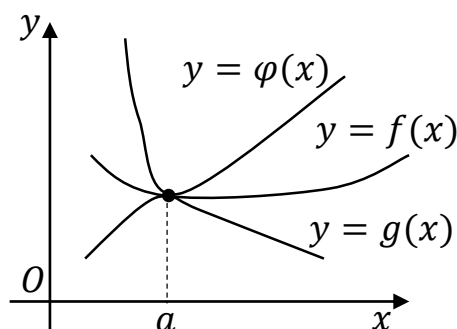
$\lim_{x \rightarrow a} \varphi(x) = A$ ekanligidan ixtiyoriy $\varepsilon > 0$

son uchun shunday $\delta'' > 0$ son topilib

$|x - a| < \delta''$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda $|\varphi(x) - A| < \varepsilon/3$,

$|\psi(x) - B| < \varepsilon/3$ tengsizliklarning o‘rinli

bo‘lishi kelib chiqadi. $\delta = \min\{\delta', \delta''\}$ deb olsak, barcha $x \in U_{\delta}(a)$ nuqtalar uchun



2.16-rasm

$$|f(x) - A| = |f(x) - g(x) + g(x) - A| \leq$$

$$\leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - A| =$$

$$= f(x) - g(x) + |g(x) - A| \leq \varphi(x) - g(x) + |g(x) - A| =$$

$$\varphi(x) - A + A - g(x) + |g(x) - A| \leq$$

$$\leq |\varphi(x) - A| + |g(x) - A| + |g(x) - A| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Bu esa limitning ta’rifiga ko‘ra $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ekanligini bildiradi. ◀

2.9-Teorema (Koshi kriteriyasi). $f(x)$ funksiya a nuqtada limitga ega bo‘lishligi uchun ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, a nuqtaning $U_{\delta}(a)$ atrofidan olingan barcha $x_1, x_2 \in U_{\delta}(a)$ nuqtalar uchun

$$|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon \quad (2.5)$$

tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

► **Zarurligi.** $f(x)$ funksiyaning a nuqtada A soniga teng limiti mavjud bo‘lsin. U holda limitning ta’rifiga ko‘ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun

shunday $\delta > 0$ son topilib, a nuqtaning $U_\delta(a)$ atrofidan olingan barcha $x_1, x_2 \in U_\delta(a)$ nuqtalar uchun

$$|f(x_1) - A| < \frac{\varepsilon}{2}, |f(x_2) - A| < \frac{\varepsilon}{2}$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. U holda

$$\begin{aligned} |f(x_1) - f(x_2)| &= |f(x_1) - A + A - f(x_2)| \leq \\ &\leq |f(x_1) - A| + |A - f(x_2)| = \\ &= |f(x_1) - A| + |f(x_2) - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Yetarliligi. Bu yerda biz funksiya limitining Geyne ta'rifidan foydalanamiz. a nuqtaga yaqinlashuvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikni olamiz: $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$. U holda shunday N tartib raqami topildiki, $(N + 1)$ -hadidan boshlab barcha hadlar a nuqtaning $U_\delta(a)$ o'yi atrofiga tushadi va ular uchun (2.5) shart bajariladi. Bu esa ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday N tartib raqami topildiki, barcha $m, n > N$ uchun $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi degan ma'noni anglatadi. Boshqacha qilib aytganda $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik fundamental ketma-ketlik bo'ladi. Ketma-ketliklar uchun Koshi kriteiyasiga ko'ra bu ketma-ketlik biror A soniga intiladi va ana shu A soni $f(x)$ funksiyaning ham a nuqtadagi limiti bo'ladi. ◀

Monoton funksiyalar uchun ham chegaralangan monoton ketma-ketliklar yaqinlashuvchiligining Veyersstrass alomati singari alomatni keltirish mumkin. Agar shunday $(a - h; a)$ (yoki $(a; a + h)$) oraliq topilib, bu oraliqda funksiya kamaymasa (o'smasa), biz uni $x \rightarrow a - 0$ (yoki $x \rightarrow a + 0$)da kamaymaydigan (o'smaydigan) funksiya deb ataymiz. Bunday funksiyalar $x \rightarrow a - 0$ (yoki $x \rightarrow a + 0$)da monoton funksiyalar deb ataladi. Agar shunday $(a - h; a)$ (yoki $(a; a + h)$) oraliq topilib, bu oraliqda funksiya yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa, biz uni $x \rightarrow a - 0$ (yoki $x \rightarrow a + 0$)da yuqoridan (quyidan) chegaralangan funksiya deb ataymiz.

2.1-Tasdiq. $x \rightarrow a - 0$ (yoki $x \rightarrow a + 0$)da monoton va yuqoridan (quyidan) chegaralangan funksiya, $x \rightarrow a - 0$ (yoki $x \rightarrow a + 0$)da chekli limitga ega bo'ladi.

2.4. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar

Cheksiz kichik funksiyalar tushunchasi. $\alpha(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin, a nuqtaning o'zida esa aniqlanmagan ham bo'lishi mumkin.

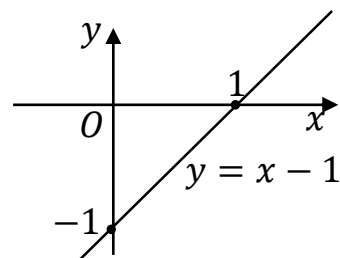
2.15-Ta'rif. Agar $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$ bo'lsa, $\alpha(x)$ funksiya x o'zgaruvchi a nuqtaga intilganda cheksiz kichik funksiya yoki $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya deb ataladi.

Masalan, $\alpha(x) = x - 1$ funksiya $x = 1$ nuqtadada cheksiz kichik funksiya bo'ladi, chunki $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0$.

Bu $y = x - 1$ funksyaning grafigi 2.17-rasmda tasvirlangan.

Umuman olganda, $\alpha(x) = x - a$ funksiya $x = a$ nuqtada eng oddiy cheksiz kichik bo'ladi.

Endi limitning ta'rifidan foydalanib, cheksiz kichik funksiyaga ta'rif beramiz.



2.17-rasm

2.16-Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, $0 < |x - a| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda

$$|\alpha(x)| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya deb ataladi.

$x \rightarrow a$ da cheksiz kichik funksiya tushunchasi bilan bir qatorda $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$ va $x \rightarrow -\infty$ da ham cheksiz kichik funksiya tushunchasini kiritish mumkin.

2.17-Ta'rif. Agar $\lim_{x \rightarrow \infty} \alpha(x) = 0$ bo'lsa, $\alpha(x)$ funksiya $x \rightarrow \infty$ da cheksiz kichik funksiya deb ataladi.

Agar $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$ yoki $\lim_{x \rightarrow -\infty} \alpha(x) = 0$ bo'lsa, $\alpha(x)$ funksiya mos rafishda $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$ yoki $x \rightarrow -\infty$ da cheksiz kichik funksiya deb ataladi.

Masalan, $\alpha(x) = \frac{1}{x^2}$, $x \neq 0$ funksiya $x \rightarrow \infty$ da cheksiz kichik bo'ladi, chunki

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

Ushbu $\alpha(x) = e^x$ funksiya esa $x \rightarrow -\infty$ da cheksiz kichik bo'ladi, chunki

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Bundan keyin funksyaning limiti bilan bog'liq barcha tushuncha va teoremlarni funksyaning faqat nuqtadagi limiti bo'lgan hol uchun keltiramiz. $x \rightarrow \infty$, $x \rightarrow +\infty$ yoki $x \rightarrow -\infty$ hollar uchun mos tushuncha va teoremlarni ifodalash va isbot qilishni kitobxonning o'ziga havola qilamiz.

Cheksiz kichik funksyalarning xossalari.

2.10-Teorema. Agar $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtada cheksiz kichik bo'lsa, u holda ularning $\alpha(x) + \beta(x)$ yig'indisi ham bu nuqtada cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

► Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olamiz. $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya bo'lganligi uchun shunday $\delta_1 > 0$ topiladiki $0 < |x - a| < \delta_1$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda

$$|\alpha(x)| < \varepsilon/2 \quad (2.6)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Xuddi shunday $\beta(x)$ cheksiz kichik funksiya bo'lganligi uchun, shunday $\delta_2 > 0$ son topiladiki $0 < |x - a| < \delta_2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda

$$|\beta(x)| < \varepsilon/2 \quad (2.7)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ deb olamiz. U holda $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda (2.6), (2.7) tengsizliklar bir vaqtda o'rinli bo'ladi. Shuning uchun

$$|\alpha(x) + \beta(x)| \leq |\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

tengsizlik $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlik qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda o'rinli bo'ladi. Bu esa $\alpha(x) + \beta(x)$ yig'indi $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya ekanligidan dalolat beradi. ◀

Mulohaza. Teorema $x = a$ nuqtada ixtiyoriy chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalar uchun ham o'rinli.

2.11-Teorema. Agar $\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik, $f(x)$ esa bu nuqtaning atrofida chegaralangan bo'lsa, u holda $\alpha(x) \cdot f(x)$ ham $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

► Teorema shartiga ko'ra $f(x)$ funksiya a nuqtaning atrofida chegaralangan, ya'ni shunday $\delta_1 > 0$, $M > 0$ sonlar topiladiki, $|x - a| < \delta_1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda $|f(x)| \leq M$ o'rinli bo'ladi. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olamiz. $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya bo'lganligi uchun, shunday $\delta_2 > 0$ son topiladiki $|x - a| < \delta_2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \neq a$ nuqtalarda

$$|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{M}$$

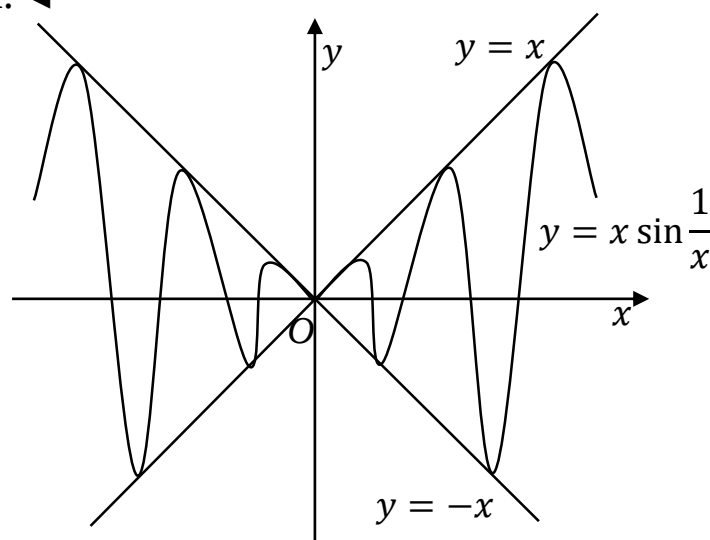
o'rinli bo'ladi. $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ deb olsak, u holda $0 < |x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda

$$|f(x)| < M \text{ va } |\alpha(x)| < \varepsilon/M$$

tengsizliklar o'rinli. Shuning uchun yuqorida aytib o'tilgan x nuqtalarda

$$|\alpha(x) \cdot f(x)| = |\alpha(x)| |f(x)| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon$$

o‘rinli bo‘ladi, ya’ni $\alpha(x) \cdot f(x)$ ko‘paytma $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya bo‘ladi. ◀



2.18-rasm

2.13-Misol. $y = x \sin \frac{1}{x}$ (2.18-rasm) funksyani $\alpha(x) = x$ va $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ funksyalarning ko‘paytmasi sifatida qarash mumkin. $x = 0$ nuqtada $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ funksiya esa $x = 0$ nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda aniqlangan va bu nuqtaning ixtiyoriy atrofida ($x = 0$ nuqtaning o‘zi kirmaydi) chegaralangan. Shuning uchun 2.10-teoremaga ko‘ra $y = x \sin \frac{1}{x}$ funksiya $x = 0$ nuqtada cheksiz kichik bo‘ladi, ya’ni $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$. ◀

Natija. Agar $\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik, $f(x)$ funksiya esa bu nuqtada chekli limitga ega bo‘lsa, u holda $\alpha(x) \cdot f(x)$ ko‘paytma ham $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya bo‘ladi.

► a nuqtada limitga ega bo‘lgan funksiya a nuqtadan boshqa barcha nuqtalarda chegaralangan ekanligidan 2.10-teoremani qo‘llab $\alpha(x) \cdot f(x)$ ko‘paytmaning cheksiz kichik funksiya bo‘lishiga erishamiz. ◀

2.1-Lemma. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada noldan farqli limitga ega bo‘lsa, u holda $\frac{1}{f(x)}$ funksiya a nuqtaning o‘yiq atrofida chegaralangan bo‘ladi.

► $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \neq 0$ bo'lsin. U holda ixtiyori $\varepsilon > 0$ son uchun, xususan $\varepsilon = |A|/2$ uchun, shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $0 < |x - a| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda

$$|A - f(x)| < |A|/2$$

o'rinli bo'ladi. $|A - f(x)| > |A| - |f(x)|$ tengsizlikka ko'ra

$$|A| - |f(x)| < |A|/2$$

bundan esa $0 < |x - a| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalar uchun

$$|f(x)| > |A|/2$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Shunday qilib yuqorida ko'rsatilgan x nuqtalarda $1/f(x)$ aniqlangan va uning uchun

$$\left| \frac{1}{f(x)} \right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{2}{|A|}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni $1/f(x)$ funksiya a nuqtaning o'zi kirmagan atrofida chegaralangan bo'ladi.

2.12-Teorema. Agar $\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik, $f(x)$ funksiya esa a nuqtada noldan farqli limitga ega bo'lsa, u holda $\alpha(x)/f(x)$ nisbat ham $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya bo'ladi.

► $\alpha(x)/f(x)$ nisbatni $\alpha(x) \cdot \frac{1}{f(x)}$ ko'paytma shaklida yozamiz.

Yuqorida keltirilgan lemmaga ko'ra $\frac{1}{f(x)}$ funksiya a nuqtaning o'zi

kirmagan atrofida chegaralangan. Shuning uchun $\alpha(x) \cdot \frac{1}{f(x)}$ funksiya cheksiz kichik funksiya bilan chegaralangan funksyaning ko'paytmasi sifatida $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya bo'ladi. ◀

2.13-Teorema. $f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin (a nuqtaning o'zida esa aniqlanmagan bo'lishi ham mumkin). $f(x)$ funksiya a nuqtada A limitga ega bo'lishi uchun $f(x)$ funksiyani

$$f(x) = A + \alpha(x)$$

yig'indi ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lishi zarur va yetarli, bu yerda $\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik.

► **Zarurligi.** $f(x)$ funksiya a nuqtada A soniga teng limitga ega bo'lsin:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A.$$

U holda

$$\alpha(x) = f(x) - A \tag{2.8}$$

deb belgilash kiritamiz va $\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik bo'lishini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olamiz. Limitning ta'rifiga ko'ra tanlangan ε son uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki $|x - a| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. (2.8) tenglikga ko'ra so'ngi tengsizlikni $|\alpha(x)| < \varepsilon$ ko'rinishda yozish mumkin. Bu esa $\alpha(x)$ funksyaning cheksiz kichik funksya ekanligidan dalolat beradi.

Yetarliligi. $f(x)$ funksya

$$f(x) = A + \alpha(x) \quad (2.9)$$

ko'rinishda tasvirlangan bo'lib, bunda A -o'zgarmas son, $\alpha(x)$ esa $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksya bo'lsin. $f(x)$ funksya a nuqtada A soniga teng limitga ega ekanligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son olamiz. Shartga ko'ra $\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik, u holda shunday $\delta > 0$ son topiladiki $|x - a| < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \neq a$ nuqtalarda $|\alpha(x)| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda (2.9) tenglikka ko'ra $\alpha(x) = f(x) - A$. Shuning uchun yuqorida aytilgan x nuqtalarda $|f(x) - A| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Limitning ta'rifiga ko'ra bu $A = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ekanligini bildiradi. ◀

Cheksiz katta funksiyalar. Cheksiz kichik funksiyalar tushunchasi bilan bir qatorda cheksiz katta funksiya tushunchasi ham kiritiladi.

$f(x)$ funksya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin, a nuqtaning o'zida esa aniqlanmagan bo'lishi ham mumkin.

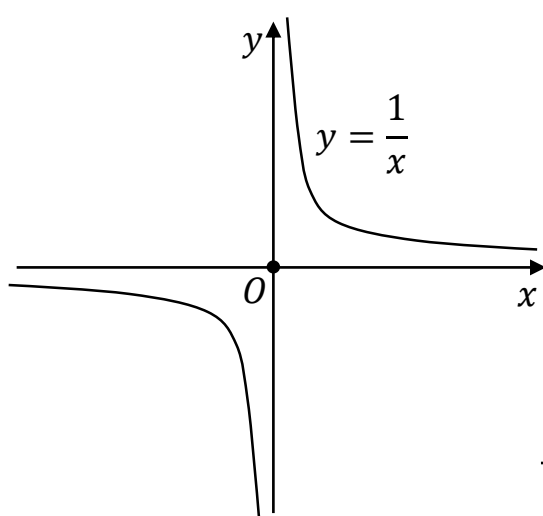
2.18-Ta'rif. Har qanday katta $M > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun $|f(x)| > M$ tengsizligi bajarilsa, $f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtaga cheksiz katta funksiya deb ataladi va $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ ko'rinishda yoziladi.

Ta'rifdagi $|f(x)| > M$ tengsizlikni $f(x) > M$ yoki $f(x) < -M$ tengsizliklar bilan almashtirib, mos ravishda musbat cheksiz katta $f(x)$ funksiyani: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ yoki manfiy cheksiz katta $f(x)$ funksiyani: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ hosil qilamiz.

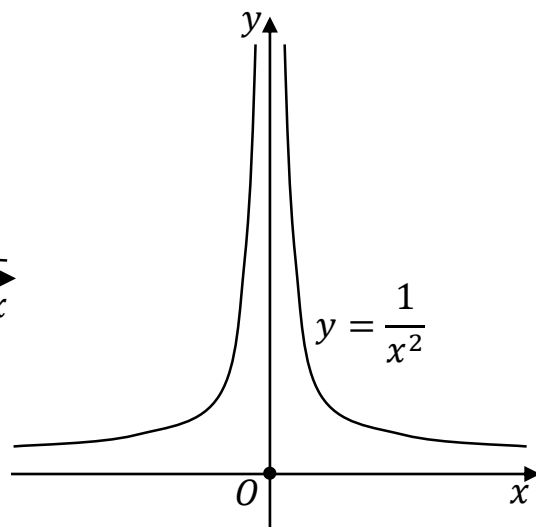
2.14-Misol. Barcha $x \neq 0$ nuqtalarda aniqlangan $f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya x argument nolga intilganda cheksiz katta funksiya bo'ladi (2.19-rasm).

► Yetarlicha katta $M > 0$ sonini olamiz. $|f(x)| = \left| \frac{1}{x} \right| = \frac{1}{|x|} > M$ tengsizlik $|x| = |x - 0| < \frac{1}{M}$ tengsizlikka teng kuchli. Shuning uchun, agar $\delta = \frac{1}{M}$ deb olinsa, u holda $|x - 0| = |x| < \frac{1}{M}$ tengsizlikni

qanoatlantiruvchi barcha $x \neq 0$ nuqtalar uchun $|f(x)| = \left|\frac{1}{x}\right| > M$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu esa ta’rifga ko‘ra x argument nolga intilganda $f(x) = \frac{1}{x}$ cheksiz katta funksiya degan ma’noni anglatadi. ◀



2.19-rasm



2.20-rasm

Barcha $x \neq 0$ nuqtalarda aniqlangan $f(x) = \frac{1}{x^2}$ funksiya $x = 0$ nuqtada cheksiz katta funksiya bo‘ladi (2.20-rasm).

Cheksiz katta va cheksiz kichik funksiyalar o‘rtasidagi bog‘liqlik quyidagi teoremada ifodalangan.

2.14-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz katta bo‘lsa, u holda $1/f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiya bo‘ladi. Agar $\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik va a nuqtaning biror atrofida noldan farqli bo‘lsa, u holda $1/\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz katta funksiya bo‘ladi.

► $f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz katta funksiya bo‘lsin. Har qanday katta $M > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \neq a$ nuqtalar uchun $|f(x)| > M$ tengsizligi bajariladi. Xuddi shunday x nuqtalar uchun $\frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{M}$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. U holda ixtiyoriy $\varepsilon = \frac{1}{M}$ uchun yuqorida aytilgan x nuqtalarda $\left|\frac{1}{f(x)}\right| = \frac{1}{|f(x)|} < \frac{1}{M}$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Shuning uchun cheksiz kichik funksiyaning ta’rifiga ko‘ra $\frac{1}{f(x)}$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik bo‘ladi.

a nuqtaning biror atrofida noldan farqli $\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik bo'lsin. U holda ixtiyoriy $\varepsilon = \frac{1}{M} > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $|x - a| < \delta$ tengsizlini qanoatlantiruvchi barcha $x \neq a$ nuqtalarda $|\alpha(x)| < \varepsilon = 1/M$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda ana shu x nuqtalar uchun $|1/\alpha(x)| > M$ o'rinli bo'ladi, ya'ni $1/\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz katta bo'ladi. ◀

2.5. Limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari

Limitlar ustida arifmetik amallar. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin, a nuqtaning o'zida esa aniqlanmagan bo'lishi ham mumkin.

2.15-Teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtada limitga ega bo'lishsa, u holda ularning $f(x) + g(x)$ yig'indisi ham, $f(x) - g(x)$ ayirmasi ham, $f(x) \cdot g(x)$ ko'paytmasi ham, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ qo'shimcha

shartda $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat ham bu nuqtada limitga ega bo'ladi va

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x); \quad (2.10)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x); \quad (2.11)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0 \quad (2.12)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

► $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ bo'lsin. 2.13-teoremaga ko'ra

$$f(x) = A + \alpha(x), \quad g(x) = B + \beta(x),$$

bu yerda $x \rightarrow a$ da $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar cheksiz kichik funksiyalardir. Bundan esa

$$\begin{aligned} 1) f(x) \pm g(x) &= [A + \alpha(x)] \pm [B + \beta(x)] = \\ &= [A \pm B] + [\alpha(x) \pm \beta(x)] \end{aligned}$$

$x \rightarrow a$ da $\alpha(x)$, $\beta(x)$ funksiyalar cheksiz kichik bo'lgani uchun, ularning yig'indisi ham ayirmasi ham cheksiz kichik bo'ladi.

Shunday qilib $f(x) \pm g(x)$ funksiya $A \pm B$ o'zgarmas son bilan $x \rightarrow x_0$ da cheksiz kichik bo'lgan funksyaning yig'indisi shaklida tasvirlandi. Shuning uchun 2.13-teoremaga ko'ra $f(x) \pm g(x)$ funksiya a nuqtada $A \pm B$ songa teng bo'lgan limitga ega bo'ladi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \pm g(x)] = A \pm B = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

$$2) f(x) \cdot g(x) = [A + \alpha(x)] \cdot [B + \beta(x)] = \\ = AB + A\beta(x) + B\alpha(x) + \alpha(x)\beta(x)$$

Bu yerdagi $A\beta(x)$, $B\alpha(x)$, $\alpha(x)\beta(x)$ funksiyalar $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik funksiyalar bo'lganligi uchun cheksiz kichik funksiya bilan chegaralangan funksyaning ko'paytmasi sifatida ularning yig'indisi ham $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik bo'ladi.

Shunday qilib $f(x) \cdot g(x)$ ko'paytma funksiya AB o'zgaras son bilan $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik bo'lgan funksyaning yig'indisi shaklida tasvirlanadi. Shuning uchun 2.13-teoremaga asosan $f(x) \cdot g(x)$ funksiya a nuqtada AB songa teng bo'lgan limitga ega bo'ladi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x) \cdot g(x)] = A \cdot B = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

3) Qo'shimcha $B \neq 0$ shartni inobatga olsak

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A + \alpha(x)}{B + \beta(x)} = \\ = \frac{\frac{1}{B} [B + \beta(x)] [A + \alpha(x)] - \frac{A}{B} \beta(x) - \frac{1}{B} \beta(x) \alpha(x)}{B + \beta(x)} = \\ = \frac{1}{B} [A + \alpha(x)] - \frac{A}{B[B + \beta(x)]} \beta(x) - \beta(x) \frac{\alpha(x)}{B[B + \beta(x)]} = \\ = \frac{A}{B} + \alpha(x) \frac{1}{B} - \beta(x) \frac{A}{B[B + \beta(x)]} - \beta(x) \frac{\alpha(x)}{B[B + \beta(x)]}.$$

$x \rightarrow a$ da $\alpha(x) \frac{1}{B}$, $\beta(x) \frac{A}{B[B + \beta(x)]}$, $\beta(x) \frac{\alpha(x)}{B[B + \beta(x)]}$ hadlar cheksiz kichik funksiyalar bo'lganligi uchun (cheksiz kichik funksiya bilan chegaralangan funksyaning ko'paytmasi sifatida) ularning yig'indisi ham cheksiz kichik bo'ladi.

Shunday qilib $\frac{f(x)}{g(x)}$ nisbat $\frac{A}{B}$ o'zgaras bilan $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik bo'lgan funksyaning yig'indisi shaklida tasvirlanadi. Shuning uchun 2.13-teoremaga asosan $\frac{f(x)}{g(x)}$ funksiya a nuqtada $\frac{A}{B}$ nisbatga teng bo'lgan limitga ega bo'ladi:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

Natija. O'zgarmas ko'paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

2.1-Masala. $f(x)$ funksiya a nuqtada limitga ega, $g(x)$ funksiya esa limitga ega bo'lmasa, $f(x) + g(x)$ funksiya bu nuqtada limitga ega bo'lmasligini ko'rsating.

► Teskarisidan faraz qilaylik, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)]$ limit mavjud bo'lsin. $f(x) + g(x)$ va $f(x)$ funksiyalar a nuqtada limitga ega bo'lganligi uchun 2.15-teoremaga ko'ra ularning ayirmasi ham a nuqtada limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} [(f(x) + g(x)) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x) - f(x)] = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

ya'ni $g(x)$ funksiya ham a nuqtada limitga ega ekan. Bu esa masala shartiga zid. Ana shu zidlik qilgan farazimizning noto'riligini ko'rsatadi. ◀

2.2-Masala. Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ va $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$ limit mavjud bo'lmasa $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$ limit mavjud bo'lmasligini ko'rsating.

► Teskarisidan faraz qilaylik, ya'ni $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$ limit mavjud bo'lsin. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ bo'lganligi uchun $\frac{1}{f(x)}$ funksiya a nuqtada limitga

ega. $f(x) \cdot g(x)$ va $\frac{1}{f(x)}$ funksiyalar a nuqtada limitga ega bo'lganligi uchun 2.15-teoremaga ko'ra ularning ko'paytmasining ham limiti mavjud:

$$\lim_{x \rightarrow a} \left[(f(x) \cdot g(x)) \cdot \frac{1}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \left[f(x) \cdot g(x) \cdot \frac{1}{f(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} g(x),$$

ya'ni $g(x)$ funksiya a nuqtada limitga ega ekan. Bu esa masala shartiga ziddir. Ana shu zidlik qilgan farazimizning noto'g'ri ekanligini anglatadi. ◀

Murakkab funksiyaning limiti.

2.16-Teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya a nuqtada A chekli limitga ega bo'lsa va A qiymatni a nuqtaning biror o'yiqlik $\dot{U}(a)$ atrofida qabul qilmasa, $g(y)$ funksiya esa A nuqtada B limitga ega bo'lsa, u holda $g(f(x))$ murakkab funksiya a nuqtada limitga ega va u B soniga teng.

► Geyne ta'rifiga ko'ra $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ ekanligidan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a \tag{2.13}$$

munosbatni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A \quad (2.14)$$

tenglikni qanoatlantiradi. Aksincha ham o‘rinli, ya’ni (2.14) tenglikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik (2.13) tenglikni ham qanoatlantiradi.

Xuddi shu singari $\lim_{y \rightarrow A} g(y) = B$ ekanligidan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A \quad (2.15)$$

munosabatni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\{y_n\}$ ketma-ketlik

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = B \quad (2.16)$$

tenglikni qanoatlantiradi va aksincha, (2.16) tenglikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\{y_n\}$ ketma-ketlik (2.15) tenglikni ham qanoatlantiradi.

$\{x_n\}$ berilgan a nuqtada intiluvchi ixtiyoriy ketma-ketlik va barcha $n \in N$ uchun $x_n \neq a$ bo‘lsin. U holda $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$, ammo barcha $n \in N$ uchun $f(x_n) \neq 0$. Bu yerda $y_n = f(x_n)$ deb olamiz. $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = A$ va barcha $n \in N$ sonlarda $y_n \neq A$ bo‘lganligi uchun $\lim_{n \rightarrow \infty} g(y_n) = B$ tenglik o‘rinli bo‘ladi. Shunday qilib, (2.14) munosabatni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlik $\lim_{n \rightarrow \infty} g(f(x_n)) = B$ tenglikni ham qanoatlantirar ekan, bu esa Geyne ta’rifiga ko‘ra teoremani isbotlaydi. ◀

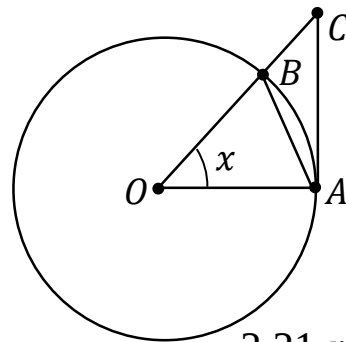
Bu teorema murakkab funksiyaning limitini hisoblashda o‘zgaruvchilarni almashtirishni

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow b} g(y) \quad (2.17)$$

formula bo‘yicha amalga oshirish imkonini beradi.

Ikkita ajoyib limit. a nuqtada limitga ega bo‘lgan funksiyaning yuqorida qaralgan xossalari funksiyaning bu nuqta atrofida o‘zgarishini tahlil qilish imkonini beradi. Ammo ayrim hollarda bu xossalari va limitni hisoblash qoidalarini yetarli bo‘lmay qoladi. Bunga $(\sin x)/x$ funksiyaning $a = 0$ nuqta atrofida o‘zgarishini misol sifatida keltirish mumkin.

x – radiusi 1 bo‘lgan aylananing markaziy burchagi yoki yoyi uzunligi va $0 < x < \pi/2$ bo‘lsin (2.21-rasm). OAB uchburchakning S_1 yuzini, AOB sektorning S_2 yuzini va OAC uchburchakning S_3 yuzini taqqoslash natijasi $S_1 < S_2 < S_3$ tengsizlikni beradi. $|OA| = 1$ bo‘lganda



2.21-rasm

$$S_1 = (\sin x)/2, S_2 = x/2, S_3 = (\tan x)/2$$

ekanligidan ixtiyoriy $x \in (0, \pi/2)$ nuqtalarda

$$\frac{\sin x}{2} < \frac{x}{2} < \frac{\operatorname{tg} x}{2}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi.

Dastlab ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}$ nuqtalar uchun

$$|\sin x| \leq |x| \quad (2.18)$$

tengsizlikning o‘rinli ekanligini isbotlaymiz.

Haqiqatdan ham $x \in (0, \pi/2)$ bo‘lsa (2.18) tengsizlik yuqoridai qo‘sh tengsizlikdan kelib chiqadi. $x \geq \pi/2 > 1$ bo‘lsa (2.18) tengsizlik $|\sin x| \leq 1$ tengsizlik tufayli o‘rinli bo‘ladi. (2.18) tengsizlikda faqat juft funksiyalar qatnashgan, shuning uchun u $x < 0$ uchun ham o‘rinli. Nihoyat $x = 0$ bo‘lsa (2.18) tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Tengsizlikda limitga o‘tish haqidagi teoremani (2.18) tengsizlikka qo‘llab $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$ limitni topamiz. Xuddi shu teoramani $|\cos x - 1| = 2 \sin^2(x/2) \leq x^2/2$ tengsizlikka qo‘llab $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$ limitni topamiz.

Endi yuqoridagi qo‘sh tengsizlikka qaytaylik. Uning chap qismidan $x \in (0, \pi/2)$ nuqtalar uchun $(\sin x)/x < 1$ ekanligi kelib chiqadi. $(\sin x)/x$ juft funksiya bo‘lganligi uchun bu tengsizlik $x \in (-\pi/2, 0)$ nuqtalar uchun ham o‘rinli bo‘ladi. Qo‘sh tengsizlikning ong qismidan $x \in (0, \pi/2)$ nuqtalar uchun $\cos x < (\sin x)/x$ ekanligi kelib chiqadi. Tengsizlikdagi funksiyalar juft bo‘lganligi uchun u $x \in (-\pi/2, 0)$ nuqtalar uchun ham o‘rinli bo‘ladi. Shunday qilib $x = 0$ nuqtanig $U_{\pi/2}(0)$ o‘yiq atrofidan olingan barcha x nuqtalar uchun

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lar ekan, ya’ni $(\sin x)/x$ funksiya $x = 0$ nuqtada limitlari 1 bo‘lgan ikkita funksiyaning orasida yotar ekan. Oraliq funksiyaning limiti haqidagi teoremani qo‘llab, *birinchi ajoyib limit* deb ataluvchi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad (2.19)$$

tenglikka ega bo‘lamiz.

(2.19) tenglikni geometrik jihatdan quyidagicha talqin qilish mumkin. x markaziy burchakning (2.21-rasmga qarang) kamayishi bilan yoy uzunligi uni tortib turuvchi vatar uzunligiga yaqinlashib boradi. (2.19) yordamida $0/0$ ko‘rinishdagi aniqmasliklarni ochish mumkin.

Endi ikkinchi ajoyib limit deb ataluvchi

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (2.20)$$

tenglikni isbotlaymiz.

► $x > 1$ bo'lsin. U holda

$$1 \leq [x] \leq x < [x] + 1, \quad (2.21)$$

bu yerda $[x]$ orqali x sonning butun qismi belgilangan. Bu tengsizlikdan

$$\frac{1}{[x] + 1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{[x]} \leq 1$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Tengsizlikning har bir qismiga birni qoshib uni

$$1 + \frac{1}{[x] + 1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{[x]}$$

ko'rinishda yozamiz. So'ngi tengsizlikning barcha qismi birdan katta. Shuning uchun ularni (2.21) tengsizlikning mos qismlariga teng musbat darajalarga ko'tarsak

$$\left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} \quad (2.22)$$

1.3. bo'limda $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ tenglikni isbotlagan edik. U holda bu tenglikni hamda yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalarini qo'llab

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e, \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = e$$

tengliklarni yozamiz. Bu tengliklarni ketma-ketlikning limiti ta'rifi bo'yicha yozsak, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $N \in \mathbb{N}$ topilib, barcha $n > N$ uchun

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} - e \right| < \varepsilon, \quad \left| \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n - e \right| < \varepsilon$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. U holda (2.22) tengsizlikni inobatga olsak $x > N + 1$, $[x] = n > N$ uchun

$$e - \varepsilon < \left(1 + \frac{1}{[x] + 1}\right)^{[x]} < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{[x]}\right)^{[x]+1} < e + \varepsilon$$

o‘rinli bo‘ladi yoki

$$\left| \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x - e \right| < \varepsilon.$$

Bu esa argument $+\infty$ ga intilgandagi limit ta’rifiga ko‘ra

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e \quad (2.23)$$

ekanligini anglatadi.

Endi $x \rightarrow -\infty$ bo‘lsin. $x = -u$ deb olamiz, u holda $x \rightarrow -\infty, u \rightarrow +\infty$. Ayniy almashtirishlardan so‘ng

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{u}\right)^{-u} = \left(\frac{u}{u-1}\right)^u = \left(1 + \frac{1}{u-1}\right)^{u-1} \left(1 + \frac{1}{u-1}\right)$$

tenglikni hosil qilamiz. (2.17) formulaga ko‘ra o‘zgaruvchilarni almashtiramiz va ko‘paytmaning limiti haqidagi teoremani va (2.23) tenglikni qo‘llab

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u-1}\right)^{u-1} \cdot \lim_{u \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{u-1}\right) = e$$

limitni topdik. Xulosa qilsak, x cheksizlikka har qanday intilganda ham (2.20) o‘rinli.

(2.20) tenglikda (2.17) formulaga ko‘ra $y = 1/x$ deb o‘zgaruvchini almashtiramiz va $x \rightarrow \infty$ da $y \neq 0$ degan shartni qo‘yamiz, u holda

$$\lim_{y \rightarrow 0} (1 + y)^{1/y} = e \quad (2.24)$$

natijani hosil qilamiz.

Birinci qarashda (2.24) natija haqiqatga ziddek tuyuladi, chunki $y \rightarrow 0$ bo‘lsa, $1 + y \rightarrow 1$ bo‘ladi va birning har qanday darajasi bir bo‘ladi! Ammo bu tenglikni boshqacha izohlash mumkin. $y \rightarrow 0$ da daraja ko‘rsatkichi $1/y$ cheksiz katta funksiya, asos esa bir emas, balki $y \rightarrow 0$ da birdan cheksiz kichik miqdorga farq qiladi. Ushbu jadvalda $g(y) = (1 + y)^{1/y}$ funksiyaning y kamayib borishdagi qiymatlari keltirilgan:

y	1	1/2	1/3	1/4	0,1	0,01	0,001	0,0001
$g(y)$	2	2,250	2,370	2,441	2,594	2,7047	2,7169	2,7181

(2.20) va (2.24) formulalar 1^∞ ko‘rinishdagi aniqmaslikni ochish imkonini beradi.

Funksiyaning limitini hisoblashga bir necha misol keltiramiz.

2.15-Misol. Limitni hisoblang: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3}{2x - 5}$.

► Limit ostidagi funksiyaning ikkita $f(x) = x^3 + 3$ va $g(x) = 2x - 5$ funksiyalarning nisbati sifatida qaraymiz. Bu funksiyalarning har biri $x = 2$ nuqtada limitga ega:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3) = 2^3 + 3 = 11$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (2x - 5) = -1$$

Maxrajdagi $g(x)$ funksiyaning limiti noldan farqli, shuning uchun bu yerda nisbatning limiti haqidagi teoremani qo'llashimiz mumkin:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 3}{2x - 5} = \frac{\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 + 3)}{\lim_{x \rightarrow 2} (2x - 5)} = \frac{11}{-1} = -11.$$

2.16-Misol. Limitni hisoblang: $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3}$.

► $f(x) = x^2 - 9$ va $g(x) = x + 3$ deb olamiz. Bu funksiyalar $\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -3} g(x) = 0$ limitlarga ega. Shuning uchun $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslikka ega bo'lamiz. Limit ostidagi funksiya $x = -3$ nuqtada aniqlanmagan va bu nuqtaning o'zida funksiyaning qaramasdan, faqat limiti qaraladi. Suratdagi $f(x)$ funksiyaning ko'paytuvchilarga ajratamiz:

$$\frac{x^2 - 9}{x + 3} = \frac{(x - 3)(x + 3)}{x + 3}.$$

O'ng tomondagi kasrni $x + 3 \neq 0$ ifodaga bo'lamiz:

$$\frac{x^2 - 9}{x + 3} = x - 3, \quad x \neq -3.$$

Shuning uchun

$$\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 - 9}{x + 3} = \lim_{x \rightarrow -3} (x - 3) = -6. \quad \blacktriangleleft$$

2.17-Misol. Limitni hisoblang: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + x^2} - 2}{x^2}$.

► Surat va maxrajdagi funksiyalarning $x = 0$ nuqtadagi limitlari nolga teng, shuning uchun yana $0/0$ ko'rinishdagi aniqmaslikka ega bo'lamiz. Bu aniqmaslikni ochish uchun kasrning surat va maxrajini $\sqrt{4 + x^2} + 2$ ifodaga ko'paytiramiz. $x \neq 0$ holda

$$\frac{\sqrt{4 + x^2} - 2}{x^2} = \frac{(\sqrt{4 + x^2} - 2)(\sqrt{4 + x^2} + 2)}{x^2(\sqrt{4 + x^2} + 2)} =$$

$$= \frac{4 + x^2 - 4}{x^2(\sqrt{4 + x^2} + 2)} = \frac{1}{\sqrt{4 + x^2} + 2}.$$

Hosil qilingan funksiyaga nisbatning limiti haqidagi teoremani qo'llash mumkin:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4 + x^2} - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{4 + x^2} + 2} = \frac{1}{4}.$$

2.18-Misol. Limitni hisoblang: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x}$.

► Limit ostidagi funksiyaning ko'rinishini o'zgartiramiz:

$$\frac{\sin 5x}{\sin 7x} = \frac{\sin 5x}{x} \frac{x}{\sin 7x} = \frac{5 \sin 5x}{5x} \frac{7x}{\sin 7x}.$$

$\lim_{x \rightarrow 0} 5x = 0$, $\lim_{x \rightarrow 0} 7x = 0$ bo'lganligi uchun murakkab funksiyaning limiti haqidagi teoremani qo'llab

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = 1$$

tengliklarga ega bo'lamiz. U holda ko'paytmaning limiti haqidagi teoremani qo'llab

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\sin 7x} = \frac{5}{7} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{5x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{7x} = \frac{5}{7} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{5}{7}.$$

2.19-Misol. Limitni hisoblang: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2}$.

► Ayniy almashtirishlardan so'ng

$$\begin{aligned} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2} &= \left(\frac{1 + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}} \right)^{x^2} = \frac{\left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{x^2}}{\left(1 - \frac{2}{x^2} \right)^{x^2}} = \\ &= \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)^{\frac{1}{1/x^2}} \left(1 - \frac{2}{x^2} \right)^{\frac{2}{-2/x^2}} \end{aligned}$$

ifodani hosil qilamiz. Bu yerda $1/x^2 = y$ va $-2/x^2 = z$ deb olsak

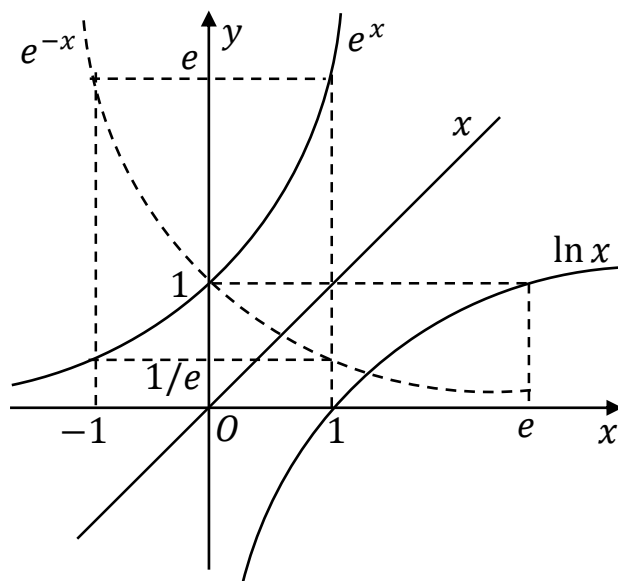
$$\left(\frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2} = (1 + y)^{1/y} (1 + z)^{1/z} [(1 + z)^{1/z}]^2$$

ko'rinishni oladi. Agar $x \rightarrow \infty$, u holda $y \rightarrow 0$ va $z \rightarrow 0$, o'zgaruvchilarni almashtirgandan so'ng ko'paytmaning limiti haqidagi teoremani va (2.17), (2.24) formulalarni qo'llaymiz:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-2} \right)^{x^2} = \lim_{y \rightarrow 0} (1+y)^{1/y} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} (1+z)^{1/z} \cdot \lim_{z \rightarrow 0} [(1+z)^{1/z}]^2 = e^4.$$

EkspONENTA, NATURAL LOGARIFM VA GIPERBOLIK FUNKSIYALAR.

Matematik tahlilda va amaliy masalalarda e soni muhim o'rin tutadi. Xususan eksponensial (yoki qisqa qilib eksponenta) deb ataluvchi e^x (ba'zan $\exp x$ ko'rinishda ham yoziladi) ko'rsatkichli funksiyaning asosi bo'lib xizmat qiladi. Bu funksiya teskari bo'lgan $\ln x = \log_e x$ logarifmik funksiyaning ham asosi bo'ladi. Ularning grafiklari 2.22-rasmda tasvirlangan. Bu yerda e^{-x} funksiyaning ham grafigi keltirilgan.



2.22-rasm

e asosli logarifmlar natural logarifmlar deb ataldi. Ular uchun asosiy logarifmik ayniyat

$$e^{\ln x} = \exp(\ln x) = x \quad (2.25)$$

bo'ladi. $\ln x$ funksiya asosi birdan katta bo'lgan logarifmik funksiylarning barcha xossa-lariga ega.

Bir asosdan ikkinchi asosga o'tadigan ma'lum formulalar ham o'rinli, xususan

$$\ln x = \lg x / \lg e = \ln 10 \cdot \lg x = 2,3026 \cdot \lg x,$$

$$\lg x = \ln x / \ln 10 = \lg e \cdot \ln x = 0,4343 \cdot \ln x.$$

Shunday qilib, e^x va $\ln x$ funksiylar asosiy elementar a^x va $\log_a x$ funksiylarning $a = e$ bo'lgandagi xususiy hollari ekan.

Ekspontensial funksiya orqali giperbolik sinus, kosinus, tangens va kotangens funksiylar quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x}, \operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x}.$$

Ulardan $\operatorname{ch} x$ - juft, qolganlari $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$, $\operatorname{cth} x$ - toq ekanligini ta'kidlab o'tamiz. Ularning grafiklari 2.23, 2.24-rasmlarda berilgan.

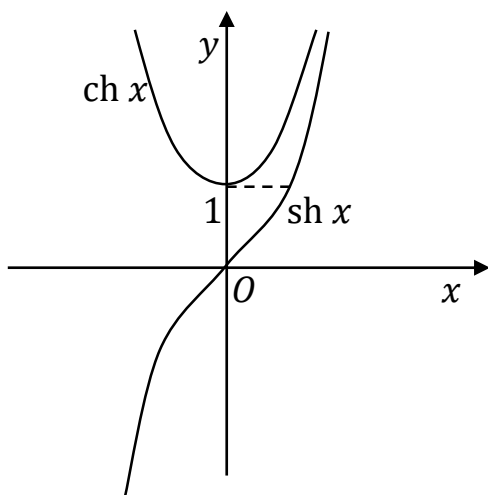
Trigonometrik funksiylardagi ma'lum $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ formulaga o'xshash giperbolik funksiylarda ham

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1 \quad (2.26)$$

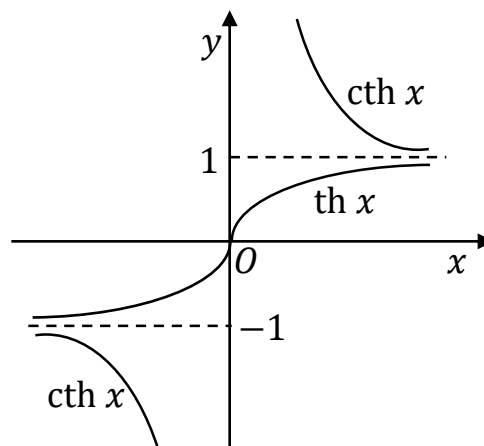
formula ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}$ nuqtalar uchun o‘rinli. Bundan tashqari

$$\begin{aligned} \operatorname{sh}(x \pm y) &= \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \cdot \operatorname{ch} x \\ \operatorname{ch}(x \pm y) &= \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \cdot \operatorname{sh} x \end{aligned} \quad (2.27)$$

formulalar ham o‘rinli.



2.23-rasm



2.24-rasm

2.6. Funksiyaning uzluksizligi

Uzluksizlikning ta’rifi. $f(x)$ funksiya a nuqtaning biror $U(a)$ atrofida aniqlangan va bu nuqtada aniq bir $f(a)$ qiymatni qabul qilsin.

2.19-Ta’rif. Agar $x = a$ nuqtada $f(x)$ funksiyaning limiti mavjud va u $f(a)$ qiymatga teng bo‘lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

Shunday qilib

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \quad (2.28)$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deb atalar ekan.

Funksiyaning uzluksizligi $\varepsilon - \delta$ tilida quyidagicha ta’riflanadi.

2.20-Ta’rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon \quad (2.29)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiyaning limitiga $x \neq a$ degan shartni qo‘ygan edik. Bu yerda esa bu shart bajarilishini talab qilmaymiz.

Funksiya uzluksizligi tushunchasini ifodalashning yana bir ko‘rinishini keltiramiz. $y = f(x)$ funksiya a nuqtaning biror $U(a)$ atrofida aniqlangan bo‘lsin. Qaralayotgan a nuqtani asosiy nuqta deb hisoblab, argumentning a nuqtadan Δx miqdorga (manfiymi yoki musbatmi farqi yo‘q) farq qiluvchi boshqa $x = a + \Delta x \in U(a)$ qiymatini olamiz. Δx miqdorni argumentning orttirmasi deb ataymiz. Funksiya o‘zgarishining

$$\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a) \quad (2.30)$$

qiymatini f funksiyaning a nuqtadagi x argumentning Δx orttirmasiga mos keluvchi orttirmasi deyiladi.

$f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

uzluksizlik shartini

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x + \Delta x) = f(a)$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu esa

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(x + \Delta x) - f(a)] = 0 \quad (2.31)$$

tenglikka teng kuchli. $f(x + \Delta x) - f(a) = \Delta y$ ekanligini e'tiborga olsak, (2.31) tenglikni

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$$

ko'rinishda yozish mumkin.

2.21-Ta'rif. Δx argument orttirmasi nolga intilganda $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi bu orttirmaga mos keluvchi Δy orttirmasi ham nolga intilsa, $y = f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

2.20-Misol. $y = x^3$ funksiya son o'qining ixtiyoriy a nuqtasida uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz.

► a nuqtadagi ixtiyoriy Δx orttirma uchun

$$\begin{aligned} \Delta y &= (a + \Delta x)^3 - a^3 = 3a^2 \cdot \Delta x + 3a \cdot (\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 = \\ &= (3a^2 + 3a\Delta x + (\Delta x)^2)\Delta x \end{aligned}$$

tenglikni yozish mumkin. Bu tenglikda $\Delta x \rightarrow 0$ da $\Delta y \rightarrow 0$ bo'lishi ko'rinib turibdi. ◀

2.21-Misol. $y = \sin x$ funksiya son o'qining ixtiyoriy a nuqtasida uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz.

► a nuqtadagi ixtiyoriy Δx orttirma uchun

$$|\Delta y| = |\sin(a + \Delta x) - \sin a| = \left| 2 \sin \frac{\Delta x}{2} \cdot \cos \left(a + \frac{\Delta x}{2} \right) \right| \leq |\Delta x|$$

o'rinli bo'ladi. Bu yerda $|\cos(a + \Delta x/2)| \leq 1$ va $|\sin(\Delta x/2)| \leq |\Delta x|/2$ ((2.18) formulaga qarang) tengsizliklardan foydalanildi. Shuning uchun

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0. \quad \blacktriangleleft$$

Ba'zan funksiyaning nuqtadagi uzluksizligining quyidagi ta'rifidan foydalanish qulay.

2.22-Ta'rif (Geyne). $f(x)$ funksiya a nuqtani o'zida saqlovchi U to'plamda aniqlangan bo'lsin. Agar a nuqtaga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$, $x_n \in U$ ketma-ketlikka mos keluvchi $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik funksiyaning $f(a)$ qiymatiga intilsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.

Bu ta'rifdan funksiyaning nuqtada uzilishga ega bo'lishini isbotlashda foydalanish qulayroq. Buning uchun $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = a$ tenglikni qanoatlantiruvchi biror $\{x_n\}$ ketma-ketlik tuzib, unga mos keluvchi $\{f(x_n)\}$ ketma-ketlik uchun $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(x_n) \neq f(a)$ munosabatning o'rinli bo'lishini ko'rsatish yetarli.

Geyne ta'rifidan foydalanib

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ — ratsional;} \\ 0, & \text{agar } x \text{ — irratsional} \end{cases}$$

Dirixle funksiya­si­ning ixtiyoriy $a \in \mathbb{R}$ nuqtada uzluksiz emasligini ko'rsatamiz.

► a ratsional son bolsin, u holda $D(a) = 1$ bo'ladi. a nuqtaga yaqinlashuvchi irratsional sonlardan tuzilgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikni olamiz (bunday ketma-ketlikni har doim tuzish mumkin). Dirixle funksiya­si­ning berilishiga ko'ra bu nuqtalarda $D(x_n) = 0$ bo'ladi. U holda $\lim_{n \rightarrow +\infty} D(x_n) = 0 \neq 1 = D(a)$, ya'ni $\{x_n\}$ ketma-ketlikka mos keluvchi $\{D(x_n)\}$ ketma-ketlik $D(a)$ qiymatga intilmas ekan.

a nuqta irratsional son bo'lganda xuddi shu singari a nuqtaga intiluvchi ratsional sonlardan tuzilgan $\{y_n\}$ ketma-ketlikka mos keluvchi $\{D(y_n)\}$ ketma-ketlikning limiti 1 bo'ladi, funksiyaning bu nuqtadagi qiymati esa $D(a) = 0$ bo'ldi.

Ikkala holda ham Geyne ta'rifiga ko'ra funksiya a nuqtada uzilishga ega bo'ladi. ◀

Funksiya uzluksizligining to'rtala ta'rifi ham teng kuchli. Har bir holda qulay bo'lgan ta'rifdan foydalaniladi.

Endi nuqtada uzluksiz bo'lgan funksiyaning xossalarini o'rganamiz.

2.17-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz va $f(a) > A$ (mos ravishda $f(a) < A$) bo'lsa, u holda shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $(a - \delta, a + \delta)$ intervaldan olingan barcha x nuqtalar uchun $f(x) > A$ (mos ravishda $f(x) < A$) tengsizlik o'rinli bo'ladi.

► Aniqlik uchun $f(a) > A$ va $h = f(a) - A > 0$ bo'lsin, u holda $f(a) = A + h$ bo'ladi. $\varepsilon = h/2$ deb olsak, $f(x)$ funksiyaning a nuqtada uzluksizligiga ko'ra shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $|x - a| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalar uchun $|f(x) - f(a)| < h/2$ yoki

$$-\frac{h}{2} < f(x) - f(a) < \frac{h}{2}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan esa barcha $x \in (a - \delta, a + \delta)$ uchun

$$f(x) > f(a) - \frac{h}{2} = A + h - \frac{h}{2} = A + \frac{h}{2} > A. \blacktriangleleft$$

2.18-Teorema (uzluksiz funksiya ishorasining o'zgarmasligi).

Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz va $f(a) \neq 0$ bo'lsa, u holda a nuqtaning shunday $(a - \delta, a + \delta)$ atrofi topiladiki, bu intervalda funksiya nolga aylanmaydi va ishorasini o'zgartirmaydi ($f(a)$ sonining ishorasi bilan bir xil bo'ladi).

► 2.17-Teoremada $A = 0$ deb olinsa teoremaning isboti kelib chiqadi. ◀

Uzluksiz funksiyalar ustida amallar.

2.19-Teorema. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lsin. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda ularning $f(x) + g(x)$ yig'indisi, $f(x) - g(x)$ ayirmasi, $f(x) \cdot g(x)$ ko'paytmasi va $g(a) \neq 0$ qo'shimcha shartda $f(x)/g(x)$ nisbati ham a nuqtada uzluksiz bo'ladi.

► Nisbatning uzluksizligini ko'rsatamiz.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar a nuqtada uzluksiz va $g(a) \neq 0$ bo'lsin. U holda uzluksiz funksiya ishorasining o'zgarmasligi haqidagi teoreмага ko'ra a nuqtaning $g(x) \neq 0$ bo'ladigan atrofi mavjud bo'ladi. Shuning uchun a nuqtaning ana shu atrofida $F(x) = f(x)/g(x)$ nisbat funksiya aniqlangan. Teorema shartiga ko'ra $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a) \neq 0$, nisbatning limiti haqidagi teoremani qo'llab

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)} = F(a)$$

tenglikni hosil qildik. Shunday qilib $\lim_{x \rightarrow a} F(x) = F(a)$, ya'ni $F(x) = f(x)/g(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz ekan.

Teoremaning qolgan tasdiqlari ham shu kabi isbotlanadi. ◀

Murakkab funksiyaning uzluksizligi.

2.20-Teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz, $g(y)$ funksiya esa mos $A = f(a)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $g(f(x))$ murakkab funksiya a nuqtada uzluksiz bo'ladi.

► Teoremaning shartiga ko'ra $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) = A$, $\lim_{y \rightarrow A} g(y) = g(A) = B$. Murakkab funksiyaning limiti haqidagi teoremani qo'llab

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = \lim_{y \rightarrow A} g(y) = g(A) = g(f(a)) \quad (2.32)$$

tenglikni hosil qildik, ya'ni $g(f(x))$ murakkab funksiya a nuqtada uzluksiz ekan. ◀

Agar (2.32) tenglikning o'ng tomonidagi $g(y)$ funksiyaning $f(a)$ argument qiymatini $f(x)$ funksiyaning limiti orqali ifodalasak

$$\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = g\left(\lim_{x \rightarrow a} f(x)\right) \quad (2.33)$$

tenglikni yozish mumkin.

2.22-Misol. Limitni hisoblang:

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \operatorname{tg} x)^{3 \operatorname{ctg} x}.$$

► Limit ostidagi funksiyaning

$$(1 + \operatorname{tg} x)^{3 \operatorname{ctg} x} = ((1 + \operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x})^3$$

ko'rinishda yozib olamiz va $y = f(x) = (1 + \operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x}$, $g(y) = y^3$ funksiylarning superpozitsiyasi sifatida qaraymiz. Agar $u = \operatorname{tg} x$ deb o'zgaruvchilarni almashtirsak, $\lim_{x \rightarrow \pi} f(x)$ limitni hisoblash qiyin bo'lmaydi. Haqiqatdan ham ikkinchi ajoyib limitni ((2.24) formulaga qarang) inobatga olsak

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x} = \left| \begin{array}{l} \operatorname{tg} x = u \\ u \rightarrow 0 \\ x \rightarrow \pi \end{array} \right| = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{1/u} = e$$

limitni topamiz. U holda $g(y) = y^3$ funksiyaning uzluksizligidan (2.20-Misol) (2.33) formulaga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \operatorname{tg} x)^{3 \operatorname{ctg} x} = \left(\lim_{x \rightarrow \pi} (1 + \operatorname{tg} x)^{1/\operatorname{tg} x} \right)^3 = e^3. \quad \blacktriangleleft$$

Bir tomonlama uzluksizlik. Uzilish nuqtalari. $f(x)$ funksiya a nuqtaning o'ng (chap) yarim atrofida aniqlangan bo'lsin.

2.23-Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning a nuqtada o'ng limiti mavjud va bu limit $f(a)$ qiymatga teng, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = f(a+0) = f(a) \quad (2.34)$$

tenglik orinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada o'ngdan uzluksiz deyiladi. a nuqtada chapdan uzluksizlik xuddi shu singari

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = f(a-0) = f(a) \quad (2.35)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Agar funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo'lsa, uning chegaraviy a va b nuqtalarga nisbatan a nuqtada o'ng uzluksizlik, b nuqtada chap uzluksizlik haqida gapirish mumkin. Oraliqning ixtiyoriy ichki nuqtasidagi uzluksizlik bu nuqtadagi o'ng va chap uzluksizlikka teng kuchli, chunki

nuqtadagi limitning mavjudligi o'ng va chap limitlarning mavjudligiga teng kuchli (2.2-Teorema).

Funksiya uzluksiz bo'ladigan nuqtani bu funksiyaning uzluksizlik nuqtasi deb ataymiz. $f(x)$ funksiyaning a uzluksizlik nuqtasida quyidagi shartlar bajarilgan bo'ladi:

- 1) Funksiya a nuqtada va uning biror atrofida aniqlangan;
- 2) a nuqtada ikkala bir tomonlama limitlar mavjud va ular chekli;
- 3) a nuqtadagi ikkala bir tomonlama limitlar ustma-ust tushadi, ya'ni $f(a + 0) = f(a - 0)$;
- 4) a nuqtada ustma-ust tushadigan bir tomonlama limitlar funksiyaning bu nuqtadagi qiymatiga teng, ya'ni

$$f(a + 0) = f(a - 0) = f(a) \quad (2.36)$$

2.24-Ta'rif. a nuqtada uzluksiz bo'lmagan funksiyaning bu nuqtada uzilishli funksiya, a nuqtani esa bu funksiyaning uzilish nuqtasi deb ataladi.

a nuqta haqida uzilish nuqtasi sifatida gapirilganda, a nuqtaning ixtiyoriy kichik atrofida $f(x)$ funksiya aniqlanish sohasining a nuqtadan farqli boshqa nuqtalari ham mavjud deb faraz qilinadi.

(2.36) uzluksizlik shartining qanday buzilganligiga qarab uzilish nuqtalari turlarga bo'linadi.

2.25-Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada chekli chap va o'ng limitlarga ega va ular o'zaro teng, ammo funksiyaning a nuqtadagi qiymatiga teng bo'lishmasa

$$f(a + 0) = f(a - 0) \neq f(a),$$

u holda a nuqta $f(x)$ funksiyaning uzilishi bartaraf qilinadigan nuqtasi deb ataladi.

Uzilishi bartaraf qilinadigan nuqta degan iboraning ma'nosi shundan iboratki, yangi uzluksiz funksiya hosil qilish uchun funksiyaning faqat bitta a nuqtadagi qiymatini o'zgartirish yetarli. $f(x)$ funksiya yordamida tuziladigan

$$F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a; \\ \lim_{x \rightarrow a} f(x), & x = a \end{cases}$$

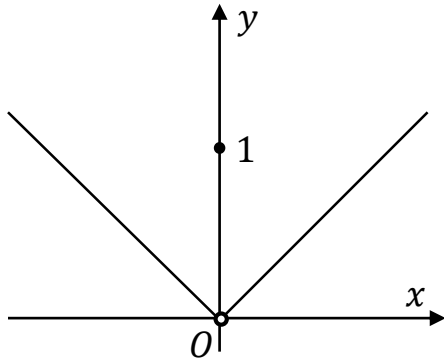
funksiya a nuqtada uzluksiz bo'ladi. Shunday qilib funksiyaning a nuqtadagi qiymatini o'zgartirib uzilishni "bartaraf" qildik.

2.23-Misol. $f(x) = \begin{cases} |x| & x \neq 0; \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ funksiyaning qaraymiz.

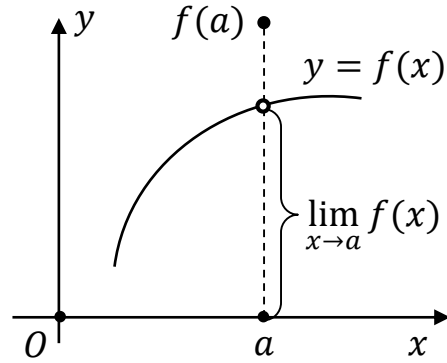
► Funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi chap va o'ng limitlarini hisoblaymiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 0 \neq 1 = f(0)$$

ya'ni $x = 0$ nuqta uzilishi bartaraf qilinadigan nuqta ekan (2.25-rasm). Agar $f(x)$ funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi qiymatini $F(0) = 0$ deb ozgartirsak, bu nuqtada uzluksiz bo'lgan $F(x) = |x|$ funksiyani hosil qilamiz. ◀



2.25-rasm



2.26-rasm

Umuman olganda $(a - \delta_1, a) \cup (a, a + \delta_2)$ to'plamda uzluksiz va a nuqtada bartaraf qilinadigan uzilishga ega funksiyaning grafigi sifatida absissasi a bo'lgan nuqtasi o'yib olib tashlangan uzluksiz egri chiziq xizmat qiladi (2.26-rasm).

Uzilishi bartaraf qilinadigan a nuqtada $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ limit mavjud bo'lishini ta'kidlab o'tamiz.

Agar $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ limit mavjud bo'lmasa a nuqta bartaraf qilib bo'lmaydigan uzilish nuqtasi deb ataladi.

2.26-Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada chap va o'ng limitlarga ega bo'lib, ammo ular har xil bo'lsa

$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a+0} f(x),$$

u holda a nuqta $f(x)$ funksiyaning chekli sakrashli uzilish nuqtasi deb ataladi.

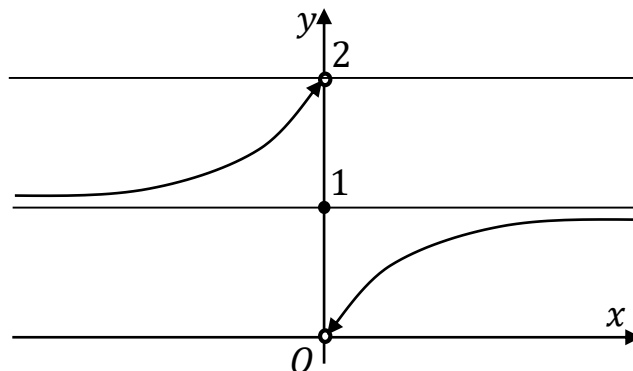
Uzilsh nuqtasini bunday nomlashning ma'nosi shundan iboratki, x o'zgaruvchi a nuqta orqali o'tishda $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi o'ng va chap limitlarining ayirmasi bilan o'lchanadigan sakrash yuz beradi.

2.24-Misol. Ushbu funksiyani qaraymiz (2.27-rasm):

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{1 + e^{1/x}}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

► Berilgan funksiya $x = 0$ nuqtada 2 ga teng bo'lgan chekli sakrashga ega bo'ladi: $\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) = 2, \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = 0$. ◀

Funksiyaning bartaraf qilinadigan va chekli sakrashli uzilish nuqtalari birinchi tur uzilish nuqtalari deb ataladi. $f(x)$ funksiyaning barcha 1-tur uzilish nuqtalari chap va o'ng limitlarning mavjudligi bilan tavsiflanadi.



2.27-rasm

2.27-Ta'rif. $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi chap yoki o'ng limitlaridan kamida bittasi cheksiz yoki mavjud bo'lmasa, bu nuqta funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasi deb ataladi.

2.25-Misol. Ushbu funksiyaning qaraymiz:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

► $x = 0$ nuqtada bir tomonli limitlarni topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{1}{x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Bir tomonli limitlarning ikkalasi ham chekli emas, ya'ni ta'rifga ko'ra $x = 0$ nuqta ikkinchi tur uzilish nuqtasi bo'ladi. ◀

2.26-Misol. $y = a^{1/x}$ funksiyaning $0 < a < 1$ bo'lganda qaraymiz.

► $x = 0$ nuqtada bir tomonli limitlarni topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} a^{1/x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0-0} a^{1/x} = +\infty.$$

$x = 0$ nuqtadagi o'ng limit cheksiz, ya'ni ta'rifga ko'ra $x = 0$ nuqta ikkinchi tur uzilish nuqtasi bo'ladi. ◀

Geometrik talqini ravshan bo'lgan ushbu teoremani isbotsiz keltiramiz.

2.21-Teorema. X oraliqda monoton bo'lgan $f(x)$ funksiya bu oraliqda uzilishlarga ega bo'lsa, u holda bu uzilish nuqtalari albatta birinchi tur bo'ladi.

Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalari. Nuqtaning kichik atrofida funksiyaning o'zgarishi bilan bog'liq bo'ladigan xossalar bu funksiyaning lokal xossalari deb ataladi (masalan, nuqtada limitga ega funksiyaning xossalari yoki berilgan nuqtada uzluksiz funksiyaning

xossalari). Funksiyaning aniqlanish sohasi yoki bu sohaning biror oralig'i bilan bog'liq xossalar global xossalar deb ataladi.

2.28-Ta'rif. Agar (a, b) intervalning barcha nuqtalarida $y = f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lsa, bu funksiya (a, b) intervalda uzluksiz deyiladi. Agar funksiya (a, b) intervalda uzluksiz, a nuqtada chapdan, b nuqtada esa o'ngdan uzluksiz bo'lsa bu funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz deyiladi.

Masalan, $f(x) = 1/x$ funksiya $(0, 1)$ intervalda uzluksiz va $[0, 1]$ kesmada uzluksiz emas, chunki $x = 0$ nuqtada funksiya o'ngdan uzluksiz emas. $\sin x$ funksiya ixtiyoriy $[a, b] \subset \mathbb{R}$ kesmada uzluksiz. Agar funksiya barcha $x \in \mathbb{R}$ nuqtalarda uzluksiz bo'lsa, u $(-\infty, +\infty)$ intervalda yoki $\mathbb{R}$ son o'qida uzluksiz deyiladi.

2.22-Teorema (Bolsano-Koshining birinchi teoremasi). $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning chetki nuqtalarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsin. U holda (a, b) intervalda $f(c) = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi c nuqta topiladi.

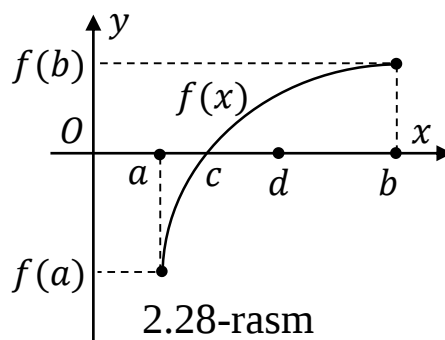
Teorema oddiy geometrik ma'noga ega: agar funksiya grafigining uzluksiz chizig'i Ox o'qdan pastda ham, yuqorida ham yotsa, u holda egri chiziq Ox o'qni albatta kesib o'tadi (2.28-rasm).

► Aniqlik uchun $f(a) < 0$ va $f(b) > 0$ deb olamiz. $[a, b]$ kesmani $d = (a + b)/2$ nuqta yordamida teng ikkiga bo'lamiz. Agar funksiya bu nuqtada nolga aylansa teorema isbotlangan bo'ladi.

$f(d) \neq 0$ bo'lsin. U holda $[a, d], [d, b]$ kesmalardan birining chetki nuqtalarida funksiya turli ishoralarni qabul qiladi, buning ustiga chap chetda manfiy va o'ng chetda musbat ishorali qiymat bo'ladi. Bu kesmani $[a_1, b_1]$ orqali belgilaymiz, u holda $f(a_1) < 0$ va $f(b_1) > 0$ bo'ladi.

$[a_1, b_1]$ kesmani $d_1 = (a_1 + b_1)/2$ nuqta yordamida teng ikkiga bo'lsamiz, bu yerda ham $f(d_1) = 0$ holni qaramaymiz, chunki bu holda teorema isbotlangan bo'ladi. Hosil bo'lgan ikki intervallardan qaysi birining chetlarida funksiya turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, uni biz $[a_2, b_2]$ orqali belgilaymiz, u holda $f(a_2) < 0$ va $f(b_2) > 0$ bo'ladi. Kesmalarni hosil qilish jarayonini davom ettiramiz. Bunda yoki chekli qadamdan keyin kesmani teng ikkiga bo'luvchi nuqtada funksiya nolga aylanadi va teoremani isboti tugaydi, yoki bir-birining ichiga joylashgan cheksiz

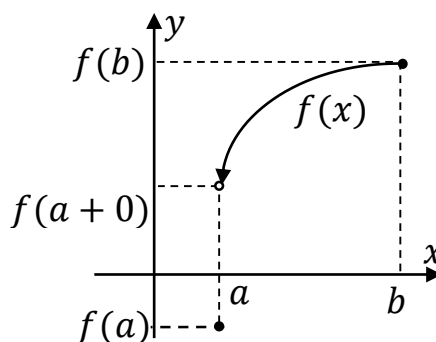
$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$



kesmalar ketma-ketligini hosil qilamiz. U holda n tartib raqamli $[a_n, b_n]$ kesmaning uzunligi $b_n - a_n = (b - a)/2^n$ va $f(a_n) < 0$, $f(b_n) > 0$ bo'ladi. 1.1-Lemmaga (Kantor) ko'ra barcha kesmalarga tegishli bo'lgan c nuqta mavjud bo'ladi. Ana shu nuqta teorema shartlarini qanoatlantirishini va qidirilayotgan $c \in (a, b)$ nuqta ekanligini ko'rsatamiz. Funktsiyaning (a, b) intervalda uzluksizligi tufayli $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ bo'ladi. Agar $f(c)$ musbat bo'lganda edi, uzluksiz funksiya ishorasining o'zgarmasligi haqidagi teorema ko'ra c nuqtaning shunday $(c - \delta, c + \delta)$ atrofi topiladiki, bu intervaldan olingan barcha x nuqtalar uchun $f(x) > 0$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. n tartib raqamini kerakli qilib $((b - a)/2^n < \delta$ shartdan) tanlansa, $[a_n, b_n]$ kesma ana shu intervalga butunligicha tushadi va $f(a_n) > 0$.

Bu esa $[a_n, b_n]$ kesmaning xossasiga ziddir. Xuddi shu singari $f(c)$ manfiy ishorali bo'la olmasligini ko'rsatish mumkin. Demak, $f(c) = 0$ ekan. ◀

2.22-Teoremda $f(x)$ funksiyaning kesmada uzluksizligi muhim shart ekanligini aytib o'tish kerak. Uni (a, b) intervalda uzluksizligi bilan almashtirish mumkin emas:



2.29-rasm

2.29-rasmda (a, b) intervalda uzluksiz, ammo a nuqtada o'ngdan uzluksizlik buzilganligi tufayli $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lmagan funksiyaning grafigi keltirilgan. Bu funksiya kesmaning chetki nuqtalarida turli ishorali qiymatlarni qabul qiladi, ammo kesmaning birorta nuqtasida ham nolga aylanmaydi. (a, b) intervalning hech bo'lmaganda bitta nuqtasida uzilishga ega funksiya manfiy qiymatdan musbat qiymatga nolga aylanmasdan o'tishi mumkinligi ravshan.

2.23-Teorema (Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi). $f(x)$ funksiya biror X oraliqda (yopiq yoki ochiq, chekli yoki cheksiz) aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Agar bu oraliqning ikkita a va b ($a < b$) nuqtalarida teng bo'lmagan $f(a) = A$ va $f(b) = B$ qiymatlarni qabul qilsa, u holda (A, B) intervaldan olingan har qanday C nuqta uchun shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki, bu nuqtada $f(c) = C$ tenglik o'rinli bo'ladi.

► $A < B$ deb hisoblaymiz, shuning uchun $A < C < B$. $[a, b]$ kesmada $g(x) = f(x) - C$ yordamchi funksiyaning qaraymiz. Bu funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning chetki nuqtalarida turli ishorali qiymatlarni qabul qiladi: $g(a) = f(a) - C = A - C < 0$ va $g(b) =$

$f(b) - C = B - C > 0$. U holda Bolsano-Koshining birinchi teoremasiga ko'ra shunday $c \in (a, b)$ nuqta topiladiki, uning uchun $g(c) = 0$ tenglik, ya'ni $f(c) - C = 0$ yoki $f(c) = C$ o'rinli bo'ladi. ◀

Shunday qilib oraliqda uzluksiz funksiya bir qiymatdan ikkinchi qiymatga o'tib oraliqdagi har bir qiymatni kamida bir marta qabul qiladi. Boshqacha qilib aytganda x argument biror X oraliqda o'zgarganda $f(x)$ funksiya qabul qiladigan qiymatlari ham biror Y oraliqni to'ldiradi. Shuning uchun 2.23-teorema ba'zan uzluksiz funksiyaning oraliqdagi qiymatlari haqidagi teorema ham deb yuritiladi.

2.24-Teorema (Veyersstrassning birinchi teoremasi). Kesmada uzluksiz funksiya bu kesmada chegaralangan ham bo'ladi, ya'ni shunday m va M sonlar topilib, barcha $x \in [a, b]$ nuqtalar uchun $m \leq f(x) \leq M$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

► Teskarisidan faraz qilamiz, ya'ni $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada chegaralanmagan bo'lsin. U holda har bir n natural son uchun $[a, b]$ kesmada shundau $x = x_n$ nuqta topiladiki, bu nuqtada

$$|f(x_n)| \geq n \quad (2.37)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bolsano-Veyersstrass teoremasiga ko'ra $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan chekli ξ nuqtaga yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ qisman ketma-ketlik tuzish mumkin: $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = \xi$. Albatta $a \leq \xi \leq b$ ekanligi ravshan. $f(x)$ funksiyaning ξ nuqtada uzluksizligi tufayli $\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(\xi)$ o'rinli bo'lishi kerak. Bunday bo'lishi mumkin emas, chunki (2.37) tengsizliklarga ko'ra $\lim_{k \rightarrow \infty} |f(x_{n_k})| = +\infty$. Ana shu qarama-qarshilik teoremani isbotlaydi. ◀

Teoremada funksiyaning aynan kesmada uzluksizligi muhim shart hisoblanadi. Intervalda yoki yarim intervalda uzluksizlik funksiyaning bu oraliqda chegaralangan bo'lishini ta'minlay olmaydi. Masalan, $f(x) = 1/x$ funksiya $(0, 1]$ yarim intervalda uzluksiz, ammo unda chegaralanmagan.

$f(x)$ funksiya biror E to'plamda aniqlangan va chegaralangan bo'lsin. $f(x)$ funksiya qiymatlari to'plamining M aniq yuqori chegarasi $f(x)$ funksiyaning E to'plamdagi aniq yuqori chegarasi deb ataladi:

$$M = \sup_{x \in E} f(x).$$

$f(x)$ funksiyaning E to'plamdagi m aniq quyi chegarasi ham xuddi shu singari aniqlanadi:

$$m = \inf_{x \in E} f(x).$$

2.25-Teorema (Veyershtassning ikkinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya bu kesmada o'zining aniq quyi va aniq yuqori chegarasiga erishadi, ya'ni $[a, b]$ kesmada

$$f(\xi) = m = \inf_{x \in E} f(x), \quad f(\eta) = M = \sup_{x \in E} f(x)$$

tengliklarni qanoatlantiruvchi ξ va η nuqtalar topiladi (2.30-rasm).

► $M = \sup_{x \in E} f(x)$ bo'lsin. Veyershtassning birinchi teoremasiga ko'ra bu chekli son. Faraz qilaylik $f(x)$ funksiyaning qiymati E to'plamning hech bir nuqtasida M qiymatga teng bo'lmasin, ya'ni barcha $x \in E$ nuqtalarda $f(x) < M$ bo'lsin. Bu holda

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

yordamchi funksiyanı qaraymiz. Farazimizga ko'ra kasning maxraji nolga aylanmaydi, shuning uchun u funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va demak chegaralangan, ya'ni barcha $x \in [a, b]$ nuqtalarda $g(x) \leq \mu$, ($\mu > 0$) tengsizlik o'rinli bo'ladi. Shuning uchun

$$\frac{1}{M - f(x)} < \mu$$

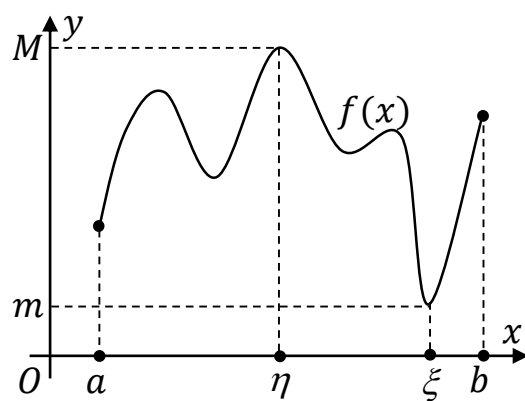
tengsizlikdan osongina

$$f(x) \leq M - \frac{1}{\mu}$$

tengsilikka erishamiz, ya'ni M sonidan kichik bo'lgan $M - 1/\mu$ soni $f(x)$ funksiya qiymatlar to'plamining yuqori chegarasi bo'lar ekan. Bunday bo'lishi mumkin emas, chunki M soni bu funksiya qiymatlar to'plamining aniq yuqori chegarasi. Yuzaga kelgan qarama-qarshilik teoremani isbotlaydi: $[a, b]$ kesmada shunday ξ nuqta topiladiki, bunda $f(\xi) = M$ tenglik o'rinli bo'lib, bu qiymat barcha $f(x)$ qiymatlarning orasida eng kattasi bo'ladi.

Teoremaning quyi chegarasiga nisbatan qismi ham xuddi shu singari isbotlanadi. ◀

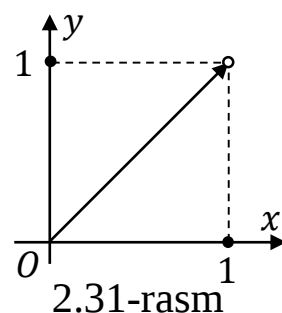
Mulohaza. $f(x)$ funksiya uzluksizligi $[a, b]$ kesmada bo'lishligi muhim shart: $f(x) = x$ funksiya $(-1, 1)$ intervalda uzluksiz va chegaralangan, ammo aniq yuqori $\sup_{x \in (-1, 1)} x = 1$ chegaraga erishmaydi,



2.30-rasm

ya'ni $(-1, 1)$ intervalda $f(a) = 1$ tenglikni qanoatlantiradigan a nuqta yo'q. Boshqa misol: $f(x) = x - [x]$ funksiyani $[0, 1]$ kesmada qaraymiz (2.31-rasm). Bu yerda $\sup_{x \in [0, 1]} f(x) = 1$, ammo

funksiya 1 qiymatga $[0, 1]$ kesmada erishmaydi. Bu esa $f(x)$ funksiya $[0, 1]$ kesmada uzilishga egaligi tufayli yuz beradi.



Funksiya qiymatlari to'plamining aniq yuqori chegarasini $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi eng katta qiymati, aniq quyi chegarasini esa eng kichik qiymati deb ataymiz. U holda Veyershtassning ikkinchi teoremasini quyidagicha ifodalash mumkin.

2.26-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u bu kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga erishadi.

2.27-Teorema. $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda monoton o'suvchi (kamayuvchi) va uzluksiz bo'lsin. U holda (a, b) intervalga mos keluvchi funksiya qiymatlarining $(f(a + 0), f(b - 0))$ (yoki $(f(b - 0), f(a + 0))$) intervalida o'suvchi (kamayuvchi) va uzluksiz $x = f^{-1}(y)$ teskari funksiya mavjud.

► $f(x)$ funksiya (a, b) intervalda monoton o'suvchi bo'lsin. U holda Bolsano-Veyershtassning ikkinchi teoremasiga ko'ra x ozgaruvchi (a, b) intervalda o'zgarganda $f(x)$ funksiyaning qiymatlari $(f(a + 0), f(b - 0))$ intervalni to'ldiradi. U holda har bir $y_0 \in (f(a + 0), f(b - 0))$ nuqta uchun (a, b) intervaldan $f(x_0) = y_0$ tenglikni qanoatlantiruvchi kamida bitta x_0 nuqta topiladi. $f(x)$ funksiyaning qat'iy monotonligi tufayli bunday x_0 nuqta yagona bo'ladi, chunki $x_1 > x_0$ bo'lsa $f(x_1) > y_0$ bo'ladi va $x_1 < x_0$ bo'lsa $f(x_1) < y_0$ bo'ladi. Shunday qilib ixtiyoriy $y_0 \in (f(a + 0), f(b - 0))$ nuqtaga (a, b) intervaldan yagona x_0 nuqtani mos qo'yuvchi bir qiymatli $x = f^{-1}(y)$ teskari funksiyani hosil qildik. $f^{-1}(y)$ funksiya $f(x)$ funksiya singari o'suvchi bo'ladi.

Haqiqatdan ham, $y_1 < y_2$ va $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$ bo'lsin. Agar $f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$ bo'lganda edi, bu tengsizlik $x_1 \geq x_2$ tengsizlikni anglatar edi va $f(x)$ funksiyaning o'suvchiligi tufayli $f(x_1) \geq f(x_2)$ tengsizlikni yoki $y_1 \geq y_2$ tengsizlikni hosil qilgan bo'lar edik, bu esa dastlabki qilgan farazimizga ziddir, ana shu ziddik $x = f^{-1}(y)$ teskari funksiyaning o'suvchi ekanligini isbotlaydi.

Endi $x = f^{-1}(y)$ funksiyaning $(f(a + 0), f(b - 0))$ intervalda uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik funksiya biror $y_0 \in$

$(f(a+0), f(b-0))$ nuqtada uzluksiz bo'lsin, u holda $f^{-1}(y)$ funksiya monoton bo'lganligi uchun 2.21- teoremaga ko'ra y_0 nuqta albatta birinchi tur uzilish nuqtasi bo'ladi va bu nuqtada $f^{-1}(y_0-0) \leq f^{-1}(y_0) \leq f^{-1}(y_0+0)$ o'rinli bo'ladi. Bu tengsizliklarning hech bo'lmaganda bittasi qat'iy tengsizlik bo'ladi, aks holda $f^{-1}(y)$ funksiya y_0 nuqtada uzluksiz bo'lar edi. Masalan, $f^{-1}(y_0-0) < f^{-1}(y_0)$ bo'lsin. $f^{-1}(y)$ funksiya o'suvchi bo'lganligi uchun $y \leq y_0$ nuqtalarda $f^{-1}(y) \leq f^{-1}(y_0-0)$ bo'ladi, $y \geq y_0$ nuqtalarda esa $f^{-1}(y) \geq f^{-1}(y_0+0)$ bo'ladi. Shuning uchun $(f^{-1}(y_0-0), f^{-1}(y_0))$ intervalda $f^{-1}(y)$ funksiyaning qiymatlari mavjud emas, bunday bo'lishi mumkin emas. Chunki $(f^{-1}(y_0-0), f^{-1}(y_0)) \subseteq (a, b)$ va $f(x)$ funksiyaning aniqlanishiga ko'ra bu intervalning ixtiyoriy $\dot{x} \in (f^{-1}(y_0-0), f^{-1}(y_0))$ nuqtasiga $\dot{y} = f(\dot{x})$ nuqta mos kelishi kerak, ya'ni $f^{-1}(y)$ funksiyaning qiymatlari $(f^{-1}(y_0-0), f^{-1}(y_0))$ intervalda mavjud. Bu qarama-qarshilik qilgan farazimiz noto'g'ri ekanligini anglatadi, ya'ni $f^{-1}(y)$ funksiya y_0 nuqtada uzluksiz. ◀

Asosiy elementar funksiyalarning uzluksizligi.

1. $f(x) = C - const$. Funksiya orttirmasi barcha nuqtalarda nolga teng: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = C - C = 0$. Shuning uchun $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, ya'ni bu funksiya son o'qining barcha nuqtalarida uzluksiz.

2. $f(x) = x$. Funksiya orttirmasini topamiz: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = x + \Delta x - x = \Delta x$. U holda $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta x = 0$, ya'ni funksiya son o'qining barcha nuqtalarida uzluksiz bo'ladi.

3. $f(x) = x^n, n \in \mathbb{N}$. Bu funksiyaning chekli sondagi $g(x) = x$ funksiyaning o'zini o'ziga n marta ko'paytirish natijasi deb qarash 2.19-Teoremaga ko'ra $f(x)$ funksiya son o'qining barcha nuqtalarida uzluksiz bo'ladi.

4. $f(x) = \sin x$ funksiyaning son o'qining barcha nuqtalarida uzluksizligi 2.21-Misolga ko'rsatilgan.

5. $f(x) = \cos x$ funksiyaning $\cos x = \sin(x + \pi/2)$ tenglik orqali ifodalaymiz. $\sin x$ funksiyaning uzluksizligi tufayli $\sin(x + \pi/2)$ funksiya murakkab funksiya sifatida 2.20-Teoremaga ko'ra son o'qining barcha nuqtalarida uzluksiz bo'ladi.

6. Xuddi shu singari 2.19-Teoremaga ko'ra $\sin x$ va $\cos x$ funksiylarning nisbati sifatida $f(x) = \operatorname{tg} x$ funksiya $\{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi + \pi/2, k \in \mathbb{Z}\}$ to'plamda, $f(x) = \operatorname{ctg} x$ funksiya esa $\{x \in \mathbb{R}: x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ to'plamda uzluksiz bo'ladi.

7. $f(x) = a^x, a > 0, a \neq 1$ funksiyaning barcha $x \in \mathbb{R}$ nuqtalarda uzluksiz ekanligini isbotlaymiz. x nuqtaga intiluvchi ixtiyoriy $\{x_n\}$ ketma-ketlikni qaraymiz va $\{a^{x_n}\}$ ketma-ketlik a^x soniga intilishini ko'rsatamiz. 1.12-Ta'rifga ko'ra ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N \in \mathbb{N}$ soni topilib, barcha $n > N$ uchun $|a^{x_n} - a^x| < \varepsilon$ tengsizlikning bajarilishini ko'rsatish kerak. Shunday qilib $\{x_n\}$ ketma-ketlikning x_n hadlari uchun biror tartib raqamidan boshlab $a^x |a^{x_n-x} - 1| < \varepsilon$ yoki $1 - \varepsilon/a^x < a^{x_n-x} < 1 + \varepsilon/a^x$ tengsizlik o'rinli bo'lishi kerak. $a \neq 1$ bo'lganda logarifmik funksiyaning xossasini inobatga olsak

$$\begin{aligned} -\varepsilon_1 &= \log_a \left(1 - \frac{\varepsilon}{a^x} \frac{|a-1|}{a-1} \right) < \\ &< x_n - x < \log_a \left(1 + \frac{\varepsilon}{a^x} \frac{|a-1|}{a-1} \right) = \varepsilon_2 \end{aligned} \quad (2.38)$$

$\{x_n\}$ ketma-ketlikning x nuqtaga yaqinlashuvchi bo'lganligi tufayli biror $N+1$ tartib raqamidan boshlab (2.38) qo'sh tengsizlik o'rinli bo'ladi. Haqiqatdan ham, ketma-ketlik limitining 1.12-Ta'rifiga ko'ra ixtiyoriy musabat son, xususan $\varepsilon_* = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ uchun shunday $N \in \mathbb{N}$ tartib raqami topiladiki, barcha $n > N$ uchun $|x_n - x| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Yuqoridagilarga teskari tartibda mulohaza qilib, $n > N$ uchun $|a^{x_n} - a^x| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bu esa 1.12-ta'rifga ko'ra $\{a^{x_n}\}$ ketma-ketlik a^x soniga intilishini va $f(x) = a^x$ funksiyaning barcha $x \in \mathbb{R}$ nuqtalarda uzluksiz ekanligini anglatadi. Xususiyl holda $a = e$ bo'lsa, $\mathbb{R}$ son o'qida uzluksiz e^x funksiyaga ega bo'lamiz.

8. $f(x) = \log_a x$ funksiya qiymatlar sohasi $(0, +\infty)$ bo'lgan $\mathbb{R}$ son o'qida qat'iy monoton va uzluksiz a^x funksiyaning teskarisi sifatida 2.27-teoremaga asosan $(0, +\infty)$ intervalda uzluksiz bo'ladi. Bu yerda ham $a = e$ xususiyl holda $(0, +\infty)$ intervalda uzluksiz bo'lgan natural logarifm $\ln x$ funksiya hosil bo'ladi.

9. $f(x) = x^\mu, \mu \in \mathbb{R}$ umumiy darajali funksiyaning (2.25) asosiy logarifmik ayniyatga ko'ra $x^\mu = \exp(\mu \ln x)$ ko'rinishda yozib olamiz. U holda bu funksiya $(0, +\infty)$ intervalda uzluksiz $y = g(x) = \mu \ln x$ va $\mathbb{R}$ son o'qida uzluksiz $f(y) = \exp(y)$ funksiyalardan tuzilgan $f(g(x))$ murakkab funksiya sifatida 2.20-Teoremaga ko'ra $(0, +\infty)$ intervalda uzluksiz bo'ladi.

10. $f(x) = \arcsin x$ va $g(x) = \arccos x$ funksiyalar qiymatlari $[-1, 1]$ kesmani to'ldiruvchi mos ravishda $[-\pi/2, \pi/2]$ va $[0, \pi]$ kesmalarda qat'iy monoton va uzluksiz $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalarga teskari funksiya sifatida 2.27-Teoremaga ko'ra $[-1, 1]$ kesmada uzluksiz bo'ladi.

Xuddi shu singari tg x va ctg x funksiyalar mos ravishda $(-\pi/2, \pi/2)$ va $(0, \pi)$ intervallarda qat'iy monoton va uzluksiz, qiymatlari esa $\mathbb{R}$ son o'qini to'ldirganligi uchun ularga teskari arctg x va arcctg x funksiyalar ham 2.27-Teoremaga ko'ra $\mathbb{R}$ son o'qida uzluksiz bo'ladi.

Shunday qilib barcha asosiy elementar funksiyalar o'zlarining aniqlanish sohalarida uzluksiz ekan. Elementar funksiyalar sinfidan olingan har qanday funktsiyani asosiy elementar funksiyalar ustida chekli sondagi algebraik amallarni bajarish va ularning superpozitsiyalari orqali hosil qilish mumkin. Uzluksiz funksiyalar ustida arifmetik amallar bajarish to'g'risidagi 2.19-Teoremaga va murakkab funktsiyaning uzluksizligi haqidagi 2.20-Teoremaga ko'ra bunday elementar funksiyalar o'zlarining aniqlanish sohasida uzluksiz bo'ladi.

2.7. Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash

Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash. Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslashdan asosiy maqsad $x \rightarrow a$ da ularning nolga intilish tezligini qiyoslashdan iborat. $x = a$ nuqtada cheksiz kichik $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar a nuqtaning biror $\dot{U}(a)$ o'yi atrofida noldan farqli va a nuqtaning o'zida esa nol yoki aniqlanmagan bo'lishsin.

2.30-Ta'rif. Agar noldan farqli chekli

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = m \neq 0 \quad (2.39)$$

limit mavjud bo'lsa, $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtada bir xil tartibli cheksiz kichik deb ataladi va $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(\beta(x))$ ko'rinishda yoziladi (O simvoli “ O katta” deb o'qiladi).

2.16-Teoremaga ko'ra $\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \frac{1}{m}$ bo'ladi va shuning uchun $\beta(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(\alpha(x))$ deb yozish mumkin. O simvoli tranzitivlik xossasiga ega, ya'ni agar $\beta(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(\alpha(x))$ va $\beta(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(\gamma(x))$ bo'lsa, u holda $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{=} O(\gamma(x))$ bo'ladi. Haqiqiqattan ham 2.30-Ta'rifga va ko'paytmaning limiti haqidagi 2.16-Teoremaga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)\beta(x)}{\gamma(x)\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\gamma(x)} = c \neq 0. \quad (2.40)$$

2.31-Ta'rif. Agar $\alpha(x)/\beta(x)$ nisbatning limiti nol, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0, \quad (2.41)$$

bo'lsa, $\alpha(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada $\beta(x)$ funksiyaga nisbatan yuqoriroq tartibli cheksiz kichik deb ataladi va u $\alpha(x) \underset{x \rightarrow 0}{=} o(\beta(x))$ ko'rinishda yoziladi (o simvoli “ o kichik deb o'qiladi”).

Bu holda $\beta(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada $\alpha(x)$ funksiyaga nisbatan pastroq tartibli cheksiz kichik deb aytiladi. (2.41) o'rinli bo'lsa, albatta

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \infty \quad (2.42)$$

bo'lishi ravshan.

(2.41) tenglikdan $\alpha(x)/\beta(x) = \gamma(x)$ funksiyaning $x = a$ nuqtada cheksiz kichik ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa $\alpha(x) = \gamma(x)\beta(x)$, ya'ni x o'zgaruvchi a nuqtaga yaqin bo'lganda $|\alpha(x)|$ qiymat $|\beta(x)|$ qiymatga nisbatan ko'p kichik bo'ladi. Boshqacha qilib aytganda $\alpha(x)$ funksiya $\beta(x)$ funksiyaga nisbatan tezroq nolga intiladi.

2.28-Teorema. a nuqtaning biror $\dot{U}(a)$ o'yi atrofida noldan farqli, $x = a$ nuqtada cheksiz kichik bo'lgan ixtiyoriy $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalarning $\alpha(x) \cdot \beta(x)$ ko'paytmasi ko'paytuvchilarning har biridan yuqoriroq tartibli cheksiz kichik bo'ladi.

► Haqiqatdan ham, 2.31-Ta'rifga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \beta(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)\beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \alpha(x) = 0$$

tengliklar teoremadagi tasdiqning to'g'riligidan dalolat beradi. ◀

2.32-Ta'rif. Agar $x = a$ nuqtada cheksiz kichik bo'lgan $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar nisbatining chekli ham cheksiz ham limiti mavjud bo'lmasa, ular taqqoslanmaydigan cheksiz kichiklar deb ataladi.

2.29-Misol. $\alpha(x) = x$ va $\beta(x) = \sin 2x$ funksiyalar 2.30-Ta'rifga ko'ra $x = 0$ nuqtada bir xil tartibli cheksiz kichik bo'ladi, chunki funksiyalar nisbatining limiti haqidagi 2.19, murakkab funksiyaning limiti haqidagi 2.20-Teoremalarga va (2.19) birinchi ajoyib limit formulasiga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = \left| \begin{matrix} 2x = t \\ x \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0 \end{matrix} \right| = 2 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 2 \neq 0.$$

2.30-Misol. $\alpha(x) = 1 - \cos x$ funksiya 2.30-Ta'rifga ko'ra $x = 0$ nuqtada $\beta(x) = x$ funksiyaga nisbatan yuqoriroq tartibli cheksiz kichik bo'ladi, chunki 2.19, 2.20-Teoremalarga va (2.19) formulaga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x/2)}{x/2} = \left| \begin{matrix} x/2 = t \\ x \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0 \end{matrix} \right| =$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \sin t = 1 \cdot 0 = 0.$$

2.31-Misol. $\alpha(x) = \sqrt{x}$ funksiya $x = 0$ nuqtada $\beta(x) = x$ funksiyaga nisbatan pastroq tartibli cheksiz kichik bo'ladi, chunki

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = \infty.$$

2.32-Misol. $\alpha(x) = x \sin(1/x)$ va $\beta(x) = x$ funksiyalar 2.32-Ta'rifga ko'ra $x = 0$ nuqtada taqqoslanmaydigan cheksiz kichiklar bo'ladi, chunki

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(1/x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \sin(1/x)$$

limit mavjud emas (2.2 da qaralgan).

2.33-Misol. Darajasi $n \in \mathbb{N}, n > 1$ bo'lgan x^n darajali funksiya $x = 0$ nuqtada x^{n-1} funksiyaga nisbatan yuqoriroq tartibli cheksiz kichik, ya'ni $x^n = o(x^{n-1})$, chunki $\lim_{x \rightarrow 0} (x^n/x^{n-1}) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$.

$x \rightarrow a$ da cheksiz kichikning o'zgarishini aniqroq taqqoslash uchun ulardan birini o'ziga xos etalon sifatida tanlanadi va u asosiy cheksiz kichik deb nomlanadi. Albatta, asosiy cheksiz kichikni tanlash ixtiyoriy, ammo ulardan oddiyrog'i tanlanadi. Masalan, $x \rightarrow 0$ da x tanlanadi; $x \rightarrow 1$ da $x - 1$; $x \rightarrow \infty$ da esa $1/x$ va hokazo. Murakkabiroq $\alpha(x)$ cheksiz kichikni baholash uchun asosiy $\beta(x)$ cheksiz kichikning turli xil $k > 0$ darajali $\beta^k(x)$ funksiyalaridan taqqoslash shkalasi tuziladi.

2.33-Ta'rif. Agar $\alpha(x)$ va $\beta^k(x)$ bir xil tartibli cheksiz kichik, ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c \neq 0 \quad (2.43)$$

bo'lsa, $\alpha(x)$ cheksiz kichikni $\beta^k(x)$ cheksiz kichikka nisbatan k tartibli kichik, k sonini esa kichiklik tartibi deb ataladi.

Odatda “ k tartibli kichik” o'rniga oddiy qilib “ k tartib” iborasi ishlatiladi.

Bu yerda quyidagilarni ta'kidlab o'tish joiz:

1. Bir cheksiz kichikning ikkinchisiga nisbatan k tartibi ixtiyoriy musbat son bo'lishi mumkin;

2. Agar $\alpha(x)$ funksiyaning $\beta(x)$ funksiyaga nisbatan tartibi k bo'lsa, u holda $\beta(x)$ funksiyaning $\alpha(x)$ funksiyaga nisbatan tartibi $1/k$ bo'ladi;

3. $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiyaning hatto barcha $\beta^k(x)$ darajalar bilan taqqoslash mumkin bo'lganda ham, k tartibni har doim ham aniqlab bo'lmaydi.

2.44-Misol. 2.33-Ta'rifga ko'ra $\alpha(x) = 1 - \cos x$ funksiya $x = 0$ nuqtada $\beta(x) = x$ funksiyaga nisbatan $k = 2$ tartibli cheksiz kichik bo'ladi, chunki funksiyalar nisbatining limiti haqidagi 2.19, murakkab funksiyaning limiti haqidagi 2.20-Teoremlarga va (2.19) birinchi ajoyib limit formulasiga ko'ra

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} = \left| \begin{array}{l} x/2 = t, \\ x \rightarrow 0 \\ t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin^2 t}{t^2} = \frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2} \neq 0.\end{aligned}$$

2.45-Misol. $\alpha(x) = a^{1/x}$, $a \in (0, 1)$ va $\beta(x) = x$ funksiyalar $x \rightarrow 0 + 0$ da cheksiz kichik bo'ladi. Ixtiyoriy $k > 0$ uchun

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{a^{1/x}}{x^k} = 0 \quad (2.44)$$

ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, $1/a > 1$ bo'lganligi uchun

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{a^{1/x}}{x^k} = \left| \begin{array}{l} 1/x = t \\ x \rightarrow 0 + 0 \\ t \rightarrow +\infty \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow +\infty} a^t t^k = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^k}{(1/a)^t} = 0.$$

Shunday qilib $x \rightarrow +0$ da cheksiz kichik $a^{1/x}$ funksiyaning ixtiyoriy $k > 0$ uchun x^k bilan taqqoslab bo'ladi, ammo x cheksiz kichikka nisbatan kichiklik tartibini aniqlab bo'lmaydi.

Ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar. Bir xil tartibli cheksiz kichik funksiyalarning tadbiqida ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar muhim o'rin tutadi.

2.34-Ta'rif. Agar $x = a$ nuqtada cheksiz kichik $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar uchun

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1 \quad (2.45)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, ular ekvivalent cheksiz kichiklar deb ataladi va u $\alpha(x) \sim_{x \rightarrow a} \beta(x)$ ko'rinishda yoziladi.

Cheksiz kichiklarning ekvivalentlik xossasi cheksiz kichiklarga nisbatan simmetrik, chunki (2.45) tenglikdan $\lim_{x \rightarrow a} \beta(x)/\alpha(x) = 1$, ya'ni $\beta(x) \sim_{x \rightarrow a} \alpha(x)$ kelib chiqadi. Ekvivalentlik, tranzitivlik xossasiga ega, ya'ni: agar $\alpha(x) \sim_{x \rightarrow a} \beta(x)$ va $\beta(x) \sim_{x \rightarrow a} \gamma(x)$ bo'lsa $\alpha(x) \sim_{x \rightarrow a} \gamma(x)$ bo'ladi. Bu xossa (2.45) va (2.40) tengliklardan kelib chiqadi.

$\alpha[\alpha(x)]$ cheksiz kichik $\alpha(x)$ cheksiz kichikka nisbatan yuqoriroq tartibli cheksiz kichik degan ma'noni anglatadi.

Limitlarni hisoblash jarayonida cheksiz kichiklarni taqqoslashga to'g'ri keladi. Bunday holda "0/0 ko'rinishdagi aniqmaslik" deb aytiladi. Bunday turdagi aniqmaslikdan farqli yana $\infty/\infty, \infty - \infty, \infty^0, 1^\infty$ ko'rinishdagi aniqmasliklar ham uchrab turadi. Limitlarni bunday hollarda hisoblash aniqmaslikni ochish deb nomlanadi. Aniqmasliklarni ochishda ekvivalent cheksiz kichik funksiyalar haqidai teoremlardan foydalaniladi.

2.29-Teorema. Agar cheksiz kichik funksiyalarni ularning ekvivalentlari bilan almashtirilsa, u holda cheksiz kichiklar nisbatining limiti o'zgarmaydi.

► $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \tau(x)$ funksiyalar $x \rightarrow a$ da cheksiz kichik funksiyalar, hamda $\alpha(x) \sim \beta(x), \gamma(x) \sim \tau(x)$ bo'lsin. U holda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} \text{ va } \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\tau(x)}$$

limitlarni taqqoslaymiz.

1) Nisbatning limiti chekli

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = A < \infty$$

U holda:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \beta(x)}{\frac{\gamma(x)}{\tau(x)} \tau(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}}{\frac{\gamma(x)}{\tau(x)}} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\tau(x)} = \\ &= \frac{1}{1} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\tau(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\tau(x)}. \end{aligned}$$

2) Nisbatning limiti cheksiz

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \infty.$$

U holda:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = 0$$

ekanligidan foydalanamiz:

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{\gamma(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\gamma(x)}{\tau(x)} \tau(x)}{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\frac{\gamma(x)}{\tau(x)}}{\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tau(x)}{\beta(x)} = \\ &= \frac{1}{1} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tau(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tau(x)}{\beta(x)} \quad \text{ya'ni} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tau(x)}{\beta(x)} = 0 \end{aligned}$$

Bundan esa:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tau(x)}{\beta(x)} = \infty \quad \text{yoki} \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\tau(x)}{\beta(x)}$$

3) Nisbatning limiti mavjud emas.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\gamma(x)}$$

limitning mavjud emasligidan

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\tau(x)}{\beta(x)}$$

limitning mavjud bo'lmashligi kelib chiqishi tabiiy. ◀

2.30-Teorema. Ikkita cheksiz kichik funksiyalar ekvivalent bo'lishligi uchun ularning ayirmasi bu cheksiz kichiklarning har biriga nisbatan yuqoriroq tartibli cheksiz kichik bo'lishligi zarur va yetarli.

► **Zarurligi.** $\alpha(x), \beta(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiyalar, hamda $\alpha(x) \sim \beta(x)$ bo'lsin. U holda

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1$$

bo'ladi. Shuning uchun

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - \frac{\beta(x)}{\beta(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} - 1 \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \right] - 1 = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} &= \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{\alpha(x)}{\alpha(x)} - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \left[1 - \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \right] = 1 - \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \right] = 0. \end{aligned}$$

Bu tengliklar $\alpha[\alpha(x) - \beta(x)]$ va $\beta[\alpha(x) - \beta(x)]$ degan ma'nolarni anglatadi.

Yetarliligi. $\alpha(x), \beta(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtada cheksiz kichik funksiyalar, hamda $\alpha[\alpha(x) - \beta(x)]$ va $\beta[\alpha(x) - \beta(x)]$ bo'lsin. So'ngi ikki munosabat

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = 0$$

ma'noni anglatadi. U holda:

$$0 = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x) - \beta(x)}{\alpha(x)} = 1 - \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)},$$

bundan esa,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = 1,$$

ya'ni $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \beta(x)$ ◀

2.31-Teorema. $x = a$ nuqtada cheksiz kichik bo'lgan $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ funksiyalar ekvivalent bo'lishsin: $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \beta(x)$, $x(t)$ funksiya esa τ nuqtaning biror $\dot{U}(\tau)$ o'yoq atrofida a sonidan farqli va $t \rightarrow \tau$ da a soniga intilsin. U holda $t \rightarrow \tau$ da $\alpha(x(t))$ va $\beta(x(t))$ murakkab funksiyalar $t \rightarrow \tau$ da ekvivalent bo'lishadi: $\alpha(x(t)) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \beta(x(t))$.

► $F(t) = \alpha(x(t))/\beta(x(t))$ murakkab funksiya uchun (2.17) formulani va teoremaning $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \beta(x)$ shartini qo'llasak,

$$\lim_{t \rightarrow \tau} F(t) = \lim_{t \rightarrow \tau} \frac{\alpha(x(t))}{\beta(x(t))} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$$

limitni topamiz, ya'ni (2.28) formulaga ko'ra $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \beta(x)$. ◀

Endi ba'zi elementar funksiyalarning ekvivalentlik munosabatini o'rnatamiz.

1. (2.19) birinchi ajoyib limitga ko'ra

$$\sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x. \quad (2.46)$$

$$2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \frac{\sin x}{\cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\cos x} = 1 \cdot 1 = 1$$

limitdan

$$\operatorname{tg} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x. \quad (2.47)$$

3. $x(t) = \arcsin t$ funksiya $t = 0$ nuqtada uzluksiz (2.6.ga qarang) va shuning uchun $\lim_{t \rightarrow 0} \arcsin t = \arcsin 0 = 0$. U holda 2.32-Teoremaga va (2.46) formuladan $t = \sin(\arcsin t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \arcsin t$ yoki dastlabki x o'zgaruvchiga qaytsak

$$\arcsin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x. \quad (2.48)$$

4. $x(t) = \operatorname{arctg} t$ funksiyaning $t = 0$ nuqtada uzluksizligi tufayli $\lim_{t \rightarrow 0} \operatorname{arctg} t = \operatorname{arctg} 0 = 0$. 2.32-Teoremaga va (2.48) formulaga $t = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} \operatorname{arctg} t$ yoki dastlabki x o'zgaruvchiga qaytsak

$$\operatorname{tg} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x. \quad (2.49)$$

5. Ikkinchi ajoyib limitdagi (2.24) formula $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = e$ tenglikni aniqlagan edi. $\ln y$ funksiyaning $y = e$ nuqtada uzluksizligini inobatga olsak (2.33) formulaga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(1+x)^{1/x} = \ln \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = \ln e = 1$$

tenglikka ega bo'lamiz. 2.34-Ta'rifga ko'ra esa

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x. \quad (2.50)$$

Ma'lumki, $\log_a(1+x) = (\ln(1+x))/\ln a$. Bu tenglikni (2.50) formulaga qo'llab

$$\log_a(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{\ln a} \quad (2.51)$$

6. $x(t) = a^t - 1$ funksiyaning $t = 0$ nuqtada uzluksizligi tufayli $\lim_{t \rightarrow 0} (a^t - 1) = 0$. (2.51) formulaga ko'ra $\log_a(1 + a^t - 1) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} (a^t - 1)/\ln a$ yoki $t \underset{t \rightarrow 0}{\sim} (a^t - 1)/\ln a$. Dastlabki x o'garuvchiga qaytsak

$$(a^x - 1)/\ln a \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad (2.52)$$

Xususiyl holda, $a = e$ bo'lsa,

$$e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad (2.53)$$

7. Hosil qilingan (2.53) formulani inobatga olsak

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^s - 1}{x} &= \left| \begin{array}{l} x = e^t - 1, \\ t = \ln(1+x) \\ x \rightarrow 0 \text{ da } t \rightarrow 0 \end{array} \right| = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 + e^t - 1)^s - 1}{e^t - 1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^{st} - 1}{st} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = s \cdot 1 \cdot 1 = s. \end{aligned}$$

Demak, $(1+x)^s - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} sx$ yoki ixtiyoriy $s \neq 0$ uchun

$$\frac{(1+x)^s - 1}{s} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x \quad (2.54)$$

ekvivalentlik munosabati o'rinli bo'ladi. Xususiyl holda $s = 1/2$ bo'lsa, $\sqrt{1+x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} x/2$ bo'ladi.

Hosil qilingan (2.46)-(2.54) munosabatlardan ekvivalentlikning tranzitivlik xossasiga ko'ra,

$$\begin{aligned} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \sin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \operatorname{tg} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \arcsin x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \operatorname{arctg} x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \\ \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \ln a \cdot \log_a(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} (a^x - 1) \cdot \ln a \underset{x \rightarrow 0}{\sim} e^x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \\ \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{(1+x)^s - 1}{s} \end{aligned} \quad (2.55)$$

munosabatlar zanjirini hosil qilamiz.

2.32-Teorema. $\alpha(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} \beta(x)$ va $f(x)$ funksiya a nuqtaning biror o'yi atrofida aniqlangan bo'lsin. Agar $x = a$ nuqtada $\alpha(x)f(x)$ kopaytmaning (yoki $f(x)/\alpha(x)$ nisbatning) limiti mavjud bo'lsa, u holda

$\alpha(x)$ cheksiz kichikni $\beta(x)$ bilan almashtirilganda limitning qiymati o'zgarmaydi.

► $\lim_{x \rightarrow a} \alpha(x)f(x) = A$ va $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = B$ bo'lsin. U holda (2.45) va 2.19-Teoremaga ko'ra,

$$\lim_{x \rightarrow a} \beta(x)f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)f(x)\alpha(x)}{\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} f(x)\alpha(x) = 1 \cdot A = A,$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\beta(x)} = \frac{\alpha(x)f(x)}{\beta(x)\alpha(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\alpha(x)} = 1 \cdot B = B.$$

Bu teoremaga ko'ra (2.55) munosabatlar zanjiridan foydalanish qulay. Bunda limitda qatnashgan cheksiz kichik unga ekvivalent bo'lgan cheksiz kichik bilan almashtiriladi.

2.46-Misol. (2.55) munosabatlar zanjiriga ko'ra hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{e^{x^2} - 1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin^2(x/2)}{x^2} = \\ &= -2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x/2)^2}{x^2} = -\frac{1}{2}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

2.8. Tekis uzluksizlik

Funksiya kesmada uzluksiz degani, kesmaning ixtiyoriy x nuqtasi va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun, shunday $\delta > 0$ son topib (x nuqtaga va ε songa bog'liq), kesmaning

$$|x' - x| < \delta \quad (2.56)$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x' nuqtalarida

$$|f(x') - f(x)| < \varepsilon \quad (2.57)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi degan ma'noni anglatadi.

Agar δ sonni x nuqtaga bog'liq bo'lmaydiga qilib tanlab, (2.56) shart bajarilganda (2.57) shart bajarilsa, $f(x)$ funksiya tekis uzluksiz deyiladi. Bu muhim tushunchaning ta'rifini kengroq yoritib beramiz.

2.35-Ta'rif. Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, $|x' - x| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday ikkita $x \in [a; b]$, $x' \in [a; b]$ nuqtalar uchun $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $[a; b]$ kesmada aniqlangan $f(x)$ funksiya bu kesmada *tekis uzluksiz* deb ataladi.

Kesmada tekis uzluksiz bo'lgan har qanday funksiya bu kesmada uzluksiz ham bo'lishi ravshan: agar tekis uzluksizlikning ta'rifida x nuqtani o'zgarms qilib oladigan bo'lsak, funksiyaning bu nuqtadagi uzluksizligi ta'rif kelib chiqadi.

2.46-Misol. $f(x) = x$ funksiya butun son o'qida tekis uzluksizdir, chunki agar $\varepsilon > 0$ berilgan bo'lsa, $\delta = \varepsilon$ deb olish yetarli. U holda agar $|x' - x| < \delta$ bo'lsa, $f(x) = x$, $f(x') = x'$ bo'lganligi uchun $|f(x') - f(x)| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. ◀

2.47-Misol. $f(x) = \sin 1/x$, $x \neq 0$ unksiya $x = 0$ nuqta olib tashlangan son o'qida uzluksiz, ammo unda tekis uzluksiz emas. Haqiqatdan ham, agar $\varepsilon = 1$ deb olinsa, $\delta > 0$ son qanday kichik bo'lishidan qat'iy nazar shunday x va x' nuqtalar topiladiki, masalan, $x = 1/(\pi/2 + 2\pi n)$ va $x' = 1/(\pi/3 + 2\pi n)$, bu yerda n — yetarlicha katta natural son) ko'rinishdagi nuqtalar uchun $|x' - x| < \delta$ tengsizlik bajarilishiga qaramay $|f(x') - f(x)| = (2 - \sqrt{3})/2$ bo'ladi. ◀

2.33-Teorema (Kantor). Kesmada uzluksiz bo'lgan funksiya, unda tekis uzluksiz ham bo'ladi.

► Teskarisidan faraz qilib isbotlaymiz, ya'ni biror $[a; b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiya unda tekis uzluksiz bo'lmasin. Bu esa, shunday $\varepsilon_0 > 0$ son topilib, ixtiyoriy $\delta > 0$ son uchun $|x' - x| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi shunday $x \in [a; b]$, $x' \in [a; b]$ nuqtalar topiladiki, bu nuqtalarda $|f(x') - f(x)| \geq \varepsilon_0$ tengsizlik o'rinli bo'ladi degan ma'noni anglatadi. Xususan, $\delta = 1/n$ uchun shunday x_n va x'_n nuqtalar topiladiki, bu nuqtalar

$$|x'_n - x_n| < 1/n \quad (2.58)$$

tengsizlikni qanoatlantirishiga qaramay

$$|f(x'_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0 \quad (2.59)$$

bo'ladi. 3.10-Teoremaga ko'ra chegaralangan $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan biror x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi $\{x_{n_k}\}$ qisman ketma-ketlik tuzish mumkin:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = x_0. \quad (2.60)$$

$a \leq x_{n_k} \leq b$, $k = 1, 2, \dots$, bo'lganligi uchun $a \leq x_0 \leq b$ bo'lishi ravshan. $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz, shuning uchun

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = f(x_0). \quad (2.61)$$

$\{x'_n\}$ ketma-ketlikning $\{x'_{n_k}\}$ qisman ketma-ketligi ham k cheksiz ortganda x_0 nuqtaga intiladi, chunki $k \rightarrow \infty$ bo'lsa

$$|x'_{n_k} - x_0| \leq |x'_{n_k} - x_{n_k}| + |x_{n_k} - x_0| < \frac{1}{n_k} + |x_{n_k} - x_0| \rightarrow 0$$

bo'ladi. Shuning uchun

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = f(x_0). \quad (2.62)$$

(2.61) va (2.62) tengliklardan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [f(x'_{n_k}) - f(x_{n_k})] = f(x_0) - f(x_0) = 0$$

hosil bo'ladi, bu esa barcha $k = 1, 2, \dots$ larda

$$|f(x'_{n_k}) - f(x_{n_k})| \geq \varepsilon_0 > 0$$

tengsizlik bajariladi degan shartga ziddir. Yuzaga kelgan zidlik teoremani isbotlaydi. ◀

Nazorat savollari

1. Sonli funksiya deb nimaga aytiladi?
2. Funksiya qanday usullar bilan beriladi?
3. Qanday funktsiyalarga davriy funksiya deyiladi?
2. Qanday funktsiyalar monoton deyiladi?
5. Funktsiyaning limiti deb nimaga aytiladi?
6. Funktsiyaning nuqtadagi chap va o'ng limiti nima?
7. Cheksiz kichik va cheksiz katta funktsiyalar o'rtasida qanday bog'liqlik mavjud?
8. Limitga ega bo'lgan funktsiyalar qanday xossalarga ega?
9. Qachon funksiya nuqtada uzluksiz deyiladi?
10. Cheksiz kichik funktsiyalar qachon bir xil tartibli deyiladi?
11. Qanday funktsiyalar tekis uzluksiz deyiladi?
12. Tekis uzluksiz funktsiyalar haqidagi Kantor teoremasini bayon qiling.

Mashqlar.

Quyidagi funktsiyalarning aniqlanish sohasini toping:

1. $y = x^3 + 5x^2 - x + 9$.
2. $y = \sqrt{2 - 5x - 3x^2}$.
3. $y = \sqrt{6x^2 + 7x - 5}$.
2. $y = \log_5(6 \sin x - 3)$.

Limitlarni hisoblang:

5. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 2}$.
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^4 + x^2 - 3x + 7}{3x^4 + x^3 + 8x^2 - 5x + 1}$.
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 5x^2 - 7x + 6}{x^2 + 7x + 8}$.
8. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 - 5x + 6}$.
9. $\lim_{x \rightarrow \frac{5}{3}} \frac{6x^2 - x - 15}{3x^2 - 8x + 5}$.
10. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{2-x}}{x-1}$.
11. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{2 - \sqrt{x-3}}{x^2 - 49}$.
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$.
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5 \sin 2x}{7x}$.
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 \arcsin x}{7x}$.

$$15. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 1}{2x^2 + 1} \right)^{x^2}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1 + x} \right)^x.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow \pi/2} (\pi - 2x)^{\cos x}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(\frac{x}{\operatorname{ctg} x} - \frac{\pi}{2 \cos x} \right).$$

$$20. \lim_{x \rightarrow \pi/2} \left(2x \operatorname{tg} x - \frac{\pi}{\cos x} \right).$$

Javoblar.

1. $(-\infty; +\infty)$. 2. $[-2; 1/3]$. 3. $(-\infty; -5/3] \cup [1/2; +\infty)$. 2. $(\pi/6 + 2\pi n; 5\pi/6 + 2\pi n)$. 5. $2/3$. 6. $1/3$. 7. ∞ . 8. 7. 9. $19/2$. 10. 1. 11. $-1/56$. 12. 0. 13. $10/7$. 12. $3/7$. 15. 0. 16. $1/e$. 17. 1. 18. 1. 19. -1. 20. -2.

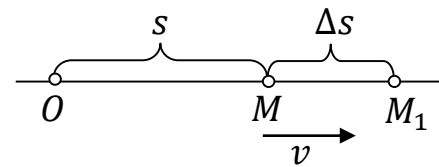
III BOB. BIR O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANING HOSILASI VA DIFFERENSIALI

3.1. Hosila

Harakatlanayotgan nuqtaning tezligi haqidagi masala. To'g'ri chiziqli harakatlanayotgan moddiy nuqtaning v tezligini topish masalasini qaraymiz. Nuqtaning holatini uning biror boshlang'ich O nuqtadan hisoblanadigan masofa aniqlaydi; ana shu masofa bosib o'tilgan yo'l deb ataladi. Bosib o'tilgan s yo'l t vaqtga bog'liq, ya'ni s yo'l t vaqtning funksiyasi bo'ladi:

$$s = f(t) \quad (3.1)$$

Nuqta vaqtning t momentida M holatda bo'lib, boshlang'ich O nuqtadan s masofada bo'lsin. to'zgaruvchiga Δt ortirma beramiz va vaqtning $t + \Delta t$ momentini qaraymiz, bunda nuqta M_1 holatda va boshlang'ich



3.1-rasm

holatdan $s + \Delta s$ masofada bo'ladi (3.1- rasm). Shunday qilib Δt vaqt oralig'ida s masofa Δt miqdorga ozgaradi: $s + \Delta s = f(t + \Delta t)$. Bunday holda Δt vaqt mobaynida s miqdor Δs ortirma oldi deyiladi. Bu ortirma aniqlanishiga ko'ra,

$$\Delta s = f(t + \Delta t) - f(t) \quad (3.2)$$

tenglikni qanoatlantiradi. Endi $\Delta s/\Delta t$ nisbatni qaraymiz. Bu nisbat Δt vaqt mobaynidagi o'rtacha tezlikni beradi:

$$v_{o'rt} = \Delta s/\Delta t \quad (3.3)$$

Har doim ham o'rtacha tezlik nuqtaning t momentdagi tezligini beravermaydi. Masalan, Δt oraliqning boshida nuqta juda tez harakatlansa, oxirida esa juda sekin harakat qilsa, u holda vaqtning t momenridagi haqiqiy tezlikdan o'rtacha tezlik ancha farq qilishi ravshan. Ana shu haqiqiy tezlikni o'rtacha tezlik orqali ifodalash uchun Δt vaqt oralig'ini imkon darajasida kichik olish kerak.

Nuqtaning t momentdagi v tezligi deb, Δt vaqt oralig'idagi $v_{o'rt}$ o'rtacha tezlikning Δt vaqt oralig'i 0 ga intilgandagi limitiga aytiladi:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta s/\Delta t \quad (3.4)$$

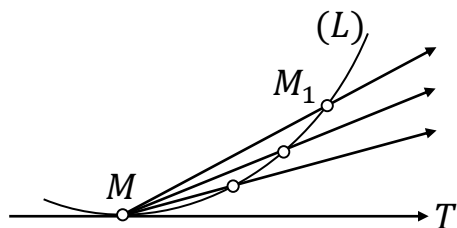
(3.4) tenglikni (3.2) tenglikdan foydalanib yozamiz:

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t} \quad (3.5)$$

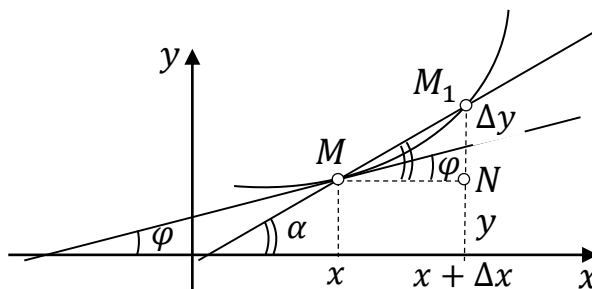
Hosil qilingan formula notekis harakat tezligi formulasi bo'ladi. (3.5) formuladan ko'rinib turibdiki, v tezlik vaqtning Δt orttirmasiga bog'liq

bo'lmadan, balki t o'zgaruvchining qiymatiga va $f(t)$ funksiyaning ko'rinishiga bog'liq bo'lar ekan.

Egri chiziqqa urinma o'tkazish masalasi. Tekislikda (L) egri chiziq va uning ixtiyoriy M nuqtasi berilgan bo'lsin (3.2-rasm). Ana shu M nuqtada urinma o'tkazish masalasini, to'g'rirog'i ana shu urinmaning burchak koeffitsiyentini topish masalasini qaraymiz. Dastlab urinmaning umumiy ta'rfini keltiramiz. (L) egri chiziqda M nuqtadan farqli yana M_1 nuqtani olamiz va MM_1 kesuvchini o'tkazamiz.



3.2-rasm



3.3-rasm

(L) egri chiziqqa M nuqtada o'tkazilgan urinma deb, M_1 nuqta (L) egri chiziq bo'ylab M nuqtaga intilganda MM_1 kesuvchining MT limitik holatiga aytiladi.

Endi $f(x)$ funksiya va Dekart koordinatalar sistemasida unga mos $y = f(x)$ egri chiziqni qaraymiz (3.3-rasm). Argumentning biror x qiymatida funksiya $y = f(x)$ qiymatni qabul qiladi. Ana shu x, y qiymatlarga egri chiziqning $M(x, y)$ nuqtasi mos keladi. x argumentga Δx ortirma beramiz va argumentning yangi $x + \Delta x$ qiymatiga funksiyaning $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ qiymati mos keladi. Natijada egri chiziqda $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y)$ nuqta hosil bo'ladi. MM_1 kesuvchini o'tkazamiz va kesuvchi bilan Ox o'qning musbat yo'nalishi orasidagi burchakni α orqali belgilaymiz. 3.3-rasmdagi M_1MN uchburchakda $|M_1N| = \Delta y$, $|MN| = \Delta x$ tomonlar uchun

$$\Delta y / \Delta x = \operatorname{tg} \alpha \quad (3.6)$$

tenglik o'rinli bo'ladi, ya'ni M_1M kesuvchining burchak koeffitsiyenti $k_1 = \Delta y / \Delta x$ tenglik bilan aniqlanadi.

Agar Δx ortirma nolga intilsa, u holda M_1 nuqta egri chiziq bo'ylab M nuqtaga intiladi. Urinmaning ta'rifiga ko'ra M_1M kesuvchining limitik holati qidiralyotgan urinma to'g'ri chiziq bo'ladi. Bu harakat jarayonida α burchak ham o'zgaradi va u biror φ burchakka intilsa, bu burchak urinmaning Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchagi bo'ladi. Shuning uchun urinmaning burchak koeffitsiyenti

$$k = tg\varphi = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} tg \alpha = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad (3.7)$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Hosilaning ta'rifi. Agar yuqorida qaralgan masalalarni tahlil qiladigan bo'lsak, o'zgaruvchilarni talqin qilishni e'tiborga olinmasa, ularda muhim umumiylik mavjud. U ham bo'lsa funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi limitidan iborat. Shunday qilib biz differensial hisobning asosiy tushunchasi-hosila tushunchasiga keldik.

Biror (a, b) oraliqda aniqlangan

$$y = f(x) \quad (3.8)$$

funksiya berilgan bo'lsin. Bunda x argumentning bu oraliqdan olingan har bir qiymatiga $y = f(x)$ funksiyaning aniq bir qiymati mos keladi.

x argument biror Δx orttirma olsun. Bu orttirma musbatmi yoki manfiymi farqi yo'q, muhimi $x + \Delta x$ qiymat qaralayotgan (a, b) oraliqda qolishi kerak. U holda y funksiya biror Δy orttirma oladi. Shunday qilib argumentning yangi $x + \Delta x$ qiymatiga funksiyaning yangi $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$ qiymati mos keladi. Shu sababli funksiya orttirmasi uchun

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) \quad (3.9)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Funksiya Δy orttirmasining mos $\Delta x \neq 0$ orttirmaga nisbatini tuzamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (\Delta x \neq 0).$$

Qo'zg'almas x qiymatda bu nisbat Δx orttirmaning funksiyasidan iborat bo'ladi:

$$\Delta y / \Delta x = \varphi(\Delta x).$$

3.1-Ta'rif. Agar Δx orttirma nolga intilganda $\Delta y / \Delta x$ nisbatning limiti mavjud bo'lsa, bu limit $y = f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi hosilasi deb ataladi va u $f'(x)$ yoki $y'(x)$ yoki y'_x yoki dy/dx orqali belgilanadi.

Hosilaning aniq bir a nuqtadagi qiymatini $f'(a)$, $y'(a)$, $y'_x|_{x=a}$, $\frac{dy}{dx}|_{x=a}$ ifodalardan biri orqali belgilanadi.

Shunday qilib, ta'rifga ko'ra,

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad (3.10)$$

(3.10) limit chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin. Shu sababli chekli yoki cheksiz hosila haqida gapirish mumkin. Hozircha limit chekli bo'lgan holni qaraymiz.

Hosilani hisoblashga misollar.

3.1-Misol. $y = c$ ($c = \text{const.}$) o'zgarmas funksiyaning hosilasini topamiz. Ixtiyoriy x nuqtada va ixtiyoriy Δx orttirmada $f(x) = c$, $f(x + \Delta x) = c$ bo'lganligi uchun $\Delta y = 0$ bo'ladi va hosilaning ta'rifiga ko'ra,

$$(c)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

3.2-Misol. $y = x^2$ funksiyaning hosilasini topamiz. Ixtiyoriy x nuqtada va ixtiyoriy Δx orttirmada

$$\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2.$$

Shuning uchun:

$$(x^2)' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (2x + \Delta x) = 2x.$$

3.3-Misol. $y = e^x$ funksiyaning hosilasini topamiz. Ixtiyoriy x nuqtada va ixtiyoriy Δx orttirmada

$$\Delta y = e^{x+\Delta x} - e^x = e^x(e^{\Delta x} - 1).$$

Bundan esa (2.53) formulaga ko'ra

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^x(e^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = e^x \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Shunday qilib,

$$(e^x)' = e^x \quad (3.11)$$

tenglik ixtiyoriy x uchun orinli.

3.4-Misol. Hosilaning ta'rifidan foydalanib

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi $f'(0)$ hosilasini topamiz:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\Delta x)^2 \sin \frac{1}{\Delta x}}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0} \Delta x \sin \frac{1}{\Delta x} = 0.$$

Bu yerda 2.13-Misoldan foydalanildi.

Endi yuqorida qaralgan harakatlanayotgan moddiy nuqtaning tezligi haqidagi masalaga qaytamiz.

(3.5) formulaga ko'ra $s = f(t)$ qonuniyat bilan harakatlanayotgan moddiy nuqtaning vaqtning t momentidagi v tezligi

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

tenglik bilan aniqlanar edi. O'ng tomondagi limit $f(t)$ funksiyaning t nuqtadagi hosilasini beradi. Shuning uchun vaqtning t momentigacha bosib

o'tilgan yo'ldan olingan hosila vaqtning t momentidagi tezlikka teng bo'ladi:

$$v = f'(t). \quad (3.12)$$

Egri chiziqqa o'tkazilgan urinma va normal tenglamasi. Egri chiziq $y = f(x)$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Egri chiziqda $M(a, f(a))$ nuqta olamiz va $f'(a)$ hosila mavjud deb faraz qilib, bu nuqtada egri chiziqqa o'tkazilgan urinma tenglamasini keltirib chiqaramiz. Egri chiziqqa $M(x, f(x))$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning k burchak koeffitsiyenti (3.7) formulaga ko'ra,

$$k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bu yerda, o'ng tomiondagi limit $f'(x)$ hosilani beradi. Shuning uchun egri chiziqqa $M(x, f(x))$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyenti uchun

$$k = f'(x) \quad (3.13)$$

teng'lik o'rinli bo'ladi.

Berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan burchak koeffitsiyentli to'g'ri chiziq tenglamasining formulasiga ko'ra $M(a, f(a))$ nuqtadan o'tuvchi va k burchak koeffitsiyentli to'g'ri chiziq tenglamasi

$$y - f(a) = k(x - a)$$

ko'rinishda bo'ladi. Urinma chiziq uchun $k = f'(a)$ bo'ladi. Shuning uchun $y = f(x)$ funksiya grafigiga $M(a, f(a))$ nuqtada o'tkazilgan urinma to'g'ri chiziq tenglamasi

$$y - f(a) = f'(a)(x - a) \quad (3.14)$$

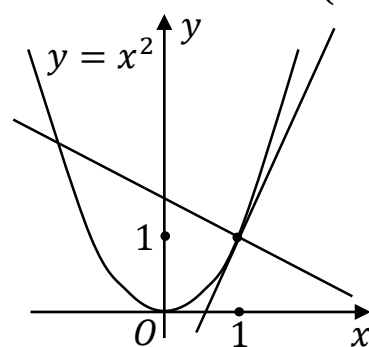
bo'ladi. M nuqtadan o'tuvchi egri chiziq urinmasiga perpendikulyar to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining M nuqtadagi *normali* deb ataladi. To'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik shartiga ko'ra normalning burchak koeffitsiyenti $k_n = -1/k_u$ tenglikni qanoatlantiradi, bu yerda k_u - urinmaning burchak koeffitsiyenti. Agar $f'(a) \neq 0$ bo'lsa,

$y = f(x)$ funksiya grafigining M nuqtadagi normali tenglamasi

$$y - f(a) = -(x - a)/f'(a) \quad (3.15)$$

bo'ladi. $f'(a) = 0$ holda normal vertikal bo'ladi (urinmaning o'zi Ox o'qqa parallel bo'ladi), shuning uchun uning tenglamasi $x = a$ bo'ladi.

3.5-Misol. $f(x) = x^2$ funksiya grafigiga $(1, 1)$ nuqtada o'tkazilgan urinma va normal tenglamasini tuzing (3.4-rasm).



3.4-rasm

► Funksiya va uning hosilasining $x = 1$ nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz: $(1) = 1$, $f'(x) = 2x$, $f'(1) = 2$. U holda (3.14) tenglamaga ko'ra urinma

$$y - 1 = 2(x - 1) \text{ yoki } y = 2x - 1$$

tenglamaga ega bo'ladi. Normal tenglamasini (3.15) formulaga ko'ra tuzamiz:

$$y - 1 = -\frac{x - 1}{2} \text{ yoki } y = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}. \quad \blacktriangleleft$$

3.2-Ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya va uning hosilasi (a, b) oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya (a, b) oraliqda silliq deyiladi, $y = f(x)$ tenglama bilan beriladigan egri chiziq esa (a, b) oraliqda silliq chiziq deyiladi.

O'ng va chap hosilalar. $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi o'ng va chap hosilalari tushunchasini kiritamiz.

3.3-Ta'rif. Agar ushbu

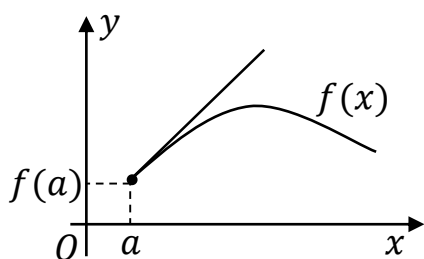
$$f'(x + 0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit $y = f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi o'ng hosilasi deb ataladi, agar

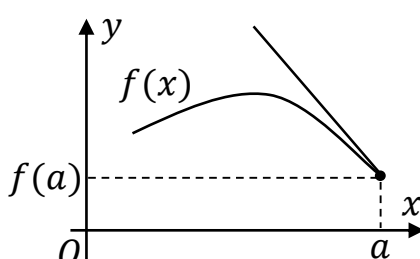
$$f'(x - 0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

limit mavjud bo'lsa, biz uni x nuqtadagi chap hosila deb ataymiz.

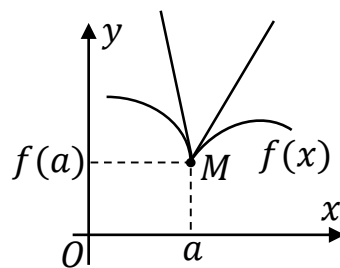
Chap yoki o'ng hosilalar mavjud bo'lgan nuqtalarda funksiya grafigi bir tomonlama urinmalarga ega bo'ladi (3.5 va 3.6-rasmlar).



3.5-rasm



3.6-rasm



3.7-rasm

Bir tomonlama limit tushunchasidan foydalanib hosila mavjudligining zarur va yetarli shartini keltiramiz: x nuqtada $f'(x)$ hosilaning mavjud bo'lishligi uchun, x nuqtada $y = f(x)$ funksiyaning o'ng va chap hosilalari mavjud va ular teng bo'lishligi zarur va yetarli:

$$f'(x + 0) + f'(x - 0) = f'(x).$$

Shunday funksiyalar ham borki, ular biror oraliqda uzluksiz, ammo uning biror ichki $x = a$ nuqtasida $\Delta y/\Delta x$ orttirmalar nisbatining bir tomonlama

limitlari teng bo'lmaydi. Ana shu teng bo'lmagan bir tomonlama limitlar bir tomonlama hosilalar ekanligi ravshan. Funktsiya grafigining mos nuqtasida bir tomonlama urinmalari mavjud bo'ladi va umuman olganda ular o'zaro burchak tashkil qiladi (3.7-rasm). Bu holda $M(a, f(a))$ nuqta funksiya grafigining sinish nuqtasi deb ataladi.

3.6-Misol. $f(x) = |x|$ funksiya qaraymiz. $x = 0$ nuqtada funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatini tuzamiz:

$$\frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{agar } \Delta x > 0, \\ -1, & \text{agar } \Delta x < 0. \end{cases}$$

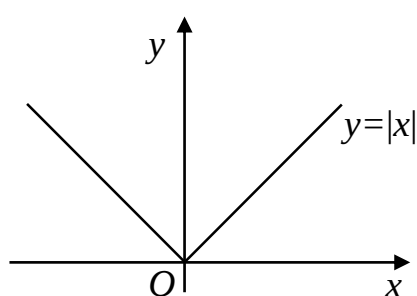
Shuning uchun $f(x) = |x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada

$$f'(0 + 0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = 1$$

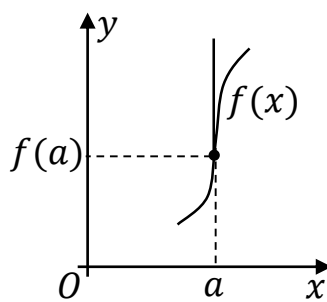
o'ng hosilaga va

$$f'(0 - 0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = -1$$

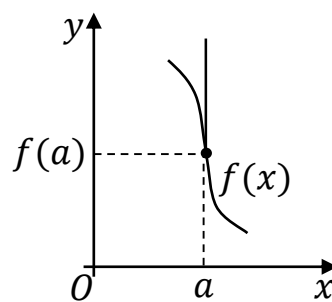
chap hosilaga ega bo'ladi, ammo ular teng emas va demak $f(x) = |x|$ funksiya $x = 0$ nuqtada hosilaga ega emas. Geometrik jihatdan bu $y = |x|$ funksiyaning grafigi $O(0,0)$ nuqtada sinishini anglatadi (3.8-rasm).



3.8-rasm



3.9-rasm

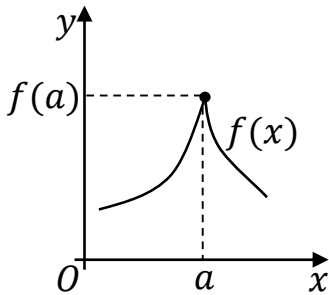


3.10-rasm

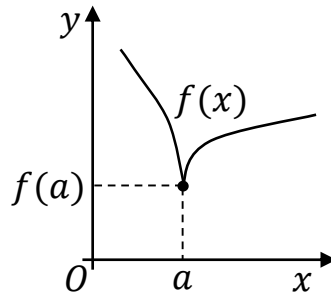
$\Delta y/\Delta x$ ayirmalar nisbatining bittasi yoki ikkalasi ham a nuqtada cheksiz bo'lishi mumkin. Bu holda $y = f(x)$ funksiyaning bir tomonlama chap yoki o'ng (yoki chap ham o'ng ham) cheksiz hosilasi haqida gapirish mumkin. Uzluksiz funksiyaning bir tomonlama cheksiz hosilalari aniq bir ishorali (yoki $+\infty$ yoki $-\infty$) bo'ladi. Agar biror a nuqtada chap va o'ng bir tomonlama hosilalarning ishoralari bir xil bo'lsa, u holda berilgan funksiya ana shu nuqtada aniq bir ishorali cheksiz hosilaga ega bo'ladi (musbat 3.9-rasm, manfiy 3.10-rasm). Bu holda funksiya garfigiga mos nuqtada o'tkazilgan urinma vertikal bo'ladi. Agar bir tomonlama cheksiz hosilalarning ishoralari turlicha bo'lsa, funksiya grafigining mos nuqtasi o'tkirlashgan nuqta (qaytish nuqtasi) bo'ladi (3.11, 3.12-rasmlar)

3.7-Misol. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ funksiyani qaraymiz. $x = 0$ nuqtada funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatini hisoblaymiz:

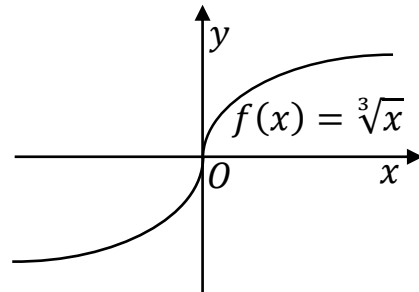
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{(\Delta x)^2}}.$$



3.11-rasm



3.12-rasm



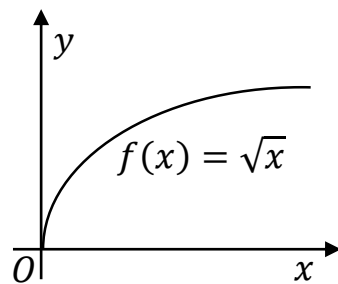
3.13-rasm

Shuning uchun

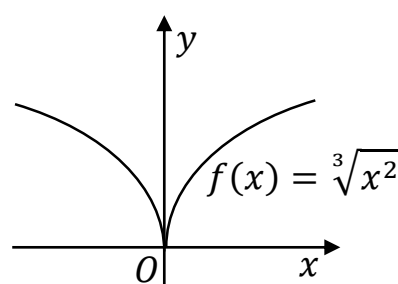
$$f'(0+0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(0-0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty,$$

ya'ni funksiya $x = 0$ nuqtada bir xil ishorali bir tomonlama cheksiz hosilalarga ega ekan va shuning uchun $f'(0) = +\infty$ bo'ladi. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ funksiyaning grafigi $O(0,0)$ nuqtada $x = 0$ vertikal urinmaga ega bo'ladi (3.13-rasm). ◀

3.8-Misol. $f(x) = \sqrt{x}$ funksiya $x \geq 0$ nuqtalarda aniqlangan (3.14-rasm). $x = 0$ nuqtadagi orttirmalar nisbati $\Delta y/\Delta x = (\Delta x)^{-1/2}$ bo'ladi va $\Delta x > 0$ bo'lgandagina qarash mumkinligidan, faqat $f'(0+0) = +\infty$ o'ng cheksiz hosila mavjud bo'ladi. ◀



3.14-rasm



3.15-rasm

3.9-Misol. $f(x) = x^{2/3}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtadagi orttirmalar nisbati

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \frac{(\Delta x)^{2/3}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$$

tenglik bilan aniqlanadi. Bundan esa,

$$f'(0+0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^{1/3}} = +\infty,$$

$$f'(0-0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\Delta x)^{1/3}} = -\infty.$$

Shunday qilib, bu funksiya $x = 0$ nuqtada turli ishorali bir tomonlama cheksiz hosilalarga ega va $O(0,0)$ nuqta esa funksiya grafigining o'tkirlashgan nuqtasi bo'ladi (3.15-rasm). ◀

Funksiyaning differensiallanuvchanligi.

3.4-Ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya biror a nuqtada

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

hosilaga ega bo'lsa, u holda funksiya bu nuqtada differensiallanuvchi deyiladi.

Shuning uchun funksiyaning hosilasini topish uni differensiallash deb ham yuritiladi.

3.5-Ta'rif. Agar (a,b) oraliqning yoki $[a,b]$ kesmaning barcha nuqtalarida $f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lsa, u holda funksiya (a,b) oraliqda yoki mos ravishda $[a,b]$ kesmada differensiallanuvchi deyiladi.

3.1-Teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya biror a nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda u bu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

► $y = f(x)$ funksiya a nuqtada differensiallanuvchi, ya'ni

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a)$$

hosila mavjud bo'lsin. U holda 2.13-Teoremaga ko'ra

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) + \alpha(\Delta x),$$

bu yerda $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Bundan esa

$$\Delta y = f'(a) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

tenglikni yozish mumkin. Hosil qilingan tenglikning ikkala tomonida limitga o'tamiz:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f'(a) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x] = 0,$$

ya'ni

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} [f(a + \Delta x) - f(a)] = 0,$$

yoki

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(a + \Delta x) = f(a).$$

Bu munosabat $f(x)$ funksiyaning a nuqtada uzluksiz ekanligidan dalolat beradi. ◀

Endi differensiallanuvchi funksiyalarning muhim bir xossasini keltiramiz.

3.2-Teorema. $y = f(x)$ funksiya a nuqtada differensiallanuvchi bo'lishligi uchun, argumentning Δx orttirmasiga mos funksiyaning $\Delta y = f(a + \Delta x) - f(a)$ orttirmasini

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \quad (3.16)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lishi zarur va yetarli. Bu yerda A biror o'zgarmas son bo'lib Δx orttirmaga bog'liq emas va $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$.

► **Zarurligi.** $y = f(x)$ funksiya a nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Bu nuqtada Δy orttirmani (3.16) ko'rinishda ifodalash mumkinligini isbotlaymiz. Shartga ko'ra,

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$$

hosila mavjud. U holda 4.12-Teoremaga ko'ra,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(a) + \alpha(\Delta x),$$

bu yerda $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Bundan esa,

$$\Delta y = \underbrace{f'(a)}_A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$$

tenglikni hosil qilamiz. Δy orttirmani (3.16) ko'rinishda ifodalash mumkinligi isbotlandi, hamda $A = f'(a)$ ekanligini aniqladik.

Yetarliligi. Δy orttirma (3.16) ko'rinishda ifodalangan bo'lsin. U holda (3.16) tenglikdan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda tenglikning ikkala tomonida limitga o'tamiz. O'ng tomonda $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta x) = 0$ ekanligini va A o'zgarmas sonligini inobatga olsak chap tomonning ham limiti mavjudligi kelib chiqadi. Chap tomonning limiti esa hosilani beradi, ya'ni $f(x)$ funksiya a nuqtada differensiallanuvchi ekan. ◀

3.10-Misol. $y = x^3$ funksiyaning qaraymiz.

► Ixtiyoriy x va ixtiyoriy Δx orttirmada

$$\Delta y = (x + \Delta x)^3 - x^3 = \underbrace{3x^2}_{A} \Delta x + \underbrace{(3x \cdot \Delta x + \Delta x^2)}_{\alpha} \cdot \Delta x$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Shuning uchun ta'rifga ko'ra $y = x^3$ funksiya ixtiyoriy x nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi. ◀

3.2-Teoremaga ko'ra funksiyaning nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi bilan uni bu nuqtada (3.16) ko'rinishda tasvirlash teng kuchli ekan. Shuning uchun bu formulani ta'rif sifatida ham qabul qilish mumkin.

3.6-Ta'rif. $y = f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi Δy orttirmasini (3.16) ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lsa, bu funksiya a nuqtada differensiallanuvchi deyiladi.

3.2. Ba'zi bir elementar funksiyalarning hosilasi

1. $y = x^a$ (a -ixtiyoriy haqiqiy son) darajali funksiya. Bu funksiya barcha $x > 0$ uchun aniqlangan. Shuning uchun

$$\Delta y = (x + \Delta x)^a - x^a = x^a \left[\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^a - 1 \right].$$

U holda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = x^a \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^a - 1}{\Delta x}.$$

(2.55) munosabatlar zanjiridan

$$\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^a - 1 \underset{\Delta x \rightarrow 0}{\sim} a \frac{\Delta x}{x}$$

ekvivalentlik munosabatini hosil qilamiz. U holda 2.32-Teoremaga ko'ra

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = x^a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x} \right)^a - 1}{\Delta x} = x^a \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a \frac{\Delta x}{x}}{\Delta x} = ax^{a-1}.$$

Shunday qilib,

$$(x^a)' = ax^{a-1}. \quad (3.17)$$

2. $y = a^x$ ($a > 0, -\infty < x < +\infty$) ko'rsatkichli funksiya. Ortirmalar nisbati

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

Ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda ham (2.55) munosabatlar zanjiridan foydalanib

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x \cdot \ln a}{\Delta x} = a^x \cdot \ln a$$

hosilani topamiz, ya'ni

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a. \quad (3.18)$$

Xususiyl holda, agar $y = e^x$ bo'lsa, u holda

$$(e^x)' = e^x. \quad (3.19)$$

3. $y = \log_a x$, ($0 < a \neq 1, 0 < x < +\infty$) logarifmik funksiya. Bu holda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a x}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{\log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)}{\frac{\Delta x}{x}}.$$

Bu yerda ham (2.55) munosabatlar zanjiridan foydalanamiz:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1 + \Delta x/x)}{\Delta x/x} = \frac{1}{x \ln a} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x/x}{\Delta x/x} = \frac{1}{x \ln a},$$

$$(\log_a x)' = 1/(x \ln a) \quad (3.20)$$

logarifmik funksiyaning hosilasini topdik. Xususiyl holda, agar $y = \ln x$ bo'lsa $y' = \frac{1}{x}$ bo'ladi.

4. *Trigonometrik funksiyalar.* Dastlab $y = \sin x$ funksiyaning hosilasini topamiz. Ortirmalar nisbatini olamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

$\cos x$ funksiyaning uzluksizligidan va birinchi ajoyib limitdan foydalanib, hosil qilingan tenglikda limitga o'tib

$$(\sin x)' = \cos x \quad (3.21)$$

hosilani topdik.

$y = \cos x$ funksiyaning hosilasini topamiz. Ortirmalar nisbati uchun

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos x}{\Delta x} = -\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \sin \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda ham $\sin x$ funksiyaning uzluksizligidan va birinchi ajoyib limitdan foydalanib, hosil qilingan tenglikda limitga o'tib

$$(\cos x)' = -\sin x \quad (3.22)$$

hosilani topdik.

$y = \operatorname{tg} x$ funksiya uchun

$$\begin{aligned} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \frac{\operatorname{tg}(x + \Delta x) - \operatorname{tg} x}{\Delta x} = \frac{\frac{\sin(x+\Delta x)}{\cos(x+\Delta x)} - \frac{\sin x}{\cos x}}{\Delta x} = \\ &= \frac{\sin(x + \Delta x) \cdot \cos x - \cos(x + \Delta x) \cdot \sin x}{\Delta x \cdot \cos x \cdot \cos(x + \Delta x)} = \\ &= \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} \cdot \frac{1}{\cos x \cdot \cos(x + \Delta x)} \end{aligned}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerda ham yuqoridagi singari limitga o'tib

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x \quad (3.23)$$

hosilani topamiz.

Xuddi shu singari, agar $y = \operatorname{ctg} x$ bo'lsa, uning hosilasi

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\operatorname{csc}^2 x \quad (3.24)$$

ko'rinishda bo'ladi.

3.3. Hosila hisoblash qoidalari

O'zgarmas songa ko'paytirilgan funksiyaning hosilasi.

3.3-Teorema. Differensiallanuvchi funksiya bilan o'zgarmas sonning ko'paytirishdan iborat funksiya ham differensiallanuvchi bo'ladi va uning hosilasi bu funksiya hosilasi bilan ana shu o'zgarmas son ko'paytmasiga teng:

$$(C \cdot u(x))' = C \cdot u'(x). \quad (3.25)$$

► x argumentga noldan farqli Δx ortirma beramiz. U holda funksiyaning mos orttirmasi

$$\Delta y = C \cdot u(x + \Delta x) - C \cdot u(x) = C \cdot [u(x + \Delta x) - u(x)]$$

ko'rinishda bo'ladi. Shuning uchun orttirmalar nisbati

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = C \cdot \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x}$$

tenglik bilan topiladi. U holda hosila uchun

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = C \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x) - u(x)}{\Delta x} = C \cdot u'(x)$$

tenglikka ega bo'lamiz. ◀

3.11-Misol. $y = -3 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ funksiyaning hosilasini toping.

► (3.17) formulaga ko'ra,

$$\begin{aligned} y' &= \left(-3 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} \right)' = -3 \left(x^{-\frac{1}{3}} \right)' = -3 \left(-\frac{1}{3} \right) x^{-\frac{1}{3}-1} = \\ &= x^{-\frac{4}{3}} = \frac{1}{x^{\frac{4}{3}}} = \frac{1}{x \sqrt[3]{x}}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Yig'indining hosilasi.

3.4-Teorema. Ikikita differensiallanuvchi funksiylarning algebraik yig'indisi ham differensiallanuvchi bo'ladi va uning hosilasi bu funksiylar hosilalarining algebraik yig'indisiga teng:

$$(u(x) \pm v(x))' = u'(x) \pm v'(x) \quad (3.26)$$

► $y = u(x) \pm v(x)$ funksiya orttirmasini tuzamiz:

$$\begin{aligned} \Delta y &= [u(x + \Delta x) \pm v(x + \Delta x)] - [u(x) \pm v(x)] = \\ &= [u(x + \Delta x) - u(x)] \pm [v(x + \Delta x) - v(x)] = \Delta u \pm \Delta v \end{aligned}$$

U holda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

va bu yerda limitga o'tsak

$$y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \pm \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}$$

yoki

$$y' = u'(x) \pm v'(x).$$

3.12-Misol. $y = x^5 + 4 \sin x$ funksiyaning hosilasini topamiz.

► (3.21) va (3.26) formulalarga ko'ra

$$y' = (x^5 + 4 \sin x)' = (x^5)' + (4 \sin x)' = 5x^4 + 4 \cos x. \blacktriangleleft$$

3.3 va 3.4-Teoremlarning tasdiqlaridan chekli m sonli differensiallanuvchi $f_k(x), k = 1, \dots, m$, funksiyalarning $c_k \in \mathbf{R}$ o'zgarmaslar bilan chiziqli kombinatsiyasini differensiallash qoidasini keltirib chiqarish mumkin:

$$\left(\sum_{k=1}^m c_k f_k(x) \right)' = \sum_{k=1}^m c_k f_k'(x)$$

Ko'paytmaning hosilasi.

3.5-Teorema. Ikikita differensiallanuvchi funksiya ko'paytmasi ham differensiallanuvchi bo'ladi va uning hosilasi quyidagi tenglik bilan topiladi:

$$(u(x)v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \quad (3.27)$$

► $y = u(x)v(x)$ funksiya orttirmasini tuzamiz:

$$\begin{aligned} \Delta y &= [u(x + \Delta x)v(x + \Delta x)] - [u(x)v(x)] = \\ &= [u(x + \Delta x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x + \Delta x)] + \\ &\quad + [u(x)v(x + \Delta x) - u(x)v(x)] = \\ &= [u(x + \Delta x) - u(x)]v(x + \Delta x) + [v(x + \Delta x) - v(x)]u(x). \end{aligned}$$

U holda

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x + \Delta x) + \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u.$$

Bundan limitga o'tamiz. $v(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lganligi uchun 3.1-Teorema ko'ra u uzluksiz hamdir, shuning uchun $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) = v(x)$ bo'ladi. Buni quyidagi limitda qo'llasak

$$\begin{aligned} y' &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v(x + \Delta x) + \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u \right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) + u \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta x} \end{aligned}$$

yoki

$$y' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x). \blacktriangleleft$$

3.13-Misol. $y = x^2 \ln x$ funksiyaning hosilasini topamiz.

► (3.17) va (3.20) formulalarni inobatga olib (3.27) formulaga ko'ra

$$y' = (x^2 \ln x)' = (x^2)' \ln x + x^2 (\ln x)' = 2x \ln x + x^2 \frac{1}{x} = 2x \ln x + x. \blacktriangleleft$$

Agar u, v va w funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\begin{aligned} (uvw)' &= (uv)'w + (uv)w' = \\ &= (u'v + uv')w + uvw' = u'vw + uv'w + uvw'. \end{aligned}$$

Bu qoida ixtiyoriy chekli sondagi differensiallanuvchi ko'paytuvchilar uchun ham o'rinli

$$(uvw \dots s)' = u'vw \dots s + uv'w \dots s + \dots + uvw \dots s'.$$

Bo'linmaning hosilasi.

3.5-Teorema. Ikikita differensiallanuvchi funksiyaning bo'linmasi ham bo'luvchi nolga aylanmaydigan nuqtalarda differensiallanuvchi bo'ladi va uning hosilasi bu nuqtalarda quyidagi tenglik bilan topiladi:

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)} \right)' = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}, \quad v(x) \neq 0. \quad (3.28)$$

► $y = u(x)/v(x)$ nisbatning orttirmasini tuzamiz:

$$\Delta y = \frac{u(x + \Delta x)}{v(x + \Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x + \Delta x)v(x) - v(x + \Delta x)u(x)}{v(x + \Delta x)v(x)}.$$

Tenglikning ikkala tomonini Δx orttirmaga bo'lib, orttirmalar nisbatini hosil qilamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u \right)}{v(x + \Delta x)v(x)}.$$

U holda $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x) = v(x)$ ekanligini inobatga olgan holda bu yerda limitga o'tamiz:

$$\begin{aligned} y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u \right)}{v(x + \Delta x)v(x)} = \frac{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \cdot v - \frac{\Delta v}{\Delta x} \cdot u \right)}{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} v(x + \Delta x)v(x)} = \\ &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

3.14-Misol. $y = \operatorname{tg} x$ funksiya dan $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalarning nisbati sifatida hosila olamiz.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright y' = (\operatorname{tg} x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \end{aligned}$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}. \quad \blacktriangleleft$$

3.15-Misol. $y = x^3 + 3x^2 + 11$ egri chiziqlarning shunday nuqtalarini topingki, bu nuqtalarda egri chiziqqa o'tkazilgan urinmalar $y = 24x - 1$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsin.

► (3.13) formulaga ko'ra $y = f(x)$ funksiya grafigiga $M(a, f(a))$ nuqtada o'tkazilgan urinma to'g'ri chiziqlarning k burchak koeffisienti $k = f'(a)$ tenglikni qanoatlantiradi. Bizning holda $f'(a) = 3a^2 + 6a$. U holda to'g'ri chiziqlarning parallel shartiga ko'ra $f'(a) = 24$ yoki $3a^2 + 6a = 24$ bundan esa $a^2 + 2a - 8 = 0$ kvadrat tenglamani hosil qilamiz va uni yechib $a_1 = -4$, $a_2 = 2$ izlanayotgan nuqtalarning abssissasini hosil qilamiz. Ularning ordinatalari esa $f(a_1) = -5$ va $f(a_2) = 31$ bo'ladi. Demak izlanayotgan nuqtalar $M_1(-4, -5)$ va $M_2(2, 31)$ bo'lar ekan. ◀

Murakkab funksiyaning hosilasi.

3.6-Teorema (murakkab funksiyaning differentsiallashtirish). Agar $u = f(x)$ funksiya a nuqtada differentsiallanuvchi, $y = g(u)$ funksiya esa mos $A = f(a)$ nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda $g(f(x))$ murakkab funksiya ham a nuqtada differentsiallanuvchi bo'ladi va

$$[g(f(x))]'_{x=a} = g'(A) \cdot f'(a) \quad (3.29)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

► $x = a$ qiymatga Δx orttirma beramiz. U holda $u = f(x)$ funksiya Δu orttirma va agar $\Delta u \neq 0$ bo'lsa, $y = g(u)$ funksiya o'z navbatida Δy orttirma oladi. Teorema shartiga ko'ra $y = g(u)$ funksiya A nuqtada differentsiallanuvchi, shuning uchun 3.2-Teorema ko'ra Δy orttirmani

$$\Delta y = g'(A) \cdot \Delta u + \alpha(\Delta u) \cdot \Delta u \quad (3.30)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, bu yerda $\alpha(\Delta u)$ funksiya $\Delta u = 0$ nuqtada cheksiz kichik. Umuman olganda $\alpha(\Delta u)$ funksiya $\Delta u = 0$ nuqtada aniqlanmagan va biz $\alpha(0) = 0$ deb olib, uni bu nuqtada ham aniqlaymiz. U holda $\alpha(\Delta u)$ funksiya $\Delta u = 0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

(3.30) tenglikning ikkala tomonini Δx orttirmaga bo'lamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = g'(A) \frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u) \frac{\Delta u}{\Delta x}. \quad (3.31)$$

Teorema shartiga ko'ra $u = f(x)$ funksiya a nuqtada differentsiallanuvchi va demak bu nuqtada uzluksiz hamdir. Shuning uchun $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta u = 0$ va bu o'z navbatida $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \alpha(\Delta u) = 0$ tenglikka olib keladi.

Bundan tashqari teorema shartidan $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(a)$ tenglik ham kelib chiqadi. Demak (3.31) tenglikning o'ng tomoni $\Delta x = 0$ nuqtada $g'(A) \cdot$

$f'(a)$ qiymatga teng limitga ega ekan. Shuning uchun (3.31) tenglikning chap tomoni ham $\Delta x = 0$ nuqtada limitga ega bo'ladi, ya'ni $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ limit mavjud va u $g(f(x))$ murakkab funksiyaning a nuqtadagi hosilasi bo'ladi. (3.31) tenglikda limitga o'tib

$$[g(f(x))]'_{x=a} = g'(A) \cdot f'(a) \quad (3.32)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda $g'(A)$ belgilash $g(u)$ funksiya u bo'yicha olingan hosilaning $A = f(a)$ nuqtadagi qiymatini anglatadi. ◀

(3.32) tenglikni

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} \quad \text{yoki} \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x \quad (3.33)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

3.16-Misol. $y = e^{\text{tg } x}$ funksiyaning hosilasini toping.

► Bu yerda y erkin x argumentning murakkab funksiyasi: $y = e^u$ va $u = \text{tg } x$. Shuning uchun

$$y'_x = (e^u)'_u \cdot u'_x = e^u \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = e^{\text{tg } x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}. \quad \blacktriangleleft$$

Agar murakkab funksiya bir nechta superpozitsiyadan hosil qilingan bo'lsa, uning hosilasi murakkab funksiyaning differensiallash qoidasini ketma-ket qo'llab topiladi. Bu qoida odatda oraliq argumentlarni oshkora ko'rinishda kiritilmasdan qo'llaniladi.

3.17-Misol. $y = \sin^3(x^2 + x)$ funksiyaning hosilasini toping.

$$\begin{aligned} \text{► } y' &= 3(\sin^2(x^2 + x))(\sin(x^2 + x))' = \\ &= 3 \sin^2(x^2 + x) \cos(x^2 + x) (x^2 + x)' = \\ &= 3 \sin^2(x^2 + x) \cos(x^2 + x) (2x + 1). \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Logarifmlab differensiallash. $y = u^v$, ($u > 0$) ko'rsatkichli-darajali funksiyaning qaraymiz, bu yerda u va v lar erkin x argumentning differensiallanuvchi funksiyalari. Funksiyaning logarifmlaymiz:

$$\ln y = v \ln u \quad (3.34)$$

(2.25) asosiy logarifmik ayniyatdan berilgan funksiyaning

$$y = e^{v \ln u} \quad (3.35)$$

ko'rinishda yozib olamiz. u va v funksiyalar differensiallanuvchi bo'lganligi sababli (3.35) murakkab funksiya bir vaqtning o'zida $u > 0$ va v funksiya aniqlanadigan x nuqtalarda differensiallanuvchi bo'ladi. (3.34) tenglikning ikkala tomonini x bo'yicha differensiallaymiz:

$$\frac{1}{y} y' = v' \ln u + v \frac{1}{u} u'.$$

Bundan esa $y' = y(u'v/u + v' \ln u)$, yoki y o'rniga ko'rsatkichli-darajali ifodani qo'yib, I. Bernulli tomonidan isbotlangan

$$y' = y \left(\frac{v}{u} u' + v' \ln u \right)$$

formulani hosil qilamiz. Hosilani topishning bunday usuli *logarifmlab differensiallash* deb ataladi.

3.18-Misol. $y = x^{\cos x}$ funksiyani differensiallang.

► Funksiyani logarifmlaymiz: $\ln y = \cos x \cdot \ln x$ va tenglikning ikkala tomonini differensiallaymiz $y'/y = -\sin x \cdot \ln x + (\cos x)/x$ va natijada

$$y' = y \left(\frac{\cos x}{x} - \sin x \cdot \ln x \right) = x^{\cos x - 1} \cos x - x^{\cos x} \sin x \cdot \ln x. \quad \blacktriangleleft$$

Teskari funksiyaning hosilasi.

3.7-Teorema. $y = f(x)$ funksiya $x = a$ nuqtada noldan farqli chekli $f'(a)$ hosilaga ega va bundan tashqari mos $y = b = f(a)$ nuqtada uzluksiz bo'lgan uning bir qiymatli teskari $x = g(y)$ funksiyasi mavjud bo'lsin. U holda $g'(b)$ hosila ham mavjud va u

$$g'(b) = 1/f'(a) \quad (3.36)$$

tenglikni qanoatlantiradi.

► $y = b$ qiymatga Δy orttirma beramiz. U holda $x = g(y)$ funksiya ham Δx orttirma oladi. $y = f(x)$ funksiyaning bir qiymatligi tufayli $\Delta y \neq 0$ bo'lganda Δx ham noldan farqli bo'ladi. Shuning uchun

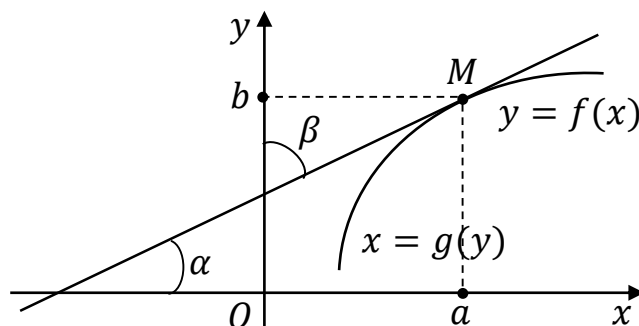
$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\Delta y / \Delta x} \quad (3.37)$$

nisbat ma'noga ega. (3.37) tenglik o'ng tomonidagi kasrning maxraji $f'(a) \neq 0$ limitga intiladi, ya'ni (3.37) tenglikning o'ng tomoni chekli $1/f'(a)$ limitga ega.

Demak bu tenglikning chap tomoni ham chekli limitga ega bo'ladi, 3.1-Ta'rifga ko'ra bu limit $g'(b)$ hosilaga teng bo'ladi. Shunday qilib, $x = g(y)$ teskari funksiya b nuqtada differensiallanuvchi va uning hosilasi (3.36) tenglik bilan topiladi. ◀

Endi (3.36) tenglikning geometrik talqinini ko'raylik. xOy koordinatalar tekisligida qaralgan $y = f(x)$ va $x = g(y)$ funksiyalarning grafiklari ustma-ust tushadi (3.16-rasm).

Shuning uchun grafikning $M(a, b)$ nuqtasida o'tkazilgan



3.16-rasm

urinmaning koordinata o'qlari bilan tashkil qilgan α va β burchaklari uchun $\alpha + \beta = \pi/2$ tenglik o'rinli va hosilaning geometrik ma'nosi bo'yicha ham o'rinli:

$$g'(b) = \operatorname{tg} \beta = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \alpha \right) = \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = \frac{1}{f'(a)}.$$

3.19-Misol. (3.36) formulani *teskari trigonometrik funksiyalarning* hosilasini topishga qo'llaymiz.

► 1. $y = \arcsin x$, ($x \in [-1, 1]$, $y \in [-\pi/2, \pi/2]$) funksiya barcha $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ uchun $x' = \cos y > 0$ hosilaga ega bo'lgan $x = \sin y$ funksiyaning teskari funksiyasi. U holda 3.7-Teoremaga ko'ra barcha $x \in (-1, 1)$ uchun y' hosila mavjud va

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{x'} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

y funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli $x = \pm 1$ nuqtalar kiritilmagan, chunki ularga mos $y = \pm \pi/2$ nuqtalarda $x' = \cos y = 0$.

2. $y = \operatorname{arctg} x$, ($x \in \mathbb{R}$, $y \in (-\pi/2, \pi/2)$) funksiya barcha $y \in (-\pi/2, \pi/2)$ uchun $x' = 1/\cos^2 y > 0$ hosilaga ega bo'lgan $x = \operatorname{tg} y$ funksiya teskari funksiya. Demak, 3.7-Teoremaga ko'ra barcha $x \in \mathbb{R}$ nuqtalarda y' hosila mavjud va

$$y' = (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{x'} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Xuddi shu singari ixtiyoriy $x \in (-1, 1)$ uchun

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}},$$

va barcha $x \in \mathbb{R}$ uchun

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1 + x^2}$$

formulalarni hosil qilish mumkin. ◀

3.20-Misol. $y = \arcsin(2x/(1 + x^2))$ funksiyaning hosilasini toping.

$$\begin{aligned} \text{► } y' &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{2(1+x^2) - 4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{|1-x^2|(1+x^2)} = \\ &= \begin{cases} \frac{2}{1+x^2} & \text{agar } |x| < 1, \\ -\frac{2}{1+x^2} & \text{agar } |x| > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$|x| = 1$ bo'lganda hosila mavjud emas. ◀

Giperbolik funksiyalarning hosilalari.

Aniqlanilishiga ko'ra giperbolik sinus $\text{sh } x = (e^x - e^{-x})/2$, giperboli kosinus esa $\text{ch } x = (e^x + e^{-x})/2$ ko'rinishda bo'ladi. Bu yerda hosila olish qoidalarini qo'llab,

$$(\text{sh } x)' = \left(\frac{(e^x - e^{-x})}{2} \right)' = \frac{1}{2} ((e^x)' - (e^{-x})') = \frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) = \text{ch } x,$$

$$(\text{ch } x)' = \left(\frac{(e^x + e^{-x})}{2} \right)' = \frac{1}{2} ((e^x)' + (e^{-x})') = \frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) = \text{sh } x$$

hosilalarni topamiz.

Aniqlanilishiga ko'ra giperbolik tangens $\text{th } x = (\text{sh } x)/\text{ch } x$ va giperbolik kotangens $\text{cth } x = (\text{ch } x)/\text{sh } x$ ko'rinishda bo'ladi. Bo'linmani differensiallash qoidasidan va $\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x = 1$ ayniyatdan foydalanib,

$$\begin{aligned} (\text{th } x)' &= \left(\frac{\text{sh } x}{\text{ch } x} \right)' = \frac{(\text{sh } x)' \cdot \text{ch } x - (\text{ch } x)' \cdot \text{sh } x}{\text{ch}^2 x} = \\ &= \frac{\text{ch}^2 x - \text{sh}^2 x}{\text{ch}^2 x} = \frac{1}{\text{ch}^2 x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\text{cth } x)' &= \left(\frac{\text{ch } x}{\text{sh } x} \right)' = \frac{(\text{ch } x)' \cdot \text{sh } x - (\text{sh } x)' \cdot \text{ch } x}{\text{sh}^2 x} = \\ &= \frac{\text{sh}^2 x - \text{ch}^2 x}{\text{sh}^2 x} = -\frac{1}{\text{sh}^2 x} \end{aligned}$$

giperbolik tangens va kotangens funksiyalarining hosilalarini topdik.

Parametrik shaklda berilgan funksiyaning hosilasi. Tekislikda xOy to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini kiritamiz. $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalar $\alpha \leq t \leq \beta$ kesmada uzluksiz bo'lsin. Agar t parametrni vaqt sifatida qarasak, u holda ko'rsatilgan funksiyalar koordinatalari xOy tekislikda

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta, \quad (3.38)$$

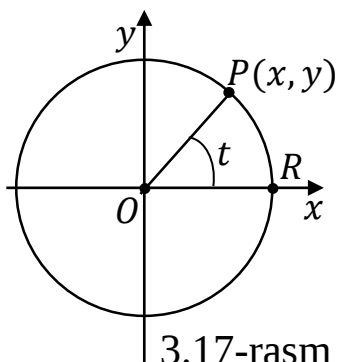
bo'lgan P nuqtaning harakat qonunini aniqlaydi.

3.7-Ta'rif. (x, y) koordinatalari (3.38) tenglamalar bilan aniqlanadigan tekislikning barcha $\{P\}$ nuqtalari to'plami yassi egri chiziq deb ataladi. Bu holda egri chiziq parametrik shaklda berilgan deyiladi.

3.21-Misol. Markazi koordinatalar boshida bo'lgan R radiusli aylanani (3.17-rasm)

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (3.39)$$

parametrik tenglama bilan berish mumkin, bu yerda t parametr Ox o'q bilan $P(x, y)$ nuqta orqali o'tkazilgan OP radius vektor orasidagi burchakning radian o'lchovi. ◀



3.17-rasm

Agar (3.38) sistemada t parametr yo'qotilsa x va y qatnashgan bitta tenglama qoladi va natijada berilgan egri chiziq $F(x, y) = 0$ tenglama bilan aniqlanadi. Masalan, (3.38) tenglamalarning o'ng va chap tomonlarini kvadratga ko'tarib, so'ngra hadma-had qo'shsak t parametr yo'qoladi va natijada aylananing bizga ma'lum $x^2 + y^2 = R^2$ tenglamasiga ega bo'lamiz. Ammo t parametrni har

doim ham yo'qotib bo'lavermaydi. Egri chiziq parametrik shaklda berilgan holda ham egri chiziqqa o'tkazilgan urinmani topish uchun y o'zgaruvchidan x o'zgaruvchi bo'yicha hosila olish kerak bo'ladi.

x va y o'zgaruvchilar t parametrning

$$x = x(t), y = y(t), t \in (\alpha, \beta)$$

funksiyalari sifatida berilgan bo'lsa, y o'zgaruvchining x o'zgaruvchiga funksional bog'liqligi parametrik shaklda berilgan deyiladi.

Funksiya parametrik shaklda berilganda y funksiyadan x bo'yicha hosilani hisoblash masalasini qaraymiz.

$x = x(t)$, $y = y(t)$ funksiyalar biror (α, β) oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. $x = x(t)$ funksiyaning $t = g(x)$ teskari funksiyasi mavjud bo'lsin. U holda

$$y = y[g(x)] \quad (3.40)$$

murakkab funksiyani hosil qilamiz. Faraz qilaylik, $x(t)$ va $y(t)$ funksiyalar $t \in (\alpha, \beta)$ nuqtada differensiallanuvchi va $x'(t) \neq 0$, $t = g(x)$ funksiya esa mos x nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda murakkab funksiyani differensiallash qoidasiga ko'ra, $y = y[g(x)]$ murakkab funksiya ham x nuqtada differensiallanuvchi bo'ladi va

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x \quad (3.41)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Teskari funksiyani differensiallash qoidasiga binoan $t'_x = 1/x'_t$ bo'ladi va uni (3.41) tenglikka qo'ysak

$$y'_x = y'_t \cdot \frac{1}{x'_t} = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Shunday qilib, parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasi yana o'z navbatida

$$\begin{cases} y'_x = \frac{y'(t)}{x'(t)}, & \alpha \leq t \leq \beta \\ x = x(t), \end{cases} \quad (3.42)$$

parametrik shaklda berilgan funksiya bo'lar ekan.

3.22-Missol. $\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t, \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 2\pi$ aylana uchun y'_x hosilani toping.

► x'_t, y'_t hosilalarni topamiz: $x'_t = (R \cos t)' = -R \sin t$, $y'_t = (R \sin t)' = R \cos t$. Ularni yuqoridagi parametrik shaklda berilgan funksiyaning differentsiallashtirish formulasiga qo'yib

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{R \cos t}{-R \sin t} = -\operatorname{ctg} t$$

hosilani topamiz. ◀

3.23-Missol. $\begin{cases} x = t^2 + t - 5, \\ y = 2t^2 - t + 2 \end{cases}$ parametrik shaklda berilgan egri chiziqqa $P(-3, 3)$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning Ox o'q bilan tashkil qilgan burchagini toping.

► Dastlab t parametrning urinish nuqtasiga mos keluvchi t_0 qiymatini topamiz. Bu qiymat

$$\begin{cases} t^2 + t - 5 = -3, \\ 2t^2 - t + 2 = 3 \end{cases}$$

tenglamalarning har birini qanoatlantirishi lozim. Birinchi tenglamaning ildizlari $t_1 = 1, t_2 = -2$ ikkinchisidagi esa $t_1 = 1, t_2 = -1/2$. Demak, egri chiziqning berilgan P nuqtasiga $t_0 = 1$ qiymat mos kelar ekan. Endi egri chiziq P nuqtasida o'tkazilgan urinmaning y'_x hosilaning $x = -3$ nuqtadagi qiymatiga teng bo'lgan burchak koeffitsiyentini topamiz:

$$y'_x|_{x=-3} = \frac{y'_t}{x'_t} \Big|_{t=1} = \frac{2t+1}{4t-1} \Big|_{t=1} = \frac{3}{3} = 1,$$

(3.7) formulaga ko'ra $\operatorname{tg} \alpha = 1$ yoki $\alpha = 45^\circ$. ◀

Oshkormas ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasi. x va y o'zgaruvchilarning qiymatlari o'zaro

$$F(x, y) = 0 \quad (3.43)$$

tenglama bilan bog'langan bo'lsin. Agar biror (a, b) oraliqda aniqlangan $y = f(x)$ funksiyaning (3.43) tenglamaga qoyilganda uni x o'zgaruvchiga nisbatan ayniyatga aylantirsa, (3.43) tenglama $y = f(x)$ funksiyaning oshkormas analitik usulda aniqlaydi deb gapiriladi. Bunday funksiyaning o'zini esa oshkormas funksiya deb yuritiladi. Oshkormas ko'rinishda

berilgan differensiallanuvchi funksiyaning hosilasini hisoblash uchun (3.43) tenglikning ikkala tomonini ham murakkab funksiyaning differensiallash (3.29) qoidasiga ko'ra x bo'yicha differensiallab, so'ngra hosil bo'lgan $F'_x(x, f(x)) = 0$ tenglamani $y' = f'(x)$ hosilaga nisbatan yechish kerak.

3.24-Misol. $y^4 + xy - x^2 = 0$ tenglama bilan berilgan $y = f(x)$ oshkormas funksiyaning y' hosilasini toping.

► y o'zgaruvchini x o'zgaruvchining funksiyasi deb hisoblab tenglamaning ikkala tomonini murakkab funksiyaning differensiallash qoidasiga ko'ra differensiallaymiz:

$$4y^3 y'_x + y + xy'_x - 2x = 0,$$

bu yerdan

$$y'_x = \frac{2x - y}{4y^3 + x}. \quad \blacktriangleleft$$

3.25-Misol. $x^2 + 3xy - y^2 + 2x - 3y + 1 = 0$ ikkinchi tartibli chiziqlarning $M(1, 2)$ nuqtasida o'tkazilgan urinmaning burchak ko'effitsiyentini toping.

► Tenglamani x bo'yicha differensiallaymiz: $2x + 3y + 3xy'_x - 2yy'_x + 2 - 3y'_x = 0$. Bu yerda $x = 1$ va $y = 2$ deb hisoblab, hosilaning berilgan nuqtadagi qiymatini topamiz $y'_x|_{(1,2)} = 2$. U holda (3.7) formulaga ko'ra $k = 2$. ◀

Funksiyaning differensiallashning asosiy formula va qoidalari.

Elementar funksiylarning hosilalari (murakkab funksiya holida).

- | | |
|--|--|
| 1. $(C)' = 0, (C = \text{const}).$ | 7. $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'.$ |
| 2. $(u^a)' = au^{a-1} \cdot u',$
$a = \frac{1}{2}$ bo'lsa, $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'.$
$a = -1$ bo'lsa, $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'.$ | 8. $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'.$ |
| 3. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u', (a > 0, a \neq 1),$
$(e^u)' = e^u \cdot u'.$ | 9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$ |
| 4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u', (a > 0, a \neq 1).$
$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'.$ | 10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'.$ |
| 5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'.$ | 11. $(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$ |
| 6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'.$ | 12. $(\operatorname{arcctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'.$ |
| | 13. $(\operatorname{sh} u)' = \operatorname{ch} u \cdot u'.$ |
| | 14. $(\operatorname{ch} u)' = \operatorname{sh} u \cdot u'.$ |
| | 13. $(\operatorname{th} u)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 u} \cdot u'.$ |
| | 16. $(\operatorname{cth} u)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 u} \cdot u'.$ |

Differensiallashning asosiy qoidalari.

$u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi, $f(u)$ funksiya esa u nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin.

$$\begin{aligned} y &= Cu, (C = \text{const}) & y' &= Cu' \\ y &= u \pm v & y' &= u' \pm v' \\ y &= uv & y' &= u'v + uv' \\ y &= \frac{u}{v}, (v \neq 0) & y' &= \frac{u'v - uv'}{v^2} \\ y &= f(u), u = u(x) & y'_u &= f'_u \cdot u' \\ y &= f(x), x = f^{-1}(y) & x'_y &= \frac{1}{y'_x}, (y'_x \neq 0) \\ \begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t) \end{cases} & & y'_x &= \frac{y'_t}{x'_t}, x'_t \neq 0 \end{aligned}$$

3.4. Differensial

Differensialning ta'rif. $y = f(x)$ funksiya x nuqtaning biror atrofida aniqlangan va bu nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda argumentning Δx orttirmasiga mos keluvchi funksiyaning Δy orttirmasini

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x \quad (3.44)$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin, bu yerda $\alpha(\Delta x)$ funksiya $\Delta x = 0$ nuqtada cheksiz kichik.

3.8-Ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya x nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, funksiya orttirmasining $A \cdot \Delta x$ qismi $A \neq 0$ bo'lganda, $y = f(x)$ funksiyaning differensial deb ataladi va u dy yoki df orqali belgilanadi:

$$dy = A \cdot \Delta x. \quad (3.45)$$

$A \neq 0$ bo'lganda funksiya differensialini funksiya Δy orttirmasining bosh chiziqli qismi deb ataladi, chunki (3.44) tenglikda $\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ funksiya $\Delta x = 0$ nuqtada $A \cdot \Delta x$ ko'paytmaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik.

$A = 0$ bo'lsa, dy differensial nolga teng deb hisoblanadi. 3.2-Teoremaga ko'ra $A = f'(x)$ bo'ladi, shu sababli (3.45) formula

$$dy = f'(x)\Delta x \quad (3.46)$$

ko'rinishni oladi. Funksiya differensial tushunchasi bilan bir qatorda erkin x o'zgaruvchining dx differensial tushunchasini

$$dx = \Delta x \quad (3.47)$$

tenglik bilan kiritamiz. U holda $y = f(x)$ funksiya differensialini

$$dy = f'(x)dx \quad (3.48)$$

shaklda yozish mumkin. Bu yozuvdan o'z navbatida $f'(x) = dy/dx$ tenglikni hosil qilamiz. Hosilaning bunday belgilanishini 3.1.da kiritgan

edik, uni dy funksiya differensialining dx argument differensialiga nisbati sifatida qarash mumkin.

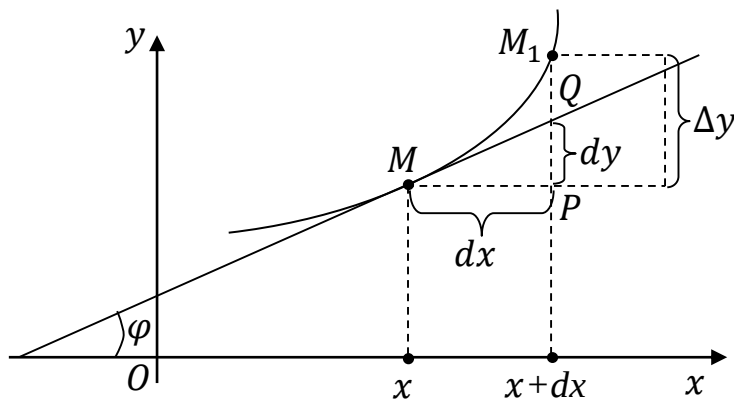
Differensialning geometrik ma'nosi. $y = f(x)$ tenglama bilan egri chiziq berilgan bo'lsin, bu yerda $f(x)$ funksiya $x \in (a, b)$ nuqtada differensiallanuvchi funksiya (3.18-rasm). $M(x, y)$ nuqtada bu egri chiziqqa urinma o'tkazamiz. Egri chiziqda absissasi $x + dx$ bo'lgan M_1 nuqtani belgilaymiz. Ma'lumki, $f'(x)$ urinmaning burchak koeffitsiyenti, ya'ni $f'(x) = \operatorname{tg} \varphi$.

MPQ uchburchakni qaraymiz. Rasmdan ko'rinib turibdiki

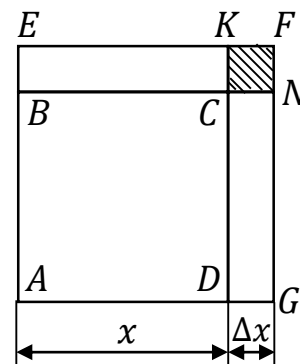
$$PQ = MP \cdot \operatorname{tg} \varphi = f'(x)dx = dy.$$

Shunday qilib, $y = f(x)$ funksiyaning $dy = f'(x)dx$ differensial $y = f(x)$ egri chiziqqa absissasi x bo'lgan nuqtaga o'tkazilgan urinmaning urinish nuqtasidan $x + dx$ nuqtaga o'tganda olgan ortirmasiga teng ekan.

3.18-rasm va (3.44)-(3.46) tengliklardan $M_1Q = \Delta y - dy = \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.



3.18-rasm



3.19-rasm

Δy va dy orasidagi farqni tomoni x bo'lgan $ABCD$ kvadrat yuzini aniqlaydigan $y = x^2$ funksiya misolida ko'ramiz (3.19-rasm). x qiymatga Δx ortirma berib tomoni $x + \Delta x$ bo'lgan $AEGF$ kvadratni hosil qilamiz va uning yuzi $(x + \Delta x)^2$ qiymatga teng. U holda funksiyaning $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$ ortirmasini geometrik talqin qilinsa, 3.19-rasmga ko'ra $BEFN$ va $DCNG$ to'g'ri to'rtburchaklar yuzlari yig'indisiga teng. $y = x^2$ funksiyaning x qatdagi $dy = 2x\Delta x$ differensial $BCKE$ va $DCNG$ to'g'ri to'rtburchaklar yuzlari yig'indisiga teng, $\Delta y - dy = (\Delta x)^2$ ayirma esa $CKFN$ kvadrat yuziga mos keladi.

3.18 va 3.19-rasmlardan ko'rinib turibdiki, Δx ortirma qanchalik kichik bo'lsa, Δy va dy orasidagi farq shunchalik kichik bo'ladi.

Differensialni hisoblash qoidalari. $y = f(x)$ funksiyaning dy differensial y' hosiladan faqat dx ko'paytuvchi bilangina farq qilganligi sababli, differensialni hisoblash uchun differensiallash qoidalaridan va elementar funksiyalar hosilalarning formulalaridan foydalanish mumkin.

1. $y = Cu, \quad (C = \text{const}) \quad dy = Cdu$
2. $y = u \pm v \quad dy = du \pm dv$
3. $y = uv \quad dy = u dv + v du$
4. $y = \frac{u}{v}, \quad (v \neq 0) \quad dy = \frac{v du - u dv}{v^2}$

► Haqiqatdan ham, masalan differensiallanuvchi $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalarning ko'paytmasi uchun: $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + uv')dx = vu'dx + uv'dx = u dv + v du$. ◀

Murakkab funksiyaning differensialli. Murakkab funksiyaning differensiallash qoidasi differensialning muhim bir xossasini olish imkonini beradi. $y = y(x)$ erkin x o'zgaruvchining differensiallanuvchi funksiyasi bo'lsin. U holda (3.48) formulaga ko'ra x nuqtada $dy = y'(x)dx$.

Endi $y = f(u)$ o'zining u argumenti bo'yicha differensiallanuvchi, u argument esa o'z navbatida x argumentning differensiallanuvchi funksiyasi, ya'ni $u = u(x)$ bo'lsin. U holda $y(x) = f(u(x))$ murakkab funksiya x argument bo'yicha differensiallanuvchi bo'ladi. x erkin argumentning funksiyalari sifatida differensiallanuvchi $y(x)$ va $u(x)$ funksiyalar uchun

$$dy = y'(x)dx \text{ va } du = u'(x)dx \quad (3.49)$$

tengliklarni yozish mumkin. Ammo murakkab funksiyaning differensiallashning (3.29) qoidasiga ko'ra $y'(x) = f'(u)u'(x)$. Bu ifodani (3.49) formulalarning birinchisiga qo'yib, hamda ikkinchisini inobatga olsak $y(x) = f(u(x))$ bo'lganda

$$dy = f'(u)u'(x)dx = f'(u)du \quad (3.50)$$

tenglikni hosil qilamiz, ya'ni natijada differensial yozuvining dastlabki (3.46) shakliga keldik, ammo bu yerda u erkin o'zgaruvchi emas. Boshqacha qilib aytganda, differensialni yozish shakli funksiya argument erkinmi yoki boshqa argumentning differensiallanuvchi funksiyasimi bunga bog'liq emas ekan. Differensial yozuvi shaklining *invariantlik* (o'zgarmaslik) xossasi xuddi ana shundan iborat.

Bu xossadan kelib chiqadiki, x argument erkinmi yoki boshqa argumentning funksiyasimi, qat'iy nazar har doim y'_x hosilani dy va dx differensiallarning nisbati sifatida ifodalash mumkin. Muhimi ikkala differensial ham erkin deb qabul qilingan o'zgaruvchi bo'yicha hisoblanishi kerak.

Differensialning taqribiy hisoblashlarga tadbiqu. $y = f(x)$ funksiya a nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin, u holda argumentning Δx orttirmasiga mos keluvchi funksiyaning Δy orttirmasini

$$\Delta y = f'(a)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x$$

ko‘rinishda tasvirlash mumkin, bu yerda $f'(a)\Delta x = dy(a)$ va $\alpha(\Delta x)$ funksiya $\Delta x = 0$ nuqtada cheksiz kichik.

Agar $dy(a) \neq 0$ va demak $f'(a) \neq 0$ bo‘lsa, u holda

$$\frac{\Delta y}{dy} = 1 + \frac{\alpha(\Delta x)}{f'(a)}.$$

O‘ng tomondagi ikkinchi qo‘shiluvchi $\Delta x = 0$ nuqtada cheksiz kichik, shu sababli $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y/dy = 1$, ya’ni Δy va dy cheksiz kichiklar ekvivalent:

$\Delta y \sim_{\Delta x \rightarrow 0} dy$, ularning $\Delta y - dy$ ayirmasi esa o‘zlariga nisbatan yuqoririoq tartibli cheksiz kichik. Shuning uchun Δy orttirmaning taqribiy qiymati sifatida dy miqdorni olishimiz mumkin: $\Delta y \approx dy$.

Shunday qilib, agar $dy(a) \neq 0$ bo‘lsa, u holda funksiyaning $a + \Delta x$ nuqtadagi qiymatini hisoblash uchun

$$f(a + \Delta x) \approx f(a) + f'(a)\Delta x \quad (3.51)$$

formuladan foydalanish mumkin. Bunda $|\Delta x|$ etarlicha kichik bo‘lsa absolyut va nisbiy xatolik ham xoxlagancha kichik bo‘ladi.

Masalan, $y = x^s, s \in \mathbb{R}$ bo‘lsin. U holda

$$\Delta y = (a + \Delta x)^s - a^s, dy(a) = sa^{s-1}\Delta x.$$

$|\Delta x|$ kichik qiymatlarni qabul qilganda

$$(a + \Delta x)^s \approx a^s + dy(a)$$

yoki

$$(a + \Delta x)^s \approx a^s + sa^{s-1}\Delta x$$

deb olamiz. Xususiyl holda, $s = 1/2$ bo‘lsa

$$\sqrt{a + \Delta x} \approx \sqrt{a} + \frac{1}{2\sqrt{a}}\Delta x, a > 0. \quad (3.52)$$

3.26-Misol. Taqribiy hisoblang $\sqrt{3,996}$.

► $a = 4, \Delta x = -0,004$ deb olsak, (3.52) formulaga ko‘ra

$$\sqrt{3,996} = \sqrt{4 + (-0,004)} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}}(-0,004) = 1,999$$

qiymatni hosil qilamiz. ◀

Funksiyaning Δy orttirmasini uning dy differensial bilan almashtirishning qulaylik tomoni shundan iboratki, dy differensial Δx orttirmaga chiziqli bog‘liq, Δy esa murakkabiroq bog‘liqlikdan iborat. Agar $x = a + \Delta x$ va $\Delta x = x - a$ deb olsak, (3.51) formula

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad (3.53)$$

ko‘rinishni oladi. Shunday qilib, x argumentning qiymati a qiymatga yaqin bo‘lganda (3.53) tenglikka ko‘ra $f(x)$ funksiya chiziqli funksiya bilan

almashtirilar ekan. Geometrik jihatdan buni $y = f(x)$ egri chiziq $(a, f(a))$ nuqta atrofida egri chiziqqa o'tkazilgan urinmaning kesmasi bilan almashtiriladi deb talqin qilish mumkin.

Xususiyl holda, $a = 0$ bo'lsa, (3.53) formulani

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu yerda $f(x)$ o'rniga turli elementar funksiyalarni qo'yib, x o'zgaruvchining nolga yaqin qiymatlari uchun bir qator taqribiy formulalarni olish mumkin:

$$\sin x \approx x, \operatorname{tg} x \approx x, e^x \approx 1 + x, \ln(1 + x) \approx x,$$

$$(1 + x)^s \approx 1 + sx \text{ (xususiyl holda, } \sqrt{1 + x} \approx 1 + x/2) \quad (3.54)$$

Bu taqribiy tengliklar $x = 0$ nuqtada cheksiz kichik bo'lgan funksiyalarning ekvivalentlik munosabatlariga mos keladi.

3.27-Misol. Ushbu $e^{0.1}$, $\ln 1,25$ qiymatlarni taqribiy hisoblaymiz.

► (3.54) formulaga ko'ra $x = 0,1$ qiymatda e^x funksiya uchun $e^{0.1} \approx 1,1$ va $x = 0,25$ qiymatda $\ln(1 + x)$ funksiya uchun $\ln 1,25 \approx 0,25$ qiymatlarni olamiz. ◀

3.5. Yuqori tartibli hosila va differensiallar

Yuqori tartibli hosilalar. Agar $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqning barcha nuqtalarida $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda $f'(x)$ ham x o'zgaruvchining (a, b) oraliqda aniqlangan funksiyasi bo'ladi. Bunday aniqlangan $f'(x)$ funksiya ham $x \in (a, b)$ nuqtada hosilaga ega bo'lishi mumkin. Bu hosilani biz $f(x)$ funksiyadan olingan ikkinchi tartibli hosila deb ataymiz va uni $f''(x)$ yoki $f^{(2)}(x)$ orqali belgilaymiz. Shunday qilib

$$f''(x) = (f'(x))'.$$

Yuqoriroq tartibli hosilalar xuddi shu singari aniqlanadi, chunonchi, $f(x)$ funksiyaning n – tartibli hosilasi uning $(n - 1)$ – tartibli hosilasidan hosila olib aniqlanadi:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'. \quad (3.55)$$

Hosilaning tartibini daraja bilan farqlash uchun u qavsqa olingan.

$f^{(n)}(x)$ hosilani topish uchun dastlab $f'(x)$ hosila olinadi, so'ngra $f'(x)$ hosiladan yana hosila olinib $f''(x)$ topiladi, va hokazo kerakli tartibli hosilani olmaguncha davom ettiriladi. Shunday qilib, yuqori tartibli hosilalar differensiallashning ma'lum formula va qoidalari asosida hisoblanar ekan.

3.28-Misol. $y = e^{kx}$, ($k = \text{const}$) funksiyaning n – tartibli hosilasini topamiz.

► Ketma-ket differensiallab

$$y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}, \dots$$

Matemati induksiya metodiga ko'ra, ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun

$$(e^{kx})^{(n)} = k^n e^{kx}, n = 1, 2, \dots \blacktriangleleft$$

3.29-Misol. $y = \sin x$ va $y = \cos x$ funksiyalarning n – tartibli hosilasini topamiz.

► Ketma-ket differensiallab

$$\begin{aligned} y' &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad y'' = -\sin x \\ &= \sin(x + \pi) = \sin\left(x + 2 \frac{\pi}{2}\right), \dots \end{aligned}$$

hosilalarni topamiz. Matematik induksiya metodi bilan ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Xuddi shu singari ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n \frac{\pi}{2}\right)$$

tenglikni hosil qilish mumkin. ◀

(a, b) oraliqda aniqlangan va oraliqning barcha $x \in (a, b)$ nuqtalarida n – tartibli hosilaga ega bo'lgan funksiyalar to'plamini $C^n(a, b)$ orqali belgilanadi. Barcha $x \in (a, b)$ nuqtalarda ixtiyoriy tartibli hosilaga ega bo'lgan funktsiyani cheksiz marta differensiallanuvchi funksiya deb ataymiz va $f(x) \in C^\infty(a, b)$ ko'rinishda yozamiz. $e^x, \sin x, \cos x$ funksiyalar $(-\infty, +\infty)$ oraliqda cheksiz marta differensiallanuvchi.

To'rtinchi va undan yuqori tartibli hosilalarni ba'zan qavslarsiz rim raqamlarida belgilanadi, ya'ni $y^{IV}, y^V, y^{VI}, \dots$ ko'rinishda yoziladi.

Ikkinchi tartibli hosilaning fizik ma'nosi. Moddiy nuqta $s = S(t)$ qonun bo'yicha to'g'ri chiziqli harakatlansin. U holda ma'lumki, vaqtning t momentidagi oniy tezligi $v(t) = S'(t)$ tenglikni qanoatlantiradi.

Vaqtning t momentida material nuqtaning tezligi v bo'lsin. Agar nuqta tekis harakatlanmayotgan bo'lsa, u holda t momentdan keyin o'tadigan Δt vaqt mobaynida tezlik o'zgaradi va Δv orttirma oladi.

Δt vaqt mobaynidagi o'rtacha tezlanish deb Δv tezlik orttirmasining Δt vaqt orttirmasiga nisbatiga aytiladi:

$$a_{o'rt} = \frac{\Delta v}{\Delta t}.$$

Δt orttirma qanchalik kichik bo'lsa, o'rtacha tezlanish shunchalik vaqtning t momentidai tezlanishiga yaqin bo'ladi.

t momentdagi tezlanish deb vaqt orttirmasi nolga intilganda tezlik orttirmasining vaqt orttirmasiga nisbatining limitiga aytiladi:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t},$$

boshqacha qilib aytganda vaqtning t momentidagi tezlanishi v tezlikdan t vaqt bo'yicha olingan hosilaga teng ekan:

$$a = v'(t),$$

ammo biz yuqorida $v = S'(t)$ ekanligini ta'kidlab o'tgan edik, demak u holda

$$a = (S'(t))' = S''(t),$$

ya'ni to'g'ri chiziqli harakatning tezlanishi bosib o'tilgan yo'ldan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga teng ekan.

3.30-Misol. Erkin tushayotgan jismning bosib o'tgan yo'li vaqtga

$$s(t) = gt^2/2 + v_0 t + s_0 \quad (3.56)$$

qonuniyat bilan bog'langan, bu yerda $g = 9,8 \frac{m}{sek^2}$ — erkin tushish tezlanishi, s_0 bosib o'tilayotgan s yolning $t = 0$ vaqtdagi qiymati $s_0 = s|_{t=0}$.

► (3.56) tenglikni differensiallab

$$v = s'(t) = gt + v_0 \quad (3.57)$$

tezlikni topamiz. Bu tenglikdan $v_0 = v|_{t=0}$ kelib chiqadi. Yana bir marta differensiallab

$$a = v'(t) = s''(t) = g$$

tezlanishni topdik. Aksincha ham o'rinli ekanligini, ya'ni pastga qarab tushayotgan harakat tezlanishi o'zgarmas g bo'lsa, u holda $s_0 = s|_{t=0}$, $v_0 = v|_{t=0}$ shartda uning tezligi (3.56), bosib o'tilgan yo'l esa (3.56) tenglik orqali ifodalanilishini ta'kidlab o'tamiz. ◀

Yig'indi va ko'paytmaning yuqori tartibli hosilalari.

3.8-Teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar x nuqtada n — tartibli hosilaga ega bo'lsa, u holda $u(x) \pm v(x)$ va $u(x) \cdot v(x)$ funksiyalar ham bu nuqtada n — tartibli hosilaga ega va

$$(u(x) \pm v(x))^{(n)} = u^{(n)}(x) \pm v^{(n)}(x) \quad (3.58)$$

$$\begin{aligned} (u(x) \cdot v(x))^{(n)} &= u^{(n)} \cdot v + C_n^1 u^{(n-1)} \cdot v' + C_n^2 u^{(n-2)} \cdot v'' + \dots + \\ &+ C_n^m u^{(n-m)} \cdot v^{(m)} + \dots + u \cdot v^{(n)} = \sum_{i=1}^n C_n^i u^{(n-i)} \cdot v^{(i)} \end{aligned} \quad (3.59)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi, bu yerda $C_n^k = n!/(k!(n-k)!)$ orqali n elementni k tadan qilib guruhlashlar soni belgilangan.

► Ikkala formula ham matematik induksiya metodi bo'yicha isbotlanadi. (3.58) formulaning isbotini o'quvchiga havola qilamiz. Agar $y = u(x) \cdot v(x)$ bo'lsa, u holda

$$y' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$y'' = u'' \cdot v + 2u' \cdot v' + u \cdot v''$$

ya'ni (3.59) formula $n = 1$ va $n = 2$ uchun o'rinli ekan, (3.59) formula ixtiyoriy n uchun o'rinli deb faraz qilib, uning $n + 1$ uchun o'rinli ekanligini ko'rsatamiz. $u^{(n+1)}$ va $v^{(n+1)}$ hosilalar mavjud deb (3.59) tenglikni differensiallaymiz:

$$\begin{aligned} (u(x) \cdot v(x))^{(n+1)} &= ((uv)^{(n)})' = u^{(n)} \cdot v + (C_n^0 + C_n^1)u^{(n)} \cdot v' + \\ &+ (C_n^1 + C_n^2)u^{(n-1)} \cdot v'' + \dots + (C_n^{n-1} + C_n^n)u' \cdot v^{(n)} + \\ &+ u \cdot v^{(n+1)}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

$k \leq n$ uchun

$$\begin{aligned} C_n^{k-1} + C_n^k &= \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} = \\ &= \frac{n!(k+n-k+1)}{k!(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = C_{n+1}^k. \end{aligned}$$

U holda (3.60) tenglik

$$\begin{aligned} (u(x) \cdot v(x))^{(n+1)} &= u^{(n+1)} \cdot v + C_n^1 u^{(n)} \cdot v' + C_n^2 u^{(n-1)} \cdot v'' + \dots + \\ &+ C_{n+1}^n u' \cdot v^{(n)} + u \cdot v^{(n+1)} \end{aligned}$$

ko'rinishni oladi, bu esa (3.59) tenglik $n + 1$ uchun ham o'rinli ekanligini anglatadi. Shunday qilib Leybnis formulasi deb ataluvchi (3.59) formulani isbotladik. ◀

3.31-Misol. Leybnis formulasidan foydalanib $y = x^2 e^x$ funksiyaning $y^{(1001)}$ hosilasini toping.

$$\begin{aligned} \text{► } y^{(1001)} &= \left(\underbrace{e^x}_u \cdot \underbrace{x^2}_v \right)^{(1001)} = (e^x)^{(1001)} \cdot x^2 + \\ &+ C_{1001}^1 (e^x)^{(1000)} \cdot (x^2)' + C_{1001}^2 (e^x)^{(999)} \cdot (x^2)'' + 0 = \\ &= e^x x^2 + 2002 e^x x + 1001 \cdot 10^3 e^x. \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Parametrik va oshkormas ko'rinishda berilgan funksiyalarning yuqori tartibli hosilalari.

$y = f(x)$ funksiya

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

parametrik tenglamalar bilan berilgan bo'lsin va $x(t)$, $y(t)$ funksiyalar barcha $t \in (\alpha, \beta)$ nuqtalarda yetarli tartibda differensiallanuvchi va

$x'(t) \neq 0$ bo'lsin. U holda (3.42) formulaga ko'ra, ixtiyoriy $t \in (\alpha, \beta)$ nuqtada y'_x hosila

$$\begin{cases} y'_x = y'(t)/x'(t), \\ x = x(t), \end{cases} \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

tenglik bilan topiladi. Bu yangi parametrik shaklda berilgan funktsiyani oldingi qoidani qo'llab yana x bo'yicha differensiallash mumkin:

$$\begin{cases} y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t}, \quad \alpha \leq t \leq \beta; \\ x = x(t), \end{cases} \quad \begin{cases} y'''_{xxx} = \frac{(y''_{xx})'_t}{x'_t}, \quad \alpha \leq t \leq \beta; \dots \\ x = x(t), \end{cases}$$

Xususiyl holda, ikkinchi tartibli hosilani keltirib chiqaramiz: bo'linmaning, teskari funktsiyaning hosilalari formulalarini qo'llab

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= (y'_x)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)'_t t'_x = \left(\frac{y'_t}{x'_t} \right)'_t \frac{1}{x'_t} = \\ &= \frac{y''_{tt}x'_t - y'_tx''_{tt}}{(x'_t)^2} \frac{1}{x'_t} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_tx''_{tt}}{(x'_t)^3}. \end{aligned}$$

Shunday qilib parametrik shaklda berilgan funktsiyaning ikkinchi tartibli hosilasi

$$\begin{cases} y''_{xx} = \frac{y''_{tt}x'_t - y'_tx''_{tt}}{(x'_t)^3}, \quad \alpha \leq t \leq \beta \\ x = x(t), \end{cases} \quad (3.61)$$

ko'rinishda bo'lar ekan.

3.32-Misol. $y = f(x)$ funktsiya

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t, \\ y(t) = e^t \sin t, \end{cases} \quad t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$$

munosabatlar bilan parametrik shaklda berilgan bo'lsa, uning ikkinchi tartibli hosilasini toping.

► $x(t)$ va $y(t)$ funktsiyalarning t parametr bo'yicha birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarini topamiz: $x'_t = e^t \cos t - e^t \sin t$, $y'_t = e^t \sin t + e^t \cos t$, $x''_{tt} = e^t \cos t - e^t \sin t - e^t \sin t - e^t \cos t = -2e^t \sin t$, $y''_{tt} = e^t \sin t + e^t \cos t + e^t \cos t - e^t \sin t = 2e^t \cos t$ bu topilgan hosilalarni (3.60) formulaga qo'yib, y''_{xx} ikkinchi tartibli hosilani topamiz.

$$\begin{aligned} y''_{xx} &= \frac{2e^t \cos t (e^t \cos t - e^t \sin t) - (e^t \sin t + e^t \cos t)(-2e^t \sin t)}{(e^t \cos t - e^t \sin t)^3} \\ &= \frac{2e^{2t}(\cos^2 t - \cos t \sin t + \sin^2 t + \cos t \sin t)}{e^{3t}(\cos t - \sin t)^3} = \frac{2e^{-t}}{(\cos t - \sin t)^3}. \end{aligned}$$

natijada

$$\begin{cases} y''_{xx} = \frac{2e^{-t}}{(\cos t - \sin t)^3}, & t \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \\ x = e^t \cos t, \end{cases}$$

izlanayotgan hosilani topdik. ◀

3.33-Misol. $x^3 \sin y - y = 0$ tenglama bilan berilgan $y = f(x)$ oshkormas funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topamiz.

► Tenglamaning ikkala tomonini differensiallaymiz:

$$3x^2 \sin y + x^3 \cos y \cdot y' = 0$$

bu yerdan

$$y' = -\frac{3x^2 \sin y}{x^3 \cos y} = -\frac{3 \operatorname{tg} y}{x}.$$

Birinchi tartibli hosila uchun ifodani inobatga olgan holda, songgi tenglikni differensiallaymiz:

$$\begin{aligned} y'' &= 3 \frac{(\operatorname{tg} y)'x - (x)' \operatorname{tg} y}{x^2} = 3 \frac{\frac{1}{\cos^2 y} \cdot y' - \operatorname{tg} y}{x^2} = \\ &= 3 \frac{\frac{1}{\cos^2 y} \frac{3 \operatorname{tg} y}{x} - \operatorname{tg} y}{x^2} = 3 \frac{\frac{\sin y}{\cos^3 y} - \operatorname{tg} y}{x^2} = \\ &= 3 \frac{\sin y(3 - \cos^2 y)}{x^2 \cos^3 y}. \end{aligned} \quad \blacktriangleleft$$

Yuqori tartibli differensiallar. Yuqori tartibli differensiallarni ham hosilalar singari quyi tartiblardan yuqori tartiblarni aniqlaymiz. $y = f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi dy birinchi tartibli differensialini oddiyoq qilib berilgan nuqtadagi birinchi differensial deb ataymiz. Shunday qilib birinchi differensial

$$dy = f'(x)dx$$

mavjud bo'lsin. O'ng tomondagi faqat birinchi ko'paytuvchigina x o'zgaruvchiga bog'liq, ikkinchi ko'paytuvchi dx erkin x o'zgaruvchining orttirmasi va u o'zgaruvchiga bogliq emas. Demak dy birinchi differensial x o'zgaruvchining funksiyasidan iborat ekan, shuning uchun bu funksiyaning differensial to'g'risida gapirish mumkin.

Agar $y = f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi dy differensialining differensial mavjud bo'lsa biz uni ikkinchi differensial (ikkinchi tartibli differensial) deb ataymiz va uni d^2y orqali belgilaymiz:

$$d(dy) = d^2y.$$

Ikkinchi differensial uchun ifoda topamiz. Differensialning aniqlanishiga ko'ra

$$d^2y = [f'(x)dx]'dx.$$

Qavs ichidagi dx ko'paytuvchi x o'zgaruvchiga bog'liq emas, shuning uchun uni hosila belgisidan tashqariga chiqarish mumkin va natijada

$$d^2y = f''(x)(dx)^2$$

tenglikka ega bo'lamiz. Differensialning darajasini yozishda qavslarni yozmaslik qabul qilingan, masalan, $(dx)^2$ o'rniga dx^2 deb yozish qabul qilingan; xuddi shu singari $(dx)^3$ o'rniga dx^3 yoziladi va hokazo.

Ikkinchi differensialdan olingan differensial uchinchi differensial deb ataladi:

$$d^3y = d(d^2y) = [f''(x)dx^2]'dx = f'''(x)dx^3.$$

Bu jarayonni davom ettirib, ixtiyoriy n – tartibli differensialni aniqlaymiz:

$$d^n y = d(d^{n-1}y) = [f^{(n-1)}(x)dx^{n-1}]'dx = f^{(n)}(x)dx^n.$$

Differensialning har xil tartiblaridan foydalanib ixtiyoriy tartibli hosilani differensiallar nisbati shaklida yozish mumkin:

$$f'(x) = \frac{dy}{dx}, \quad f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$$

Shunday qilib, $y = f(x)$ funksiyaning x nuqtada n – tartibli differensialning mavjud uchun, u bu nuqtada n marta differensiallanuvchi bo'lishligi zarur ekan.

Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiylarning x nuqtada n – tartibli differensiallari mavjud va $C = \text{const}$ bo'lsa,

$$d^n(Cu) = Cd^n u \text{ va } d^n(u \pm v) = d^n u \pm d^n v \quad (3.62)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi. Ko'paytmaning n – tartibli hosilasi uchun hosil qilingan Leybnis formulasi n – tartibli differensial uchun

$$d^n(uv) = d^n u \cdot v + C_n^1 d^{n-1}u \cdot dv + C_n^2 d^{n-2}u \cdot d^2v + \dots + C_n^{n-1} du \cdot d^{n-1}v + u \cdot d^n v \quad (3.63)$$

tenglikni hosil qilamiz, bu yerda C_n^k – orqali n elementdan k tadan qilib guruhlashlar soni belgilangan.

3.34-Misol. $y = \sqrt{x+2}$ funksiyaning x nuqtadagi d^2y ikkinchi tartibli differensialini toping.

► Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topamiz:

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}, \quad y'' = -\frac{1}{4\sqrt{(x+2)^3}}.$$

U holda

$$d^2y = y'' dx^2 = -\frac{1}{4\sqrt{(x+2)^3}} dx^2. \quad \blacktriangleleft$$

3.6. Differensial hisobning asosiy teoremlari

Hosilaning nollari haqida teoremlar.

3.10-Teorema (Ferma). $y = f(x)$ funksiya biror E oraliqda aniqlangan va bu oraliqning ichki c nuqtasida eng katta yoki eng kichik qiymatini qabul qilsin. Agar bu nuqtada chekli $f'(c)$ hosila mavjud bo'lsa, u holda $f'(c) = 0$ bo'ladi.

► Aniqlik uchun $f(x)$ funksiya c nuqtada eng katta qiymatni qabul qiladi deb faraz qilamiz. U holda barcha $x \in E$ nuqtalar uchun $f(x) \leq f(c)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. $x = c + \Delta x$ deb olsak, $f(c + \Delta x) \leq f(c)$. Hosilaning ta'rifiga va teorema shartiga ko'ra

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c)$$

chekli limit mavjud. Agar $\Delta x > 0$ bo'lsa, u holda $(f(c + \Delta x) - f(c))/\Delta x \leq 0$ va tengsizlikda limitga o'tish haqidagi 2.6-Teoremaga ko'ra

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c + 0) \leq 0$$

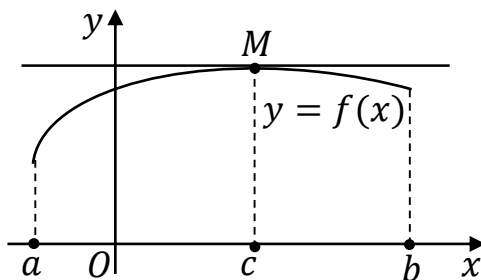
tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar $\Delta x < 0$ bo'lsa, u holda $(f(c + \Delta x) - f(c))/\Delta x \geq 0$ va bu yerda ham 2.6-Teoremaga ko'ra

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = f'(c - 0) \leq 0.$$

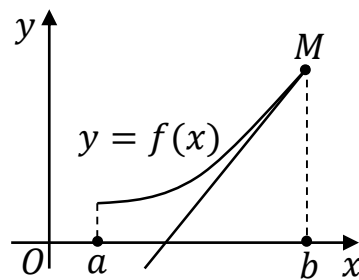
Nuqtadagi bir tomonlama va ikki tomonlama limitlar haqidagi 2.2-Teoremaga ko'ra so'ngi uchta munosabatdan

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} = 0 \end{aligned}$$

yoki $f'(c) = 0$ tenglikka ega bo'lamiz. Funksiyaning eng kichik qiymati bo'lgan hol ham xuddi shu singari isbotlanadi. ◀



3.20-rasm



3.21-rasm

$f'(c)$ hosilaning nolga aylanishi $f(x)$ funksiya grafigiga $M(c, f(c))$ nuqtada o'tkazilgan urinma Ox o'qqa parallel bo'lishini anglatadi (3.20-rasm). Teoremaning shartida c nuqtaning ichki nuqta ekanligi muhim shart. Teorema isbotida bu shartga ko'ra c nuqtadan ham chapdagi, ham o'ngdagi x nuqtalarni qarash imkonini berdi. Bu shartsiz teorema noto'g'ri ham bo'lishi mumkin. Haqiqatdan ham, agar funksiya eng katta qiymatga oraliqning chetki nuqtalaridan birida erishsa, hosila (agar u mavjud bo'lsa) nolga aylanmasligi ham mumkin (3.21-rasm).

Endi fransuz matematigi M.Roll nomi bilan ataladigan sodda ammo muhim teoremani keltiramiz.

3.11-Teorema (Roll). Agar $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz, (a, b) oraliqda differensiallanuvchi va kesmaning chetki nuqtalarida teng $f(a) = f(b)$ qiymatlarni qabul qilsa, u holda (a, b) oraliqda kamida bitta shunday c nuqta topilib, bu nuqta uchun $f'(c) = 0$ tenglik o'rinli bo'ladi.

► $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lganligi uchun Veyershtassning ikkinchi teoremasiga ko'ra u o'zining eng katta M va eng kichik m qiymatlariga erishadi.

Ikki holni qaraymiz.

1. $M = m$, ya'ni $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda o'zgarmas qiymatni qabul qiladi, shuning uchun barcha $x \in (a, b)$ nuqtalarda $f'(x) = 0$ bo'ladi. Bu holda c sifatida (a, b) oraliqning ixtiyoriy nuqtasini olish mumkin.

2. $M > m$. Teorema shartiga ko'ra $f(a) = f(b)$, shuning uchun funksiya M va m qiymatlardan birini (a, b) oraliqning ichki c nuqtasida qabul qiladi. U holda Ferma teoremasiga ko'ra bu nuqtada $f'(c) = 0$ tenglik o'rinli bo'ladi. ◀

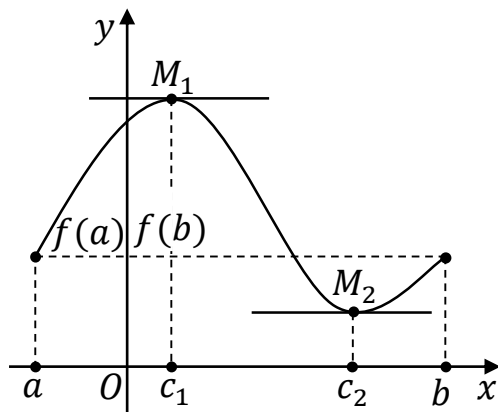
Xususiyl holda $f(a) = f(b) = 0$ bo'lganda quyidagi natija o'rinli.

Natija. Differensiallanuvchi funksiyaning ikkita noli oralig'ida uning hosilasining noli yotadi.

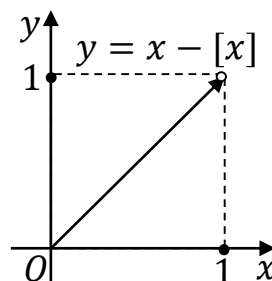
Roll teoremasi quyidagi geometrik talqinga ega: agar uzluksiz egri chiziq $[a, b]$ kesmaning chetlarida o'zaro teng ordinatalarga ega va kesmaning barcha ichki nuqtalarida novertikal urinmaga ega bo'lsa, u holda egri chiziqda urinmasi Ox o'qqa parallel bo'lgan kamida bitta nuqta mavjud (3.22-rasmda (a, b) oraliqning c_1 va c_2 nuqtalariga mos keluvchi M_1 va M_2 nuqtalar).

3.11-Teoremaning barcha shartlari muhim. Masalan, $y = |x|$ funksiya $[-1, 1]$ kesmada uzluksiz, kesmaning chetlarida teng $y(-1) = y(1) = 1$

qiymatlarni qabul qiladi, ammo kesmaning ichki $x = 0$ nuqtasida differensiallanuvchi emas (3.6-Misol). Teoremaning ikkinchi sharti bajarilmayapti, shu sababli $(-1, 1)$ oraliqda y' hosila nolga aylanadigan nuqta yo'q.



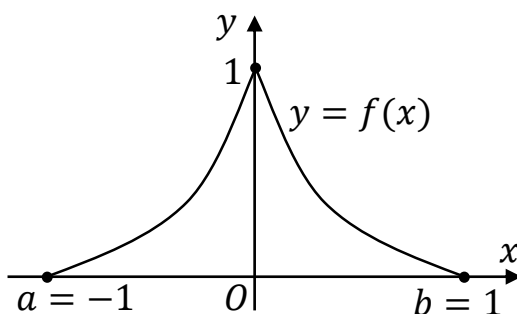
3.22-rasm



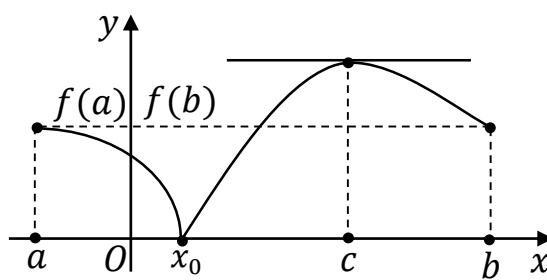
3.23-rasm

3.35-Misol. $f(x) = x - [x]$ funksiya (3.23-rasm) $[0, 1]$ kesmada teoremaning uzluksizlik shartidan boshqa barcha shartlarini qanoatlantiradi: $x = 1$ nuqtada funksiya uzilishga ega, $(0, 1)$ oraliqning barcha nuqtalarida hosila $f'(x) = 1$. ◀

3.36-Misol. $f(x) = 1 - \sqrt[3]{x^2}$ funksiya $[-1, 1]$ kesmada uzluksiz, kesmaning chetki nuqtalarida $f(-1) = f(1) = 0$ teng qiymatlarni qabul qiladi, $f'(x) = -2/\sqrt[3]{x}$ hosila esa $(-1, 1)$ oraliqning $x = 0$ nuqtasidan boshqa barcha nuqtalarda chekli qiymatni qabul qiladi. Shunday qilib, Roll teoremasining bitta sharti bajarilmayapti, shu sababli teoremani mazkur funksiyaga qo'llab bo'lmaydi (3.24-rasm). ◀



3.24-rasm



3.25-rasm

Roll teoremasi yetarlilik xususiyatiga ega, ya'ni barcha shartlar bajarilgandagina teoremaning tasdig'i o'rinli, ammo hatto bitta sharti bajarilmay qolsa ham qaralayotgan funksiya hosilasining nollari mavjudligi haqida aniq bir tasdiqni aytish mumkin bo'lmay qoladi. 3.25-rasmda $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz, kesmaning chetlarida teng qiymatlarga erishadi, ammo ichki x_0 nuqtada differensiallanuvchi emas.

Shunga qaramasdan (a, b) oraliqda $f'(c) = 0$ bo'ladigan $x = c$ nuqta mavjud (mos nuqtada funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma Ox o'qqa parallel).

Agar $s = f(t)$ funksiya to'g'ri chiziqli uzluksiz harakatda s nuqta koordinatasining t vaqtga bog'liqligini aniqlasa, u holda $f(a) = f(b)$ tenglik nuqta harakatni vaqtning a momentida boshlagandan keyin $b - a$ vaqt oralig'idan so'ng boshlang'ich holatiga qaytishi kerakligini anglatadi. Ammo buning uchun vaqtning hech bo'lmaganda bitta $t_0 \in (a, b)$ oraliq momentida nuqtaning $f'(t_0)$ tezligi nolga aylanishi kerak. Roll teoremasining mexanik interpretatsiyasi ana shundan iborat.

Chekli ayirmalar formulasi

3.12-Teorema (Lagranj). Agar $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz, (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lsa, u holda (a, b) oraliqda kamida bitta shunday c nuqta topiladiki, bu nuqta uchun

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad a < c < b$$

formula o'rinli bo'ladi.

$$\blacktriangleright \quad F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad (3.64)$$

tenglik bilan $[a, b]$ kesmada aniqlangan $F(x)$ yordamchi funksiyanı kiritamiz. Bu funksiya $[a, b]$ kesmada Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Haqiqatdan ham, u $[a, b]$ kesmada uzluksiz, chunki (3.64) tenglikning o'ng tomonidagi har bir qo'shiluvchi uzluksiz. $F(x)$ funksiyanı aniqlagan har bir qo'shiluvchi (a, b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lganligi tufayli $F(x)$ funksiyaning o'zi ham bu oraliqda differensiallanuvchi. Nihoyat $[a, b]$ kesmaning chetki nuqtalarida $F(a) = F(b) = 0$ teng qiymatlarnı qabul qiladi.

Roll teoremasiga ko'ra, (a, b) oraliqda $F'(x)$ hosila nolga aylanadigan kamida bitta $c \in (a, b)$ nuqta mavjud: $F'(c) = 0$. Bu tenglikni (3.64) orqali ifodalaymiz

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0.$$

Bundan esa

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c), \quad a < c < b. \quad \blacktriangleleft$$

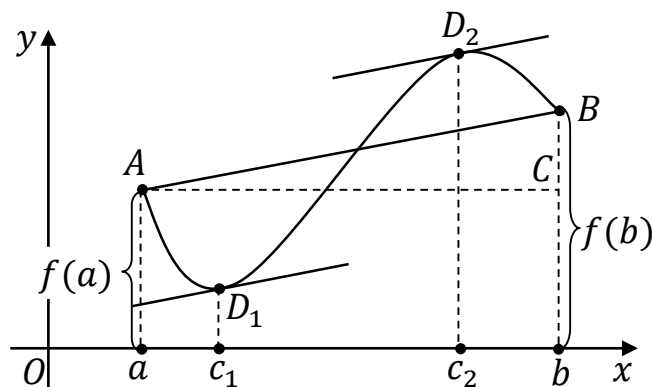
Roll teoremasi Lagranj teoremasining $f(a) = f(b)$ bo'lgandagi xususiy holi bo'ladi.

Endi Lagranj teoremasining geometrik talqinini ko'raylik.

3.26-rasmda

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{BC}{AC}$$

nisbat AB vatarining burchak koeffitsiyenti, $f'(c)$ hosila esa $y = f(x)$ egri chiziqqa absissasi $x = c$ bo'lgan nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyenti. Shunday qilib, ixtiyoriy nuqtasida urinma o'tkazish mumkin bo'lgan egri chiziqning $\widetilde{AB}$ yoyida kamida bitta shunday $C(c, f(c))$ nuqta topiladiki, bu nuqtada egri chiziqqa o'tkazilgan urinma AB vatarga parallel bo'ladi.



3.26-rasm

Isbotlangan $(f(b) - f(a))/(b - a) = f'(c)$ formula, yoki

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a), \quad a < c < b, \quad (3.65)$$

Lagranj formulasi yoki chekli ayirmalar formulasi deb yuritiladi.

c sonini (umuman olganda, a va b sonlar oralig'ida yotgan noma'lum son)

$$c = a + \theta \cdot (b - a)$$

ko'rinishda ifodalash ba'zan qulay bo'ladi, bu yerda θ ushbu $0 < \theta < 1$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qandaydir son. U holda (3.65) Lagranj formulasi

$$f(b) - f(a) = f'(a + \theta \cdot (b - a))(b - a), \quad 0 < \theta < 1 \quad (3.66)$$

shaklni oladi. a va b o'rniga mos ravishda x va $x + \Delta x$ olib, Lagranj formulasini

$$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \cdot \Delta x)\Delta x, \quad 0 < \theta < 1 \quad (3.67)$$

ko'rinishda yozamiz. Bu tenglik argumentning ixtiyoriy Δx orttirmasida funksiyaning orttirmasi uchun $\Delta f(x) \approx f'(x)\Delta x$ taqribiy tenglik o'rniga aniq ifodani beradi. (3.67) formuladagi θ umuman olganda noma'lum son.

3.37-Misol. Lagranj teoremasidan foydalanib, ixtiyoriy x_1 va x_2 uchun

$$|\arctg x_2 - \arctg x_1| \leq |x_2 - x_1|$$

tengsizlikning o'rinli ekanligini isbotlang.

► $f(x) = \arctg x$ funksiyani qaraymiz. Bu funksiya ixtiyoriy $[a, b]$ kesmada Lagranj teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Shuning sababli ixtiyoriy x_1 va x_2 uchun

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

yoki

$$\arctg x_2 - \arctg x_1 = \frac{1}{1+c^2}(x_2 - x_1),$$

bu yerda c nuqta x_1 va x_2 nuqtalar oralig'ida yotadi. Bu tenglikdan

$$|\arctg x_2 - \arctg x_1| = \frac{1}{1+c^2}|x_2 - x_1|$$

tenglikni yozamiz, ixtiyoriy c uchun $\frac{1}{1+c^2} < 1$ tengsizlik o'rinli bo'lishini inobatga olsak, so'ngi tenglik $|\arctg x_2 - \arctg x_1| \leq |x_2 - x_1|$ tengsizlikka aylanadi. ◀

3.13-Teorema (Koshi). Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar

- 1) $[a, b]$ kesmada uzluksiz;
 - 2) (a, b) oraliqda differensiallanuvchi;
 - 3) (a, b) oraliqda hosila $g'(x) \neq 0$ bo'lsa,
- u holda (a, b) oraliqda kamida bitta shunday c nuqta topiladiki, bu nuqta uchun

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}, \quad a < c < b \quad (3.68)$$

tenglik o'rinli bo'ladi va u Koshi formulasi deb ataladi.

► Teorema shartidan $g(b) - g(a) \neq 0$ bo'ladi, aks holda $g(a)$ va $g(b)$ teng bo'lar edi va Roll teoremasiga ko'ra $g'(x)$ hosila (a, b) oraliqning kamida bitta nuqtasida nolga aylanadi, bu esa Koshi teoremasining 3) shartiga ziddir. Shunday qilib (3.68) tenglik ma'noga ega. Endi uning (a, b) oraliqdan olingan birorta c uchun o'rinli ekanligini ko'rsatamiz.

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)) \quad (3.69)$$

yordamchi funksiyani tuzamiz. Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Haqiqatdan ham:

1) $F(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz, chunki $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar bu kesmada uzluksiz;

2) $F(x)$ funksiya (a, b) oraliqda differensiallanuvchi, chunki (3.68) tenglikning o'ng tomonidagi har bir qo'shiluvchi bu oraliqda differensiallanuvchi;

3) bevosita o‘rniga qo‘yib $F(a) = f(b) = 0$ ekanligiga amin bo‘lamiz.

Bu funksiyaga Roll teoremasini qo‘llab, a va b nuqtalar oralig‘ida $F'(c) = 0$ tenglikni qanoatlantiruvchi c nuqta mavjud deb xulosa chiqaramiz. (3.69) tenglikka ko‘ra

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x),$$

shuning uchun

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0.$$

So‘ngi tenglikning ikkala tomonini $g'(c)$ noldan farqli hosilaga bo‘lib

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$$

talab qilingan tenglikni hosil qildik. ◀

Lagranj teoremasi Koshi teoremasining xususiy holi, chunki Koshi teoremasida $g(x) = x$ deb olinsa Lagranj teoremasi hosil bo‘ladi.

Mulohaza. Roll, Lagranj va Koshi teoremlarida u yoki bu tenglik o‘rinli bo‘ladigan qandaydir $c \in (a, b)$ “o‘rta nuqta” xususida so‘z boradi. Shuning uchun bu teoremlar guruhini differensial hisobning o‘rta qiymatlar haqidai teoremlari deb nomlash mumkin.

Aniqmasliklarni ochish (Lopitall qoidasi). $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va $f(a) = g(a) = 0$ bo‘lsin. U holda $f(x)/g(x)$ nisbat $x = a$ nuqtada ma’noga ega bo‘lamydi. Biroq bu nisbatning $x = a$ nuqtada limiti mavjud bo‘lishi mumkin. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)]$ limitni topish bu holda $0/0$ ko‘rinishdagi aniqmaslikni ochish deb ataladi.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ va $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ bo‘lganda $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)]$ limitni topish ∞/∞ ko‘rinishdagi aniqmaslikni ochish degani.

$\infty - \infty$ ko‘rinishdagi aniqmaslikni ochish deganda $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ va $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ shartlarni qanoatlantiruvchi funksiyalar uchun $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$ ko‘rinishdagi limitni topish tushuniladi.

$x \rightarrow \infty$ holda bu tushunchalar xuddi shu singari izohlanadi.

3.14-Teorema (Lopitall qoidasi). $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtaning o‘zi kirmagan biror $U_\delta(a)$ atrofida $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalrga ega va bu atrofda $g(x)$ va $g'(x)$ funksiyalar nolga aylanmasin. Agar

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ va } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$$

va hosilalarning $f'(x)/g'(x)$ nisbati $x = a$ nuqtada chekli yoki cheksiz limitga ega bo'lsa, u holda bu funksiylarning nisbati ham bu nuqtada limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

► Teoremada $f(x)$ va $g(x)$ funksiylarning $x = a$ nuqtadagi qiymatlari haqida so'z yuritilmagan. Biz $f(a) = g(a) = 0$ deb olamiz. Endi $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ va $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a)$, u holda $f(x)$ va $g(x)$ funksiylar a nuqtada uzluksiz bo'ladi. Shuning uchun $f(x)$ va $g(x)$ funksiylar $[a, x]$ kesmada (yoki $[x, a]$ kesmada) Koshi teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi, bu yerda x nuqta $(a - \delta, a + \delta)$ oraliqning ixtiyoriy nuqtasi. Demak, bu teoremaga ko'ra a va x oraliq'ida kamida bitta $c = c(x)$ nuqta topiladiki, uning uchun

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (3.70)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Agar birorta x qiymatda bunday c nuqtalar bittadan ko'p bo'lsa, ulardan birini tayinlab olamiz.

c nuqta x nuqtaga bog'liq va x nuqta a nuqtaga intilganda: $x \rightarrow a$, tayin c nuqta ham a nuqtaga intiladi: $c \rightarrow a$. Teorema shartiga ko'ra $f'(x)/g'(x)$ nisbat $x = a$ nuqtada chekli yoki cheksiz limitga ega. Shuning uchun $f'(c)/g'(c)$ nisbat $c = a$ nuqtada $f'(x)/g'(x)$ nisbatning limitiga teng bo'ladi:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ (c \rightarrow a)}} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (3.71)$$

(3.70) va (3.71) munosabatlardan

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (3.72)$$

kelib chiqadi. ◀

(3.72) tenglik Lopitall qoidasini ifodalaydi. Bu qoidaga ko'ra funksiylar nisbatning limitini (ma'lum shartlar o'rinli bo'lganda) bu funksiylar hosilalari nisbatining limiti bilan almashtirish mumkin.

3.38-Misol. Limitni hisoblang:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}.$$

1-Mulohaza. Agar teoremaning sharti faqat $(a - \delta, a)$ yoki $(a, a + \delta)$ oraliqda o‘rinli bo‘lsa, (3.72) formulani $\lim_{x \rightarrow a-0} [f(x)/g(x)]$ yoki $\lim_{x \rightarrow a+0} [f(x)/g(x)]$ limitni hisoblashga qo‘llash mumkin.

2-Mulohaza. Hosilalar nisbatining limiti mavjud bo‘lmasdan, balki funksiyalar nisbatining limiti mavjud bo‘lishi ham mumkin.

3.39-Misol. $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ va $g(x) = x$ funksiyalrni qaraymiz. Ularning nisbati $x = 0$ nuqtada limitga ega:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$$

Ular hosilalarining nisbati

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$x = 0$ nuqtada limitga ega emas. ◀

Shunday qilib $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)]$ limitning mavjudligidan $\lim_{x \rightarrow a} [f'(x)/g'(x)]$ limitning mavjudligi kelib chiqmaydi.

3-Mulohaza. Agar Lopital teoremasining shartini $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalargina emas, balki ularning $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalari ham qanoatlantirsa, u holda $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)/g(x)]$ limitni hisoblash uchun Lopital qoidasini ketma-ket ikki marta qo‘llash mumkin. Agar keyingi tartibli hosilalar ham teorema shartini qanoatlantirsa ularga ham Lopital qoidasini qo‘llash mumkin.

3.40-Misol. Limitni hisoblang:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \sin x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{3x^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)'}{(3x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{6x} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

3.15-Teorema (Lopitalning ikkinchi qoidasi). $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtaning o‘zi kirmagan biror $\dot{U}_\delta(a)$ atrofida $f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalrga ega va bu atrofda $g(x)$ va $g'(x)$ funksiyalar nolga aylanmasin. Agar

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \text{ va } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$$

va hosilalarning $f'(x)/g'(x)$ nisbati $x = a$ nuqtada chekli yoki cheksiz limitga ega bo‘lsa, u holda bu funksiaylarning nisbati ham bu nuqtada limitga ega va

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. ◀

Bu yerda ham $x \rightarrow a - 0$ yoki $x \rightarrow a + 0$ bo'lgandagi limitlarni qarash mumkin.

3.41-Misol. Limitni hisoblang:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln \sin ax}{\ln \sin bx} &= \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{(\ln \sin ax)'}{(\ln \sin bx)'} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{a \cos ax}{\sin ax}}{\frac{b \cos bx}{\sin bx}} = \\ &= \frac{a}{b} \lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{\cos ax}{\cos bx} \cdot \frac{\sin bx}{\sin ax} \right) = 1, (a > 0, b > 0). \end{aligned}$$

Lopital qoidasini:

1. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ va $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ bo'lganda $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)]$ limitni hisoblashga qo'llash mumkin.

► Bu holda $f(x) \cdot g(x)$ ko'paytmani $f(x) \cdot g(x) = f(x)[1/g(x)]$ yoki $f(x) \cdot g(x) = g(x)[1/f(x)]$ ko'rinishda yozib o'ng tomoniga Lopital qoidasini qo'llash mumkin. ◀

3.42-Misol. $0 \cdot \infty$ ko'rinishdagi aniqmaslikni oching

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} (x \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{-x^2}{x} = 0.$$

2. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ va $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ bo'lganda $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)]$ limitni hisoblashga qo'llash mumkin.

► Bu holda $f(x) - g(x)$ ayirmaning yana

$$f(x) - g(x) = \frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{\frac{1}{f(x)}}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} \cdot \frac{1}{\frac{1}{g(x)}}$$

nisbat shaklida ifodalab va so'ngra Lopital qoidasini qo'llash kerak. ◀

3.43-Misol. $\infty - \infty$ ko'rinishdagi aniqmaslikni oching

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x \ln x - x + 1)'}{((x-1) \ln x)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\ln x + 1 - \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(\ln x)'}{\left(\ln x + 1 - \frac{1}{x} \right)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

3. $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)}, f(x) > 0$ limitni hisoblashda, quyidagi uchta hollardan biri bo'lganda Lopital qoidasini qo'llash mumkin:

- i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (0^0);
 ii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$ (1^∞);
 iii) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ (∞^0).

► $y = [f(x)]^{g(x)}$ deb olamiz, uni logarifmlab

$$\ln y = g(x) \ln f(x)$$

tenglikka ega bo‘lamiz. Tenglikning ikkala tomonida limitga o‘tib hisoblaymiz:

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln y = \lim_{x \rightarrow a} [g(x) \ln f(x)].$$

Bu limitni hisoblashda i), ii), iii) uchta holning har birida 1. holda qaralganlarning mosi tanlanadi.

Faraz qilaylik, biz $\lim_{x \rightarrow a} \ln y = A$ limitni topdik. U holda $\lim_{x \rightarrow a} y = e^A$, ya’ni $\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{g(x)} = e^A$. ◀

3.44-Misol. Limitni toping $\lim_{x \rightarrow 0+0} x^x$.

► $y = x^x$ deb olamiz; u holda $\ln y = x \ln x$. Bu yerdan

$$\lim_{x \rightarrow 0+0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

bundan esa $\lim_{x \rightarrow 0+0} y = e^0 = 1$. ◀

3.16-Teorema. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar

- 1) x o‘zgaruvchining mutlaq qiymati bo‘yicha yetarlicha katta qiymatlarida aniqlangan;
- 2) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ yoki $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ va $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \infty$;
- 3) x o‘zgaruvchining mutlaq qiymati bo‘yicha yetarlicha katta qiymatlarida $f'(x)$ va $g'(x) \neq 0$ hosilalar mavjud;
- 4) funksiyalar hosilalarining (chekli yoki cheksiz)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

limiti mavjud. U holda funksiyalar nisbatining ham limiti mavjud bo‘ladi va

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

► Teoremaning to‘g‘riligiga ishonch hosil qilish uchun $x = 1/t$ tenglik orqali yangi o‘zgartuvchi kiritib, 3.14 va 3.15-Teoremlarning natijalaridan foydalanish kerak. ◀

3.45-Misol. ∞/∞ ko‘rinishdagi aniqmaslikni oching

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{e^x} = 0.$$

3.7. Teylor formulasi

Bu formula matematik tahlilning asosiy formulalaridan biri hisoblanadi va u ko'p tadbirlarga ega. U murakkab analitik ifoda bilan berilgan funktsiyani tahlil qilishga oson bo'lgan ko'phad bilan almashtirish imkonini beradi.

Ko'phad uchun Teylor formulasi. n – darajali ko'phad uchun Teylor formulasini keltirib chiqaramiz. n – darajali

$$P(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n, \quad b_n = \text{const} \neq 0 \quad (3.73)$$

ko'phadni qaraymiz. a soni qanday bo'lishidan qat'iy nazar (3.73) ko'phadni $x - a$ ayirmaning darajalari ko'rinishda ifodalash mumkin. Haqiqatdan ham,

$$x = a + t$$

deb olamiz. U holda

$$P(x) = P(a + t) = b_0 + b_1(a + t) + b_2(a + t)^2 + \dots + b_n(a + t)^n.$$

O'ng tomondagi qavslarni ochib va o'xshash hadlarni guruhlab

$$P(a + t) = A_0 + A_1t + A_2t^2 + \dots + A_nt^n$$

ko'phadni hosil qilamiz. Bu yerda yana t o'zgaruvchini x orqali ifodalab

$$P(x) = A_0 + A_1(x - a) + A_2(x - a)^2 + \dots + A_n(x - a)^n \quad (3.74)$$

izlanayotga ko'phadga ega bo'lamiz, bu yerda $A_0, A_1, \dots, A_n$ – hozircha noma'lum bo'lgan qandaydir o'zgarmas sonlar.

(3.74) ko'phadni x o'zgaruvchi bo'yicha n marta differensiallaymiz:

$$P'(x) = A_1 + 2A_2(x - a) + 3A_3(x - a)^2 + \dots + nA_n(x - a)^{n-1}$$

$$P''(x) = 2 \cdot 1A_2 + 3 \cdot 2A_3(x - a) + \dots + n(n - 1)A_n(x - a)^{n-2}$$

.....

$$P^{(n)}(x) = n(n - 1) \dots 2 \cdot 1A_n \quad (3.75)$$

(3.74) va (3.75) tengliklarda $x = a$ deb olib

$$A_0 = P(a), A_1 = \frac{P'(a)}{1!}, A_2 = \frac{P''(a)}{2!}, \dots, A_n = \frac{P^{(n)}(a)}{n!}$$

(3.74) tenglikdagi noma'lum $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ koeffitsiyentlarni topdik. Demak (3.74) tenglikni

$$P(x) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}(x - a) + \frac{P''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n \quad (3.76)$$

ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi. Bu tenglik n – darajali $P(x)$ ko'phadning $x - a$ ayirmaning darajalari boyicha *Teylor formulasi* deb

ataladi (B.Teylor (1685-1731)-ingliz matematigi). Bu yerda $a = 0$ xususiy holda

$$P(x) = P(0) + \frac{P'(0)}{1!}x + \frac{P''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(0)}{n!}x^n \quad (3.77)$$

Makloren formulasini hosil qilamiz (K.Makloren (1698-1746)-shotland matematigi).

3.46-Misol. $P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x - 5$ ko'phadni

1) x o'zgaruvchining darajalari bo'yicha;

2) $x - 1$ ayirmaning darajalari bo'yicha yoying.

► Ko'phad va uning hosilalarining qiymatlarini $x = 0$ va $x = 1$ nuqtalarda hisoblaymiz:

$$\begin{array}{lll} P(x) = 2x^3 + 5x^2 + 4x - 5 & P(0) = -5 & P(1) = 6 \\ P'(x) = 6x^2 + 10x + 4 & P'(0) = 4 & P'(1) = 20 \\ P''(x) = 12x + 10 & P''(0) = 10 & P''(1) = 22 \\ P'''(x) = 12 & P'''(0) = 12 & P'''(1) = 12 \end{array}$$

(3.77) formulaga ko'ra

$$P(x) = -5 + \frac{4}{1!}x + \frac{10}{2!}x^2 + \frac{12}{3!}x^3 = -5 + 4x + 5x^2 + 2x^3$$

Makloren yoyilmasini va (3.76) formulaga ko'ra

$$\begin{aligned} P(x) &= 6 + \frac{20}{1!}(x-1) + \frac{22}{2!}(x-1)^2 + \frac{12}{3!}(x-1)^3 = \\ &= 6 + 20(x-1) + 11(x-1)^2 + 2(x-1)^3 \end{aligned}$$

Teylor yoyilmasini hosil qildik. ◀

Differensiallanuvchi funksiya uchun Teylor formulasi.

$f(x)$ funksiya a nuqtada n marta differensiallanuvchi bo'lsin. Bu, funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan va bu atrofda $(n-1)$ – tartibli va ungacha bo'lgan barcha tartibli hosilalarga ega va bundan tashqari bu nuqtaning o'zida n – tartibli $f^{(n)}(a)$ hosila mavjud degan ma'noni anglatadi.

n – tartibli

$$\begin{aligned} P_n(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots \\ &\quad + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \end{aligned} \quad (3.78)$$

ko'phadni tuzamiz. Ko'rinib turibdiki, bu ko'phad, uning n – tartibli va ungacha bo'lgan barcha tartibli hosilalari a nuqtada $f(x)$ funksiya bilan bir xil qiymat qabul qiladi. Haqiqatdan ham,

$$P_n(a) = f(a),$$

$$P'_n(a) = \left(f'(a) + f''(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1} \right) \Big|_{x=a} = f'(a),$$

$$P''_n(a) = \left(f''(a) + f'''(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x-a)^{n-2} \right) \Big|_{x=a} = f''(a)$$

va umuman $k = \overline{0, n}$ uchun

$$P_n^{(k)}(a) = \left(f^{(k)}(a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-k)!}(x-a)^{n-k} \right) \Big|_{x=a} = f^{(k)}(a)$$

tengliklar o'rinli. Bu yerda va keyin mulohazalarda $k = 0$ bo'lganda $f^{(0)}(x) = f(x)$ va $0! = 1$ deb qabul qilingan.

(3.78) ko'phad *Taylor ko'phadi*, uning koeffitsiyentlari esa *Taylor koeffitsiyentlari* deb ataladi.

Taylor ko'phadi $x = a$ nuqtaning atrofida $f(x)$ funksiyaga taqribiy yaqinlashishni beradi, ya'ni

$$f(x) \approx P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Bu taqribiy yaqinlashishdagi xatolikni, ya'ni $f(x) - P_n(x)$ ayirmaning $R_n(x)$ orqali belgilaymiz. U holda bu tenglik va belgilashlardan

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + R_n(x) \quad (3.79)$$

Taylor formulasini hosil qilamiz. Bunda Taylor formulasining qoldiq hadi deb ataluvchi $R_n(x)$ qoldiq $x = a$ nuqtada $(x-a)^n$ cheksiz kichikka nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik. Buni quyidagi teorema tasdiqlaydi.

3.17-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtada n marta differensiallanuvchi bo'lsa, u holda

$$R_n(x)_{x \rightarrow a} = o((x-a)^n). \quad (3.80)$$

► Teoremani isbotlash uchun

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = 0$$

ekanligini ko'rsatish yetarli. Limit ostidagi nisbat $[0/0]$ ko'rinishdagi aniqlikni ifodalaydi. Teoremaning sharti va $P_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a)$, ($k =$

$\overline{0, n-1}$) tengliklar bu aniqmaslikni ochish uchun Lopital qoidasini ($n-1$) marta qo'llash imkonini beradi:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow a} \frac{R_n(x)}{(x-a)^n} &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-a)^n} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(f(x) - P_n(x))'}{((x-a)^n)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x) - \left(f'(a) + f''(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1} \right)}{n(x-a)^{n-1}} = \\ &= \dots = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(x-a)}{n!(x-a)} = \\ &= \frac{1}{n!} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} - \frac{f^{(n)}(a)}{n!}. \end{aligned}$$

Teoremaning shartiga ko'ra a nuqtada $f^{(n)}(a)$ hosila mavjud va hosilaning 3.10-Ta'rifiga ko'ra,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} = f^{(n)}(a)$$

limit mavjud. Shuning uchun oldingi tenglikning o'ng tomoni nolga teng, bundan esa (3.80) kelib chiqdi. ◀

a nuqtada n marta differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyani bu nuqta atrofida tasvirllovchi Teylor ko'phadi xatoligi $o((x-a)^n)$ ko'rinishda bo'lgan yagona ko'phad ekanligini ko'rsatamiz.

3.18-Teorema. a nuqtada n marta differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya xatoligi $x = a$ nuqtada $o((x-a)^n)$ ko'rinishda bo'lgan $x-a$ ayirmaning n - darajali ko'phadi shaklida tasvirlansa, u holda bu ko'phadning koeffitsiyentlari Teylor koeffitsiyentlari bo'ladi, ko'phadning o'zi esa Teylor ko'phadi bo'ladi.

► $f(x)$ funksiya $x-a$ ayirmaning darajalari bo'yicha

$$f(x) = \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k + o((x-a)^n)$$

ko'phad bilan tasvirlangan bo'lsin. $o((x-a)^n)_{x \rightarrow a} \mu(x)(x-a)^n$ munosabatni qanoatlantiruvchi $x=a$ nuqtada cheksiz kichik bo'lgan $\mu(x)$ funksiya mavjudligini eslatib o'tamiz. $f(x)$ funksiyaning ko'rsatilgan tasvirini uning (3.79) tasviriga (3.80) tenglikni inobatga olgan holda tenglashtiramiz:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n c_k (x-a)^k + \beta(x)(x-a)^n = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \gamma(x)(x-a)^n \end{aligned}$$

bu yerda $\beta(x)$ va $\gamma(x)$ funksiyalar $x = a$ nuqtada cheksiz kichik. Bu tenglikda $x = a$ nuqtada limitga o'tsak, chap va o'ng tomonlarning birinchi hadlaridan boshqa hamma hadlari nolga aylanadi. Bundan $c_0 = f(a)$. O'zaro teng qo'shiluvchilarni tashlab yuborib va ikkala tomonni $x - a$ ayirmaga qisqartirib

$$\sum_{k=1}^n c_k(x-a)^{k-1} + \beta(x)(x-a)^{n-1} = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^{k-1} + \gamma(x)(x-a)^{n-1}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu yerda ham $x = a$ nuqtada limitga o'tsak $c_1 = f'(a)$ bo'ladi. Koeffitsiyentlarni topishning tasvirlangan jarayonini ketma-ket davom ettirib, barcha $k = \overline{0, n}$ uchun har safar $c_k = f^{(k)}(a)/k!$ ifodani olamiz, ya'ni qilingan farzlarda c_k Teylor koeffitsiyentalri,

$$\sum_{k=0}^n c_k(x-a)^k$$

ko'phad esa $f(x)$ funksiyaning Teylor ko'phadi bo'lar ekan. ◀

Shunday qilib, $x = a$ nuqtaning atrofida $f(x)$ funksiyaga c_k koeffitsiyentlari $f^{(k)}(a)/k!$ ifodadan farq qiladigan har qanday $\sum_{k=0}^n c_k(x-a)^k$ ko'phad bilan taqribiy yaqinlashishning xatoligi Teylor ko'phadi bilan yaqinlashishdagi xatolikdan $x = a$ nuqtada past tartibli cheksiz kichik bo'lar ekan. Shuning uchun Teylor ko'phadini bir xil darajali ko'phadlar orasida eng yaxshi taqribiy yaqinlashuvchi ko'phad deb ataladi.

3.47-Misol. $f(x) = 1/(1-x)$ funksiyani maxraji x va birinchi hadi 1 bo'lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning yig'indisi sifatida qarash mumkin, ya'ni

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + R_n(x), \quad (3.81)$$

bunda qoldiq had $R_n(x) = x^{n+1} + x^{n+2} + \dots = x^{n+1}/(1-x)$ ko'rinishda bo'ladi va uning uchun $x^{n+1}/(1-x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} o(x^n)$ munosabat o'rinli bo'ladi. Endi $f(x)$ funksiyaning Teylor koeffitsiyentlarini hisoblaymiz:

$$f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}, f''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1-x)^3}, \dots, f^{(k)}(x) = \frac{k!}{(1-x)^{k+1}}$$

va demak, barcha $k = \overline{0, n}$ uchun $f^{(k)}(0)/k! = 1$ bo'ladi. Shunday qilib (3.81) formula $f(x)$ funksiyaning Teylor yoyilmasi ekan, ◀

$x - a + \Delta x$ va $f(x) - f(a) = f(a + \Delta x) - f(a) = \Delta f(a)$ deb belgilash kiritib, (3.79) formulani ba'zan

$$\Delta f(a) = f'(a)\Delta x + \frac{f''(a)}{2!}(\Delta x)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(\Delta x)^n + o((\Delta x)^n) = \sum_{k=1}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(\Delta x)^k + o((\Delta x)^n) \quad (3.82)$$

ko‘rinishda yozish qulay. (3.82) formulada $f^{(k)}(a)(\Delta x)^k$ ko‘paytma $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi $d^k f(a)$ differensialidan iborat. Shuning uchun (3.82) formulani

$$\Delta f(a) = df(a) + \frac{d^2 f(a)}{2!} + \dots + \frac{d^n f(a)}{n!} + o((\Delta x)^n) = \sum_{k=1}^n \frac{d^{(k)} f(a)}{k!} + o((\Delta x)^n) \quad (3.83)$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bunday ko‘rinishdagi tenglikni n – tartibli differensiallardagi Teylor formulasi deb ataladi.

Teylor formulasidagi qoldiq handing turli ko‘rinishlari.

(3.79) n – tartibli Teylor formulasining (3.80) ko‘rinishdagi qoldiq hadini Peano shaklidagi qoldiq had deb ataladi (D.Peano (1858-1932)-italyan matematigi). n – tartibli Teylor formulasini Peano shaklidagi qoldiq had bilan birlashtirib

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x - a)^k + o((\Delta x)^n) \quad (3.84)$$

Peano shaklidagi qoldiq hadli n – tartibli Teylor formulasi deb ataladi. Biroq, qoldiq handing bunday ko‘rinishi muhim kamchiliklarga ega:

1) $f(x)$ funksiyaning a nuqtaning atrofi $P_n(x)$ Teylor ko‘phadi orqali tasvirlanganda yuzaga kelgan xatolikni hisoblashga imkon bermaydi;

2) ko‘phad funksiyaning berilgan aniqlikda o‘rnini bosa oladigan a nuqta atrofning o‘lchamlarini aniqlashga imkon bermaydi;

3) ko‘phadning n darajasini oshirish hisobiga xatolikka qanday ta’sir o‘tkazish haqida gapirib bo‘lmaydi.

Agar 3.17-Teorema shartiga qo‘shimcha qilib a nuqtada yana $f(x)$ funksiyaning $f^{(n+1)}(a)$ hosialsining ham mavjudligi talab qilinsa, bu teoremaga asosan

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1} + o((\Delta x)^{n+1})$$

tenglikni yozish mumkin. Bundan esa, Peano shaklidagi qoldiq had uchun

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a) + \alpha(x)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1} \quad (3.85)$$

kabi boshqa ifodani hosil qilamiz, bu yerda

$$\alpha(x) = (n+1)! \frac{o((x-a)^{n+1})}{(x-a)^{n+1}}$$

funksiya $x = a$ nuqtada cheksiz kichik. Qoldiq handing bunday ko‘rinishi ba’zi hollarda $f(x)$ funksiyaning a nuqta atrofida o‘zgarishini tahlil qilishga qulay. Qulaylik shundan iboratki, chekli $f^{(n+1)}(a) \neq 0$ qiymatda $x = a$ nuqtada qoldiq hadning $x - a$ ayirmaga nisbatan kichiklik tartibi aniq qiymatga ega, (3.80) shaklda esa uning kichiklik tartibining $(x - a)^n$ ifodaga nisbatan yuqoriroqligini aytish mumkin xolos.

Quyidagi ko‘rinishdagi qoldiq hadni

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}, 0 < \theta < 1 \quad (3.87)$$

Lagranj ko‘rinishidagi qoldiq had deb ataymiz. Lagranj qoldiq hadining Peano qoldiq hadidan farqi shundan iboratki, $f^{(n+1)}(x)$ hosila a nuqtada emas balki a va x oralig‘idagi $c = a + \theta(x-a)$ nuqtada hisoblanadi. (3.79) va (3.87) formulalarni birlashtirib ($0 < \theta < 1$ bo‘lganda)

$$\sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (3.88)$$

Lagranj shaklidagi qoldiq hadli n –tartibli Teylor formulasini hosil qildik.

Makloren formulasi. $a = 0$ xususiy holda (3.79) Teylor formulasi

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + R_n(x) = \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x) \end{aligned} \quad (3.89)$$

Makloren formulasini hosil qiladi. (3.89) tenglikda qoldiq had Peano shaklida

$$R_n(x) = o(x^n) \quad \text{yoki} \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(0) + \beta(x)}{(n+1)!} x^n \quad (3.90)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi, bu yerda $\beta(x)$ funksiya $x = 0$ nuqtada cheksiz kichik.

Lagranj shaklidagi qoldiq had esa

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1 \quad (3.91)$$

shaklda bo‘ladi. Shunday qilib (3.89) Makloren formulasi $f(x)$ funksiyaning $x = 0$ nuqta atrofida tasvirlar ekan.

Ba'zi elementar funksiyalarni Makloren formulasi bo'yicha yoyish.

Elementar funksiyalarni Lagranj qoldiq hadli

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (3.92)$$

Makloren formulasi bo'yicha yoyamiz.

1. $f(x) = e^x$

► $k = \overline{0, n}$ uchun $f^{(k)}(x) = e^x$ va shuning uchun $f^{(k)}(0) = 1$, $f^{(n+1)}(\theta x) = e^{\theta x}$. U holda Lagranj shaklidagi qoldiq hadli (3.89) Makloren formulasi eksponensial funksiya uchun

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (3.93)$$

ko'rinishda bo'ladi.

2. $f(x) = \sin x$

Funksiyaning va uning hosilalarining $x = 0$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} f(x) = \sin x &\Rightarrow f(0) = 0, & f'(x) = \cos x &\Rightarrow f'(0) = 1, \\ f''(x) = -\sin x &\Rightarrow f''(0) = 0 & f'''(x) = -\cos x &\Rightarrow f'''(0) = -1 \end{aligned}$$

va umuman

$$f^{(k)}(x) = \sin\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

bundan esa,

$$f^{(k)}(0) = \sin\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & k = 2p \\ (-1)^p, & k = 2p + 1 \end{cases}$$

qoldiq hag esa,

$$f^{(n+1)}(\theta x) = \sin\left(\theta x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right).$$

Demak, $\sin x$ funksiyaning Teylor ko'phadida x o'zgaruvchining juft darajalari oldidagi koeffitsiyentlar nolga aylanar ekan. Shuning uchun (3.92) formulada $n = 2k - 1$ deb olsak

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + \\ &\quad + \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \sin\left[\theta x + (2k+1) \frac{\pi}{2}\right], \quad 0 < \theta < 1 \end{aligned} \quad (3.94)$$

3. $f(x) = \cos x$

Funksiya va uning hosilalarining $x = 0$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f(0) = 1, \quad f'(x) = -\sin x \Rightarrow f'(0) = 0,$$

$$f''(x) = -\cos x \Rightarrow f''(0) = -1, \quad f'''(x) = \sin x \Rightarrow f'''(0) = 0$$

va umuman

$$f^{(k)}(x) = \cos\left(x + k \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

bundan esa

$$f^{(k)}(0) = \cos\left(k \cdot \frac{\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0, & k = 2p + 1 \\ (-1)^p, & k = 2p \end{cases}$$

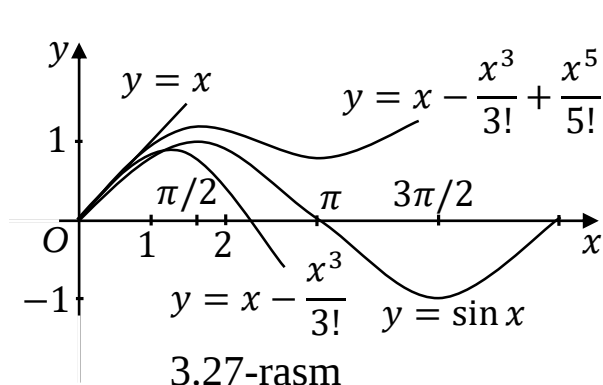
qoldiq hag esa

$$f^{(n+1)}(\theta x) = \cos\left(\theta x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$$

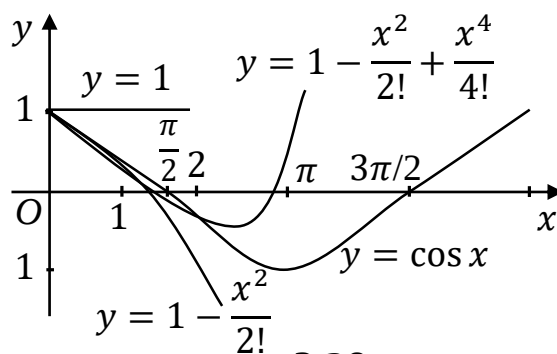
Demak $\cos x$ funksiyaning Teylor ko'phadida x o'zgaruvchining toq darajalari oldidagi koeffitsiyentlar nolga aylanar ekan. Shuning uchun (3.92) formulada $n = 2k$ deb olsak

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} +$$

$$+ \frac{x^{2k+2}}{(2k+2)!} \sin\left[\theta x + (2k+2) \frac{\pi}{2}\right], \quad 0 < \theta < 1 \quad (3.95)$$



3.27-rasm



3.28-rasm

(3.94) va (3.95) formulalardan $\sin x$ va $\cos x$ funksiylarning qiymatlarini ixtiyoriy aniqlikda hisoblash uchun foydalanish mumkin. 3.27 va 3.28 – rasmlarda $x = 0$ nuqtaning atrofida $\sin x$, $\cos x$ funksiylarning Teylor ko'phadlari bilan taqribiy yaqinlashishlari ko'rsatilgan.

$$4. f(x) = \ln(1+x)$$

Bu funksiya $x > -1$ uchun aniqlangan va ixtiyoriy tartibli hosilasi mavjud. U holda ularning qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(x) = \ln(1+x) \Rightarrow f(0) = 0, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(0) = 1$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(0) = -1,$$

$$f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{(1+x)^2} \Rightarrow f'''(0) = 2!,$$

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} \frac{(n-1)!}{(1+x)^n} \Rightarrow f^{(n)}(0) = (-1)^{n+1}(n-1)!$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+2} \frac{n!}{(1+x)^{n+1}}, f^{(n+1)}(\theta x) = (-1)^{n+2} \frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}}$$

(3.92) Makloren formulasiga ko'ra

$$\ln(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + (-1)^{n+2} \frac{n!}{(1+\theta x)^{n+1}} x^{n+1}, 0 < \theta < 1 \quad (3.96)$$

3. $f(x) = (1+x)^\alpha$ (α — haqiqiy son, $x > -1$)

Funksiya va uning hosilalarining $x = 0$ nuqtadagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(x) = (1+x)^\alpha \Rightarrow f(0) = 1, \quad f'(x) = \alpha(1+x)^{\alpha-1} \Rightarrow f'(0) = \alpha, \\ f''(x) = \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2} \Rightarrow f''(0) = \alpha(\alpha-1),$$

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

$$\Rightarrow f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1),$$

$$f^{(n+1)}(x) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)(1+x)^{\alpha-n-1},$$

$$\Rightarrow f^{(n+1)}(\theta x) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}.$$

Shuning uchun

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x) \quad (3.97)$$

bu yerda

$$R_{n+1}(x) = \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1}, 0 < \theta < 1.$$

Agar $\alpha = m$ — natural son bo'lsa (3.92) formulaning $(m+1)$ — hadidan boshlab barcha hadlari nolga aylanadi va Makloren formulasi Nyuton binom formulasiga aylanadi

$$(1+x)^\alpha = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \dots + x^n.$$

Elementar funksiyalarni asimptotik baholashda va limitlarni hisoblashda Makloren formulasidan foydalanish.

(2.55) formulada elementar funksiyalar uchun asimptotik ekvivalentlik munosabatlarini oʻrnatgan edik:

$$\left. \begin{aligned} \sin x &= x + o(x) \\ e^x &= 1 + x + o(x) \\ \ln(1+x) &= x + o(x) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \alpha x + o(x) \end{aligned} \right\} x \rightarrow 0. \quad (3.98)$$

(3.98) formulalar kichik $|x|$ qiymatlarda elementar funksiyalarni tasvirlaydi. Biz ulardan oddiy limitlarni hisoblashda foydalandik. x oʻzgaruvchining yuqoriroq darajalari asosiy oʻrin tutadigan mukammalroq limitlarni hisoblashda (3.98) formulalar yetarli boʻlmaydi. Shu sababli elementar funksiyalar uchun yanayam aniqroq asimptotik baholashlar olish zaruriyati paydo boʻladi. Bunday baholashlarni Peano shaklidagi qoldiq hadli Makloren formulasi yordamida olish mumkin. Bunday baholashlar $x \rightarrow 0$ da quyidagicha boʻladi:

$$\left. \begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \\ \sin x &= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}) \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}) \\ \ln(1+x) &= \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} + o(x^n) \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \dots + \\ &\quad + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \end{aligned} \right\} \quad (3.99)$$

3.47-Misol. Limitni toping

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3}$$

► (3.98) formulalar bilan bu limitni topib boʻlmaydi. Maxrajning koʻrinishiga qarab oʻzgaruvchining uchinchi darasi asosiy oʻrin tutadi deb xulosaga kelish mumkin. Shuning uchun (3.99) formulalardan $n = 3$ holda foydalanamiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right)}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{3!} + \frac{o(x^4)}{x^3} \right) = \frac{1}{6}.$$

Nazorat savollari

1. Hosila deb nimaga aytiladi?
2. Egri chiziqqa o'tkazilgan urinma bilan hosila o'zaro qanday bog'langan?
3. Funksiya qachon differensiallanuvchi deyiladi?
4. Differensiallanuvchi funksiyalar yig'indisining hosilasi nimaga teng?
3. Qanday funksiyalarga logarifmlab differensiallash usuli qo'llaniladi?
6. Teskari funksiyaning hosilasi qanday topiladi?
7. Qachon funksiya oshkormas ko'rinishda berilgan deyiladi?
8. Funksiyaning differensialai nima?
9. Differensialning geometrik ma'nosi nimadan iborat?
10. Ikkinchi tartibli hosilaning fizik ma'nosi nimadan iborat?
11. Aniqmaslikni ochish deganda nimani tushunasiz?
12. Teylor va Makloren formulalarining farqi nimada?

Mashqlar.

Bevosita hosilaning ta'rifidan foydalanib funksiyaning hosilasini toping:

1. $y = x^3$. 2. $y = 1/x$. 3. $y = \sqrt{x}$. 4. $y = 2x^2 - x$.

$y = f(x)$ egri chiziqqa $x = a$ nuqtada o'tkazilgan urinma va normal tenglamasini tuzing:

5. $y = x^3, a = 1$. 6. $y = 1/x, a = 1$. 7. $y = \sqrt{x}, a = 4$. 8. $y = 1/\sqrt{x}, a = 9$.

Funksiyalarning hosilalarini toping:

9. $y = x^5 + 4x^4 - 2x^3 - 1$. 10. $y = \sin 2x \cdot e^x$. 11. $y = \sqrt{5x - 4}$.

12. $y = (x^2 + 3x - 4)/(x^2 + 1)$. 13. $y = \arcsin 5x$. 14. $y = 2^{-3x}$.

$y'(x)$ hosilani toping:

13. $y = \sqrt[3]{\frac{1}{1+x^2}}$. 16. $y = \sin x - \cos x$. 17. $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x}$.

18. $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x$. 19. $y = \sin 5x$. 20. $y = 2 \sin(-x)$. 21. $y = \sin^2 x$.

22. $y = \operatorname{sh}^3 x$. 23. $y = \sqrt{\operatorname{ch} x}$. 24. $y = \operatorname{th}(\ln x)$. 23. $y = (\sin x)^{\cos x}$.

26. $y = x^{\sin x}$. 27. $y = x^{\ln x}$. 28. $y = (x + 2)^{3/2} \sqrt[3]{x - 1}$.

Funksiyaning differensialini toping.

29. $y = 1/(4x^4)$. 30. $y = \operatorname{tg}^2 x$. 31. $y = 5^{\ln \sin x}$.

32. $\arctg 1,02$ qiymatini taqribiy hisoblang.

Qayta differensiallashni bajaring:

33. $y = 4x^3 - 5x^2 + 6x - 4$; $y'' = ?$ 34. $y = \operatorname{arctg} x$, $y''(1) = ?$

33. $y = a^{3x}$, $y''' = ?$ 36. $y = x^5 \ln x$, $y''' = ?$

Yuqori tartibli differensialni toping:

37. $y = e^{-x^2/2}$, $d^2y = ?$ 38. $y = x^m$, $d^3y = ?$

Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning y'_x hosilasini toping:

39. $\begin{cases} x = 2t - 1, \\ y = t^3. \end{cases}$ 40. $\begin{cases} x = a \cos^3 t, \\ y = b \sin^3 t. \end{cases}$ 41. $\begin{cases} x = e^{-t}, \\ y = e^{2t}. \end{cases}$

Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning y''_{xx} hosilasini toping:

42. $\begin{cases} x = \ln t, \\ y = t^3. \end{cases}$ 43. $\begin{cases} x = e^t \cos t, \\ y = e^t \sin t. \end{cases}$

Lopital qoidasidan foydalanib quyidagi limitlarni toping.

44. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + 4x - 7}{2x^2 + 3x - 5}$ 43. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3}$ 46. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x - \sin x}$

47. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{\operatorname{tg}^2 x}$ 48. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x}$ 49. $\lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{\ln x}{\ln \sin x}$

50. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$ 51. $\lim_{x \rightarrow 0+0} (1+x)^{\ln x}$ 52. $\lim_{x \rightarrow 0+0} \left(\frac{1}{x} \right)^{\sin x}$

53. $x^3 + 3x^2 - 2x + 4$ ko'phadni $x + 1$ ikkihadning darajalari boyicha yoying.

54. $x^3 - 2x^2 + 3x + 5$ ko'phadni $x - 2$ ikkihadning darajalari boyicha yoying.

53. $f(x) = 1/x$ funksiyaning $a = -1$ nuqta atrofida Teylor formulasi boyicha yoying.

56. $f(x) = xe^x$ funksiyaning $a = 0$ nuqta atrofida Makloren formulasi boyicha yoying.

Makloren formulasidan foydalanib limitlarni toping:

57. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\cos x - 1 - x^2/2}{x^4} \right)$ 58. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+x} + \sqrt[3]{1+x} - 2\sqrt[4]{1-x}}{x} \right)$

Javoblar.

1. $y' = 3x^2$. 2. $y' = -1/x^2$. 3. $y' = 1/(2\sqrt{x})$. 4. $y' = 4x - 1$. 3. $3x - y - 2 = 0$, $x - 3y + 4 = 0$. 6. $-x - y + 2 = 0$, $x - y = 0$. 7. $x - 4y + 4 = 0$, $-4x - y + 18 = 0$. 8. $3x + 4y - 35 = 0$, $24x - 3y - 215 = 0$. 9. $y' = 5x^4 + 16x^3 - 6x^2$. 10. $y' = (2 \cos 2x + \sin 2x)e^x$. 11. $y' = 5/(2\sqrt{5x-4})$. 12. $y' = (-3x^2 + 10x + 3)/(x^2 + 1)^2$. 13. $y' = 5/\sqrt{1-25x^2}$. 14. $y' = -3 \cdot 2^{-3x} \cdot \ln 2$. 13. $y' = -2x/(3^3 \sqrt{(1+x^2)^4})$.

16. $y' = \cos x + \sin x$. **17.** $y' = 1/(1 + \cos x)$. **18.** $y' = \sin^2 x / \cos^4 x$.
19. $y' = 5 \cos 5x$. **20.** $y' = -2 \cos(-x)$. **21.** $y' = \sin 2x$ **22.** $y' = 3 \operatorname{sh}^2 x \cdot \operatorname{ch} x$. **23.** $y' = \operatorname{sh} x / (2\sqrt{\operatorname{ch} x})$. **24.** $y' = 1/(x \operatorname{ch}^2(\ln x))$.
25. $y' = (\sin x)^{\cos x} (\cos^2 x / \sin x - \sin x \cdot \ln \sin x)$. **26.** $y' = x^{\sin x} (\cos \ln x + \sin x / x)$. **27.** $y' = 2x^{\ln x - 1} \cdot \ln x$. **28.** $y' = \sqrt{x+2}(4x - 1) / (6\sqrt[3]{(x-1)^2})$. **29.** $dy = -dx/x^5$. **30.** $dy = (2 \operatorname{tg} x / \cos^2 x) dx$.
31. $dy = 5^{\ln \sin x} \operatorname{ctg} x \cdot \ln 5 dx$. **32.** $\operatorname{arctg} 1,02 \approx 0,793$. **33.** $y'' = 24x - 10$. **34.** $y''(1) = -1/2$. **35.** $y''' = 27a^{3x} \ln^3 a$. **36.** $y''' = x^2(60 \ln x + 47)$. **37.** $d^2 y = e^{-\frac{x^2}{2}}(x^2 - 1) dx^2$. **38.** $d^3 y = m(m-1)(m-2)x^{m-3} dx^3$. **39.** $y'_x = 3t^2/2$. **40.** $y'_x = -(b/a) \operatorname{tg} t$. **41.** $y'_x = -2 \cdot e^{3t}$.
42. $y''_{xx} = 9t^3$. **43.** $y''_{xx} = 2e^{-t}/(\cos t - \sin t)^3$. **44.** $10/7$. **45.** $-1/3$. **46.** 3 .
47. $-1/2$. **48.** 1 . **49.** 1 . **50.** 0 . **51.** 1 . **52.** 1 . **53.** $(x+1)^3 - 5(x+1) + 8$.
54. $(x-2)^3 + 4(x-2)^2 + 7(x-2) + 11$. **55.** $f(x) = -1 - (x+1) - (x+1)^2 - \dots - (x+1)^n - (-1)^{n+1}(x+1)^{n+1} / [-1 + \theta \cdot (x+1)]^{n+2}$, $0 < \theta < 1$. **56.** $f(x) = x + x^2/1! + x^3/2! + \dots + x^{n+1}/n! + x^{n+2}e^{\theta x} / (n+1)!$. **57.** $1/24$. **58.** $4/3$.

IV BOB. BIR O'ZGARUVCHILI FUNKSIYANI TEKSHIRISH

4.1. Funksiyaning o'sish va kamayish shartlari

2.1. bo'limda monoton funksiyalarga ta'rif bergan edik. Bu yerda ham bu ta'riflarni kengroq ko'rinishda takrorlaymiz. $[a, b]$ kesmada aniqlangan $f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

4.1-Ta'rif. $x_1 < x_2$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $x_1, x_2 \in [a, b]$ uchun $f(x_1) \leq f(x_2)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada kamaymaydigan funksiya deb ataladi. Agar $x_1 < x_2$ shartdan doimo $f(x_1) < f(x_2)$ kelib chiqsa, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada o'suvchi deyiladi.

4.2-Ta'rif. Agar $[a, b]$ kesmadagi $x_1 < x_2$ shartdan $f(x_1) \geq f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada o'smaydigan, $x_1 < x_2$ shartdan $f(x_1) > f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqsa, $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada kamayuvchi deyiladi.

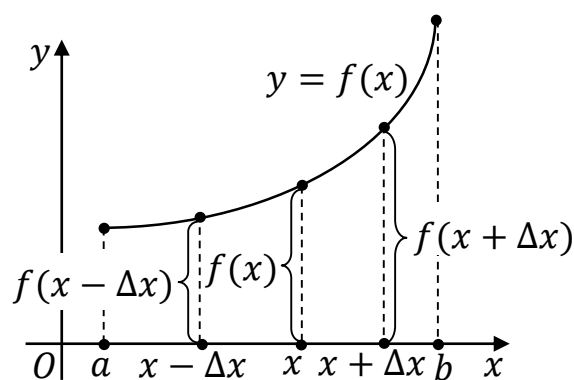
4.3-Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada faqat kamaymaydigan (xususiy holda o'suvchi) yoki faqat o'smaydigan (xususiy holda kamayuvchi) bo'lsa, uni biz $[a, b]$ kesmada monoton funksiya deb ataymiz. O'suvchi va kamayuvchi funksiyalarni qat'iy monoton funksiyalar deb ataymiz.

4.1-Teorema. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va hech bo'lmaganda (a, b) oraliqda $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada kamaymaydigan bo'lishi uchun (a, b) intervalning barcha x nuqtalarida $f'(x) \geq 0$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

► **Zarurligi.** $f'(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada kamaymaydigan bo'lsin (4.1-rasm). (a, b) oraliqda hosila $f'(x) \geq 0$ bo'lishini ko'rsatamiz. (a, b) oraliqda x va $x + \Delta x$ nuqtalarni olamiz. Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya kamaymaydi, u holda ixtiyoriy Δx orttirmada (musbat yoki manfiy) Δx va $f(x + \Delta x) - f(x)$ ayirmaning ishorasi bir xil va shuning uchun

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. (a, b) intervalning barcha x nuqtasida $f'(x)$ hosila mavjudligini inobatga olsak va limitning ishorasi haqidagi 2.5-Teoremaga ko'ra



4.1-rasm

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

Shunday qilib ixtiyoriy $x \in (a, b)$ nuqtada $f'(x) \geq 0$.

Yetarliliigi. (a, b) nuqtada $f'(x) \geq 0$ bo'lsin. $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmada kamaymasligini ko'rsatamiz. $[a, b]$ kesmaning ixtiyoriy $x_1 < x_2$ nuqtalarini olamiz. Lagranj teoremasiga ko'ra,

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

bu yerda $x_1 < c < x_2$. Shartga ko'ra (a, b) intervalning har bir nuqtasida $f'(x) \geq 0$, u holda $f'(c) \geq 0$. Bundan tashqari $x_2 > x_1$. Shuning uchun

$$f(x_2) \geq f(x_1).$$

Shunday qilib $x_1 < x_2$ tengsizlikdan $f(x_1) \leq f(x_2)$ tengsizlik kelib chiqar ekan, bu esa $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmada kamaymasligini anglatadi. ◀

Keyingi teorema ham xuddi shu singari isbotlanadi.

4.2-Teorema. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va hech bo'lmaganda (a, b) oraliqda $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada o'smaydigan bo'lishi uchun (a, b) intervalning barcha x nuqtalarida $f'(x) \leq 0$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarli.

Qaralgan teoremlar kesmada uzluksiz va intervalning chekli sondagi nuqtalarida hosilaga ega bo'lmagan funksiyalar uchun ham o'rinli. Bu bevosita isbotning borishidan kelib chiqadi. Buning uchun interval hosila mavjud bo'lmagan nuqtalar yordamida uzluksiz hosilali kichik intervallarga ajratiladi.

Shunday qilib, $f'(x)$ hosilaning oraliqda ishorasini o'zgartmasligi (intervalning chekli sondagi nuqtalaridagina nolga aylanadi degan shartda) $f(x)$ funksiyaning mazkur oraliqda qat'iy monoton bo'lishligi uchun yetarli shart bo'ladi.

4.3-Teorema. Agar $[a, b]$ kesmada uzluksiz va (a, b) oraliqda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning hosilasi ixtiyoriy $x \in (a, b)$ nuqtada $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) va hech qanday $E \subseteq (a, b)$ oraliqda $f'(x)$ hosila aynan nol bo'lmasa, $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda o'sadi (kamayadi).

► (a, b) intervalning ixtiyoriy $x_1 < x_2$ nuqtalarini olamiz. Lagranj teoremasiga ko'ra

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1)$$

bu yerda $x_1 < c < x_2$. Shartga ko'ra (a, b) intervalning har bir nuqtasida $f'(x) \geq 0$, u holda $f'(c) \geq 0$. Bundan tashqari $x_2 > x_1$. Shuning uchun $f(x_2) \geq f(x_1)$. Demak $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada kamaymas ekan.

Bundan tashqari ixtiyoriy $x \in (x_1, x_2)$ uchun $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$. Bu qo'sh tengsizliklardan hech bo'lmaganda bittasi qat'iy tengsizlik ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, agar $f(x_1) = f(x_2)$ deb faraz qilsak, ixtiyoriy $x \in (x_1, x_2)$ uchun

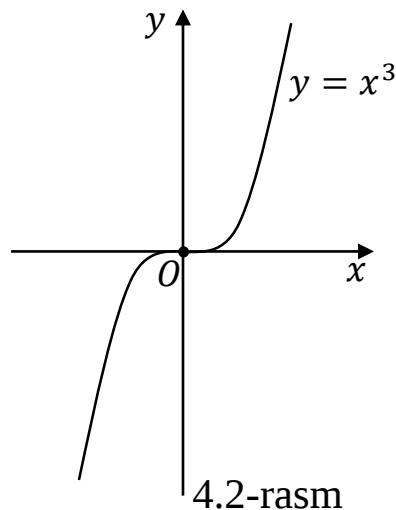
$$f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = f(x_1),$$

ya'ni funksiya (x_1, x_2) oraliqda o'zgarmas funksiya bo'ladi, u holda barcha $x \in (x_1, x_2)$ uchun $f'(x) \equiv 0$. Teoremaning shartiga ko'ra bunday bo'lishi mumkin emas.

Shuning uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) < f(x_2)$ bo'ladi, ya'ni $f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda o'suvchi.

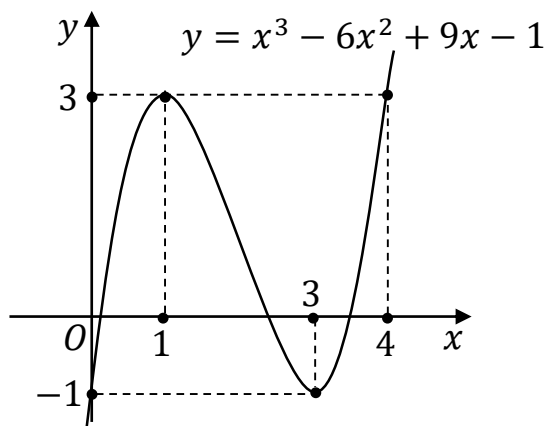
Shunday qilib funksiya o'sishi uchun yetarli shartni isbotladik. Funksiya kamayishi uchun yetarli shart ham xuddi shu singari isbotlanadi. ◀

Biroq $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmada o'suvchiligidan (a, b) oraliqda $f'(x) > 0$ tengsizlikning o'rinli bolishi kelib chiqmaydi.

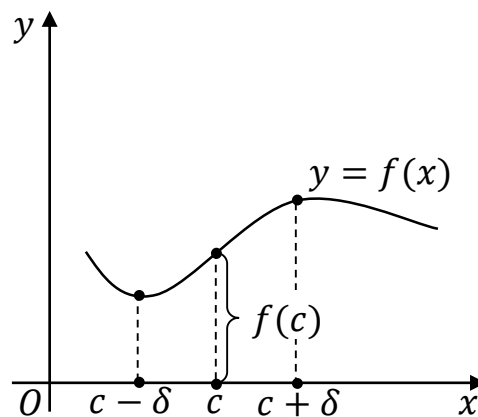


4.2-rasm

4.1-Misol. $f(x) = x^3$ funksiya $[-1, 1]$ kesmada o'sadi, ammo uning $f'(x) = 3x^2$ hosilasi $x = 0$ nuqtada nolga aylanadi (4.2-rasm). ◀



4.3-rasm



4.4-rasm

4.2-Misol. $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlarini toping.

► Bu funksiya barcha $x \in \mathbf{R}$ nuqtalarda aniqlangan. Uning $y' = 3x^2 - 12x + 9 = 3(x - 1)(x - 3)$ hosilasi $(-\infty, 1)$ va $3, +\infty)$ intervallarda musbat va $(1, 3)$ oraliqda manfiy. U holda 4.3-Teoremaga ko'ra funksiya $(-\infty, 1)$ va $3, +\infty)$ intervallarda o'sadi va $(1, 3)$ oraliqda kamayadi (4.3-rasm).

4.4-Ta'rif. Agar c nuqtaning shunday $(c - \delta, c + \delta)$ atrofi topilib, bu oraliqdan olingan barcha $x < c$ uchun $f(x) < f(c)$ va barcha $x > c$ uchun $f(x) > f(c)$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada o'suvchi deyiladi (4.4-rasm).

Agar c nuqtaning biror atrofidan olingan barcha $x < c$ uchun $f(x) > f(c)$ va barcha $x > c$ uchun $f(x) < f(c)$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada kamayuvchi deyiladi

Keyingi teorema funksiya nuqtada o'sishining va kamayishning yetarli shartini ifodalaydi.

4.3-Teorema. $f(x)$ funksiya $x = c$ nuqtada $f'(c)$ hosilaga ega bo'lsin. Agar $f'(c) > 0$ bo'lsa, u holda funksiya $x = c$ nuqtada o'sadi; agar $f'(c) < 0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada kamayadi.

► $f'(c) > 0$ bo'lsin. Bu esa

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} > 0$$

degan ma'noni anglatadi. U holda shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $0 < |\Delta x| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha Δx orttirmalar uchun

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} > 0$$

tengsizli o'rinli bo'ladi. Bundan esa Δx va $f(c + \Delta x) - f(c)$ orttirmalar bir xil ishorali ekanligi kelib chiqadi: agar $\Delta x < 0$ bo'lsa, $f(c + \Delta x) - f(c) < 0$, ya'ni $f(c + \Delta x) < f(c)$; $\Delta x > 0$ bo'lsa, $f(c + \Delta x) - f(c) > 0$, ya'ni $f(c + \Delta x) > f(c)$. Bu esa ta'rifga ko'ra $f(x)$ funksiya c nuqtada o'suvchi ekanligini anglatadi.

Xuddi su singari mulohaza yuritib, agar $f'(c) < 0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada kamayuvchi ekanligini isbotlash mumkin. ◀

4.2. Funksiyaning ekstremumi

$f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda aniqlangan bo'lsin.

4.5-Ta'rif. Agar $c \in (a, b)$ nuqtaning shunday $(c - \delta, c + \delta)$ atrofi topilib, bu atrofdan olingan barcha x nuqtalarda

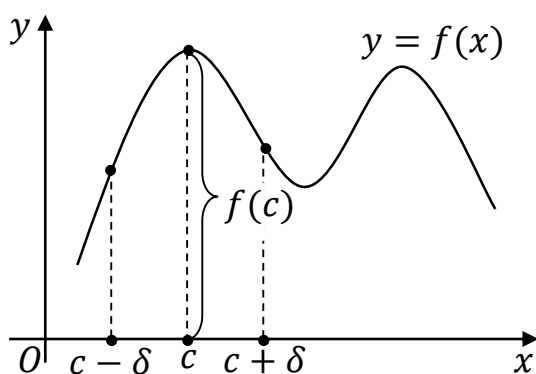
$$f(x) \leq f(c) \quad (4.1)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, c nuqta $f(x)$ funksiyaning *lokal maksimum* nuqtasi deb ataladi (4.5-rasm). Agar $d \in (a, b)$ nuqtaning shunday $(d - \delta, d + \delta)$ atrofi topilib, bu atrofdan olingan barcha x nuqtalarda

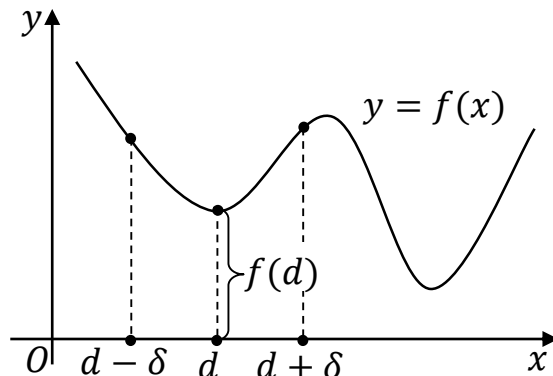
$$f(x) \geq f(d) \quad (4.2)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, d nuqta $f(x)$ funksiyaning *lokal minimum* nuqtasi deb ataladi (4.6-rasm). Agar (4.1) va (4.2) tengsizliklar qat'iy tengsizliklar

bo'lsa qat'iy lokal maksimum va qat'iy lokal minimum haqida gapirish mumkin bo'ladi.



4.5-rasm



4.6-rasm

Lokal maksimum nuqtadagi $f(c)$ qiymatni $f(x)$ funksiysiyaniing lokal maksimumi va lokal minimum nuqtadagi $f(d)$ qiymatni lokal minimumi deb ataladi. Lokal maksimum va lokal minimum tushunchalar birlashtirilib lokal ekstremumlar deb ataladi. Keyingi satrlarda lokal va qat'iy so'zlarini ishlatmasdan faqat maksimum, minimum va ekstremum so'zlarini ishlatamiz, hamda qat'iy maksimum va qat'iy minimum hollarni qaraymiz. Agar funksiya c va d nuqtalarda mos ravishda maksimum va minimum qiymatlarga erishsa biz ularni $f(c) = f_{max}$ va $f(d) = f_{min}$ orqali yozamiz.

Funksiya ekstremumi mavjudligining zaruriy sharti.

4.4-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya c nuqtada differensiallanuvchi va bu nuqtada ekstremumga erishsa, u holda $f'(c) = 0$ bo'ladi.

► Aniqlik uchun c maksimum nuqtasi bo'lsin. 4.5-Ta'rifga ko'ra c nuqtaning shunday $(c - \delta, c + \delta)$ atrofi topiladiki, $f(x)$ funksiya c nuqtada bu atrofning eng katta qiymatini qabul qiladi. U holda c nuqtada Ferma teoremasining shartlari bajariladi, shuning uchun bu nuqtada $f'(c) = 0$ bo'ladi. c minimum nuqta bo'lgan holda ham shu singari isbotlanadi. ◀

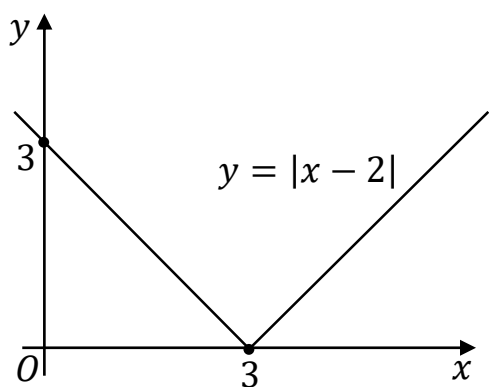
4.4-Teorema oddiy geometrik talqinga ega: differensiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning c ekstremum nuqtasiga mos keluvchi $(c, f(c))$ nuqtada $y = f(x)$ egri chiziqda o'tkazilgan urinma Ox o'qqa parallel bo'ladi.

4.6-Ta'rif. $f(x)$ funksiyaning hosilasi nolga teng bo'ladigan nuqtalar bu funksiyaning statsionar nuqtalari deb ataladi.

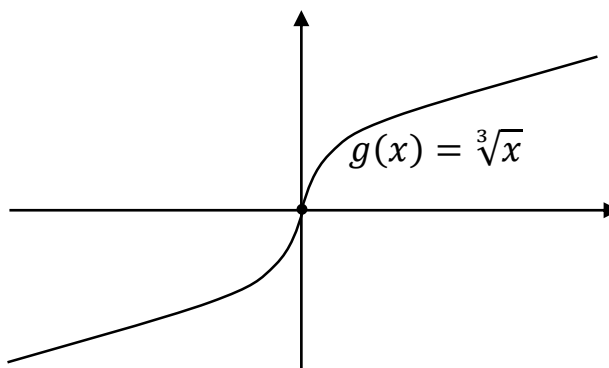
4.4-Teoreмага ko'ra differensiallanuvchi funksiya ekstremumga o'zining statsionar nuqtalaridagina erishishi mumkin ekan. Biroq hamma statsionar nuqtalarda ham funksiya ekstremumga erishavermaydi. Buni $f(x) = x^3$ funksiyaning misolida ko'rish mumkin (4.2-rasm). Uning $f'(x) = 3x^2$ hosilasi $x = 0$ nuqtada nolga aylanadi, ya'ni bu nuqta uning

statsionar nuqtasi bo‘ladi, ammo funksiya $x = 0$ nuqtada ekstremumga erishmaydi.

Endi ayrim nuqtalarda hosilasi cheksiz yoki mavjud bo‘lmagan funksiyalarni qaraymiz. Masalan $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ funksiya $x = 0$ nuqtada minimumga erishadi, uning hosilasi esa bu nuqtada cheksiz (3.15-rasm). $y = |x - 2|$ funksiya $x = 2$ nuqtada hosilaga ega emas, shunga qaramasdan funksiya bu nuqtada minimumga erishadi (4.7-rasm). Demak funksiyaning hosilasi cheksiz yoki mavjud bo‘lmagan nuqtalarda ham funksiya ekstremumga erishishi mumkin ekan. Ammo bu yerda ham hosilaning mavjud emasligi yoki cheksizga aylanishi ekstremum mavjudligiga kafolat bermaydi. Bunga $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $x \in \mathbb{R}$ funksiyaning misol qilib ko‘rsatish mumkin. U $x = 0$ nuqtada cheksiz hosilaga ega, ammo funksiya mazkur nuqtada ekstremumga erishmaydi, chunki bu nuqtaning ixtiyoriy atrofida ham manfiy ham musbat qiymatlarni qabul qiladi (4.8-rasm).



4.7-rasm



4.8-rasm

Shunday qilib, ekstremum mavjudligining zaruriy shartini quyidagicha ifodalash mumkin: agar $f(x)$ funksiya $x = c$ nuqtada ekstremumga erishsa, u holda yoki funksiya bu nuqtada differensiallanuvchi va uning hosilasi $f'(c) = 0$ yoki $x = c$ nuqtada funksiya differensiallanuvchi emas.

4.7-Ta’rif. $f(x)$ funksiyaning o‘zi uzluksiz, uning hosilasi esa nol, cheksiz yoki umuman mavjud bo‘lmagan nuqtalarni, funksiyaning *kritik nuqtalari* deb ataladi.

4.5-Teorema. $f(x)$ funksiya ekstremumga o‘zining faqat kritik nuqtalarida erishishi mumkin.

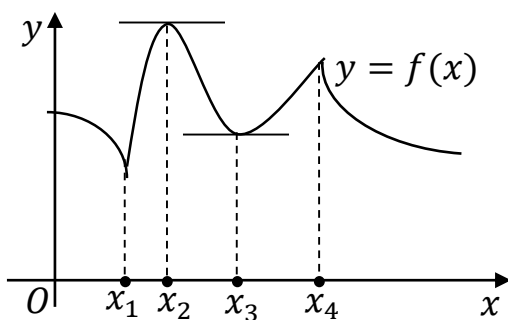
► $f(x)$ funksiya c nuqtada $f'(c) \neq 0$ hosilaga ega bo‘lsin. Aniqlik uchun $f'(c) > 0$ deb faraz qilamiz. U holda $f(x)$ funksiya c nuqtada o‘suvchi bo‘ladi. Shuning uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $(c - \delta, c)$ oraliqdan olingan barcha x uchun $f(x) < f(c)$ tengsizlik, $(c, c + \delta)$

oraliqdan olingan barcha x uchun esa $f(c) < f(x)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi (4.4-rasm). Bundan $f(x)$ funksiyaning $f(c)$ qiymati eng katta yoki eng kichik bo‘ladigan c nuqtaning atrofi mavjud emas degan xulosaga kelish mumkin va shuning uchun c nuqta $f(x)$ funksiyaning maksimum nuqtasi ham, minimum nuqtasi ham bo‘lmaydi.

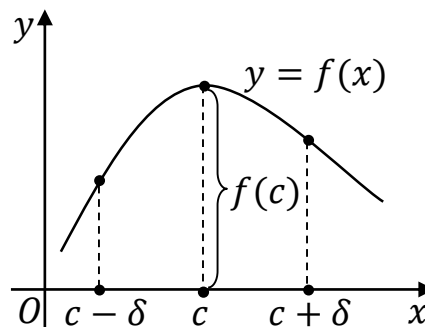
Xuddi shu singari mulohazalar bilan $f'(c) < 0$ holda ham ana shunday xulosaga kelish mumkin.

Shunday qilib, agar c nuqtada hosila $f'(c) \neq 0$ bo‘lsa, c nuqta $f(x)$ funksiyaning maksimum nuqtasi ham, minimum nuqtasi ham bo‘laolmas ekan. Demak, $f(x)$ funksiyaning ekstremumi $f'(x)$ hosila yoki nol bo‘ladigan yoki mavjud bo‘lmaydigan nuqtalardagina bo‘lishi mumkin ekan. ◀

Teoremaning geometrik talqini 4.9-rasmda keltirilgan. Grafigi bu rasmda tasvirlangan $y = f(x)$ funksiya x_1, x_2, x_3, x_4 nuqtalarda ekstremumga erishadi; bunda x_1 va x_4 nuqtalarda $f'(x)$ hosila mavjud emas, x_2 va x_3 nuqtalarda uning qiymati nolga teng.



4.9-rasm



4.10-rasm

Funksiya ekstremumi mavjudligining yetarli sharti.

4.6-Teorema. $x = c$ nuqta $f(x)$ funksiyaning kritik nuqtasi bo‘lsin, ya’ni funksiyaning bu nuqtadagi hosilasi yoki $f'(c) = 0$ yoki mavjud emas, funksiyaning o‘zi esa c nuqtada uzluksiz. Shunday $\delta > 0$ son topilib, $(c - \delta, c)$ oraliqdan olingan barcha x uchun $f'(x) > 0$ va $(c, c + \delta)$ oraliqdan olingan barcha x uchun esa $f'(x) < 0$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsin, ya’ni x o‘zgaruvchi c nuqta orqali o‘tganda $f'(x)$ hosila o‘zining ishorasini plusdan minusga o‘zgartirsin. U holda $f(x)$ funksiya c nuqtada maksimumga erishadi, ya’ni $f(c) = f_{\max}$.

► Teorema shartiga ko‘ra $(c - \delta, c)$ oraliqda $f'(x) > 0$, shuning uchun $f(x)$ funksiya $[c - \delta, c]$ kesmada o‘sadi; $(c, c + \delta)$ oraliqda esa $f'(x) < 0$, shu sababli $f(x)$ funksiya $[c, c + \delta]$ kesmada kamayadi. Demak $f(x)$ funksiyaning $f(c)$ qiymati c nuqtaning $(c - \delta, c + \delta)$

oraliqdagi uning eng katta qiymati bo'lar ekan (4.10-rasm), bu esa $f(x)$ funksiya c nuqtada maksimumga erishishini anglatadi. ◀

Xuddi shu singari quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

4.7-Teorema. $x = c$ nuqta $f(x)$ funksiyaning kritik nuqtasi bo'lsin, ya'ni funksiyaning bu nuqtadagi hosilasi yoki $f'(c) = 0$ yoki mavjud emas, funksiyaning o'zi esa c nuqtada uzluksiz. Shunday $\delta > 0$ son topilib, $(c - \delta, c)$ oraliqdan olingan barcha x uchun $f'(x) < 0$ va $(c, c + \delta)$ oraliqdan olingan barcha x uchun esa $f'(x) > 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsin, ya'ni x o'zgaruvchi c nuqta orqali o'tganda $f'(x)$ hosila o'zining ishorasini minusdan plusga o'zgartirsin. U holda $f(x)$ funksiya c nuqtada minimumga erishadi, ya'ni $f(c) = f_{\min}$.

4.3-Misol. $f(x) = (x + 2)^2(x - 1)$ funksiyaning monotonlik intervallarini va ekstremumlarini toping.

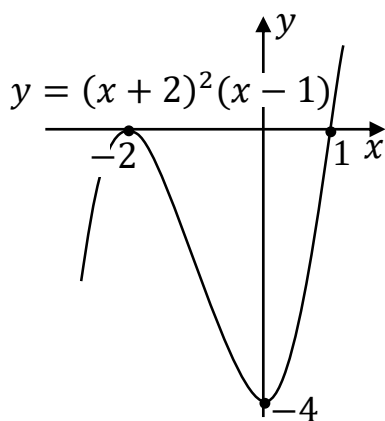
► Funksiya $\mathbb{R}$ son o'qida aniqlangan. Uning hosilasi $f'(x) = 2(x + 2)(x - 1) + (x + 2)^2 = 3x(x + 2)$, ya'ni ikkita $x_1 = -2$ va $x_2 = 0$ statsionar nuqtaga ega. Ular son o'qini uchta oraliqqa ajratadi: $(-\infty, -2)$, $(-2, 0)$, $(0, +\infty)$ va ularning har birida hosila o'zining ishorasini saqlaydi, ya'ni 4.3- Teoreмага ko'ra funksiya bu oraliqlarda monoton. Bu monotonliklar quyidagilardan iborat:

$(-\infty, -2)$ oraliqda $f'(x) > 0 \Rightarrow$ funksiya bu oraliqda o'sadi;

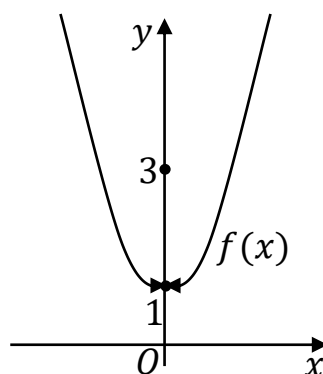
$(-2, 0)$ oraliqda $f'(x) < 0 \Rightarrow$ funksiya bu oraliqda kamayadi;

$(0, +\infty)$ oraliqda $f'(x) > 0 \Rightarrow$ funksiya bu oraliqda o'sadi.

4.6 va 4.7-Teoremalarga ko'ra $f(x)$ funksiya $x_1 = -2$ nuqtada maksimumga, $x_2 = 0$ nuqtada esa minimumga erishadi: $f_{\max} = f(-2) = 0$ va $f_{\min} = f(0) = -4$. Funksiyaning grafigi 4.11-rasmda tasvirlangan.



4.11-rasm



4.12-rasm

4.4-Misol. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \neq 0, \\ 3, & x = 0 \end{cases}$ tarkibli funksiyaning ekstremumga

tahlil qiling.

► Funksiyaning $f'(x)$ hosilasi $x = 0$ nuqtadan boshqa hamma nuqtalarda mavjud va $x = 0$ nuqtadan o'tishda hosila minusdan plyusga o'tadi. Shunga qaramasdan funksiya $x = 0$ nuqtadan maksimumga ham minimumga ham erishmaydi. Buni bevosita 4.12-rasmda ham ko'rish mumkin. 4.7-Teoremani bu funksiya qo'llab bo'lmaydi, chunki funksiya $x = 0$ nuqtada uzilishga ega. ◀

Shunday qilib, ekstremum mavjudligining yetarli sharti berilgan 4.6 va 4.7-Teoremalarni kritik nuqtada uzilishga ega bo'lgan funksiya qo'llab bo'lmas ekan.

Funksiya ekstremumini topishning 1-qoidasi. $f(x)$ funksiyaning maksimum minimum nuqtalarini topish uchun:

1) funksiyaning $f'(x)$ hosilasini topib, uni nolga tenglashtirib, hosil bo'lgan $f'(x) = 0$ tenglamani yechish kerak;

2) $f'(x)$ hosila mavjud bo'lmaydigan nuqtalarni topish kerak. Bu nuqtalar va $f'(x) = 0$ tenglamaning ildizlari $f(x)$ funksiyaning kritik nuqtalari bo'ladi;

3) har bir kritik nuqtaning chap va o'ng tomonlarida $f'(x)$ hosilaning ishoralarini tekshirish kerak. Agar x o'zgaruvchi $x = c$ kritik nuqtadan o'tishda $f'(x)$ hosila o'zining ishoralarini plyusdan minusga o'zgartirsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada maksimumga erishadi; agar $f'(x)$ hosilaning ishorasi minusdan plyusga o'zgarsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada minimumga erishadi. Agar x o'zgaruvchi $x = c$ kritik nuqtadan o'tishda $f'(x)$ hosila o'zining ishorasini o'zgartirmasa, $f(x)$ funksiya c nuqtada maksimumga ham minimumga ham erishmaydi. ◀

4.5-Misol. $y = x^2 e^{-x}$ funksiyaning ekstremumga tekshiring.

► 1) Hosilani topamiz: $y' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x}(2 - x)x$.

2) y' hosilani nolga tenglashtirib funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz: $x = 0$, $x = 2$.

3) Har bir kritik nuqtadan chapda va o'ngda hosilaning ishoralarini tekshiramiz:

$(-\infty, 0)$	$(0, 2)$	$(2, +\infty)$
$y' < 0$	$y' > 0$	$y' < 0$
–	+	–

Shunday qilib $x = 0$ minimum nuqta, $x = 2$ esa maksimum nuqta bo'lar ekan (4.13-rasm). ◀

4.6-Misol. $y = x^{2/3}$ funksiyaning ekstremumga tekshiring.

► 1) Hosilani topamiz:

$$y' = \frac{2}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{x}}.$$

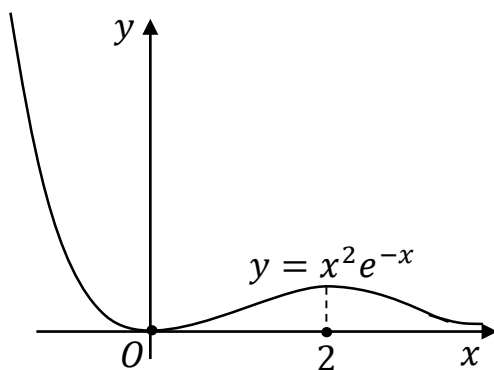
2) Hosila hech qayerda nolga aylanmaydi, ammo $x = 0$ nuqtada mavjud emas:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y'(x) = \frac{2}{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty.$$

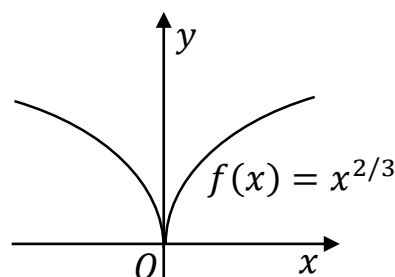
3) $x = 0$ nuqtadan chapda va o'ngda y' hosilaning ishoralarini tekshiramiz:

$(-\infty, 0)$	$(0, +\infty)$
$y' < 0$	$y' > 0$
—	+

Shunday qilib $x = 0$ nuqta funksiyaning minimum nuqtasi ekan (4.14-rasm).



4.13-rasm



4.14-rasm

Funksiyani ekstremumga yuqori tartibli hosilalar yordamida tekshirish

Keyingi teorema ham ekstremumning yetarlilik shartini ifodalaydi.

4.8-Teorema. $x = c$ nuqtada $f(x)$ funksiya birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarga ega va bunda $f'(c) = 0$ va $f''(c) \neq 0$ bo'lsin. Agar $f''(c) < 0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada maksimumga, $f''(c) > 0$ bo'lsa, minimumga erishadi.

► $f'(c) = 0$ bo'lganligi uchun c nuqta berilgan funksiyaning kritik nuqtasi bo'ladi. $f''(c) < 0$ bo'lsin. Bundan $f'(x)$ funksiya c nuqtada kamayishi ekanligi kelib chiqadi, ya'ni c nuqtaning shunday $(c - \delta, c + \delta)$ atrofi topiladiki, $(c - \delta, c)$ oraliqdan olingan barcha x uchun $f'(x) > f'(c) = 0$ va $(c, c + \delta)$ oraliqdan olingan barcha x uchun $f'(x) < f'(c) = 0$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Shunday qilib x o'zgaruvchi c nuqta orqali o'tganda $f'(x)$ hosila o'z ishorasini plusdan minusga o'zgartirar ekan. Demak, $f(x)$ funksiya c nuqtada maksimumga erishadi.

Shunga o'xshash mulohazalar bilan, agar c kritik nuqtada ikkinchi tartibli hosila $f''(c) > 0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya c nuqtada minimumga erishishini isbotlash mumkin. ◀

Bu yerdan funksiyaning ekstremumini topishning ikkinchi qoidasini hosil qilamiz.

Funksiya ekstremumini topishning 2-qoidasi. $f(x)$ funksiyaning maksimum va minimum nuqtalarini topish uchun, dastlab uning kritik nuqtalari topiladi. Bu 1-qoidadagi singari bajariladi. So'ngra $f''(x)$ ikkinchi tartibli hosila topiladi. Agar ikkinchi tartibli hosila c kritik nuqtada $f''(c) < 0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya bu nuqtada maksimumga, agar $f''(c) > 0$ bo'lsa, funksiya bu nuqtada minimumga erishadi.

Agar c kritik nuqtada ikkinchi tartibli hosila ham nolga aylansa, funksiyaning ekstremumga tekshirishga yuqori tartibli hosilalarni jalb qilish mumkin:

4.9-Teorema. $f(x)$ funksiya $x = c$ nuqtada n marta differentsiallanuvchi va bunda $(n - 1)$ -tartibgacha barcha hosilalar bu nuqtada nolga aylansin: $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$ va $f^{(n)}(c) \neq 0$ bo'sin. U holda, agar n juft bo'lsa funksiya c nuqtada ekstremumga erishadi va $f^{(n)}(c) < 0$ bo'lsa $f(c) = f_{\max}$; $f^{(n)}(c) > 0$ bo'lsa $f(c) = f_{\min}$ bo'ladi.

► $f(x)$ funksiyaning c nuqtaning $U_1(c)$ atrofida (3.84) Peano qoldiq hadli $(n - 1)$ -tartibli Teylor formulasi orqali tasvirlaymiz:

$$f(x) = f(c) + f'(c)(x - c) + \frac{f''(c)}{2!}(x - c)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(c)}{(n-1)!}(x - c)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c) + \alpha(x)}{n!}(x - c)^n,$$

bu yerda $\alpha(x)$ funksiya c nuqtada cheksiz kichik. Teoremaning shartiga ko'ra $f'(c) = f''(c) = \dots = f^{(n-1)}(c) = 0$, Teylor formulasini

$$f(x) - f(c) = \frac{f^{(n)}(c) + \alpha(x)}{n!}(x - c)^n \quad (4.3)$$

ko'rinishda yozish mumkin. n juft bo'lsa ixtiyoriy $x \in U_1(c)$, $x \neq c$ uchun $(x - c)^n > 0$ bo'ladi. $\alpha(x)$ funksiya c nuqtada cheksiz kichik bo'lganligi uchun

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f^{(n)}(c) + \alpha(x)}{n!} = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \neq 0$$

c nuqtada noldan farqli limitga ega bo'lgan funksiyaning ishorasi c nuqtaning kichik atrofida o'zgarmas bo'lganligi uchun c nuqtaning shunday

$U_2(c)$ atrofi mavjudki, bu atrofda $f^{(n)}(c) + \alpha(x)$ funksiyaning ishorasi $f^{(n)}(c)$ qiymatning ishorasi bilan bir xil bo'ladi. U holda (4.3) tenglikka ko'ra $U(c) = U_1(c) \cap U_2(c)$ atrofda $f(x) - f(c)$ ayirmaning ishorasi $f^{(n)}(c)$ qiymatning ishorasi bilan bir xil bo'ladi. Boshqacha qilib aytganda, agar $f^{(n)}(c) < 0$ bo'lsa ixtiyoriy $x \in U(c)$ uchun $f(x) < f(c)$ bo'ladi va 4.5-Ta'rifga ko'ra $f(c) = f_{\max}$; agar $f^{(n)}(c) > 0$ bo'lsa ixtiyoriy $x \in U(c)$ uchun $f(x) > f(c)$ bo'ladi va 4.5-Ta'rifga ko'ra $f(c) = f_{\min}$. ◀

4.9-Teorema isbotining borishidan ko'rish mumkinki, n toq bo'lganda (4.3) tenglikdagi $(x - c)^n$ ko'paytuvchi x o'zgaruvchi c nuqta orqali o'tganda ishorasini o'zgartiradi va shuning uchun c nuqta $f(x)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lmaydi. Shunday qilib, noldan farqli bo'ladigan hosila n tartibining juftligi $f(x)$ funksiyaning c nuqtada ekstremumi mavjudligi uchun nafaqat yetarli shart, balki zaruriy shart ham ekan.

4.7-Misol. $y = x^m, m \in \mathbb{N}$ funksiyaning $m - 1$ tartibgacha bo'lgan barcha hosilalar $x = 0$ nuqtada nolga teng va $f^{(m)}(0) = m! > 0$. Bunda m juft bo'lsa, $x = 0$ bu funksiyaning minimum nuqtasi va m toq bo'lsa, $y = x^m$ funksiya $x = 0$ nuqtada ekstremumga ega emas. ◀

Funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymati.

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, Veyershtassning ikkinchi teoremasiga ko'ra funksiya bu kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi.

Agar $f(x)$ funksiya o'zining eng katta M qiymatini $[a, b]$ kesmaning ichki c nuqtasida qabul qilsa, $M = f(c)$ qiymat $f(x)$ funksiyaning lokal maksimumi bo'ladi.

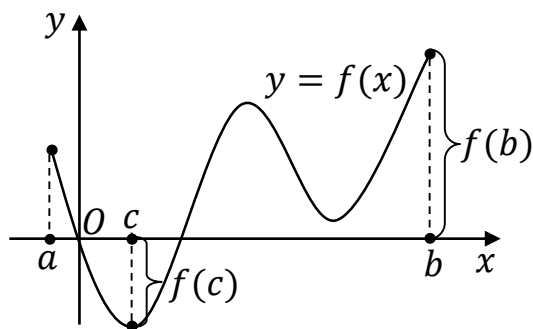
Biroq $f(x)$ funksiya o'zining eng katta M qiymatiga $[a, b]$ kesmaning chetki nuqtalarida ham erishishi mumkin.

Shuning uchun $[a, b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiyaning eng katta M qiymatini topish uchun $f(x)$ funksiyaning (a, b) oraliqdagi barcha maksimumlarini topish kerak, $[a, b]$ kesmaning chetki nuqtalaridagi $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlarini hisoblab va ular orasidan eng kattasini tanlash kerak. $f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi m eng kichik qiymati bu funksiyaning (a, b) oraliqdagi barcha minimumlari va $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlar orasidagi eng kichigi bo'ladi.

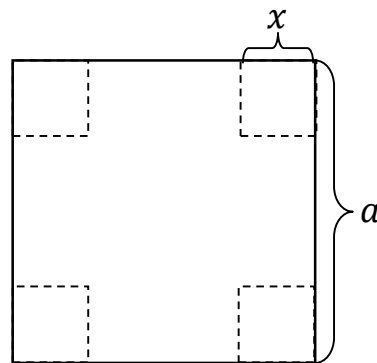
Grafigi 4.15-rasmda tasvirlangan $f(x)$ funksiya uchun $M = f(b)$ va $m = f(c)$ bo'ladi.

4.8-Misol. Tomoni a qiymatga teng bo'lgan kavadrat shaklidagi temir tunukaning burchaklaridan teng kvadratlar kesib olinib va chetlari qayrilib

to'g'ri burchakli ochiq quti yasaladi. Eng katta hajmli qutini qanday hosil qilish mumkin?



4.15-rasm



4.16-rasm

► x o'zgaruvchining funksiyasi sifatida qutining v hajmi

$$v(x) = x(a - 2x)^2, \quad 0 \leq x \leq a/2$$

formula bilan hisoblanadi (4.16-rasm). Ana shu $v(x)$ funksiyaning eng katta qiymatini topishimiz kerak. Birinchi tartibli hosilasini topamiz:

$$v'(x) = (a - 2x)^2 - 4x(a - 2x) = (a - 2x)(a - 6x).$$

Bu yerda $v(x)$ funksiyaning kritik nuqtalarini topamiz: $x_1 = a/6$ va $x_2 = a/2$. $(a, a/2)$ oraliqda $x_1 = a/6$ kritik nuqta yotadi.

$v(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topamiz

$$v''(x) = -2(a - 6x) - 6(a - 2x) = 24x - 8a.$$

va uning $x_1 = a/6$ nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz:

$$v''\left(\frac{a}{6}\right) = -4a < 0.$$

Demak $v(x)$ funksiya $x = a/6$ nuqtada maksimumga erishadi:

$$v\left(\frac{a}{6}\right) = \frac{a}{6} \left(a - 2 \cdot \frac{a}{6}\right)^2 = \frac{a}{6} \left(\frac{2}{3}a\right)^2 = \frac{2a^3}{27}.$$

$[0, a/2]$ kesmaning chetki nuqtalarida $v(0) = v\left(\frac{a}{2}\right) = 0$ bo'ladi.

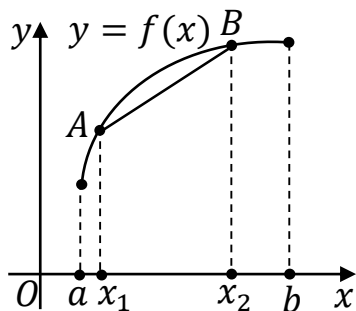
Shunday qilib, agar $x = a/6$ deb olsak quti eng katta hajmli bo'lar ekan va uning hajmi $\frac{2a^3}{27}$ bo'ladi. ◀

4.3. Funksiya grafigining qavariqligi va botiqligi

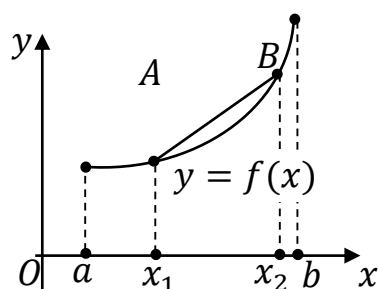
Egri chiziqning qavariqligi va botiqligi. $y = f(x)$ funksiya (a, b) oraliqda berilgan va $a < x_1 < x_2 < b$ bo'lsin. $f(x)$ funksiya garfigida yotgan $A(x_1, f(x_1))$ va $B(x_2, f(x_2))$ nuqtalar orqali to'g'ri chiziq o'tkazamiz.

Bu to'g'ri chiziqning A va B nuqtalar orasidagi kesmasini AB vatar deb ataymiz.

4.8-Ta'rif. Ixtiyoriy x_1 va $x_2, a < x_1 < x_2 < b$ nuqtalar uchun $A(x_1, f(x_1))$ va $B(x_2, f(x_2))$ nuqtalarni tutashtiruvchi AB vatar $y = f(x)$ egri chiziqdan pastda yotsa, bu egri chiziq (a, b) oraliqda qavariq deyiladi (4.17-rasm). Agar AB vatar $y = f(x)$ egri chiziqdan yuqorida yotsa, bu egri chiziqni biz (a, b) oraliqda botiq deb ataymiz (4.18-rasm). Shu bilan bir qatorda $f(x)$ funksiyaning o'zini ham (a, b) oraliqda qavariq (botiq) deb ataymiz.



4.17-rasm



4.18-rasm

Endi yuqorida aytilgan A va B nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz.

Bu to'g'ri chiziq tenglamasini berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi sifatida

$$\frac{y - f(x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad (4.4)$$

yoki

$$y = \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} \quad (4.5)$$

ko'rinishda yozish mumkin. (4.5) tenglamaning o'ng tomonini $l(x)$ orqali belgilab, uni $y = l(x)$ ko'rinishda yozamiz. U holda 4.8-Ta'rifga ko'ra qavariq egri chiziq uchun

$$l(x) < f(x) \quad (4.6)$$

va botiq egri chiziq uchun

$$l(x) > f(x) \quad (4.7)$$

tengsizlikni yozish mumkin.

Shunday qilib, 4.8-Ta'rifni (4.6) va (4.7) tengsizliklar orqali ifodalaymiz.

4.9-Ta'rif. Ixtiyoriy x_1 va $x_2, a < x_1 < x_2 < b$ nuqtalar uchun (4.6) tengsizlik o'rinli bo'lsa, $y = f(x)$ egri chiziq (a, b) oraliqda qavariq, (4.7) tengsizlik bajarilsa, bu egri chiziqni (a, b) oraliqda botiq deb ataymiz.

Funksiya grafigi qavariq (botiq) bo'ladigan har qanday interval funksiyaning qavariqlik (botiqlik) intervali deb ataladi.

4.10-Teorema (qavariqlik va botiqlikning yetarli sharti). Agar $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi ixtiyoriy $x \in (a, b)$ uchun $f''(x) < 0$ ($f''(x) < 0$) bo'lsa, funksiya bu oraliqda qavariq (botiq) bo'ladi.

► Agar $a < x_1 < x_2 < b$ bo'lsa, u holda (4.5) tenglikka ko'ra

$$\begin{aligned} l(x) - f(x) &= \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - f(x) = \\ &= \frac{f(x_2)(x - x_1) + f(x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} - f(x) \frac{(x - x_1) + (x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{[f(x_2) - f(x)](x - x_1) - [f(x) - f(x_1)](x_2 - x)}{x_2 - x_1}. \end{aligned}$$

Kvadrat qavslar ichidagi ayirmalar uchun 3.12-Lagranj teoremasini qo'llab

$$\begin{aligned} l(x) - f(x) &= \frac{f'(d)(x_2 - x)(x - x_1) - f'(c)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1} = \\ &= \frac{[f'(d) - f'(c)](x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}, \end{aligned}$$

tenglikni yozish mumkin, bu yerda $x_1 < c < x < d < x_2$. Bu yerda ham $f'(c) - f'(d)$ ayirmaga 3.12-Lagranj teoremasini qo'llaymiz. U holda

$$l(x) - f(x) = \frac{f''(s)(d - c)(x - x_1)(x_2 - x)}{x_2 - x_1}, \quad c < s < d.$$

Bu yerda tenglikning o'ng tomonidagi ifodaning ishorasi $f''(s)$ ikkinchi tartibli hosila qiymatining ishorasi bilan bir xil (qolgan ko'paytuvchilar musbat ishorali). Shuning uchun (a, b) oraliqda agar $f'' < 0$ bo'lsa, $l(x) < f(x)$, ya'ni $f(x)$ funksiya qavariq; agar $f'' > 0$ bo'lsa, $l(x) > f(x)$, ya'ni $f(x)$ funksiya botiq bo'ladi. ◀

Ikkinchi tartibli hosilaning o'zgarish ishoralilik sharti qavariqlik va botiqlik uchun faqat yetarli shart, ammo zaruriy shart emas: qavariqlik va botiqlik intervallarida ikkinchi tartibli hosila nolga ham aylanishi mumkin. Masalan, $y = x^4$ funksiya $\mathbb{R}$ son o'qida botiq, biroq uning $y'' = 12x^2$ ikkinchi tartibli hosilasi $x = 0$ nuqtada nolga aylanadi (4.19-rasm).

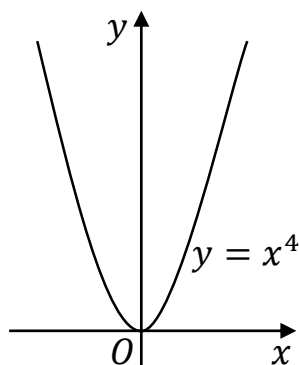
4.9-Misol. $f(x) = \arctg x$ funksiyaning qavariqlik va botiqlik intervallarini toping.

► Bu funksiya $\mathbb{R}$ son o'qida aniqlangan va cheksiz marta differensiallanuvchi. Birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarni hisoblaymiz:

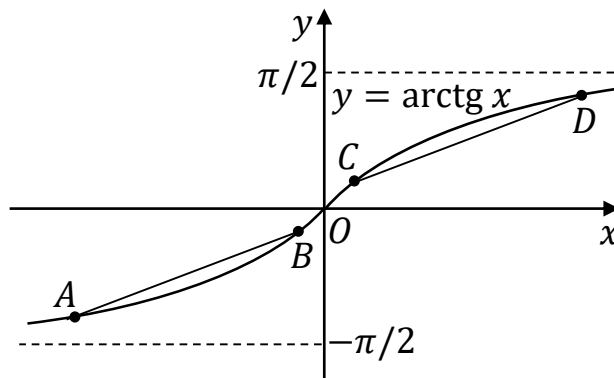
$$(\arctg x)' = \frac{1}{1 + x^2},$$

$$(\operatorname{arctg} x)'' = \left(\frac{1}{1+x^2} \right)' = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}.$$

Ko‘rinib turibdiki $x < 0$ bo‘lsa $(\operatorname{arctg} x)'' > 0$, ya’ni funksiya $(-\infty, 0)$ oraliqda botiq, $x > 0$ bo‘lsa $(\operatorname{arctg} x)'' < 0$, ya’ni funksiya $(0, +\infty)$ oraliqda qavariq (4.20-rasm). ◀



4.19-rasm



4.20-rasm

4.10-Teoremaning noldan farqli limitga ega funksiyaning ishora o‘zgarmaslik xossasining natijasi quyidagi tasdiq bo‘ladi.

4.1-Tasdiq. Agar $f(x)$ funksiyaning $f''(x)$ ikkinchi tartibli hosilasi c nuqtada uzluksiz va manfiy (musbat) ishorali bo‘lsa, u holda c nuqtaning shunday $(c - \delta, c + \delta)$ atrofi topiladiki, bu atrofda funksiya qavariq (botiq) bo‘ladi.

Egri chiziqning buralish nuqtasi.

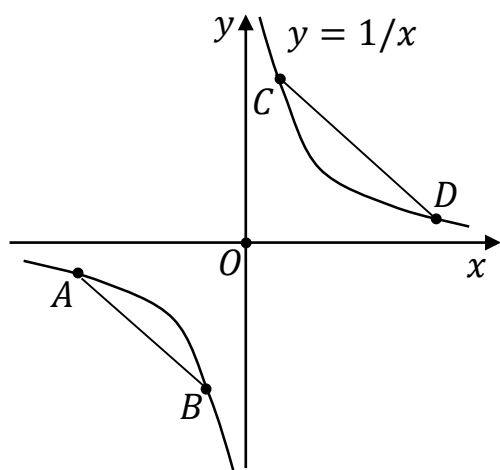
4.10-Ta’rif. $f(x)$ funksiya c nuqtaning biror atrofida aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Agar x o‘zgaruvchi c nuqtadan o‘tishda $f(x)$ funksiyaning qavariqligi botiqlikka yoki botiqligi qavariqlikka o‘tsa, c nuqta funksiyaning buralish nuqtasi, $(c, f(c))$ nuqta esa $f(x)$ funksiya grafigining buralish nuqtasi deb ataladi.

4.10-Misol. 4.2-rasmda $f(x) = x^3$ funksiyaning grafigi va 4.8-rasmda esa unga teskari $g(x) = \sqrt[3]{x}$ funksiyaning grafigi keltirilgan. $g(x)$ funksiyaning hosilasi $x = 0$ nuqtada cheksiz. $x = 0$ nuqta ikkala funksiya uchun ham buralish nuqtasi bo‘ladi. Haqiqattan ham, $x < 0$ bo‘lsa $f''(x) = 6x < 0$ va $x > 0$ bo‘lsa $f''(x) > 0$. Xuddi shunday, $x < 0$ bo‘lsa $g''(x) = -2x^{-5/3}/9 < 0$ va $x > 0$ bo‘lsa $g''(x) > 0$. 4.10-Teoremani inobatga olsak x o‘zgaruvchi $x = 0$ nuqtadan o‘tishda ikkala funksiya ham qavariqlik bilan botiqlik o‘rinlarini almashishadi: $f(x)$ funksiya qavariqlik botiqlikka, $g(x)$ funksiya esa botiqlik qavariqlikka o‘tadi. ◀

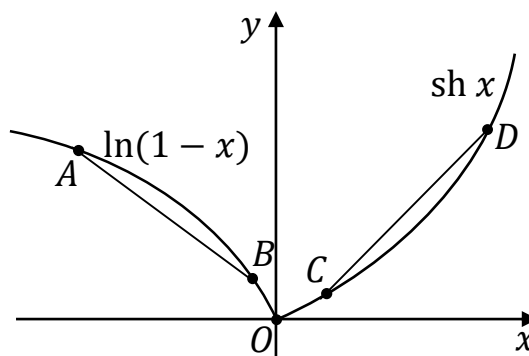
4.11-Misol. $f(x) = \begin{cases} 1/x, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ funksiya $x \neq 0$ nuqtada cheksiz

hosilaga ega bo'ladi (4.21-rasm) va x o'zgaruvchi bu nuqtadan o'tganda qavariqlik botiqlikka o'tadi, chunki agar $x < 0$ bo'lsa $f''(x) = 2/x^3 < 0$ va $x > 0$ bo'lsa $f''(x) > 0$ bo'ladi.

Biroq $x = 0$ nuqtada funksiya uzilishga ega va shuning uchun $x = 0$ nuqta bu funksiya uchun buralish nuqtasi bo'lmaydi. ◀



4.21-rasm



4.22-rasm

4.12-Misol. $f(x) = x^{2/3}$ funksiya (4.14-rasm) uchun $x = 0$ buralish nuqtasi bo'lmaydi, chunki x o'zgaruvchi bu nuqta orqali o'tganda funksiyaning qavariqligi botiqlikka o'tmasdan, qavariqligicha qoladi.

Haqiqattan ham, $x < 0$ bo'lganda ham, $x > 0$ bo'lganda ham $f''(x) = -2x^{-4/3}/9 < 0$ bo'ladi. Funksiya grafigi $(0,0)$ nuqtada "bukilmasdan" balki urinma orqali "orqaga qaytadi". Bu holda uni funksiyaning qaytish nuqtasi (ba'zan o'tkirlanish nuqtasi) deb ataladi.

4.13-Misol. $f(x) = \begin{cases} \ln(1-x), & x < 0, \\ \text{sh } x, & x \geq 0 \end{cases}$ funksiya x argument $x = 0$

nuqtadan o'tishda qavariqlikdan botiqlikka o'tadi (4.22-rasm), chunki $x < 0$ bo'lganda $f''(x) = -1/(1-x)^2 < 0$ va $x > 0$ bo'lganda $f''(x) = \text{sh } x > 0$. Berilgan funksiyaning $x = 0$ nuqtada hosilasi mavjud bo'lmasligiga qaramasdan, $x = 0$ nuqta funksiyaning buralish nuqtasi bo'ladi. Bu yerda chap va o'ng hosilalar teng emas: $f'(x-0) = -1 \neq f'(x+0) = 1$. ◀

4.11-Teorema (buralish nuqtasining zaruriy sharti). Funksiyaning buralish nuqtasida ikkinchi tartibli hosila mavjud va uzluksiz bo'lsa, u nolga teng.

► Teskarisidan farz qilaylik, ya'ni $f(x)$ funksiyaning c buralish nuqtasidagi ikkinchi tartibli hosilasi noldan farqli bo'lsin, ya'ni masalan

$f''(c) < 0$ ($f''(c) > 0$) bo'lsin. U holda 4.2-tasdiqqa ko'ra c nuqtaning shunday $(c - \delta, c + \delta)$ atrofi topiladiki, bu atrofda $f(x)$ funksiya qavariq (botiq) bo'ladi. Bunday bo'lishi mumkin emas, chunki c nuqta bir vaqtning o'zida ham qavariqlik (botiqlik), ham buralish nuqtasi bo'lmaydi. Ana shu zidlik teoremani isbotlaydi. ◀

4.12-Teorema (buralish nuqtasining birinchi yetarli sharti). Agar c nuqtada uzluksiz $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $f''(c) = 0$ yoki $f''(c)$ mavjud bo'lmasa va x o'zgaruvchi c nuqtadan o'tishda $f''(x)$ hosila o'z ishorasini o'zgartirsa, c nuqta $f(x)$ funksiyaning buralish nuqtasi bo'ladi.

► 1) $x < c$ bo'lganda $f''(x) < 0$ va $x > c$ bo'lganda $f''(x) > 0$ bo'lsin. 4.10-Teoremaga ko'ra $x < c$ bo'lganda $f(x)$ qavariq va $x > c$ bo'lganda esa botiq bo'ladi. Demak 4.10-Ta'rifga ko'ra $x = c$ nuqta $f(x)$ funksiyaning buralish nuqtasi bo'ladi.

2) $x < c$ bo'lganda $f''(x) > 0$ va $x > c$ bo'lganda $f''(x) < 0$ bo'lsin. 4.10-Teoremaga ko'ra $x < c$ bo'lganda $f(x)$ botiq va $x > c$ bo'lganda esa qavariq bo'ladi. Demak 4.10-Ta'rifga ko'ra $x = c$ nuqta $f(x)$ funksiyaning buralish nuqtasi bo'ladi. ◀

4.13-Teorema (buralish nuqtasining ikkinchi yetarli sharti). Agar biror c nuqtada $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi nolga teng: $f''(c) = 0$ va uchinchi tartibli hosilasi noldan farqli: $f'''(c) \neq 0$ bo'lsa, c nuqta $f(x)$ funksiyaning buralish nuqtasi bo'ladi.

► Teoremaning shartidan $f(x)$ funksiya c nuqtaning biror $U_1(c)$ atrofida kamida ikki marta differensiallanuvchi ekanligi kelib chiqadi. $f''(x)$ funksiyaning (3.84) Piano qoldiq hadli birinchi tartibli Teylor formulasi bilan tasvirlaymiz:

$$f''(x) = f''(c) + \frac{f'''(c) + \alpha(x)}{1!}(x - c) = (f'''(c) + \alpha(x))(x - c),$$

bu yerda $\alpha(x)$ funksiya $x = c$ nuqtada cheksiz kichik.

$$\lim_{x \rightarrow c} \alpha(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow c} (f'''(c) + \alpha(x)) = f'''(c) \neq 0$$

bo'lganligi uchun noldan farqli limitga ega funksiyaning o'zgarmas ishoralilik xossasiga ko'ra c nuqtaning shunday $U_2(c)$ atrofi topiladiki, bu atrofda $f'''(c) + \alpha(x)$ yig'indining ishorasi $f'''(c)$ qo'shiluvchisining ishorasi bilan bir xil bo'ladi. U holda c nuqtaning $U(c) = U_1(c) \cap U_2(c)$ atrofida x o'zgaruvchi c nuqta orqali o'tganda $f''(x)$ funksiya $(x - c)$ ko'paytuvchi bilan o'z ishorasini o'zgartiradi. Demak 4.12-Teoremaga ko'ra c nuqta $f(x)$ funksiyaning buralish nuqtasi bo'ladi. ◀

4.4. Funksiya grafigining asimptotalari

Agar $y = f(x)$ tenglama bilan berilgan egri chiziqning biror bo'lagi cheksizlikka intilsa, bu egri chiziqni cheksiz bo'lakli egri chiziq deb ataymiz.

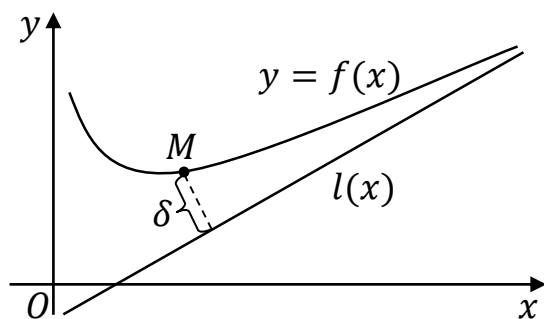
4.11-Ta'rif. Cheksiz bo'lakli $y = f(x)$ egri chiziqning asimptotasi deb shunday $l(x)$ to'g'ri chiziqqa aytamizki, bunda $l(x)$ to'g'ri chiziqdan egri chiziqning M nuqtasigacha bo'lgan $\delta(M)$ masofa M nuqta egri chiziq bo'ylab cheksiz uzoqlashganda nolga intiladi (4.23-rasm).

Asimptotalar uch ko'rinishda: vertikal, og'ma va gorizontalar bo'ladi.

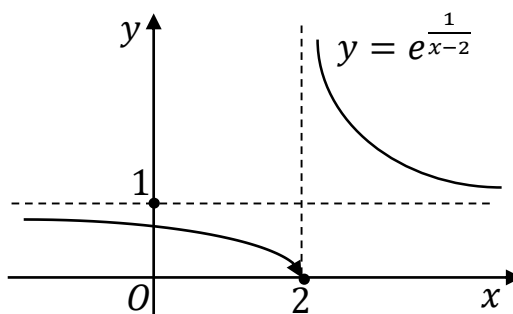
Vertikal asimptotalar. Agar $\lim_{x \rightarrow c+0} f(x)$ va $\lim_{x \rightarrow c-0} f(x)$ bir tomonlama limitlarning kamida bittasi cheksiz bo'sa $x = c$ to'g'ri chiziqni $y = f(x)$ funksiya grafigining *vertikal asimptotasi* deb ataymiz.

$y = f(x)$ egri chiziqning asimptotalarini topish uchun:

- 1) $f(x)$ funksiyaning Ox o'qdagi uzilish nuqtalarini topamiz;
- 2) ular orasidan $f(x)$ funksiyaning kamida bitta limiti (chap yoki o'ng) $+\infty$ yoki $-\infty$ bo'ladiganlarini tanlaymiz. Bular $x_1, x_2, \dots, x_m$ bo'lsin. U holda $x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_m$ to'g'ri chiziqlar $y = f(x)$ funksiya grafigining vertikal asimptotalari bo'ladi.



4.23-rasm



4.24-rasm

4.14-Misol. $y = e^{\frac{1}{x-2}}$ funksiya grafigining og'ma asimptotalarini topamiz. Bu funksiya $\mathbb{R}$ son o'qining $x = 2$ nuqtadan boshqa hamma nuqtalarida aniqlangan. $x = 2$ nuqtadagi chap va o'ng limitlarni hisoblaymiz:

$$\lim_{x \rightarrow 2-0} e^{\frac{1}{x-2}} = 0 \text{ va } \lim_{x \rightarrow 2+0} e^{\frac{1}{x-2}} = +\infty.$$

Demak, $x = 2$ to'g'ri chiziq qaralayotgan funksiyaning x o'zgaruvchi $x = 2$ nuqtaga o'ngdan intilganda asimptotasi bo'lar ekan (4.24-rasm). ◀

4.15-Misol. $y = 1/(1-x^2)$ funksiyaning vertikal asimptotalarini toping.

► Funksiya ifodasidagi kasr maxrajini ko‘paytuvchilarga ajratamiz:

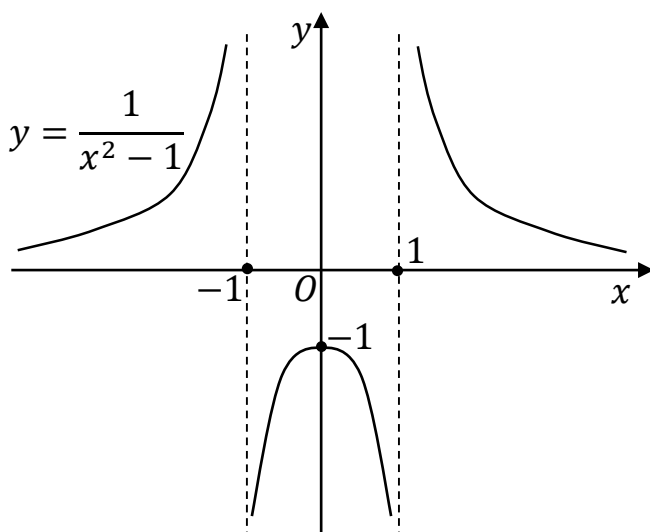
$$y = \frac{1}{1-x^2} = \frac{1}{(1-x)(1+x)}.$$

Ko‘rinib turibdiki $x = -1$ va $x = 1$ to‘g‘ri chiziqlar ikki tomonlama vertikal asimptotalar bo‘ladi (4.25-rasm), chunki

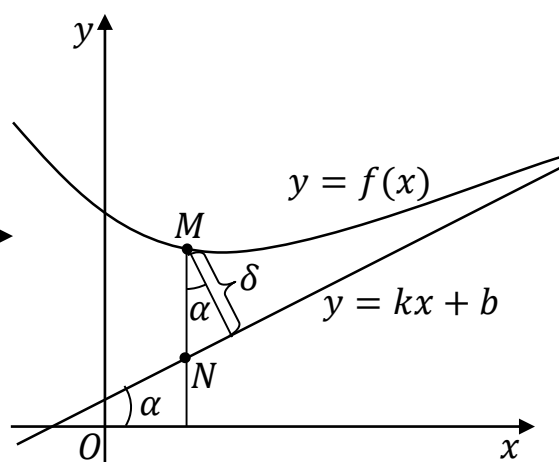
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1-0} \frac{1}{1-x^2} &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow -1+0} \frac{1}{1-x^2} &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1-x^2} &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{1}{1-x^2} &= +\infty. \end{aligned} \quad \blacktriangleleft$$

Og‘ma asimptotalar. $y = f(x)$ funksiya barcha $x \geq a$ (yoki $x \leq a$) nuqtalarda aniqlangan bo‘lsin. $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigining asimptotasi bo‘lsin. Bunday asimptotani *og‘ma asimptota* deb ataymiz.

Aniqlik uchun x argumentning musbat ishorali katta qiymatlarini qaraymiz. $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq $y = f(x)$ egri chiziqning asimptotasi degani ta’rifga ko‘ra egri chiziqning $M(x, f(x))$ nuqtasidan bu to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan δ masofa x o‘zgaruvchi musbat cheksizlikka intilganda: $x \rightarrow +\infty$, nolga intiladi.



4.25-rasm



4.26-rasm

α ($\alpha \neq \pi/2$) orqali asimptotaning Ox o‘q bilan tashkil qilgan burchagini belgilaymiz. 4.26-rasmda $\delta = |MN| \cos \alpha$ ekanligi ko‘rinib turibdiki. $\cos \alpha = \text{const} \neq 0$ bo‘lganligi uchun $x \rightarrow +\infty$ da δ miqdorning nolga intilishi $|MN|$ miqdorning ham nolga intilishini ta’minlaydi va aksincha. $|MN| = |f(x) - kx - b|$ ekanligini inobatga olsak, $y = kx + b$ to‘g‘ri chiziq $y = f(x)$ egri chiziqning $x \rightarrow +\infty$ da asimptotasi bo‘lishligi uchun

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx - b) = 0$$

bo'lishi zarur va yetarli degan xulosaga kelamiz. So'ngi tenglikni cheksiz kichik miqdorlar orqali ifodalasak

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \quad (4.8)$$

bu yerda $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha(x) = 0$.

$y = f(x)$ egri chiziqning $x \rightarrow +\infty$ da $y = kx + b$ to'g'ri chiziq asimptotasi bo'ladi degan tasdiqning ma'nosi shundan iboratki, $x \rightarrow +\infty$ da $y = f(x)$ funksiya o'zini "qaryib chiziqli funksiya singari" tutadi, ya'ni $y = kx + b$ funksiya dan $x \rightarrow +\infty$ da cheksiz kichik miqdorga farq qiladi.

4.14-Teorema. $y = f(x)$ funksiyaning grafigi $x \rightarrow +\infty$ da $y = kx + b$ og'ma asimptotaga ega bo'lishligi uchun

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)/x = k \text{ va } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] = b \quad (4.9)$$

ikkala limitning ham mavjud bo'lishi zarur va yetarli.

► **Zaruzligi.** $y = f(x)$ funksiyaning grafigi $x \rightarrow +\infty$ da $y = kx + b$ og'ma asimptotaga ega bo'lsin, $f(x)$ funksiya uchun (4.8) tasvir o'rinli bo'lsin: $f(x) = kx + b + \alpha(x)$ bu yerda $\alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

U holda

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[k + \frac{b}{x} + \frac{\alpha(x)}{x} \right] = k, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} [b + \alpha(x)] = b, \end{aligned}$$

ya'ni (4.9) ikkala limit ham mavjud.

Yetarliligi. (4.9) tengliklardagi ikkala limit ham mavjud bo'lsin. Ulardan ikkinchisining mavjudligi $f(x) - kx - b$ ayirmani $x \rightarrow +\infty$ da cheksiz kichik miqdor deb mulohaza yuritishga imkon beradi, Bu ayirmani $\alpha(x)$ orqali belgilasak, quyidagi tenglikka ega bo'lamiz

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \text{ bu yerda } \alpha(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Bu esa $y = f(x)$ funksiya grafiga $y = kx + b$ og'ma asimptotaga ega degan ma'noni anglatadi. ◀

$x \rightarrow -\infty$ hol ham xuddi shunday tadqiq qilinadi.

4.16-Misol. $y = x^2/(x - 1)$ funksiyaning asimptotalarini toping.

► Funksiyaning ifodasidan uning grafigi $x = 1$ (4.27-rasm) vertikal asimptotaga ega degan xulosaga kelamiz. Funksiyaning ko'rinishini o'zgartiramiz:

$$f(x) = \frac{x^2}{x - 1} = \frac{x^2 - 1 + 1}{x - 1} = x + 1 + \frac{1}{x - 1}.$$

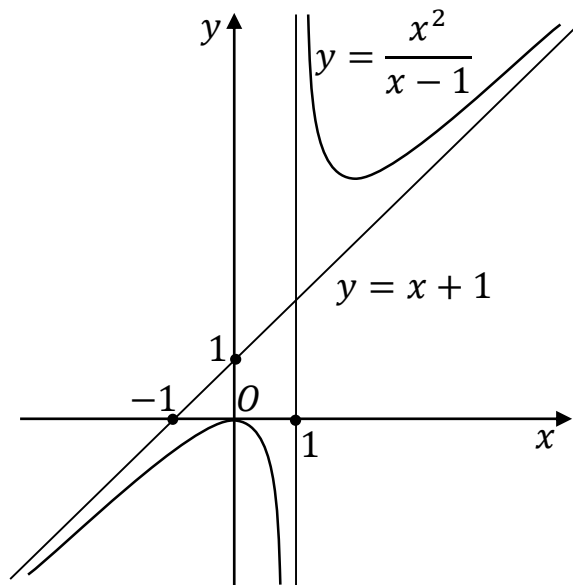
So'ngi $1/(x-1)$ qo'shiluvchi $x \rightarrow \infty$ da nolga intiladi. Shunday qilib, $f(x) = x^2/(x-1)$ funksiyani

$$f(x) = x + 1 + \alpha(x),$$

ko'rinishda yozish mumkin ekan, bu yerda $\alpha(x) = 1/(x-1) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$.

4.14-Teoremaga ko'ra berilgan funksiya $y = x + 1$ og'ma asimptotaga ega degan xulosaga kelamiz. ◀

$\Delta = f(x) - kx - b$ ayirmaning ishorasini tekshirish orqali muhim xulosalar chiqarish mumkin. Agar $\Delta > 0$ bo'lsa, egri chiziq asimptotadan yuqorida; $\Delta < 0$ bo'lsa, asimptotadan pastda joylashgan bo'ladi.



4.27-rasm

Gorizontal asimptotalar ($k = 0$ bo'lgan xususiy hol)

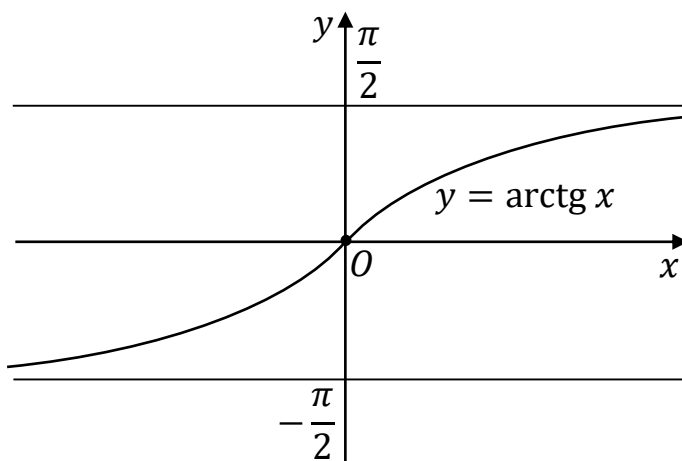
Agar $f(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

$$(\text{yoki } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b)$$

chekli limit mavjud bo'lsa, $y = b$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigi mos ravishda o'ng yoki chap bo'laginging gorizontal asimptotasi bo'ladi.

4.17-Misol. $y = \arctg x$ funksiyaning gorizontal asimptotalarini topamiz.



4.28-rasm

► Funksiyaning cheksizliklardagi limitlarini hisoblaymiz:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}.$$

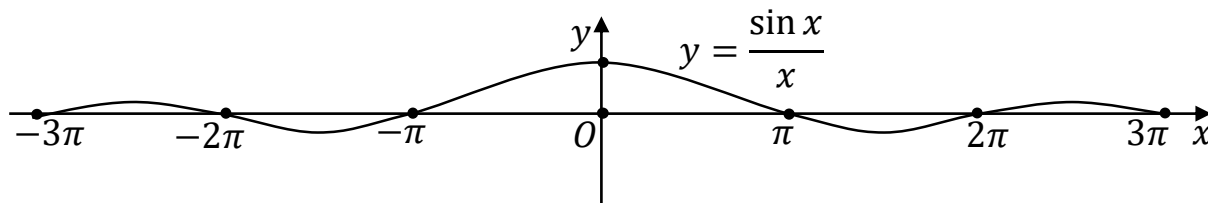
Shunday qilib, $y = \arctg x$ funksiyaning o'ng bo'lagi $y = \pi/2$, chap bo'lagi esa $y = -\pi/2$ gorizontal asimptotalarga ega bo'lar ekan (4.28-rasm). ◀

4.18-Misol. $y = \frac{\sin x}{x}$, $y(0) = 1$ funksiyaning gorizontal asimptotasini topamiz.

► Funksiyaning cheksizlikdagi limiti nolga teng:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0.$$

Shuning uchun $y = 0$ to'g'ri chiziq $y = \frac{\sin x}{x}$, $y(0) = 1$ funksiyaning gorizontaal asimptotasi bo'ladi (4.29-rasm). ◀



4.29-rasm

4.18-Misoldan ko'rinib turibdiki $y = f(x)$ egri chiziq o'zining asimptotasini cheksiz ko'p marta ham kesib o'tishi mumkin ekan.

4.5. Funksiyaning tekshirishning umumiy sxemasi va funksiya grafigini yasash

Funksiyaning holati haqida eng yaxshi ko'rsatmali tasavvurni uning grafigi beradi. Funksiyaning grafigini yasashdan oldin uni limitlar nazariyasining va differensial hisobning metodlari bilan quyidagi bosqichlarda tekshiriladi:

1) funksiyaning aniqlanish sohasi topiladi, uning juftlik yoki toqlik xossasi va davriyligi aniqlanadi;

2) funksiyaning uzilish nuqtalari topiladi va ularning turlari aniqlanadi, funksiya grafigining vertikal asimptotalari va uzluksizlik oraliqlari aniqlanadi;

3) funksiya grafigining koordinata o'qlarini kesib o'tish nuqtalari topiladi, ya'ni $f(0)$ qiymat va $f(x) = 0$ tenglamaning ildizlari topiladi;

4) funksiyaning kritik nuqtalari topiladi va ular orasidan ekstremum nuqtalar aniqlanadi, ekstremum nuqtalarda funksiyaning qiymatlari hisoblanadi, funksiyaning monotonlik intervallari aniqlanadi;

5) funksiyaning buralish nuqtalari topiladi va bu nuqtalarda funksiyaning qiymatlari hisoblanadi, qavariqlik va botiqlik intervallari aniqlanadi;

6) $x \rightarrow \pm\infty$ da funksiyaning o'zgarishi tekshiriladi, ya'ni funksiya grafigining og'ma va gorizontaal asimptotalari topiladi.

Funksiyaning tekshirishning sanab o'tilgan bosqichlarining natijalari funksiya grafigining xomaki chizmasini yasash inkonini beradi. Grafikning xomaki chizmasini yasashni osonlashtirish uchun bu natijalardan jadval tuzish maqsadga muvofiq bo'ladi.

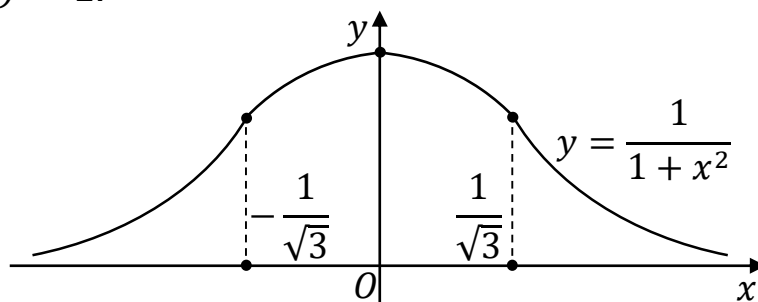
4.19-Misol. $y = 1/(1 + x^2)$ funksiya grafigini yasang.

► 1) Funksiyaning aniqlanish sohasi $\mathbb{R}$ son o'qidan iborat: $D(y) = (-\infty, +\infty)$; funksiya juft: $f(-x) = f(x)$, shu sababli uning grafigi Oy o'qqa nisbatan simmetrik; davriy emas; funksiyaning juftligidan, uning grafigini $x \geq 0$ yarim o'qda yasash yetarli, so'ngra Oy o'qqa nisbatan simmetrik tasvirlanadi;

2) funksiyaning uzilish nuqtalari va vertikal asimptotalari yo'q; $\mathbb{R}$ son o'qida uzluksiz;

3) $x = 0$ bo'lganda $y = 1$; ixtiyoriy $x \in \mathbb{R}$ uchun $y \neq 0, y > 0$, ya'ni funksiya grafigi $y > 0$ yuqori yarim tekislikda yotadi;

4) $y' = -2x/(1+x^2)$. Hosilani nolga tenglashtirib $x = 0$ kritik nuqtani topamiz. $x < 0$ bo'lganda funksiya o'sadi va $x > 0$ bo'lganda funksiya kamaydi; x o'zgaruvchi $x = 0$ nuqtadan o'tganda $y'(x)$ hosila o'z ishorasini minusdan plusga o'zgartiradi. Demak $x = 0$ maksimum nuqta ekan: $f_{\max} = f(0) = 1$.



4.30-rasm

5) Ikkinchi tartibli hosila $y'' = -2(1-3x^2)/(1+x^2)^2$ va u $x = \pm 1/\sqrt{3}$ nuqtalarda nolga aylanadi. Simmetriyani inobatga olib $x = 1/\sqrt{3}$ nuqtada tekshiramiz. $x < 1/\sqrt{3}$ bo'lsa $y'' < 0$ shu sababli funksiya grafigi qavariq; $x > 1/\sqrt{3}$ bo'lsa $y'' > 0$ shu sababli funksiya grafigi botiq. Demak $x = 1/\sqrt{3}$ nuqta funksiya grafigining buralish nuqtasi bo'lar ekan.

6) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{1+x^2} = 0$. Demak $y = 0$ to'g'ri chiziq funksiya grafigining gorizontaal asimptotasi bo'ladi. Uning og'ma asimptotasi yo'q.

Olingan natijalardan quyidagi jadvalni tuzamiz:

x	$(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{3}})$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(-\frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$	0	$(0, \frac{1}{\sqrt{3}})$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$(\frac{1}{\sqrt{3}}, +\infty)$
$f'(x)$	+	+	+	0	-	-	-
$f''(x)$	+	0	-	-2	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	buralish nuqtasi	$\nearrow$	max	$\searrow$	buralish nuqtasi	$\searrow$

Jadvalda “↗” strelka funksiyaning o‘shishini, “↘” strelka esa funksiyaning kamayishini anglatadi. Funksiyaning grafigi 4.30-rasmda tasvirlangan. ◀

4.20-Misol. $y = \sqrt[3]{x(x-1)^2}$ funksiya grafigini yasang.

► 1) Funksiyaning aniqlanish sohasi $\mathbb{R}$ son o‘qidan iborat: $D(y) = (-\infty, +\infty)$; funksiya juft ham emas, toq ham emas va davriy ham emas;

2) funksiyaning uzilish nuqtalari yo‘q (demak vertikal asimptotalari yo‘q) va $\mathbb{R}$ son o‘qida uzluksiz;

3) funksiya grafigi koordinatalar boshidan o‘tadi, bundan tashqari, $f(1) = 0$.

4) $f(x)$ funksiyaning hosilasi

$$f'(x) = \frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}}$$

$\mathbb{R}$ son o‘qining barcha nuqtalarida mavjud, $x = 1/3$ nuqtada nol ($f(x)$ funksiyaning statsionar nuqtasi), $x = 0$ va $x = 1$ nuqtalarda esa cheksiz. $f(x)$ funksiyaning bu kritik nuqtalari atrofida $f'(x)$ hosilaning o‘zgarishini tekshiramiz.

x o‘zgaruvchi $x = 0$ nuqtadan o‘tganda hosila o‘z ishorasini o‘zgartirmaydi, ya’ni bu nuqtada ekstremumning yetarli shart bajarilmaydi. $x = 0$ nuqta ekstremum nuqta bo‘lmaydi.

$x = 1$ kritik nuqtaga o‘tamiz.

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{3x-1}{3\sqrt[3]{x^2(x-1)}} = +\infty$$

bo‘lganligi uchun $x = 1$ nuqtaning atrofida $x < 1$ bo‘lganda $f'(x) < 0$ va $x > 1$ bo‘lganda $f'(x) > 0$ bo‘ladi, ya’ni x o‘zgaruvchi $x = 1$ nuqtadan o‘tganda $f'(x)$ hosila o‘z ishorasini minusdan plyusga o‘zgartirar ekan. Shuning uchun 4.7-Teoremaga ko‘ra bu nuqta $f(x)$ funksiyaning minimum nuqtasi bo‘ladi va uning minimal qiymati $f_{\min} = f(1) = 0$.

$x = 1/3$ nuqtada $f'(x)$ hosila nolga aylanadi. x o‘zgaruvchi $x = 1/3$ nuqtadan o‘tganda $f'(x)$ hosila o‘z ishorasini plyusdan minusga o‘zgartiradi. Shuning uchun 4.6-Teoremaga ko‘ra bu nuqta $f(x)$ funksiyaning maksimum nuqtasi bo‘ladi va uning maksimal qiymati $f_{\max} = f(1/3) = \sqrt[3]{4/3} \approx 0,53$.

Shunday qilib, $x \in (-\infty, 1/3)$ bo‘lganda $f'(x) > 0$ va 4.3-Teoremaga ko‘ra bu oraliqda o‘sadi, $x \in (1/3, 0)$ bo‘lganda $f'(x) < 0$ va

bu oraliqda kamayadi, $(1, +\infty)$ oraliqda esa yana $f'(x) > 0$ va funksiya bu yerda o'sadi.

5) $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi

$$f''(x) = \frac{2}{9\sqrt[3]{x^5(x-1)^4}}$$

hech bir nuqtada nolga aylanmaydi, $x = 0$ va $x = 1$ nuqtalarda mavjud emas. x o'zgaruvchi $x = 0$ nuqtadan o'tishda ikkinchi tartibli hosila o'z ishorasini plyusdan minusga o'zgartiradi, ya'ni 4.12-Teoremaga ko'ra $x = 0$ nuqta $f(x)$ funksiyaning buralish nuqtasi bo'ladi. x o'zgaruvchi $x = 1$ nuqtadan o'tishda ikkinchi tartibli hosila o'z ishorasini o'zgartirmaydi va bu nuqta $f(x)$ funksiyaning buralish nuqtasi bo'lmaydi.

Shunday qilib, $(-\infty, 0)$ oraliqda $f''(x) > 0$ va $f(x)$ funksiya bu yerda botiq; $x \in (0, 1)$ va $x \in (1, +\infty)$ bo'lganda $f''(x) < 0$ va bu intervallarda $f(x)$ funksiya qavariq.

6) 4.14-Teoremadagi

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{x(x-1)^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2/3} = 1$$

va

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt[3]{x(x-1)^2} - x\right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2/3} - 1 \right) = -\lim_{y \rightarrow 0} \frac{(1+y)^{2/3} - 1}{y} = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

limitlar mavjud ekan, shuning uchun $f(x)$ funksiya grafigi $y = x - 2/3$ tenglamali ikki tomonlama asimptotaga ega bo'ladi.

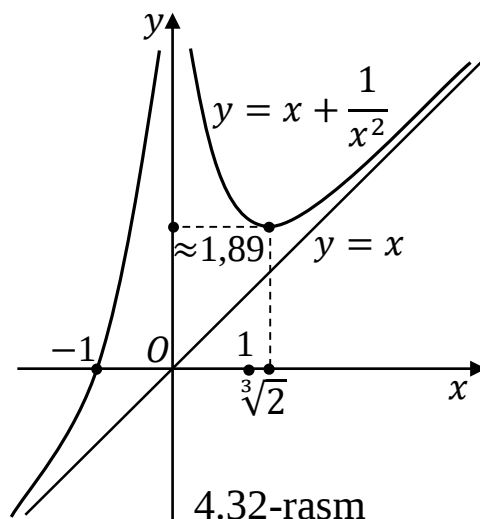
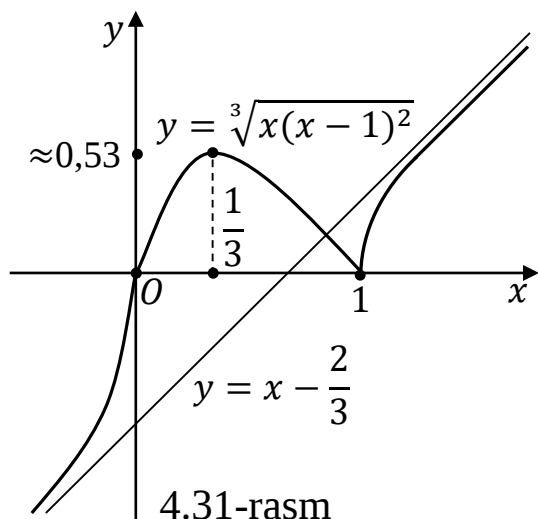
Topilgan natijalardan quyidagi jadvalni tuzamiz:

x	$(-\infty, 0)$	0	$\left(0, \frac{1}{3}\right)$	$\frac{1}{3}$	$\left(\frac{1}{3}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
$f'(x)$	+	$+\infty$	+	0	-	mavjud emas	+
$f''(x)$	+	mavjud emas	-	-	-	mavjud emas	-
$f(x)$	$\nearrow$	buralish nuqtasi	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$

Jadval asosida funksiyaning grafigini chizamiz (4.31-rasm). ◀

4.21-Misol. Quyidagi funksiyaning grafigini yasang

$$y = x + \frac{1}{x^2}.$$



► 1) $\mathbb{R}$ son son o'qining $x = 0$ nuqtasidan boshqa barcha nuqtalarda aniqlangan: $D(y) = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$;

2) $x = 0$ nuqta 2-tur uzilish nuqtasi, shuning uchun $x = 0$ to'g'ri chiziiq vertikal asimptota bo'ladi; funksiya juft ham emas, toq ham emas va davriy ham emas;

3) $y = 0$ desak $x^3 + 1 = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz va uning yechimi $x = -1$ bo'ladi, shuning uchun funksiya grafigi Ox o'qni $(-1, 0)$ nuqtada kesib o'tadi;

4) funksiyaning hosilasini olib, nolga tenglashtiramiz:

$$y' = 1 - \frac{2}{x^3} = \frac{x^3 - 2}{x^3} = 0, \quad x^3 - 2 = 0,$$

ya'ni $x = \sqrt[3]{2}$ kritik nuqta bo'ladi. $x = 0$ nuqtada hosila cheksiz, demak funksiyaning ikkita $x = 0$ va $x = \sqrt[3]{2}$ kritik nuqtalari bor ekan. Bu nuqtalar atrofida hosilaning ishoralarini tekshiramiz:

$x < 0$ bo'lsa $f'(x) > 0$ bo'ladi, shuning uchun funksiya grafigi $(-\infty, 0)$ oraliqda o'sadi; $0 < x < \sqrt[3]{2}$ bo'lsa $f'(x) < 0$, shuning uchun funksiya grafigi $(0, \sqrt[3]{2})$ oraliqda kamayadi, $x > \sqrt[3]{2}$ bo'lsa, yana $f'(x) > 0$ bo'ladi, shuning uchun $(\sqrt[3]{2}, +\infty)$ oraliqda funksiya grafigi o'sadi. Funksiya $x = \sqrt[3]{2}$ nuqtada uzluksiz bo'lganligi uchun 4.7-Teoremaga ko'ra $x = \sqrt[3]{2}$ funksiyaning minimum nuqtasi bo'ladi va $f_{\min} = f(\sqrt[3]{2}) \approx 1,89$;

5) Ikkinchi tartibli hosila barcha $x \neq 0$ nuqtalarda

$$y'' = \frac{6}{x^4} > 0$$

bo'lganligi uchun, funksiya o'zining aniqlanish sohasida botiq.

6) 4.14-Teoremadagi

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \frac{1}{x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x^3}\right) = 1,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[x + \frac{1}{x^2} - x\right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

limitlar mavjud ekan, shuning uchun $f(x)$ funksiya grafigi $y = x$ tenglamali ikki tomonlama asimptotaga ega bo'ladi.

Topilgan natijalardan quyidagi jadvalni tuzamiz:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\sqrt[3]{2}, +\infty)$
$f'(x)$	+	+	+	mavjud emas	−	0	+
$f''(x)$	+	+	+	mavjud emas	−	+	−
$f(x)$	↗	0	↗	$x = 0$ vertikal asimptota	↘	min	↗

Jadval asosida funksiya grafigini 4.32-rasmda tasvirlaymiz. ◀

4.6. Tenglamaning haqiqiy ildizlarini taqribiy hisoblash

Masalaning qo'yilishi. Bir o'zgaruvchili chiziqli bo'lmagan

$$f(x) = 0 \quad (4.10)$$

tenglamani yechish zarurati ilmiy tadqiqot va texnik tadbirlarda yuzaga keladi. Xususan $g(x)$ funksiyaning statsionar nuqtalarini topish $g'(x) = f(x) = 0$ tenglamani yechishga olib keladi. Umumiy holda masala (4.10) tenglamani $f(x^*) \equiv 0$ ayniyatga aylantiradigan x^* qiymatni topishdan iborat. Bunday qiymatlar (4.10) tenglamaning ildizlari (yoki yechimlari) deb ataladi.

Ma'lumki, $f(x)$ funksiya biror oraliqda qat'iy monoton bo'lsa, u teskari funksiya ega. Bu holda teskari funksiya $y = 0$ nuqtada aniqlangan va analitik berilgan bo'lishi mumkin. Bu holda aniq analitik yechim topiladi. Biroq umumiy holda analitik yechishning imkoniyati yo'q. Shu sababli (4.10) tenglamani taqribiy yechish muhim ahamiyat kasb etadi.

Masalaga qo'yiladigan umumiy shartlar. (4.10) tenglamani yechish uchun, biz dastlab tenglamaning ξ ildizi yakkalangan deb faraz qilamiz, ya'ni undan boshqa ildiz yotmaydigan $[a, b]$ kesma mavjud: $a < \xi < b$.

Agar buning ustiga $f(x)$ funksiya kesmaning chetki nuqtalarida turli ishorali $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlarni qabul qilsa, ildizni o'zida saqlovchi kesmalarni ketma-ket teng ikkiga bo'lib va bo'linish nuqtalarida $f(x)$ funksiya qiymatining ishorasini aniqlab, kesmalarni toraytirish hisobiga ildizni taqribiy hisoblash mumkin. Biroq bu usul oddiyligiga qaramasdan,

amaliyotda ba'zan foydasiz yoki juda ham ko'p hisoblashlarni talab qilishi mumkin. Kitobxon mazkur paragrafda (4.10) tenglamani taqribiy yechishning oddiy va maqsadga tez yetaklovchi ikkita usuli bilan tanishadi. Bu yerda biz yana differensial hisobning tushunchalari va metodlaridan foydalanamiz.

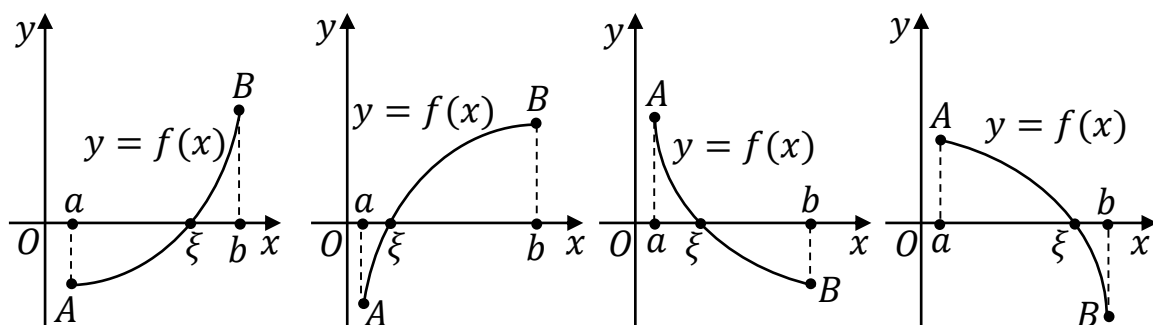
Ikkala usulda ham quyidagi umumiy shartlar bajariladi deb faraz qilamiz:

1) $f(x)$ funksiya va uning $f'(x), f''(x)$ hosilalari $[a, b]$ kesmada uzluksiz;

2) funksiyaning kesma chetki nuqtalaridagi $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlari turli ishorali: $f(a) \cdot f(b) < 0$;

3) ikkala $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalarning har biri $[a, b]$ kesmada ishorasini o'zgartirmaydi.

1) va 2) shartlar (4.10) tenglamaning $[a, b]$ kesmada ildizi mavjudligini ta'minlaydi (4.22-Teorema). 3) shartga ko'ra $f'(x)$ hosila kesmada ishorasini o'zgartirmaydi, shuning uchun u bu kesmada yoki o'sadi yoki kamayadi, bu esa ildizning yagonaligini ta'minlaydi. $f''(x)$ hosila ishorasini o'zgartirmasligi funksiya grafigining kesmada qavariq yoki botiqligini ta'minlaydi. 4.33-rasmda $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalarning turli ishoralari kombinatsiyalariga mos keluvchi to'rtta hol tasvirlangan.



4.33-rasm

Bu hollarning har biriga birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarning quyidagi kombinatsiyasi mos keladi; ixtiyoriy $x \in [a, b]$ uchun

1) $f'(x) > 0, f''(x) > 0$; 2) $f'(x) > 0, f''(x) < 0$;

3) $f'(x) < 0, f''(x) > 0$; 4) $f'(x) < 0, f''(x) < 0$.

Vatarlar usuli. Aniqlik uchun $[a, b]$ kesma nuqtalari uchun $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ o'rinli bo'lsin. $A(a, f(a))$ va $B(b, f(b))$ nuqtalarni AB vatar bilan tutashtiramiz (4.34-rasm). Bu vatar A va B nuqtalardan o'tuvchi, tenglamasi

$$\frac{y - f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{x - a}{b - a} \quad (4.11)$$

$$a_1 = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b) - f(a)} \quad (4.12)$$

nuqtalardan A_1B vatar o'tkazamiz. Bu vatar Ox o'q bilan ma'nosi ham shundan iborat. Endi $\widetilde{AB}$ yoyda abssisasi a_1 bo'lgan A_1 nuqtani olamiz va A_1 va B nuqtalardan A_1B vatar o'tkazamiz. Bu vatar Ox o'q bilan

$$a_2 = a_1 - \frac{(b - a_1)f(a_1)}{f(b) - f(a_1)}$$

$$a < a_1 < a_2 < \cdots < a_n < a_{n+1} < \cdots < \xi$$
$$a_{n+1} = a_n - \frac{(b - a_n)f(a_n)}{f(b) - f(a_n)} \quad (4.13)$$

Endi n o'sishi bilan $a_n \rightarrow \xi$ ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatdan ham, 3.12-Teoremaga ko'ra monoton o'suvchi va yuqoridan chegaralangan (masalan, ξ ildiz bilan) a_n ketma-ketlik chekli $\alpha \leq \xi$ limitga intiladi. (4.13) tenglikda limitga o'tsak va bunda $f(x)$ funksiyaning uzluksizligini inobatga olsak

182

bundan esa $f(\alpha) = 0$. (4.10) tenglamaning $[a, b]$ kesmada ξ ildizdan boshqa ildizlari yo'qligi tufayli $\alpha = \xi$ bo'ladi.

4.34-rasmda Ox o'qdagi $a_1, a_2, \dots$ nuqtalar ketma-ketligi ξ ildizga asta-sekin yaqinlashib borishi tasvirlangan.

Shunday qilib, yuqoridagi qoidani yetarli sonda takrorlab ξ ildizning taqribiy qiymatini ixtiyoriy aniqlikda hisoblash mumkin. Olingan taqribiy qiymat uchun xatolikni baholaymiz. Buning uchun $f(a_n) - f(\xi)$ ayirmaga (5.64) chekli ayirmalar formulasini qo'llaymiz:

$$f(a_n) - f(\xi) = (a_n - \xi)f'(c), \quad (a_n < c < \xi)$$

Bu yerdan

$$a_n - \xi = \frac{f(a_n)}{f'(c)};$$

agar m orqali $|f'(x)|$ ifodaning $[a, b]$ kesmadagi eng kichik qiymatini belgilasak

$$|a_n - \xi| \leq \frac{|f(a_n)|}{m} \quad (4.14)$$

baholashni hosil qilamiz.

4.34-rasmda barcha vatarlarning bir uchi $B(b, f(b))$ nuqtada joylashgan va (4.13) formulada ham har bir taqribiy yaqinlashish $f(x)$ funksiyaning $f(b)$ qiymati orqali hisoblangan. Shuning uchun biz $B(b, f(b))$ nuqtani qo'zg'almas nuqta deb ataymiz. Qo'zg'almas nuqta sifatida $A(a, f(a))$ nuqtani ham olish mumkin.

Agar $[a, b]$ kesmada $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalarni ishorasi bir xil bo'lsa (4.33-rasmda 1) va 4) hollar) qo'zg'almas nuqta sifatida $B(b, f(b))$ nuqta olinadi va taqribiy yaqinlashishlar (4.13) formula bilan hisoblanadi. Qaralayotgan kesmada $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalarni ishorasi har xil bo'lsa (4.33-rasmda 2) va 3) hollar) qo'zg'almas nuqta sifatida $A(a, f(a))$ nuqtani olish kerak va taqribiy yaqinlashishlar

$$a_{n+1} = a_n - \frac{(a - a_n)f(a_n)}{f(a) - f(a_n)} \quad (4.15)$$

formula bilan hisoblanadi.

4.22-Misol. $x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0$ birorta taqribiy ildizini 0,01 aniqlikda toping.

► $f(1) = -1$ va $f(2) = 19$ ekanligidan tenglamaning kamida bitta ildizi $[1, 2]$ kesmada yotadi degan xulosaga kelamiz. Hosilalarini topamiz:

$$f'(x) = 3x^2 + 10x - 2, \quad f''(x) = 6x + 10.$$

Ularining ikkalasi ham $[1, 2]$ kesmada musbat ishorali qimat qabul qiladi. $f'(x)$ hosilaning bu kesmadagi eng kichik qiymati $m = f'(1) = 11$ bo'ladi.

Endi yaqinlashish ketma-ketligini tuzamiz:

$$a_1 = 1 - \frac{f(1)(2-1)}{f(2)-f(1)} = 1 - \frac{-2}{19+2} = 1 + \frac{2}{21} = 1,05$$

Funksiyaning bu nuqtadagi qiymatini hisoblaymiz:

$$f(1,05) = 1,05^3 + 5 \cdot 1,05^2 - 2 \cdot 1,05 - 5 = -0,42987$$

Xatolikni (4.14) boyicha tekshiramiz:

$$|a_1 - \xi| \leq \frac{|f(a_1)|}{m} = \frac{0,42987}{11} = 0,03908$$

Demak hali talab qilingan aniqlik yo'q va shuning uchun keying yaqinlashishni tuzamiz:

$$a_2 = 1,05 - \frac{f(1,05)(2-1,05)}{f(2)-f(1,05)} = 1,071,$$

$$f(a_2) = f(1,071) = -0,178,$$

$$|a_2 - \xi| \leq \frac{|f(a_2)|}{m} = \frac{0,178}{11} = 0,01619$$

Hali ham talab qilingan aniqlikka erishilgani yo'q. Shuning uchun keying yaqinlashishni tuzamiz:

$$a_3 = 1,071 - \frac{f(1,071)(2-1,071)}{f(2)-f(1,071)} = 1,0796,$$

$$f(a_3) = f(1,0796) = -0,0727,$$

$$|a_3 - \xi| \leq \frac{|f(a_3)|}{m} = \frac{0,0727}{11} = 0,0066 < 0,01$$

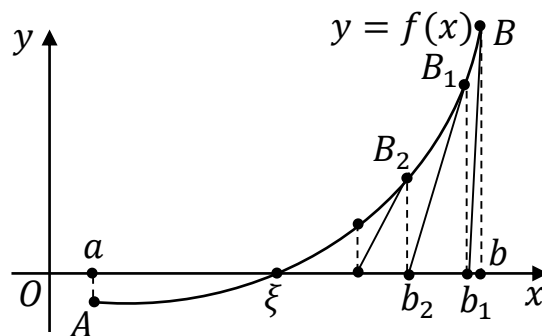
Talab qilingan aniqlikka erishdik. Shuning uchun tenglamaning 0,01 aniqlikdagi taqribiy ildizi sifatida $\xi = 1,0796$ qiymatni olish mumkin. ◀

Nyuton qoidasi (Urinmalar usuli). $f(x)$ funksiyaga nisbatan shartlar o'rinli va (4.10) tenglamaning ildizi $[a, b]$ kesmada yakkalangan bo'lsin.

Funksiyz grafigiga $B(b, f(b))$ nuqtada urinma o'tkazamiz (4.35-rasm). Bu urinma tenglamasi (3.14) formulaga ko'ra

$$y - f(b) = f'(b)(x - b) \quad (4.16)$$

ko'rinishda bo'ladi. Urinmaning Ox o'q bilan kesishish nuqtasini b_1 orqali belgilaymiz. Bu b_1 nuqta Ox o'qda ξ va b nuqtalar oralig'ida yotadi, ya'ni u ξ aniq ildizga yaqinroq. Shuning uchun b_1 qiymatni (4.10) tenglamaning taqribiy yechimi deb olish mumkin. $x = b_1$ bo'lganda $y = 0$ bo'ladi. Shuning uchun (4.16) tenglikda x o'rniga b_1 qiymatini qo'yamiz:



4.35-rasm

$$-f(b) = f'(b)(b_1 - b).$$

Bu yerda b_1 qiymatni topamiz:

$$b_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \quad (4.17)$$

Endi $\overline{AB}$ yoyda abssisasi b_1 bo'lgan B_1 nuqtani olamiz va bu nuqtada urinma o'tkazamiz. Bu urinmaning Ox o'q bilan kesishish nuqtasini b_2 orqali belgilaymiz. b_2 nuqta ξ aniq ildiz va b_1 nuqta oralig'ida yotadi: $\xi < b_2 < b_1$. Bu jarayonni davom ettirib. Kamayib boruvchi

$$b > b_1 > b_2 > \dots > b_n > b_{n+1} > \dots > \xi$$

taqribiy qiymatlar ketma-ketligini hosil qilamiz. Bunda keyingi qiymat oldingisi orqali

$$b_{n+1} = b_n - \frac{f(b_n)}{f'(b_n)} \quad (4.18)$$

formula bilan topiladi. Quydin ξ aniq ildiz bilan chegaralangan monoton kamayuvchi $b_1, b_2, \dots$ ketma-ketlik 3.12-Teoremaga ko'ra biror β nuqtaga intiladi. Bu β berilgan (4.10) tenglamaning ildizi bo'ladi. Haqiqattan ham, (4.18) tenglikda limitga o'tsak va $f(x)$ funksiyaning uzluksizligini inobatga olsak

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = 0, \text{ bundan esa } f(\beta) = 0 \text{ va } \beta = \xi.$$

4.35-rasmda $b_1, b_2, \dots$ taqribiy qiymatlar ketma-ketligi ξ taqribiy yechimga yaqinlashib borishi rasvirlangan.

M orqali $f''(x)$ ikkinchi tartibli hosilaning $[a, b]$ kesmadagi eng katta qiymatini, m orqali esa $f'(x)$ birinchi tartibli hosilaning $[a, b]$ kesmadagi eng kichik qiymatini belgilaymiz. Taqribiy yaqinlashishdagi xatolik (4.14) tengsizlik bilan baholanadi va bundan tashqari bu xatolik

$$|b_{n+1} - \xi| \leq \frac{M}{2m} |b_n - \xi|^2. \quad (4.19)$$

tengsizlikni ham qanoatlantiradi. O'ng tomonda ikkinchi daraja turibdi, ana shu daraja b_n taqribiy yechimlarning ξ aniq yechimga tezroq intilishini ta'minlaydi. Shuning uchun urinmalar usuli tenglamaning ildizini topishda eng samarali usullardan biri hisoblanadi.

Bu yerda ham birinchi urinmani qaysi nuqtadan o'tkazish muhim o'rin tutadi va agar nuqta noto'g'ri tanlansa aniq yechimga yaqinlashmasligi muhim.

Agar $[a, b]$ kesmada $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalarni ishorasi bir xil bo'lsa (4.33-rasmda 1) va 4) hollar) birinchi urinma $B(b, f(b))$ nuqtada o'kaziladi. Qaralayotgan kesmada $f'(x)$ va $f''(x)$ hosilalarni ishorasi har xil bo'lsa (4.33-rasmda 2) va 3) hollar) birinchi urinma $A(a, f(a))$ nuqtada o'kaziladi va ikkala holda ham taqribiy yaqinlashishlar (4.18) formula bilan hisoblanadi.

4.23-Misol. $x^3 + 5x^2 - 2x - 5 = 0$ tenglamaning birorta haqiqiy ildizini 0,0001 aniqlikda toping.

► Ko'phadning $x = -1$ va $x = 0$ nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz:

$$f(-1) = 1 \text{ va } f(0) = -5$$

demak tenglamaning ildizi $[-1, 0]$ oraliqda mavjud ekan. Hosilalarini topamiz:

$$f'(x) = 3x^2 + 10x - 2, \quad f''(x) = 6x + 10.$$

Birinchi tartibli hosila $[-1, 0]$ kesmada manfiy ishorali qiymat, ikkinchi tartibli hosila esa musbat ishorali qiymat qabul qiladi (ya'ni 4.33-rasmda 3) hol). $|f'(x)|$ ifodaning bu kesmadagi eng kichik qiymati $m = |f'(0)| = 2$ va $|f''(x)|$ ifodaning $[-1, 0]$ kesmadagi eng katta qiymati $M = |f''(0)| = 10$ bo'ladi.

Demak b_0 sifatida kesmaning chak chegarasini olamiz (birinchi va ikkinchi tartibli hosilalarning ishoralari har xil).

$$b_1 = b_0 - \frac{f(b_0)}{f'(b_0)} = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = -0,88889$$

$$f(b_1) = 0,026063, f'(b_1) = -8,51852$$

$$|b_1 - \xi| \leq \frac{|f(b_1)|}{m} = \frac{0,026063}{2} = 0,013032$$

$$b_2 = b_1 - \frac{f(b_1)}{f'(b_1)} = -0,88889 - \frac{f(-0,88889)}{f'(-0,88889)} = 0,88583$$

$$f(b_2) = 0,000022, f'(b_2) = -8,50421$$

$$|b_2 - \xi| \leq \frac{|f(b_2)|}{m} = \frac{0,000022}{2} = 0,000011 < 0,01.$$

Talab qilingan aniqlikka erishildi. Shuning uchun $b_2 == -0,88889$ qiymatni berilgan tenglamaning 0,0001 aniqlikdagi taqribiy yechimi deb qabul qilish mumkin. ◀

Nazorat savollari

1. Qanday shart bajarilganda funksiya oraliqda o'suvchi bo'ladi?
2. Qanday shart bajarilganda funksiya oraliqda kamayuvchi bo'ladi?
3. Lokal maksimum va lokal minimum nuqtalar deb qanday nuqталarga aytiladi?
4. Funksiya ekstremumi mavjudligining zaruriy sharti nimadan iborat?
5. Qanday nuqtalar funksiyaning kritik nuqtalari deb ataladi?
4. Funksiya ekstremumi mavjudligining yetarli sharti nimadan iborat?
7. Qachon funksiya oraliqda qavariq deyiladi?
8. Qachon funksiya oraliqda botiq deyiladi?
9. Qavariqlik va botiqlikning yetarli sharti nimadan iborat?
10. Qanday nuqtalarga buralish nuqtasi deyiladi?
11. Egri chiziqning asimptotasi nima?
12. Asimptotaning qanday turlari mavjud?
13. Tenglamani taqribiy yechish deganda nimani tushunasiz?
14. Tenglamani taqribiy yechishning qanday usullarini bilasiz?

Mashqlar.

Funksiyaning grafigini yasang:

1. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$.
2. $y = xe^{-x}$.
3. $y = x^3 + 6x^2 - 15x + 1$.
4. $y = x^3 - 9x^2 + 15x - 3$.
5. $y = x - x^3$.
6. $y = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$.
7. $y = \frac{x^2 - 1}{x}$.
8. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$.
9. $y = \frac{x^3 - 4}{x^2}$.

Funksiyaning berilgan E kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatini toping:

10. $y = 4 - x - 4/x^2, E = [1, 4]$.
11. $y = x^4 - 2x^2 + 5, E = [-2, 2]$.
12. $y = x + 2\sqrt{x}, E = [0, 4]$.
13. $y = \sqrt{100 - x^2}, E = [-6, 8]$.

Tenglamaning birorta ildizini vatarlar va urinmalar usuli bilan 0,01 aniqlikda toping:

14. $x^3 - 6x^2 + 11x - 2 = 0$.
15. $3x^3 + 4x^2 + 7x - 6 = 0$.

Javoblar.

10. $M = 1, m = -1$.
11. $M = 13, m = 4$.
12. $M = 8, m = 0$.
13. $M = 10, m = 4$.

V BOB. ANIQMAS INTEGRAL

5.1. Boshlang'ch funksiya tushunchasi

Agar moddiy nuqta to'g'ri chiziqli harakatining $v = v(t)$ tezligi ma'lum bo'lsa, uning harakati qonunini topish masalasi, moddiy nuqta to'g'ri chiziqli harakatining ma'lum $s = s(t)$ qonunidan uning tezligini topish masalasiga teskari masala bo'ladi. Moddiy nuqtaning $v = v(t)$ tezligi uning harakat qonunidan hosila olib topilishi tufayli, tezlik ma'lum bo'lganda material nuqtaning harakat qonuni $s'(t) = v$ tenglikni qanoatlantirishi tabiiy.

5.1-Ta'rif. Agar chekli yoki cheksiz $(a; b)$ oraliqning barcha nuqtalarida $F(x)$ funksiya differensiallanuvchi va uning hosilasi uchun bu nuqtalarda $F'(x) = f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, $F(x)$ funksiya $(a; b)$ oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deb ataladi.

5.1-Misol. $F(x) = x^3$ funksiya $f(x) = 3x^2$ funksiyaning boshlang'ichi bo'ladi, chunki ixtiyoriy x nuqtada $(x^3)' = 3x^2$ tenglik o'rinli. ◀

5.2-Misol. Ixtiyoriy $x \in [-1; 1]$ nuqtalarda $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ tenglik o'rinli bo'lganligi uchun, $F(x) = \arcsin x$ funksiya $[-1; 1]$ kesmada $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ funksiyaning boshlang'ichi bo'ladi.

5.1-Teorema. Agar biror $(a; b)$ oraliqda $F_1(x)$ va $F_2(x)$ funksiyalar $f(x)$ funksiyaning boshlang'ichlari bo'lsa, ularning ayirmasi birorta o'zgarmas songa teng bo'ladi:

$$F_1(x) - F_2(x) = C, \quad C = \text{const}, x \in (a; b).$$

► Ixtiyoriy $x \in (a; b)$ uchun $F_1'(x) = f(x)$ va $F_2'(x) = f(x)$ bo'lsin. U holda $(F_1'(x) - F_2'(x))' = f(x) - f(x) = 0 = C'$ bo'lganligidan ixtiyoriy $x \in (a; b)$ uchun $F_1(x) - F_2(x) = C$ bo'ladi. ◀

Mulohaza. Boshlang'ichni topish amali bir qiymatli emas va biror o'zgarmas qo'shiluvchi aniqligida bajariladi.

5.1-Natija. $F(x)$ funksiya $(a; b)$ oraliqda $f(x)$ funksiyaning birorta boshlang'ichi bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning $(a; b)$ intervaldagi ixtiyoriy $\Phi(x)$ boshlang'ichi $\Phi(x) = F(x) + C$ tenglik bilan aniqlanadi, bu yerda C — birorta o'garmas son.

5.2. Aniqmas integral va uning xossalari

5.2-Ta'rif. Agar $F(x)$ — funksiya $f(x)$ funksiyaning birorta boshlang'ichi bo'lsa, $F(x) + C$ ifoda $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali

deyiladi va u $\int f(x)dx$ orqali belgilanadi: $\int f(x)dx = F(x) + C$, bu yerda C ixtiyoriy o'zgarmas son.

$\int f(x)dx$ belgilanishda $\int$ — aniqmas integral belgisi, $f(x)dx$ — integral osti ifoda, $f(x)$ — integral osti funksiya, x esa integrallash o'zgaruvchisi deb ataladi.

Funksiyaning aniqmas integralini topish amali bu *funksiyani integrallash* deb ataladi.

Har qanday funksiyaning ham boshlang'ichi mavjudmi degan tabiiy savol tugiladi. Bu savolga ushbu isbotsiz keltiriladigan teorema javob beradi.

5.2-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, bu kesmada $f(x)$ funksiyaning boshlang'ichi mavjud.

Bu teoremaning isbotini keyingi bobda keltiramiz.

Aniqmas integralning xossalari. Aniqmas integralning ta'rifidan kelib chiqadigan bir qator xossalarni keltiramiz.

1. Aniqmas integralning differensial integral osti ifodaga, hosil sai esa integral osti funksiya teng:

$$d(\int f(x)dx) = f(x)dx, (\int f(x)dx)' = f(x).$$

► Haqiqatdan ham

$$d(\int f(x)dx) = d(F(x) + C) = dF(x) + d(C) = F'(x)dx,$$

$$(\int f(x)dx)' = (F(x) + C)' = F'(x) + (C)' = f(x). \blacktriangleleft$$

Bu xossa tufayli integrallashning to'g'riligi differensiallash bilan tekshiriladi. Masalan,

$$\int (3x^2 + 4x + 5)dx = x^3 + 2x^2 + 5x + C$$

tenglik to'g'ri, chunki $(x^3 + 2x^2 + 5x + C)' = 3x^2 + 4x + 5$ tenglik o'rinli.

2. Biror funksiya differensialining aniqmas integrali, shu funksiya bilan ixtiyoriy o'zgarmaning yig'indisiga teng:

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

► Haqiqatdan ham,

$$\int dF(x) = \int F'(x)dx = \int f(x)dx = F(x) + C. \blacktriangleleft$$

3. O'zgarma ko'paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\int Af(x)dx = A \cdot \int f(x)dx, \quad A \neq 0 \text{ — o'zgarma.}$$

► Haqiqatdan ham,

$$(\int Af(x)dx)' = Af(x) = A(\int f(x)dx)'$$

Demak, $\int Af(x)dx = A \cdot \int f(x)dx. \blacktriangleleft$

4. Chekli sondagi uzluksiz funksiyalar algebraik yig'indisining aniqmas integrali, shu funksiyalar aniqmas integrallarining algebraik yig'indisiga teng:

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

► Haqiqatdan ham, 2-xossadan foydalanib

$$(\int (f(x) \pm g(x))dx)' = f(x) \pm g(x) = (\int f(x)dx)' \pm (\int g(x)dx)'$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, $\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$. ◀

5. Agar $\int f(x)dx = F(x) + C$ va $u = \varphi(x)$ — uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, $\int f(u)du = F(u) + C$ bo'ladi.

► x — erkin o'zgaruvchi, $f(x)$ — uzluksiz funksiya va $F(x)$ — uning boshlang'ichi bo'lsin. U holda $\int f(x)dx = F(x) + C$ bo'ladi. $u = \varphi(x)$ deb olamiz, bu yerda $\varphi(x)$ — uzluksiz differensiallanuvchi funksiya. $F(u) = F(\varphi(x))$ murakkab funksiyaning qaraymiz. Funksiya birinchi differensial formasining (3.50) invariantlik xossasiga ko'ra $dF(u) = F'(u)du = f(u)du$ va bu tenglikni 1-xossani inobatga olib integrallasak $\int f(u)du = \int d(F(u)) = F(u) + C$. ◀

Shunday qilib, aniqmas integralning formulasi integrallash o'zgaruvchisi erkinmi yoki uning uzluksiz differensiallanuvchi funksiyasimi, bunga farqsiz ravishda o'rinli bo'lar ekan.

Masalan, $\int 3x^2dx = x^3 + C$ formuladan, x o'zgaruvchini u ($u = \varphi(x)$) o'zgaruvchiga almashtirib $\int 3u^2du = u^3 + C$ tenglikni haosil qilamiz. Xususiyl holda

$$\int 3 \sin^2 x d(\sin x) = \sin^3 x + C, \int 3 \operatorname{tg}^2 x d(\operatorname{tg} x) = \operatorname{tg}^3 x + C, \\ \int 3 \ln^2 x d(\ln x) = \ln^3 x + C$$

tengliklarni hosil qilamiz.

5.3-Misol. $\int (6x^2 + 4x - 7)dx$ integralni toping.

$$\int (6x^2 + 4x - 7)dx = 6 \int x^2dx + 4 \int xdx - 7 \int dx =$$

$$= 6 \frac{x^3}{3} + C_1 + 4 \frac{x^2}{2} + C_2 - 7x + C_3 = 2x^3 + 2x^2 - 7x + C,$$

bu yerda $C = C_1 + C_2 + C_3$. ◀

Asosiy integrallar jadvali. Integrallash amali differensiallash amaliga teskari amal bo'lganligi uchun, asosiy elementar funksiyalarning hosilalari jadvalidan kelib chiqqan holda asosiy integrallar jadvalini tuzish mumkin. Ularning to'g'riligini differensiallash bilan oson tekshirish mumkin.

Natijada quyidagi jadvalni hosil qilamiz:

1. $\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad (\int dx = x + C);$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C;$
3. $\int a^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \cdot \frac{a^{\alpha x}}{\ln a} + C;$
4. $\int e^{\alpha x} dx = \frac{1}{\alpha} \cdot e^{\alpha x} + C;$
5. $\int \sin ax dx = -\frac{1}{a} \cdot \cos ax + C;$
6. $\int \cos ax dx = \frac{1}{a} \cdot \sin ax + C;$
5. $\int \operatorname{tg} ax dx = -\frac{1}{a} \cdot \ln|\cos ax| + C;$
8. $\int \operatorname{ctg} ax dx = \frac{1}{a} \cdot \ln|\sin ax| + C;$
9. $\int \frac{1}{\cos^2 ax} dx = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{tg} ax + C;$
10. $\int \frac{1}{\sin^2 ax} dx = -\frac{1}{a} \cdot \operatorname{ctg} ax + C;$
11. $\int \frac{1}{\sin ax} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \frac{ax}{2} \right| + C;$
12. $\int \frac{1}{\cos ax} dx = \frac{1}{a} \cdot \ln \left| \operatorname{tg} \left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C;$
13. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin \frac{x}{a} + C; \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}}$
14. $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C;$
15. $\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C;$
16. $\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C;$
15. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C;$
18. $\int \sqrt{x^2 + a} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a} + \frac{a}{2} \ln|x + \sqrt{x^2 + a}| + C;$
19. $\int \operatorname{sh} ax dx = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{ch} ax + C;$
20. $\int \operatorname{ch} ax dx = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{sh} ax + C;$
21. $\int \frac{1}{\operatorname{ch}^2 ax} dx = \frac{1}{a} \cdot \operatorname{th} ax + C;$
22. $\int \frac{1}{\operatorname{sh}^2 ax} dx = -\frac{1}{a} \cdot \operatorname{cth} ax + C.$

Yuqorida keltirilgan formulalarning haqqoniyligini differensiallab tekshirib ko'rish mumkinligini yana bir marotaba ta'kidlaymiz. Bu tengliklar o'ng tomonining hosilasi integral osti funksiyaga teng bo'ladi.

Elementar funksiyalarni differensiallash har doim elementar funksiyalarga olib kelishini ko'rgan edik. Ammo bu xususiyat integrallash amalida mavjud emas, ya'ni shunday elementar funksiyalar mavjudki, ularning aniqmas integrallarini elementar funksiyalarning chekli sonidagi arifmetik amallari va superpozitsiyalari orqali ifodalab bo'lmaydi. Masalan, quyidagi integrallarni elementar funksiyalar orqali ifodalab bo'lmashligi isbotlangan:

$$\begin{aligned} \int e^{-x^2} dx; & \quad (\text{Puasson integrali}), \\ \int \sin x^2 dx, \int \cos x^2 dx; & \quad (\text{Frenel integrali}), \\ \int \frac{1}{\ln x} dx; & \quad (\text{integral logarifm}), 0 < x \neq 1, \\ \int \frac{\sin x}{x} dx; & \quad (\text{integral sinus}), x \neq 0, \\ \int \frac{\cos x}{x} dx. & \quad (\text{integral kosinus}), x \neq 0. \end{aligned}$$

5.3. Integrallashning asosiy usullari

Asosiy formulalardan foydalanib integrallash (jadvalli integrallash). Eng oddiy holda berilgan integral yuqorida keltirilgan formulalarning xususiyligi sifatida tasvirlangan bo'ladi va integralni topish mos formulani qo'llashga keltiriladi.

5.4-Misol. $\int \sqrt[3]{x^2} dx$ integralni toping.

► $\sqrt[3]{x^2} = x^{\frac{2}{3}}$ bo'lganligi uchun integrallar jadvalining 1-formulasini $\alpha = 2/3$ hol uchun qo'llaymiz:

$$\int \sqrt[3]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C = \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C. \blacktriangleleft$$

5.5-Misol. $\int 3^x dx$ integralni toping.

► Integrallar jadvalining 3-formulasini $a = 3, \alpha = 1$ hol uchun qo'llaymiz: $\int 3^x dx = \frac{3^x}{\ln 3} + C. \blacktriangleleft$

5.6-Misol. $\int \frac{dx}{16+x^2}$ integralni toping.

► Integrallar jadvalining 15-formulasini $a = 4$ hol uchun qo'llaymiz:

$$\int \frac{dx}{16+x^2} = \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x}{4} + C. \blacktriangleleft$$

5.7-Misol. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x}}$ integralni toping.

► Bu yerda $\frac{dx}{\sqrt[3]{5x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} x^{-\frac{1}{3}}$ tenglikni va integrallar jadvalining 1-formulasini $\alpha = -1/3$ hol uchun va o'zgarmas ko'paytuvchini integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkinligi haqidagi xossani qo'llaymiz:

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5x}} = \int \frac{1}{\sqrt[3]{5}} x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \int x^{-\frac{1}{3}} dx = \frac{1}{\sqrt[3]{5}} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + C = \frac{3}{2\sqrt[3]{5}} \sqrt[3]{x^2} + C. \blacktriangleleft$$

Integral osti funksiyani aynan almashtirib integrallash. Bu usul quyidagidan iborat: integral osti funksiyaning aynan almashtirishlaridan va integralning xossalardan foydalanib, dastlabki integral jadval integraliga (yoki jadval integrallarning chiziqli kombinatsiyasiga) keltiriladi.

5.8-misol. $\int (10x^4 - 12x^3 + 3x^2 - 4x + 5)dx$ integralni toping.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int (10x^4 - 12x^3 + 3x^2 - 4x + 5)dx &= \int 10x^4 dx - \int 12x^3 dx + \\ &+ \int 3x^2 dx - \int 4x dx + \int 5 dx = 10 \int x^4 dx - 12 \int x^3 dx + \\ &+ 3 \int x^2 dx - 4 \int x dx + 5 \int dx = 10 \cdot \frac{x^5}{5} - 12 \cdot \frac{x^4}{4} + 3 \cdot \frac{x^3}{3} - \\ &- 4 \cdot \frac{x^2}{2} + 5x + C = 2x^5 - 3x^4 + x^3 - 2x^2 + 5x + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

5.9-Misol. $\int \frac{x^6 - x^5 + 1}{x^2} dx$ integralni toping.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \frac{x^6 - x^5 + 1}{x^2} dx &= \int (x^4 - x^3 + x^{-2}) dx = \int x^4 dx - \int x^3 dx + \\ &+ \int x^{-2} dx = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

5.10-Misol. $\int (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^2 dx$ integralni toping.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x})^2 dx &= \int (x - 2\sqrt{x}\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x^2}) dx = \\ &= \int \left(x - 2x^{\frac{5}{6}} + x^{\frac{2}{3}} \right) dx = \int x dx - 2 \int x^{\frac{5}{6}} dx + \int x^{\frac{2}{3}} dx = \\ &= \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{12}{11} \cdot x^{\frac{11}{6}} + \frac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

5.11-Misol. $\int \frac{x^2+6}{x^2+4} dx$ integralni toping.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \frac{x^2+6}{x^2+4} dx &= \int \frac{x^2+4+2}{x^2+4} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x^2+4} \right) dx = \\ &= \int dx + 2 \int \frac{dx}{x^2+4} = x + \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

O'zgaruvchilarni almashtirib integrallash (yoki o'rniga qo'yish usuli).

5.3-Teorema. $x = \varphi(t)$ funksiya biror $(\alpha; \beta)$ oraliqda aniqlangan va differensiallanuvchi va $(a; b)$ uning qiymatlar sohasi bo'lib, $f(x)$ funksiya bu oraliqda aniqlangan bo'lsin. U holda, agar $f(x)$ funksiya $(a; b)$ oraliqda boshlang'ichga ega bo'lsa,

$$\int f(x)dx|_{x=\varphi(t)} = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \quad (5.1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

► $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning $(a; b)$ oraliqdagi boshlang'ichi bo'lsin. $(\alpha; \beta)$ oraliqda $F[\varphi(t)]$ murakkab funksiyaning qaraymiz. $F'(x) = f(x)$ ekanligini inobatga olsak, murakkab funksiyaning differensiallash qoidasiga ko'ra

$$(F[\varphi(t)])' = F'_x[\varphi(t)]\varphi'(t) = f[\varphi(t)]\varphi'(t),$$

ya'ni $f[\varphi(t)]\varphi'(t)$ funksiya $(\alpha; \beta)$ oraliqda $F[\varphi(t)]$ boshlang'ichga ega bo'ladi va demak

$$\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt = F[\varphi(t)] + C$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu yerda $F[\varphi(t)] + C = (F(x) + C)|_{x=\varphi(t)} = \int f(x)dx|_{x=\varphi(t)}$ ekanligini e'tiborga olsak (5.1) formulani hosil qilamiz. ◀

$\int f(x)dx$ integralni topish uchun (5.1) tenglikning o'ng tomonidagi integral topilgandan so'ng, integrallashning yangi t o'zgaruvchisidan dastlabki x o'zgaruvchiga qaytish kerak.

Ba'zan yangi integrallash o'zgaruvchisini $t = \varphi(x)$ ko'rinishda kiritgan maqsadga muvofiq bo'ladi, u holda $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(t)dt$, bu yerda $t = \varphi(x)$ deb qarash kerak.

5.12-Misol. $\int e^{\frac{x}{5}}dx$ integralni toping.

► $x = 4t$ deb olamiz, u holda $dx = 4dt$ bo'ladi. Demak,

$$\int e^{\frac{x}{5}}dx = 5 \int e^t dt = 5e^t + C = 5e^{\frac{x}{5}} + C. \blacktriangleleft$$

5.13-Misol. $\int x(x+2)^{100}dx$ integralni toping.

► $x = t - 2$ deb olamiz, u holda $dx = dt$. Bularni berilgan integralga qo'yamiz:

$$\begin{aligned} \int x(x+2)^{100}dx &= \int (t-2)t^{100}dt = \int t^{101}dt - 2 \int t^{100}dt = \\ &= \frac{t^{102}}{102} - 2 \frac{t^{101}}{101} + C = \frac{(x+2)^{102}}{102} - \frac{2(x+2)^{101}}{101} + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

5.14-Misol. $\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}dx$ integralni toping.

► $x = t^2$ deb yangi o'zgaruvchi kiritamiz. U holda $\sqrt{x} = t, dx = 2tdt$ bo'ladi. Ularni berilgan integralga qo'yamiz:

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{e^t}{t} 2t dt = 2 \int e^t dt = 2e^t + C = 2e^{\sqrt{x}} + C. \blacktriangleleft$$

5.15-Misol. $\int \frac{\ln^3 x}{x} dx$ integralni toping.

► $t = \ln x$ deb yangi o'zgaruvchi kiritamiz, u holda $dt = \frac{1}{x} dx$ bo'ladi. Berilgan integralda dastlab aynan alamshtirish bajaramiz va so'ngra yangi o'zgaruvchi kiritamiz:

$$\int \frac{\ln^3 x}{x} dx = \int \ln^3 x \cdot \frac{1}{x} dx = \int t^3 dt = \frac{1}{4} t^4 + C = \frac{1}{4} \ln^4 x + C. \blacktriangleleft$$

Bo'laklab integrallash.

5.4-Teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar biror $(a; b)$ oraliqda uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, ixtiyoriy $x \in (a; b)$ nuqta uchun

$$\int u(x) dv(x) = u(x)v(x) - \int v(x) du(x) \quad (5.2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

► Teorema shartiga ko'ra integral osti funksiyalar uzluksiz, shuning uchun 5.2-Teoreмага ko'ra ular boshlang'ichga ega va (5.2) tenglikga kirgan aniqmas integrallar mavjud. x argumentning belgilanishini yozmasdan, ko'paytmani differensiallash qoidasiga ko'ra

$$d(uv) = u dv + v du$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglikning ikkala tomonini integrallaymiz. Bunda aniqmas integralning 4-xossasidan foydalanamiz:

$$\int d(uv) = \int u dv + \int v du.$$

Bu yerda aniqmas integralning 2-xossasidan foydalanib:

$$uv = \int u dv + \int v du$$

tenglikga ega bo'lamiz va bu yerdan (5.2) *bo'laklab integrallash* formulasini hosil qilamiz. Bu formulada differensial bir funksiya boshqa funksiya o'tkaziladi. Bunday o'tkazish ko'pincha boshlang'ichni topishni ancha yengillashtiradi. ◀

1. Agar integral osti funksiya darajasi $m \geq 0$ bo'lgan $P_m(x)$ ko'phad bilan $\sin \alpha x$, $\cos \alpha x$, $e^{\alpha x}$ funksiyalardan birining ko'paytmasidan iborat bo'lsa, $u(x) = P_m(x)$ deb olish kerak.

5.16-Misol. $\int x e^x dx$ integralni toping.

► Bu yerda $u = x$ va $dv = e^x dx$ deb olamiz. U holda $du = dx$ va $v = e^x$ bo'ladi. Ularni (5.2) formulaga qo'yib integrallashni bajaramiz:

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx.$$

O'ng tomonda jadval integralni hosil qildik. Uni jadvaldan topib

$$\int x e^x dx = x e^x - e^x + C$$

yoki

$$\int x e^x dx = e^x(x - 1) + C$$

javobni hosil qilamiz. Masalani yechishni boshqacha

$$\int x e^x dx = \int x d(e^x) = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = e^x(x - 1) + C$$

ko'rinishda ham yozish mumkin. Yozishning bunday usulini quyidagi misolda ham qo'llaymiz:

2. Agar integral osti funksiya teskari trigonometrik funksiyalar ($\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$, $\text{arcctg } x$) yoki $\ln x$ logarifmik funksiya bilan $P_m(x)$, $m \geq 0$ ko'phad ko'paytmasidan iborat bo'lsa $dv(x) = P_m(x)dx$ deb olish kerak.

5.16-Misol. $\int x^2 \ln x dx$ integralni toping.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int x^2 \ln x dx &= \int \ln x d\left(\frac{x^3}{3}\right) = \ln x \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} d(\ln x) = \\ &= \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \int \frac{x^3}{3} \frac{dx}{x} = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3}{3} \cdot \ln x - \frac{x^3}{9} + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Ayrim integrallarni topishda bo'laklab integrallashni bir necha marta qo'llash qulay bo'ladi.

5.17-Misol. $\int x^2 \cos x dx$ integralni toping.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int x^2 \cos x dx &= \int x^2 d(\sin x) = x^2 \sin x - \int 2x \sin x dx = \\ &= x^2 \sin x + \int 2x d(\cos x) = x^2 \sin x + 2x \cos x - \int \cos x 2dx = \\ &= x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x + C = (x^2 - 2) \sin x + 2x \cos x + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Keyingi misolda bo'laklab integrallashni qo'llashning yana bir usulini keltiramiz.

5.18-Misol. $\int \sqrt{x^2 + \alpha} dx$ integralni toping.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \sqrt{x^2 + \alpha} dx &= \sqrt{x^2 + \alpha} x - \int x d(\sqrt{x^2 + \alpha}) = x\sqrt{x^2 + \alpha} - \\ &- \int x \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = x\sqrt{x^2 + \alpha} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}} = x\sqrt{x^2 + \alpha} - \int \frac{x^2 + \alpha - \alpha}{\sqrt{x^2 + \alpha}} dx = \\ &= x\sqrt{x^2 + \alpha} - \int \sqrt{x^2 + \alpha} dx + \int \frac{\alpha dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}}. \end{aligned}$$

Shunday qilib,

$$\int \sqrt{x^2 + \alpha} dx = x\sqrt{x^2 + \alpha} - \int \sqrt{x^2 + \alpha} dx + \int \frac{\alpha dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}}$$

Bundan esa

$$2 \int \sqrt{x^2 + \alpha} dx = x\sqrt{x^2 + \alpha} + \int \frac{\alpha dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}}$$

yoki

$$\int \sqrt{x^2 + \alpha} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 + \alpha} + \int \frac{\alpha dx}{\sqrt{x^2 + \alpha}}).$$

Tenglikning o'ng tomonidagi integral jadval integrali. Uni bu tenglikga qo'yib

$$\int \sqrt{x^2 + \alpha} dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{x^2 + \alpha} + \alpha \ln|x + \sqrt{x^2 + \alpha}|) + C$$

qidirilgan integralni topdik. ◀

5.4. Ratsional kasrlarni integrallash

Ratsional funksiya tushunchasi. n – darajali $Q_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$ ko'phadni *sodda ratsional funksiya* deb ataymiz. Agar bu yerda $a_0 = 1$ bo'lsa, $Q_n(x)$ *keltirilgan ko'phad* deb ataladi.

Agar $Q_n(b) = 0$ tenglik o'rinli bo'lsa, b soni $Q_n(x)$ ko'phadning *ildizi* deb ataladi.

Ikkita ko'phadning nisbatini *kasriy- ratsional funksiya* (yoki *ratsional kasr*) deb ataymiz. Agar ratsional kasr suratidagi ko'phad darajasi maxrajdagi ko'phad darajasidan kichik bo'lsa, u *to'g'ri ratsional kasr*, aks holda, ya'ni suratdagi ko'phad darajasi maxrajdagi ko'phad darajasidan kichik bo'lmasa, u *noto'g'ri ratsional kasr* deb ataladi.

5.19-Misol. $\frac{4x-1}{x^2+3}$, $\frac{5}{x}$, $\frac{x^4-4x^3+3x-9}{x^5-7x^4+6x-1}$ -to'g'ri ratsional kasrlar;
 $\frac{x^3-5x^2+6x+4}{5x-1}$, $\frac{x^2-7x-8}{x+1}$ -noto'g'ri ratsional kasrlar.

Sodda ratsional va kasriy- ratsional funksiyalar birgalikda *ratsional funksiyalarni* tashkil qiladi. Boshqacha qilib aytganda qiymati hisoblanayotganda erkin o'zgaruvchi x ustida faqat arifmetik amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish) bajariladigan funksiyalarga *ratsional funksiya* (yoki *ifoda*) deb ataymiz. x o'zgaruvchining ratsional ifodasini $R(x)$ orqali belgilaymiz.

$$R(u_1, u_2, \dots, u_k) = \frac{P_m(u_1, u_2, \dots, u_k)}{Q_n(u_1, u_2, \dots, u_k)}$$

ko'rinishdagi funksiyalarga $u_1, u_2, \dots, u_k$ o'zgaruvchilarning *ratsional funksiyasi* deb ataymiz, bu yerda P_m va Q_n erkin $u_1, u_2, \dots, u_k$ o'zgaruvchilarning darajalari mos ravishda m va n bo'lgan ko'phadlari. Masalan, x va y o'zgaruvchilarning ikkinchi darajali ko'phadi

$$P_2(x, y) = A_{00} + A_{10}x + A_{01}y + A_{20}x^2 + A_{11}xy + A_{02}y^2$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $A_{00}, A_{10}, A_{01}, A_{20}, A_{11}, A_{02}$ – haqiqiy sonlar bo'lib, bunda $A_{20}^2 + A_{11}^2 + A_{02}^2 \neq 0$.

5.20-Misol. $f(x, y) = \frac{x^3 - x^2y + y^2}{x^2 - xy^3 + y - 1}$ funksiya x va y

o'zgaruvchilarning ratsional funksiyasi bo'ladi, chunki u uchinchi darajali $P_3(x, y) = x^3 - x^2y + y^2$ ko'phad bilan to'rtinchi darajali $Q_4(x, y) = x^2 - xy^3 + y - 1$ ko'phadning nisbatidan iborat. ◀

$u_1, u_2, \dots, u_k$ o'zgaruvchilar o'z navbatida x o'zgaruvchining funksiyalari bo'lsa:

$$u_1 = f_1(x), u_2 = f_2(x), \dots, u_k = f_k(x),$$

u holda $R[f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)]$ funksiya $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ funksiyalarning ratsional funksiyasi deb ataladi.

5.1-Tasdiq. Har qanday noto'g'ri ratsional kasrni (suratni maxrajga bevosita bo'lish orqali) uning butun qismi bilan to'g'ri ratsional kasrning yig'indisi ko'rinishda ifodalash mumkin.

5.21-Misol. $\frac{x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x - 1}{x^3 - 6x + 8}$ kasrni qaraymiz.

► $x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ ko'phadni $x^3 - 6x + 8$ ko'phadga bo'lamiz:

$$\begin{array}{r|l} x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x - 1 & x^3 - 6x + 8 \\ -x^5 & x^2 - 6x + 9 \\ \hline -6x^4 + 9x^3 - 4x^2 + 2x - 1 & \\ -6x^4 & + 36x^2 - 48x \\ \hline \end{array}$$

Shunday qilib, $x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x - 1$ ko'phadni $x^3 - 6x + 8$ ko'phadga bo'lish natijasida $-54x + 72$

$$\frac{x^5 - 6x^4 + 3x^3 + 4x^2 + 2x - 1}{x^3 - 6x + 8} = x^2 - 6x + 9 + \frac{-40x^2 + 104x - 73}{x^3 - 6x + 8}$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Sodda ratsional kasrlarni integrallash.

5.3-Ta'rif. Quyidagi ko'rinishdagi ratsional kasrlar

$$1) \frac{A}{x-a}, \quad 2) \frac{B}{(x-a)^k}, \quad 3) \frac{Mx+N}{x^2+px+q}, \quad 4) \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k}$$

sodda ratsional kasrlar deb ataladi, bu yerda A, B, M, N, p, q — haqiqiy sonlar, $k > 1$ — butun son va $p^2 - 4q < 0$, ya'ni uchinchi va to'rtinchi turdagi kasrlar maxrajlaridagi kvadrat uchadning ildizlari qo'shma kompleks (mos ravishda oddiy va k karrali) va shuning uchun uchhad hech bir $x \in \mathbb{R}$ nuqtada nolga aylanmaydi.

Dastlabki ikkita sodda ratsional kasrlarni integrallash hech qanday qiyinchilik tug'dirmaydi:

$$\int \frac{A dx}{x-a} = A \ln|x-a| + C \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} \int \frac{B dx}{(x-a)^k} &= B \int (x-a)^{-k} d(x-a) = \\ &= B \frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = - \frac{B}{(k-1)(x-a)^{k-1}} + C. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Bu yerda integral jadvalning mos ravishda 2 va 1 formulalaridan foydalanildi.

Uchinchi turdagi kasrning maxrajidagi kvadrat uchhad shaklini o'zgartiramiz:

$$\frac{Mx+N}{x^2+px+q} = \frac{Mx+N}{(x+p/2)^2+q-p^2/4}. \quad (5.5)$$

Shartga ko'ra maxrajning nollari qo'shma kompleks sonlar, u holda $q - p^2/4 > 0$ va shuning uchun $q - p^2/4 = a^2$ deb belgilash kiririshimiz mumkin, hamda $x + p/2 = t$ ($x = t - p/2, dx = dt$) deb yangi o'zgaruvchi kiritamiz. U holda (5.5) tenglikning maxrajini $x^2 + px + q = t^2 + a^2$ ko'rinishda yozish mumkin bo'ladi va uchinchi turdagi kasrning integralini

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{Mx+N}{(x+\frac{p}{2})^2+q-p^2/4} dx = \\ &= \int \frac{M(t-\frac{p}{2})+N}{t^2+a^2} dt = \int \frac{Mt+N-pM/2}{t^2+a^2} dt. \end{aligned}$$

So'ngi integralga aniqmas integralning chiziqlilik xossasini qo'llab, uni ikkita integralning yig'indisi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{Mt+N-pM/2}{t^2+a^2} dt &= M \int \frac{t dt}{t^2+a^2} + \left(N - \frac{pM}{2}\right) \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2} \int \frac{d(t^2+a^2)}{t^2+a^2} + \\ &+ \frac{2N-Mp}{2} \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{M}{2} \ln|t^2+a^2| + \frac{2N-Mp}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C. \end{aligned}$$

Bu yerda integrallar jadvalining 2 va 15-formulalaridan foydalandik. Dastlabki x o'zgaruvchiga qaytib, uchinchi tur kasr uchun

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{x^2+px+q} dx &= \frac{M}{2} \ln \left| \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} \right| + \\ &+ \frac{2N-Mp}{2\sqrt{q-p^2/4}} \operatorname{arctg} \frac{x+p/2}{\sqrt{q-p^2/4}} + C = \\ &= \frac{M}{2} \ln|x^2 + px + q| + \frac{2N-Mp}{\sqrt{4q-p^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C. \end{aligned} \quad (5.6)$$

To'rtinchi tur kasrning aniqmas integralini xuddi shi singari almashtiramiz:

$$\int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx = M \int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} + \left(N - \frac{pM}{2}\right) \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k}. \quad (5.7)$$

O'ng tomondai birinchi integralni differensial ostiga $t^2 + a^2$ ifodani kiritib, integrallar jadvalining 1-formulasidan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} &= \frac{1}{2} \int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{2} \int (t^2+a^2)^{-k} d(t^2+a^2) = \\ &= \frac{1}{2(-k+1)} (t^2+a^2)^{-k+1} + C = -\frac{1}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} + C. \end{aligned}$$

Dastlabki x o'zgaruvchiga qaytib

$$\int \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k} = -\frac{1}{2(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}} + C \quad (5.8)$$

tenglikni hosil qilamiz.

(5.7) tenglikning o'ng tomonidagi ikkinchi integralni I_k orqali belgilaymiz va uni quyidagicha almashtiramiz:

$$\begin{aligned} I_k = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^k} &= \frac{1}{a^2} \int \frac{a^2 dt}{(t^2+a^2)^k} = \frac{1}{a^2} \int \frac{(t^2+a^2)-t^2}{(t^2+a^2)^k} dt = \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{a^2} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^k} \end{aligned} \quad (5.9)$$

(5.9) tenglikning o'ng tomonidagi birinchi integral I_{k-1} integralni beradi, ikkinchisini esa bo'laklab integrallaymiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2 dt}{(t^2+a^2)^k} &= \left| dv = \frac{tdt}{(t^2+a^2)^k}, v = \frac{-1}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} \right| = \\ &= -\frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)} \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^{k-1}} = \\ &= -\frac{t}{2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{1}{2(k-1)} I_{k-1}. \end{aligned}$$

Bu ifodani (5.9) tenglikga qo'yib,

$$I_k = \frac{1}{a^2} I_{k-1} + \frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} - \frac{1}{2a^2(k-1)} I_{k-1}$$

tenglikga ega bo'lamiz. Natijada I_k aniqmas integralni topish uchun rekurrent munosabatga kelimiz:

$$I_k = \frac{t}{2a^2(k-1)(t^2+a^2)^{k-1}} + \frac{2k-3}{2a^2(k-1)} I_{k-1}. \quad (5.10)$$

Dastlab integrallar jadvalining 15-formulasidan

$$I_1 = \int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{t}{a} + C$$

integral topiladi, so'ngra (5.10) formuladan I_2 topiladi va uni yana (5.10) tenglikga qo'yib I_3 topiladi va hokazo qidirilayotgan I_k integral topilgunga qadar davom ettiriladi.

(5.10) munosabatda x o'zgaruvchiga va dastlabki parametrlarga qaytib,

$$I_k = \frac{2x+p}{(4q-p^2)(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}} + \frac{2(2k-3)}{(4q-p^2)(k-1)} I_{k-1}$$

munosabatni yozamiz. Bu so'ngi munosabatni va (5.8) tenglikni (5.7) tenglikga qo'yib, to'rtinchi tur kasrning integrali uchun

$$\begin{aligned} \int \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^k} dx = & - \frac{M}{2(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}} + \\ & + \left(N - \frac{pM}{2}\right) \frac{2x+p}{(4q-p^2)(k-1)(x^2+px+q)^{k-1}} + \\ & + \left(N - \frac{pM}{2}\right) \frac{2(2k-3)}{(4q-p^2)(k-1)} \int \frac{dx}{(x^2+px+q)^{k-1}} \end{aligned} \quad (5.11)$$

tenglikni hosil qilamiz.

Shunday qilib, $N - pM/2 \neq 0$ shart bajarilganda to'rtinchi tur ratsional kasrning aniqmas integrali elementar funksiyalar orqali, aniqrog'i to'g'ri ratsional kasrlar va arktangens orqali ifodalanar ekan.

5.22-Misol. $\int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2} dx$ integralni toping.

► Integral ostidagi kasr suratining darajasi maxrajning darajasidan kichik, shuning uchun bu kasr to'g'ri kasr, maxrajdagi kvadrat uchhad haqiqiy ildizlarga ega emas. Bu uchhadni to'la kvadratga ajratamiz: $x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1$ va $x-2 = t$ (u holda $x = t+2, dx = dt$) deb yangi o'zgaruvchi kiritamiz. Shunday qilib tengliklarning quyidagi ketma-ketligini hosil qilamiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2} dx &= \int \frac{t+3}{(t^2+1)^2} dt = \int \frac{t}{(t^2+1)^2} dt + 3 \int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \\ &= -\frac{1}{2(t^2+1)} + 3 \int \frac{dt}{(t^2+1)^2}. \end{aligned}$$

$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2}$ integralni quyidagicha topamiz:

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \int \frac{t^2+1-t^2}{(t^2+1)^2} dt = \int \frac{dt}{t^2+1} - \int \frac{t^2 dt}{(t^2+1)^2} = \operatorname{arctg} t - \int \frac{t \cdot t dt}{(t^2+1)^2}.$$

So'ngi integralni bo'laklab integrallaymiz:

$$\int \frac{t \cdot t dt}{(t^2+1)^2} = \left| \begin{array}{l} u = t, \quad du = dt \\ dv = \frac{t dt}{(t^2+1)^2}, v = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{t^2+1} \end{array} \right| = \frac{t}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+1} =$$

$$= \frac{t}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t + C,$$

u holda

$$\int \frac{dt}{(t^2+1)^2} = \operatorname{arctg} t - \left(\frac{t}{2(t^2+1)} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} t \right) = \frac{3}{2} \operatorname{arctg} t - \frac{t}{2(t^2+1)} + C.$$

Shunday qilib,

$$\int \frac{x+1}{(x^2-4x+5)^2} dx = -\frac{1}{2(t^2+1)} + 3 \left(\frac{3}{2} \operatorname{arctg} t - \frac{t}{2(t^2+1)} \right) =$$

$$= \frac{9}{2} \operatorname{arctg} t - \frac{1+3t}{2(t^2+1)} + C = \frac{9}{2} \operatorname{arctg}(x-2) - \frac{3x-5}{2(x^2-4x+5)} + C. \blacktriangleleft$$

To'g'ri ratsional kasrni sodda kasrlarga ajratish. $P_m(x)/Q_n(x)$ – to'g'ri ratsional kasr, ya'ni $P_m(x)$ va $Q_n(x)$ darajalari mos ravishda m va n , hamda $m < n$ bo'lgan haqiqiy koeffitsiyentli ko'phadlar bo'lsin. Bu ko'phadlar umumiy no'llarga ega emas (boshqacha qilib aytganda, qaralayotgan to'g'ri ratsional kasr qisqarmaydi) deb faraz qilamiz.

5.5-Teorema. Agar $a \in \mathbb{R}$ soni $Q_n(x)$ ko'phadning $k \in \mathbb{N}$ ($1 \leq k \leq n$) karrali ildizi, ya'ni

$$Q_n(x) = (x-a)^k Q_{n-k}(x), \quad Q_{n-k}(a) \neq 0$$

bo'lsa, $P_m(x)/Q_n(x)$ qisqarmaydigan to'g'ri ratsional kasrni

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_l(x)}{(x-a)^{k-1} Q_{n-k}(x)} \quad (5.12)$$

ko'rinishda rasvirlash mumkin, bu yerda $A \neq 0$ va $P_l(x)$ – darajasi $l < n-k$ bo'lgan ko'phad, ya'ni

$$\frac{P_l(x)}{(x-a)^{k-1} Q_{n-k}(x)}$$

ratsional kasr to'g'ri kasrdan iborat.

► Teoremaning shartiga ko'ra

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x-a)^k Q_{n-k}(x)}.$$

Bu tenglikning o'ng tomoniga turli ishorali $A/(x-a)^k$ ($A \in \mathbb{R}$) ifodalarni qo'shamiz va shaklini almashtiramiz:

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} &= \frac{P_m(x)}{(x-a)^k Q_{n-k}(x)} + \frac{A}{(x-a)^k} - \frac{A}{(x-a)^k} = \\ &= \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{P_m(x) - A Q_{n-k}(x)}{(x-a)^k Q_{n-k}(x)} \end{aligned} \quad (5.13)$$

(5.13) tenglik o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchining maxrajida darajasi n bo'lgan ko'phad turibdi, suratdagi ko'phadning darajasi esa n dan kichik, chunki $m < n$ va $n-k < n$. Demak, bu qo'shiluvchi to'g'ri ratsional kasrdan iborat ekan.

Teorema shartiga ko'ra $P_m(a) \neq 0$ va $Q_{n-k}(a) \neq 0$, u holda $A \neq 0$ haqiqiy sonni $P_m(a) - A Q_{n-k}(a) = 0$, ya'ni $A = P_m(a)/Q_{n-k}(a)$ tenglik o'rinli bo'ladigan qilib tanlasak $P_m(x) - A Q_{n-k}(x)$ ko'phad $(x-a)$ ifodaga bo'linadi. A haqiqiy son bunday tanlansa, (5.13) tenglikning o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchini $(x-a)$ ifodaga qisqartirib

$$\frac{P_m(x) - A Q_{n-k}(x)}{(x-a)^k Q_{n-k}(x)} = \frac{P_l(x)}{(x-a)^{k-1} Q_{n-k}(x)} \quad (5.14)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $P_l(x) = (P_m(x) - A Q_{n-k}(x))/(x-a)$. Bu (5.14) tenglikning o'ng tomonidagi ratsional kasr haqiqiy koeffitsiyentli ratsional kasrni $(x-a)$ ifodaga qisqartirishdan hosil qilingan, bu yerda a —haqiqiy son va shuning uchun u haqiqiy koeffitsiyentli to'g'ri kasrdan iborat bo'ladi. (5.14) tenglikning o'ng tomonini (5.13) tenglikga qo'yib (5.12) tenglikni hosil qilamiz. ◀

5.1-Mulohaza. (5.14) tenglikning o'ng tomonidagi to'g'ri ratsional kasrga $k > 1$ bo'lganda 5.5-Teoremani yana qo'llab (5.12) tenglik o'rniga

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{A}{(x-a)^k} + \frac{A_1}{(x-a)^{k-1}} + \dots + \frac{A_{k-1}}{x-a} + \frac{P_s(x)}{Q_{n-k}(x)} \quad (5.15)$$

tenglikni yozish mumkin. Bu yerda $P_s(x)/Q_{n-k}(x)$ —qisqarmaydigan kasr, chunki aks holda (5.15) tenglikning o'ng tomonini umumiy maxrajga keltirilgandan so'ng qisqaradigan kasrga aylanib qoladi, bu esa teorema shartiga ziddir. Agar $Q_{n-k}(x)$ ko'phad yana boshqa haqiqiy nolllarga ega bo'lsa, unga yana 5.5-Teoremani qo'llash mumkin. ◀

5.2-Mulohaza. Agar $Q_n(x)$ ko'phadning a noli kompleks son bo'lganda ham (5.12) tenglik o'rinli bo'ladi, ammo A soni va $P_l(x)$ ko'phadning koeffitsiyentlari umuman olganda kompleks sonlar bo'ladi. ◀

Haqiqiy koeffitsiyentli $Q_n(x)$ ko'phad k karrali $z = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$) kompleks ildizga ega bo'lsin. U holda unga qo'shma bo'lgan $\bar{z} =$

$a - bi$ kompleks son ham $Q_n(x)$ ko'phadning k karrali ildizi bo'ladi (1.14-Teorema), ya'ni $Q_n(x)$ ko'phad

$$((x - z)(x - \bar{z}))^k = (x^2 + px + q)^k$$

ko'phadga bo'linadi, bu yerda $p = -2a$ va $q = a^2 + b^2$ —haqiqiy sonlar.

5.6-Teorema. Agar $z = a + bi$ ($b \neq 0$) kompleks son haqiqiy koeffitsiyentli $Q_n(x)$ ko'phadning $k \in \mathbb{N}$ ($2 \leq 2k \leq n$) karrali ildizi, ya'ni

$Q_n(x) = (x^2 + px + q)^k Q_{n-2k}(x)$, $x^2 + px + q = (x - z)(x - \bar{z})$ bo'lib, bunda $Q_{n-2k}(z) \neq 0$ va $Q_{n-2k}(\bar{z}) \neq 0$ bo'lsa, u holda qisqarmaydigan to'g'ri $P_m(x)/Q_n(x)$ ($P_m(z) \neq 0, P_m(\bar{z}) \neq 0$) kasrni

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{P_l(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} Q_{n-2k}(x)} \quad (5.16)$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin, bu yerda $M, N \in \mathbb{R}$ va ular bir vaqtda nolga aylanmaydi, $P_l(x)$ esa darajasi $l < n - 1$ bo'lgan ko'phad, ya'ni

$$\frac{P_l(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} Q_{n-2k}(x)}$$

nisbat to'g'ri ratsional kasrdan iborat.

► Teorema shartiga ko'ra

$$\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x)}{(x^2 + px + q)^k Q_{n-2k}(x)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Uning o'ng tomoniga $(Mx + N)/(x^2 + px + q)^k$ ($M, N \in \mathbb{R}$) ifodani qo'shib, ayiramiz va shakl almashtiramiz:

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} &= \frac{P_m(x)}{(x^2 + px + q)^k Q_{n-2k}(x)} + \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} - \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} = \\ &= \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{P_m(x) - (Mx + N)Q_{n-2k}(x)}{(x^2 + px + q)^k Q_{n-2k}(x)}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

(5.17) tenglik o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchining maxrajida darajasi n bo'lgan ko'phad turibdi, suratdagi ko'phadning darajasi esa n dan kichik, chunki $m < n$ va $n - 2k + 1 < n$. Demak, bu qo'shiluvchi to'g'ri ratsional kasrdan iborat ekan.

M va N haqiqiy sonlarni $P_m(x) - (Mx + N)Q_{n-2k}(x)$ ko'phad $x^2 + px + q$ kvadrat uchhadga bo'linadigan qilib tanlaymiz. Buning uchun $z = a + bi$ ($b \neq 0$) kompleks son

$$P_m(x) - (Mx + N)Q_{n-2k}(x) = 0$$

tenglamaning ildizi bo'lishi yetarli, ya'ni

$$P_m(a + bi) - (M(a + bi) + N)Q_{n-2k}(a + bi) = 0. \quad (5.18)$$

U holda $z = a + bi$ kompleks songa qo'shma $\bar{z} = a - bi$ kompleks son ham bu tenglamaning ildizi bo'ladi. Shuning uchun $P_m(x) - (Mx +$

$N)Q_{n-2k}(x)$ ko'phad $x^2 + px + q = (x - z)(x - \bar{z})$ kvadrat uchhadga bo'linadi. (5.18) tenglikdan

$$M(a + bi) + N = \frac{P_m(a + bi)}{Q_{n-2k}(a + bi)} \quad (5.19)$$

tenglikni hosil qilamiz. (5.19) tenglikning o'ng tomonida ikkita kompleks sonning nisbati turibdi va uni biz $K + Li$ kompleks songa teng deb olishimiz mumkin, bu yerda K va L – birorta haqiqiy sonlar. Demak $M(a + bi) + N = K + Li$ va bu tenglikda haqiqiy va mavhum qismlarni tenglashtirsak, noma'lum M va N koeffitsiyentlarga nisbatan $Ma + N = K$ va $Mb = L$ tenglamalar hosil bo'ladi. Ularni yechib $M = L/b$ va $N = K - aL/b$ qiymatlarga ega bo'lamiz. Bunda M va N bir vaqtda nolga aylanmaydi, chunki aks holda $P_m(a + bi) = 0$ bo'ladi, bu esa teorema shartiga ziddir. M va N koeffitsiyentlar bunday tanlanganda (5.17) tenglikning o'ng tomonidagi ikkinchi qo'shiluvchini $x^2 + px + q$ kvadrat uchhadga qisqartirib, uni

$$\frac{P_m(x) - (Mx + N)Q_{n-2k}(x)}{(x^2 + px + q)^k Q_{n-2k}(x)} = \frac{P_l(x)}{(x^2 + px + q)^{k-1} Q_{n-2k}(x)} \quad (5.20)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $P_l(x) = (P_m(x) - (Mx + N)Q_{n-2k}(x))/(x^2 + px + q)$. Bu (5.20) tenglikning o'ng tomonidagi kasr haqiqiy koeffitsiyentli to'g'ri ratsional kasrni $x^2 + px + q$ kvadrat uchhadga qisqartirishdan hosil qilingan va shuning uchun u haqiqiy koeffitsiyentli to'g'ri ratsional kasr bo'ladi. (5.20) tenglikni (5.17) tenglikga qo'yib talab qilingan (5.16) tenglikni hosil qilamiz. ◀

5.3-Mulohaza. $k > 1$ bo'lganda (5.20) tenglikning o'ng tomoniga 5.6-Teoremani yana qo'llab, (5.16) tenglik o'rniga

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = & \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k} + \frac{M_1x + N_1}{(x^2 + px + q)^{k-1}} + \dots + \\ & + \frac{M_{k-1}x + N_{k-1}}{x^2 + px + q} + \frac{P_s(x)}{Q_{n-2k}(x)} \end{aligned} \quad (5.21)$$

tenglikni yozish mumkin, bu yerda $P_s(x)/Q_{n-2k}(x)$ – qisqarmaydigan to'g'ri ratsional kasr. Agar $Q_{n-2k}(x)$ ko'phad yana boshqa kompleks ildizlarga ega bo'lsa, unga nisbatan 5.6-Teoremani yana qo'llash mumkin.

5.7-Teorema. Maxraji $Q_n(x) =$

$$(x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_2)^{k_r} (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{l_s} \quad (5.22)$$

ko‘rinishda ko‘paytuvchilarga ajraladigan har qanday $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ kasrni yagona usul bilan quyidagi sodda kasrlarning yig‘indisi ko‘rinishida tasvirlash mumkin:

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = & \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} + \dots + \\ & + \frac{B_1}{x - a_2} + \frac{B_2}{(x - a_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_r}}{(x - a_2)^{k_r}} + \dots \\ & \dots + \frac{C_1x + D_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{C_2x + D_2}{(x^2 + p_1x + q_1)^2} + \dots + \frac{C_{l_1}x + D_{l_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{l_1}} + \dots \\ & \dots + \frac{M_1x + N_1}{x^2 + p_mx + q_m} + \frac{M_2x + N_2}{(x^2 + p_mx + q_m)^2} \dots + \frac{M_{l_m}x + N_{l_m}}{(x^2 + p_mx + q_m)^{l_m}} \end{aligned} \quad (5.23)$$

bu yerda $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, M_1, M_2, \dots, N_1, N_2, \dots$ haqiqiy sonlar.

► $P_m(x)/Q_n(x)$ kasr ratsional funksiya maxrajining (5.22) yoyilmasidagi $(x - a_1)^{k_1} \dots (x - a_2)^{k_r}$ ko‘paytmaga nisbatan 5.5-Teoremani va 5.1-Mulohazani qo‘llasak

$$\begin{aligned} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = & \frac{A_1}{x - a_1} + \frac{A_2}{(x - a_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}}{(x - a_1)^{k_1}} + \dots + \\ & + \frac{B_1}{x - a_2} + \frac{B_2}{(x - a_2)^2} + \dots + \frac{B_{k_r}}{(x - a_2)^{k_r}} + \frac{P^*(x)}{Q^*(x)} \end{aligned}$$

tenglikka ega bo‘lamiz, bu yerda $P^*(x)/Q^*(x)$ – yana to‘g‘ri ratsional kasr va $P^*(x)$ va $Q^*(x)$ – haqiqiy koeffisiyentli ko‘phadlar bo‘lib, $Q^*(x)$ ko‘phad haqiqiy ildizlarga ega emas va u $Q^*(x) = (x^2 + p_1x + q_1)^{l_1} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{l_s}$ ko‘rinishga ega.

$P^*(x)/Q^*(x)$ to‘g‘ri ratsional kasrga nisbatan 5.6-Teoremani va 5.3-Mulohazani ketma-ket qo‘llab (5.23) formulaga ega bo‘lamiz. ◀

Shunday qilib, isbot qilingan teoremaga ko‘ra, har qanday noldan farqli to‘g‘ri ratsional kasrni sodda ratsional kasrlarning yig‘indisi ko‘rinishda tasvirlash mumkin.

(5.23) tenglikdagi noma‘lum $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, M_1, M_2, \dots, N_1, N_2, \dots$ koeffisiyentlar noma‘lum koeffisiyentlar usuli bilan topiladi. Bu usul quyidagidan iborat:

1. (5.23) tenglikning o‘ng tomoni umumiy maxrajga keltiriladi, natijada $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{S(x)}{Q_n(x)}$ ayniyat hosil bo‘ladi, bu yerda $S(x)$ koeffisiyentlari noma‘lum bo‘lgan ko‘phad.

2. Hosil qilingan ayniyatda maxrajlar teng, shuning uchun suratlar ham aynan teng bo'ladi, ya'ni

$$P_m(x) \equiv S(x) \quad (5.24)$$

3. (5.24) ayniyatning ikkala tomonidagi x o'zgaruvchining bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib, noma'lum $A_1, A_2, \dots, B_1, B_2, \dots, M_1, M_2, \dots, N_1, N_2, \dots$ koeffitsiyentlarga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. va uni yechib noma'lum koeffitsiyentlarni topamiz.

5.23-Misol. $\frac{5x^2-6x+1}{(x-2)^2(x^2+x+1)}$ kasrni sodda kasrlar yig'indisi ko'rinishida tasvirlang.

► 5.7-Teorema ko'ra:

$$\frac{7x^2 - 6x + 5}{(x - 2)^2(x^2 + x + 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{(x - 2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 + x + 1}.$$

O'ng tomonni umumiy maxrajga keltiramiz:

$$\begin{aligned} \frac{7x^2 - 6x + 5}{(x - 2)^2(x^2 + x + 1)} &= \\ &= \frac{A(x - 2)(x^2 + x + 1) + B(x^2 + x + 1) + (Cx + D)(x - 2)^2}{(x - 2)^2(x^2 + x + 1)}. \end{aligned}$$

Bundan

$$\begin{aligned} 7x^2 - 6x + 5 &\equiv A(x^3 + x^2 + x - 2x^2 - 2x - 2) + \\ &\quad + B(x^2 + x + 1) + C(x^3 - 4x^2 + 4x) + D(x^2 - 4x + 4), \end{aligned}$$

ya'ni,

$$\begin{aligned} 7x^2 - 6x + 5 &\equiv (A + C)x^3 + (-A + B - 4C + D)x^2 + \\ &\quad + (-A + B + 4C - 4D)x + (-2A + B + 4D). \end{aligned}$$

x^3, x^2, x, x^0 oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib,

$$\begin{cases} 0 = A + C, \\ 7 = -A + B - 4C + D, \\ -6 = -A + B + 4C - 4D, \\ 5 = -2A + B + 4D \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz va uni yechib, $A = 1, B = 3, C = -1, D = 1$ koeffitsiyentlarni olamiz. Demak

$$\frac{7x^2-6x+5}{(x-2)^2(x^2+x+1)} = \frac{1}{x-2} + \frac{3}{(x-2)^2} + \frac{-x+1}{x^2+x+1}. \blacktriangleleft$$

Noma'lum koeffitsiyentlarni topish uchun ba'zan *argumentning alohida qiymatlar usuli* ham qo'llaniladi. Bunda (5.24) ayniyat hosil qilingandan so'ng, koeffitsiyentlar soni nechta bo'lsa, x argumentga shuncha qiymat

berilib, noma'lum koeffitsiyentlarga nisbatan sistema hosil qilinadi (ko'pincha x argumentga $Q_n(x)$ ko'phad ildizlarining qiymati qo'yiladi).

Kasriy – ratsional funksiyani integrallash. 5.1-Tasdiqqa ko'ra darajalari mos ravishda $m \geq 0$ va $n > 0$ bo'lgan $P_m(x)$ va $Q_n(x)$ ko'phadlarning nisbati shaklida aniqlangan har qanday $f(x) = P_m(x)/Q_n(x)$ ratsional kasr funksiyani (agar $m \geq n$ bo'lsa) darajasi $m - n$ bo'lgan $P_{m-n}(x)$ ko'phad bilan to'g'ri ratsional kasrning yig'indisi shaklida tasvirlash mumkin. O'z navbatida bu kasrni sodda ratsional kasrlarga yoyish mumkin. $P_{m-n}(x)$ ko'phad butun son o'qida aniqlangan va u hech qanday qiyinchiliksiz integrallanadi. Sodda ratsional kasrlarning aniqmas integrallari yuqorida alohida bo'limda qaraldi va ular sodda kasriy- ratsional funksiyalar, logarifmik va arktangens funksiyalar orqali ifodalanadi, ya'ni ixtiyoriy ratsional kasrning aniqmas integrali elementar funksiyalar orqali tasvirlanadi.

Shunday qilib, ixtiyoriy ratsional kasrni integrallash quyidagi bosqichlardan iborat ekan:

1) ratsional funksiya ko'phad bilan to'g'ri kasriy- ratsional funksiya yig'indisi shaklida tasvirlab olinadi;

2) to'g'ri ratsional kasr sodda ratsional kasrlarga yoyiladi;

3) ko'phadning va hosil qilingan sodda ratsional kasrlarning aniqmas integrallari topiladi.

Bu bosqichlarni bir necha misollarda qarab chiqamiz.

5.24-Misol. $\int \frac{6x^3 - 25x^2 + 87x - 54}{(x-2)^2(x^2 - 2x + 17)} dx$ integralni toping.

► Integral osti funksiya to'g'ri ratsional kasrdan iborat va uni sodda ratsional kasrlarga yoyamiz. (5.23) formulaga ko'ra

$$\frac{6x^3 - 25x^2 + 87x - 54}{(x-2)^2(x^2 - 2x + 17)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 17}$$

bu yerda A, B, C, D hozircha noma'lum koeffitsiyentlar. Dastlab o'ng tomonni umumiy maxrajga keltiramiz:

$$\begin{aligned} & \frac{A}{x-2} + \frac{B}{(x-2)^2} + \frac{Cx + D}{x^2 - 2x + 17} = \\ &= \frac{A(x-2)(x^2 - 2x + 17) + B(x^2 - 2x + 17) + (Cx + D)(x-2)^2}{(x-2)^2(x^2 - 2x + 17)}. \end{aligned}$$

O'ng tomondagi kasr suratidan (5.24) tenglikning $S(x)$ ko'phadini tuzamiz:

$$S(x) = Ax^3 - 4Ax^2 + 21Ax - 34A + Bx^2 - 2Bx + 17B + Cx^3 -$$

$$-4Cx^2 + 4Cx + Dx^2 - 4Dx + 4D = (A + C)x^3 + (-4A + B - 4C + D)x^2 + (21A - 2B + 4C - 4D)x + (-34A + 17B + 4D).$$

Bu ko'phadni $P_3(x) = 6x^3 - 25x^2 + 87x - 54$ ko'phadga aynan tenglashtirib (x o'zgaruvchining bir xil darajalari oldidagi koeffitsiyentlarni tenglashtirib),

$$\begin{cases} A + C = 6, \\ -4A + B - 4C + D = -25, \\ 21A - 2B + 4C - 4D = 87, \\ -34A + 17B + 4D = -54 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Bu sistemani yechib $A = 3, B = 4, C = 3, D = -5$ qiymatlarni topamiz, shuning uchun integral osti funksiya

$$\frac{6x^3 - 25x^2 + 87x - 54}{(x-2)^2(x^2 - 2x + 17)} = \frac{3}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} + \frac{3x-5}{x^2 - 2x + 17}$$

ko'rinishda sodda ratsional kasrlarga yoyiladi. Shunday qilib,

$$\int \frac{6x^3 - 25x^2 + 87x - 54}{(x-2)^2(x^2 - 2x + 17)} dx = \int \frac{3dx}{x-2} + \int \frac{4dx}{(x-2)^2} + \int \frac{3x-5}{x^2 - 2x + 17} dx.$$

Birinchi va ikkinchi integrallar osongina integrallanadi:

$$\int \frac{3dx}{x-2} = 3 \int \frac{dx}{x-2} = 3 \ln|x-2| + C,$$

$$\int \frac{4dx}{(x-2)^2} = 4 \int \frac{dx}{(x-2)^2} = 4 \left(-\frac{1}{x-2} \right) + C = -\frac{4}{x-2} + C.$$

Uchinchi integralda aynan almashtirishlarni bajarib, so'gnra integrallaymiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-5}{x^2-2x+17} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x-2)-2}{x^2-2x+17} dx = \frac{3}{2} \int \frac{(2x-2)dx}{x^2-2x+17} - \\ &- 2 \int \frac{dx}{x^2-2x+17} = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2-2x+17)}{x^2-2x+17} - 2 \int \frac{dx}{(x-1)^2+4^2} = \\ &= \frac{3}{2} \ln|x^2-2x+17| - 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x-1}{4} + C = \\ &= \frac{3}{2} \ln|x^2-2x+17| - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x-1}{4} + C. \end{aligned}$$

Topilgan birinchi, ikkinchi va uchinchi integrallarni yuqoridagi berilgan integralga qo'yib:

$$\begin{aligned} \int \frac{6x^3 - 25x^2 + 87x - 54}{(x-2)^2(x^2 - 2x + 17)} dx &= \\ &= 3 \ln|x-2| - \frac{4}{x-2} + \frac{3}{2} \ln|x^2-2x+17| - \frac{1}{2} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x-1}{4} + C \end{aligned}$$

qidirilayotagan integralni hosil qilamiz. ◀

5.25-Misol. $\int \frac{3x^4+16x^3+29x^2-31x+3}{(x-1)(x^2+6x+13)^2} dx$ integralni toping.

► Integral osti funksiya to‘g‘ri ratsional kasrdan iborat va uni sodda ratsional kasrlarga yoyamiz. (5.23) formulaga ko‘ra

$$\begin{aligned} & \frac{3x^4 + 16x^3 + 29x^2 - 31x + 3}{(x-1)(x^2+6x+13)^2} = \\ & = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+6x+13} + \frac{Dx+E}{(x^2+6x+13)^2}, \end{aligned}$$

bu yerda A, B, C, D, E hozircha noma‘lum ko‘effitsiyentlar. Dastlab o‘ng tomonni umumiy maxrajga keltiramiz:

$$\begin{aligned} & \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+6x+13} + \frac{Dx+E}{(x^2+6x+13)^2} = \\ & = \frac{A(x^2+6x+13)^2 + (Bx+C)(x-1)(x^2+6x+13) + (Dx+E)(x-1)}{(x-1)(x^2+6x+13)^2}. \end{aligned}$$

O‘ng tomondagi kasr suratidan (5.24) tenglikning $S(x)$ ko‘phadini tuzamiz:

$$\begin{aligned} S(x) = & Bx^4 + (5B+C)x^3 + (A+7B+5C+D)x^2 + \\ & + (6A-13B+7C-D+E)x + (13A-13C-E) \end{aligned}$$

Bu ko‘phadni $P_4(x) = 3x^4 + 16x^3 + 29x^2 - 31x + 3$ ko‘phadga aynan tenglashtirib (x o‘zgaruvchining bir xil darajalari oldidagi ko‘effitsiyentlarni tenglashtirib),

$$\begin{cases} B = 3, \\ 5B + C = 16, \\ A + 7B + 5C + D = 29, \\ 6A - 13B + 7C - D + E = -31, \\ 13A - 13C - E = 3 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz. Bu sistemani yechib $A = 1, B = 3, C = 1, D = 2, E = -3$ qiymatlarni topamiz, shuning uchun integral osti funksiya

$$\begin{aligned} & \frac{3x^4 + 16x^3 + 29x^2 - 31x + 3}{(x-1)(x^2+6x+13)^2} = \\ & = \frac{1}{x-1} + \frac{3x+1}{x^2+6x+13} + \frac{2x-3}{(x^2+6x+13)^2}, \end{aligned}$$

ko‘rinishda sodda ratsional kasrlarga yoyiladi. Shunday qilib,

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^4+16x^3+29x^2-31x+3}{(x-1)(x^2+6x+13)^2} dx & = \\ & = \int \frac{dx}{x-1} + \int \frac{3x+1}{x^2+6x+13} dx + \int \frac{2x-3}{(x^2+6x+13)^2} dx \end{aligned} \quad (5.25)$$

Birinchi integral osongina topiladi:

$$\int \frac{dx}{x-1} = \ln|x-1| + C.$$

Ikkinchi integralda aynan almashtirishlarni bajarib, so'g'nra integrallaymiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+1}{x^2+6x+13} dx &= \int \frac{\frac{3}{2}(2x+6)-8}{x^2+6x+13} dx = \frac{3}{2} \int \frac{2x+6}{x^2+6x+13} dx - \\ &- 8 \int \frac{dx}{x^2+6x+13} = \frac{3}{2} \int \frac{d(x^2+6x+13)}{x^2+6x+13} - 8 \int \frac{d(x+3)}{(x+3)^2+2^2} = \\ &= \frac{3}{2} \ln|x^2+6x+13| - 4 \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C. \end{aligned}$$

Uchinchi integralda ham xuddi shunday almashtirishlarni bajarib integrallaymiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-3}{(x^2+6x+13)^2} dx &= \int \frac{2x+6-9}{(x^2+6x+13)^2} dx = \int \frac{d(x^2+6x+13)}{(x^2+6x+13)^2} dx - \\ &- 9 \int \frac{dx}{(x^2+6x+13)^2} = -\frac{1}{x^2+6x+13} - 9 \int \frac{dx}{((x+3)^2+4)^2}. \end{aligned} \quad (5.26)$$

So'ngi integralda o'zgaruvchilarni almashtiramiz va aynan almashtirishlarni bajaramiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{((x+3)^2+4)^2} &= \left| \begin{array}{l} t = x+3 \\ dt = dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(t^2+4)^2} = \frac{1}{4} \int \frac{t^2+4-t^2}{(t^2+4)^2} dt = \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{dt}{t^2+4} - \frac{1}{4} \int \frac{t^2}{(t^2+4)^2} dt = \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \int \frac{t^2}{(t^2+4)^2} dt \end{aligned} \quad (5.27)$$

So'ngi integralni bo'laklab integrallaymiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{t^2}{(t^2+4)^2} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{t2tdt}{(t^2+4)^2} = \left| \begin{array}{l} u = t, \\ dv = \frac{2tdt}{(t^2+4)^2}, v = -\frac{1}{t^2+4} \end{array} \right| = \\ &= -\frac{t}{2(t^2+4)} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t^2+4} = -\frac{t}{2(t^2+4)} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C. \end{aligned}$$

Topilgan integrallarni (5.27) tenglikga qo'yamiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{((x+3)^2+4)^2} &= \frac{1}{8} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \left(-\frac{t}{2(t^2+4)} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C \right) = \\ &= \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + \frac{t}{8(t^2+4)} + C. \end{aligned}$$

Bu yerda dastlabki x o'zgaruvchiga qaytamiz:

$$\int \frac{dx}{((x+3)^2+4)^2} = \frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + \frac{x+3}{8(x^2+6x+13)} + C$$

va bu integralni (5.26) tenglikga qo'yib uni ixchamlasak (5.25) tenglikdagi uchinchi integralni topgan bo'lamiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x-3}{(x^2+6x+13)^2} dx &= -\frac{1}{(x^2+6x+13)^2} - \\ &-9 \left(\frac{1}{16} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + \frac{x+3}{8(x^2+6x+13)} \right) + C = \\ &= -\frac{9x+35}{8(x^2+6x+13)} - \frac{9}{16} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C. \end{aligned}$$

Shunday qilib qidirilayotgan integral

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^4+16x^3+29x^2-31x+3}{(x-1)(x^2+6x+13)^2} dx &= \ln|x-1| + \frac{3}{2} \ln|x^2+6x+13| - \\ &-4 \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} - \frac{9x+35}{8(x^2+6x+13)} - \frac{9}{16} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} + C = \\ &= \ln|x-1| + \frac{3}{2} \ln|x^2+6x+13| - \frac{73}{16} \operatorname{arctg} \frac{x+3}{2} - \frac{9x+35}{8(x^2+6x+13)} + C \end{aligned}$$

logarifmik, arctangens va ratsional kasr funksiyaning algebraik yig'indisidan iborat bo'lar ekan. ◀

5.5. Trigonometrik funksiyalarni integrallash

Sinus va kosinuslarning ko'paytmasini integrallash. m va n butun nomanfiy bo'lganda

$$\int \sin^m x \cos^n x dx$$

ko'rinishdagi integralni qaraymiz.

Dastlab darajalardan birortasi toq son deb faraz qilamiz. Masalan, $n = 2k + 1$, ya'ni integral

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx$$

ko'rinishda bo'ladi. Bu holda $t = \sin x$ deb olib, bundan $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$ va $dt = \cos x dx$ tengliklarni hosil qilamiz. Shuning uchun qaralayotgan integral

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^{2k+1} x dx &= \int \sin^m x \cos^{2k} x \cos x dx = \\ &= \int t^m (1-t^2)^k dt \end{aligned}$$

ko'phadning integraliga aylandi va uning elementar funksiyalar orqali ifodalanilishi ravshan. Demak dastlabki integral ham elementar boshlang'ichga ega bo'ladi.

Agar ikkala daraja ham juft, masalan, $m = 2k$ va $n = 2l$ bo'lsa, integral ostidagi ifodaning darajasini ikki baravarga pasaytirish mumkin. Haqiqatdan ham,

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \quad (5.28)$$

tengliklardan, berilgan integralni

$$\int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right)^k \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^l dx$$

ko‘rinishda yozish mumkin bo‘ladi. Endi qavslarni ochib, kosinus darajalarining integrallarini hosil qilamiz. Darajalari toq bo‘lgan hadlar yuqorida keltirilgan usul bilan integrallanadi. Juft darajali hadlarda darajalarni yana ikki marta pasaytirish mumkin va hokazo. Bu jarayonni davom ettirib, oxirida integral elementar funksiyalar orqali ifodalanadi.

Shunday qilib, sinus va kosinus ko‘paytmalarining integrali elementar funksiyalar orqali ifodalanar ekan.

5.26-Misol. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$ integralni topamiz.

► $t = \cos x$ va $dt = -\sin x dx$ deb yangi t o‘zgaruvchini kiritamiz.

U holda

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \cos^4 x dx &= \int \sin^2 x \cos^4 x \sin x dx = \\ &= \int (1 - \cos^2 x) \cos^4 x \sin x dx = - \int (1 - t^2) t^4 dt = - \int t^4 dt + \\ &+ \int t^6 dt = - \frac{1}{5} t^5 + \frac{1}{7} t^7 + C = - \frac{1}{5} \cos^5 x + \frac{1}{7} \cos^7 x + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

5.27-Misol. $\int \sin^6 x \cos^4 x dx$ integralni topamiz.

► (5.28) tengliklardan bu integralni

$$\begin{aligned} \int \sin^6 x \cos^4 x dx &= \int \left(\frac{1-\cos 2x}{2} \right)^3 \left(\frac{1+\cos 2x}{2} \right)^2 dx = \frac{1}{32} \int (1 - \\ &- 3 \cos 2x + 3 \cos^2 2x + \cos^3 2x)(1 + 2 \cos 2x + \cos^2 2x) dx = \\ &= \frac{1}{32} \int (1 - \cos 2x - 2 \cos^2 2x + 4 \cos^3 2x + 5 \cos^4 2x + \\ &+ \cos^5 2x) dx \end{aligned} \quad (5.29)$$

ko‘rinishda yozib olamiz. Har bir hadning integralini alohida topamiz:

$$\int (1 - \cos 2x) dx = x - \frac{1}{2} \sin 2x + C;$$

$$2 \int \cos^2 2x dx = 2 \int \frac{1+\cos 4x}{2} dx = x + \frac{1}{4} \sin 4x + C;$$

$$\begin{aligned} 4 \int \cos^3 2x dx &= 2 \int (1 - \sin^2 2x) 2 \cos 2x dx = \left| \begin{array}{l} t = \sin 2x \\ dt = 2 \cos 2x dx \end{array} \right| = \\ &= 2 \int (1 - t^2) dt = 2t - \frac{2}{3} t^3 + C = 2 \sin 2x - \frac{2}{3} \sin^3 2x + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 5 \int \cos^4 2x dx &= 5 \int \left(\frac{1+\cos 4x}{2} \right)^2 dx = \frac{5}{4} \int (1 + 2 \cos 4x + \cos^2 4x) dx = \\ &= \frac{5}{4} \int \left(1 + 2 \cos 4x + \frac{1+\cos 8x}{2} \right) dx = \frac{5}{8} \int (3 + 4 \cos 4x + \cos 8x) dx = \\ &= \frac{5}{8} \left(3x + \sin 4x + \frac{1}{8} \sin 8x \right) + C; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int \cos^5 2x \, dx &= \frac{1}{2} \int (1 - \sin^2 2x)^2 2 \cos 2x \, dx = \left| \begin{matrix} t = \sin 2x \\ dt = 2 \cos 2x \, dx \end{matrix} \right| = \\ &= \frac{1}{2} \int (1 - t^2)^2 dt = \frac{1}{2} \int (1 - 2t^2 + t^4) dt = \frac{1}{2} \left(t - \frac{2}{3} t^3 + \frac{1}{5} t^5 \right) + C = \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin 2x - \frac{2}{3} \sin^3 2x + \frac{1}{5} \sin^5 2x \right) + C.\end{aligned}$$

Topilgan integrallarni (5.29) tenglikga qo'yib, ixchamlab berilgan integralni

$$\int \sin^6 x \cos^4 x \, dx = \frac{1}{32} \left(\frac{15}{8} x + 2 \sin 2x + \frac{1}{2} \sin 4x + \frac{5}{64} \sin 8x - \sin^3 2x + \frac{1}{10} \sin^5 2x \right) + C \text{ topamiz. } \blacktriangleleft$$

Turli argumentli sinus va kosinuslar ko'paytmasini integrallash.

Bunday funksiyalarni integrallashda

$$\sin \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta)x + \sin(\alpha - \beta)x);$$

$$\sin \alpha x \sin \beta x = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta)x - \cos(\alpha + \beta)x);$$

$$\cos \alpha x \cos \beta x = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta)x + \cos(\alpha - \beta)x)$$

formulalardan foydalanish maqsadga muvofiq bo'ladi.

5.28-Misol. $\int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} \, dx$ integralni toping.

► Integrallashtirishdan oldin integral ostidagi funksiyani

$$\begin{aligned}\sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} &= \frac{1}{2} \left(\cos \frac{x}{2} - \cos \frac{3x}{2} \right) \sin \frac{x}{3} = \\ &= \frac{1}{4} \left(-\sin \frac{x}{6} + \sin \frac{5x}{6} + \sin \frac{7x}{6} - \sin \frac{11x}{6} \right)\end{aligned}$$

ko'rinishga keltiramiz. O'ng tomonni integrallab,

$$\int \sin x \sin \frac{x}{2} \sin \frac{x}{3} \, dx = \frac{3}{2} \cos \frac{x}{6} - \frac{3}{10} \cos \frac{5x}{6} - \frac{3}{14} \cos \frac{7x}{6} + \frac{3}{22} \cos \frac{11x}{6} + C$$

natijani hosil qilamiz. ◀

Universal trigonometrik almashtirish. O'zgaruvchilari $\sin x$ va $\cos x$ bo'lgan ratsional funksiyani $R(\sin x, \cos x)$ orqali belgilaymiz.

$\int R(\sin x, \cos x) \, dx$ ko'rinishdagi integralni topish *universal trigonometrik* almashtirish deb ataluvchi $t = \operatorname{tg}(x/2)$ almashtirish yordamida ratsional funksiyani integrallashga keltiriladi.

$$\text{Haqiqatdan ham, } \sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$x = 2 \operatorname{arctg} t, \, dx = \frac{2}{1+t^2} dt. \text{ Shuning uchun}$$

$$\int R(\sin x, \cos x) \, dx = \int R \left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2} \right) \frac{2}{1+t^2} dt = \int R^*(t) dt,$$

bu yerda $R^*(t)$ –funksiya t o‘zgaruvchining ratsional funksiyasi.

5.29-misol. $\int \frac{dx}{\sin x}$ integralni toping.

► $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ universal trigonometrik almashtirishdan foydalanamiz:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{x}{2}}{\frac{1+t^2}{2t}} dt = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C. \blacktriangleleft$$

Universal trigonometrik almashtirish ko‘p hisob-kitobni bajarishni talab etadi, shuning uchun $\int R(\sin x, \cos x) dx$ integral soddaroq almashtirish bilan topiladigan bir nechta xususiy hollarni qaraymiz.

$R(\sin x, \cos x)$ funksiyada $\sin x$ va $\cos x$ argumentlar juft darajalarda bo‘lsa, $\operatorname{tg} x = t$ almashtirish olish qulayroq. U holda $x = \operatorname{arctg} t$ va

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}, \sin^2 x = \frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2}, \cos^2 x = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1+t^2}$$

va demak

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R\left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{1}{1+t^2}\right) \frac{dt}{1+t^2} = \int R^*(t) dt$$

bu yerda $R^*(t)$ –funksiya t argumentning ratsional funksiyasi.

5.30-Misol. $\int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x}$ integralni toping.

► $\frac{1}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x}$ integral osti funksiya $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalarga nisbatan juft va shuning uchun $\operatorname{tg} x = t$ almashtirish olamiz.

U holda $\sin x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$.

Natijada qidirilayotgan integralni

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sin^2 x + 2 \sin x \cos x - \cos^2 x} &= \int \frac{\frac{dt}{1+t^2}}{\frac{t^2}{1+t^2} + 2 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{1}{1+t^2}} = \\ &= \int \frac{dt}{t^2 + 2t - 1} = \int \frac{dt}{(t+1)^2 - (\sqrt{2})^2} = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{t+1-\sqrt{2}}{t+1+\sqrt{2}} \right| + C = \frac{1}{2\sqrt{2}} \ln \left| \frac{\operatorname{tg} x + 1 - \sqrt{2}}{\operatorname{tg} x + 1 + \sqrt{2}} \right| + C \end{aligned}$$

ko‘rinishda topamiz. ◀

$\int R(\sin x) \cos x dx$ ko‘rinishdagi integrallar. Bu ko‘rinishdagi integralda $\sin x = t, dt = \cos x dx$ almashtirish olinsa, integral $\int R(t) dt$ ko‘rinishga keladi.

5.31-Misol. $\int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x} dx$ integralni toping.

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \int \frac{\cos x}{4+\sin^2 x} dx &= \left| \begin{array}{l} t = \sin x \\ dt = \cos x dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{4+t^2} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{t}{2} + C = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{\sin x}{2} \right) + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

$\int R(\cos x) \sin x dx$ ko‘rinishdagi integrallar. Bu ko‘rinishdagi integralda $\cos x = t, dt = -\sin x dx$ almashtirish olinsa, integral $\int R(t) dt$ ko‘rinishga keladi.

5.32-Misol. $\int \frac{\sin x}{2+\cos x} dx$ integralni toping.

$$\blacktriangleright \int \frac{\sin x}{2+\cos x} dx = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = -\sin x dx \end{array} \right| = - \int \frac{dt}{2+t} = -\ln|2+t| + C = -\ln|2+\cos x| + C. \blacktriangleleft$$

$\int R(\operatorname{tg} x) dx$ ko‘rinishdagi integrallar. Bu ko‘rinishdagi integralda $\operatorname{tg} x = t, x = \operatorname{arctg} t, dx = \frac{dt}{1+t^2}$ almashtirish olinsa, integral $\int R(t) \frac{dt}{1+t^2}$ ratsional funksiyaning integrali ko‘rinishini oladi.

5.33-Misol. $\int \frac{85}{\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 10} dx$ integralni toping.

$\blacktriangleright$ Integral ostidagi kasrda faqat $\operatorname{tg} x$ qatnashayapti, shuning uchun $\operatorname{tg} x = t$ deb yangi o‘zgaruvchi kiritamiz. U holda $x = \operatorname{arctg} t$ va $dx = dt/(1+t^2)$ bo‘ladi. Bularni berilgan integralga qo‘yamiz:

$$\int \frac{85}{\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 10} dx = \int \frac{85}{t^2 + 2t + 10} \cdot \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{85dt}{(t^2 + 2t + 10)(t^2 + 1)}.$$

So‘ngi integraldagi kasrni sodda kasrlarga yoyamiz:

$$\begin{aligned} \frac{85}{(t^2 + 2t + 10)(t^2 + 1)} &= \frac{At + B}{t^2 + 2t + 10} + \frac{Ct + D}{t^2 + 1} = \\ &= \frac{(At + B)(t^2 + 1) + (Ct + D)(t^2 + 2t + 10)}{(t^2 + 2t + 10)(t^2 + 1)} = \\ &= \frac{At^3 + At + Bt^2 + B + Ct^3 + 2Ct^2 + 10Ct + Dt^2 + 2Dt + 10D}{(t^2 + 2t + 10)(t^2 + 1)}. \end{aligned}$$

O‘ng tomondagi kasrning suratini 85 ga tenglashtirib, A, B, C va D koeffitsiyentlarga nisbatan

$$\begin{cases} A + C = 0, \\ B + 2C + D = 0, \\ A + 10C + 2D = 0, \\ B + 10D = 85 \end{cases}$$

sistemani hosil qilamiz va uni yechib: $A = 2, B = -5, C = -2, D = 9$ qiymatlarni hosil qilamiz. Shuning uchun

$$\int \frac{85dt}{(t^2+2t+10)(t^2+1)} = \int \frac{2t-5}{t^2+2t+10} dt + \int \frac{-2t+9}{t^2+1} dt \quad (5.30)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. O'ng tomondai har bir integralni alohida topamiz:

$$\int \frac{2t-5}{t^2+2t+10} dt = \int \frac{2t+2-7}{t^2+2t+10} dt = \int \frac{d(t^2+2t+10)}{t^2+2t+10} - 7 \int \frac{d(t+1)}{(t+1)^2+3^2} = \ln|t^2+2t+10| - \frac{7}{3} \operatorname{arctg} \frac{t+1}{3} + C,$$

$$\int \frac{-2t+9}{t^2+1} dt = - \int \frac{d(t^2+1)}{t^2+1} + 9 \int \frac{dt}{t^2+1} = -\ln|t^2+1| + 9 \operatorname{arctg} t + C.$$

Topilgan integrallarni (5.30) tenglikga qo'yamiz:

$$\int \frac{85dt}{(t^2+2t+10)(t^2+1)} = \ln|t^2+2t+10| - \frac{7}{3} \operatorname{arctg} \frac{t+1}{3} - \ln|t^2+1| + 9 \operatorname{arctg} t + C.$$

Dastlabki x o'zgaruvchiga qaytib, berilgan integralni topamiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{85}{\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 10} dx &= \ln|\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 10| - \frac{7}{3} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x + 1}{3} - \\ &\quad - \ln|\operatorname{tg}^2 x + 1| + 9 \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) + C = \\ &= \ln \left| \frac{\operatorname{tg}^2 x + 2 \operatorname{tg} x + 10}{\operatorname{tg}^2 x + 1} \right| - \frac{7}{3} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg} x + 1}{3} + 9x + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

5.6. Irratsional ifodalarni integrallash

Tarkibidagi erkin o'zgaruvchi x yoki darajasi $n \in \mathbb{N}$ bo'lgan $P_n(x)$ ko'phad radikal (lotincha *radix*—ildiz so'zidan olingan) belgisi ostida, ya'ni kasr darajaga ko'tarilgan ifodalarga *irratsional* ifoda deb ataladi. Shunday qilib, irratsional ifodalarning qiymatini hisoblashda $R(x)$ ratsional ifodalardan farqli ravishda, arifmetik amallardan boshqa yana ildiz chiqarish amali ham bajarilar ekan.

Biz 5.4 da ratsional funksiyalarni integrallash qoidalarini qarab chiqdik. x o'zgaruvchiga nisbatan irratsional bo'lgan ayrim ifodalarni o'zgaruvchilarni almashtirish hisobiga yangi o'zgaruvchining ratsional ifodasiga keltirish mumkin bo'ladi va ularga integrallashning ma'lum qoidalarini qo'llaniladi. Biz quyida bunday alamshtirishlarni qarab chiqamiz.

Radikallarning ratsional funksiyalari. Agar $R[f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)]$ funksiyada $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$ funksiyalardan hech bo'lmaganda birortasi irratsional funksiya, ya'ni o'zgaruvchi radikal belgisi

ostida bo'lsa, berilgan funksiya ana shu radikalning ratsional funksiyasi bo'ladi.

5.34-Misol. $f(x) = \frac{x^3 - \sqrt{x^2 + 2x + 5}}{x^2 + 1 + \sqrt{x^2 + 2x + 5}}$ funksiya x va $\sqrt{x^2 + 2x + 5}$

radikalning ratsional funksiyasi bo'ladi: $f(x) = R(x, \sqrt{x^2 + 2x + 5})$. ◀

Tarkibida kasriy-chiziqli funksiyaning radikallari mavjud funksiyalarni integrallash. Ma'lumki, agar $\Delta = ae - bc \neq 0$ bo'lsa $(ax + b)/(cx + e)$ nisbat x o'zgaruvchiga bog'liq bo'ladi. Biz ana shu shart bajarilgan $(ax + b)/(cx + e)$ nisbatning butun darajalari radikallar ostida bo'lgan

$$R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_i}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_l}\right) \quad (5.31)$$

funksiyani integrallash masalasini qaraymiz, bu yerda $r_i = k_i/m_i$, $k_i \in \mathbb{Z}$, $m_i \in \mathbb{N}$, ya'ni r_i ($i = \overline{1, l}$) ratsional son. $m \in \mathbb{N}$ ana shu r_i ratsional sonlarning umumiy maxraji, ya'ni $r_i = p_i/m$, $p_i \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{N}$ bo'lsin.

$$\frac{ax+b}{cx+e} = t^m$$

tenglik bilan yangi t o'zgaruvchi kiritamiz. U holda

$$x(t) = \frac{et^m - b}{a - ct^m}, x'(t) = \frac{mt^{m-1}\Delta}{(a - ct^m)^2}, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_i} = t^{mr_i} = t^{p_i}, p_i \in \mathbb{Z}$$

t o'zgaruvchining ratsional funksiyalari bo'ladi va natijada

$$\begin{aligned} \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_1}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_i}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+e}\right)^{r_l}\right) dx = \\ = \int R\left(\frac{et^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \dots, t^{p_i}, \dots, t^{p_l}\right) \frac{mt^{m-1}\Delta}{(a - ct^m)^2} dt = \int R^*(t) dt \end{aligned} \quad (5.32)$$

bu yerda

$$R^*(t) = R\left(\frac{et^m - b}{a - ct^m}, t^{p_1}, \dots, t^{p_i}, \dots, t^{p_l}\right) \frac{mt^{m-1}\Delta}{(a - ct^m)^2}$$

integral osti funksiya t o'zgaruvchining ratsional funksiyasi. Shunday qilib, (5.31) funksiyani integrallash ratsional kasrlarni integrallashga keltirilgan ekan, so'ngra

$$t = \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+e}}$$

tenglik orqali dastlabki x o'zgaruvchiga qaytiladi.

(5.32) tenglikda $c = 0$ va $e = 1$ ($a \neq 0$) bo'lganda hosil bo'ladigan

$$\int R(x, (ax+b)^{r_1}, \dots, (ax+b)^{r_i}, \dots, (ax+b)^{r_l}) dx \quad (5.33)$$

integral ham va (5.33) integralda $a = 1$ va $b = 0$ bo'lganda hosil bo'ladigan

$$\int R(x, x^{r_1}, \dots, x^{r_i}, \dots, x^{r_l}) dx \quad (5.34)$$

integral ham xuddi shu yo'l bilan topiladi.

5.35-Misol. $\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x+9})\sqrt{x}}$ integralni toping.

► 2 va 3 sonlarning eng kichik umumiy karralisi 6 bo'lganligi uchun $x = t^6$ deb o'zgaruvchini alamshtiramiz. U holda $dx = 6t^5 dt$ va

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x+9})\sqrt{x}} &= \int \frac{6t^5 dt}{(t^2+9)t^3} = 6 \int \frac{t^2}{t^2+9} dt = 6 \int \frac{t^2+9-9}{t^2+9} dt = \\ &= 6 \int dt - 54 \int \frac{dt}{t^2+9} = 6t - 18 \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = 6\sqrt[6]{x} - 18 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[6]{x}}{3} + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

5.36-Misol. $\int \frac{\sqrt[5]{x-7}}{3\sqrt{x-7} + \sqrt[5]{(x-7)^6}} dx$ integralni toping.

► 2 va 5 sonlarning eng kichik umumiy karralisi 10 bo'lganligi uchun $x - 7 = t^{10}$ deb o'zgaruvchini alamshtiramiz. U holda $dx = 10t^9 dt$ va

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[5]{x-7}}{3\sqrt{x-7} + \sqrt[5]{(x-7)^6}} dx &= \int \frac{t^2 10t^9 dt}{3t^5 + t^{12}} = \int \frac{10t^6 dt}{t^7 + 3} = \frac{10}{7} \int \frac{d(t^7 + 3)}{t^7 + 3} = \\ &= \frac{10}{7} \ln|t^7 + 3| + C = \frac{10}{7} \ln|(x - 7)^{7/10} + 3| + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

5.37-Misol. $\int \frac{dx}{2\sqrt{x+5} + \sqrt[4]{(x+5)^3}}$ integralni toping.

► 2 va 4 sonlarning eng kichik umumiy karralisi 4 bo'lganligi uchun $x + 5 = t^4$ deb o'zgaruvchini alamshtiramiz. U holda $dx = 4t^3 dt$ va

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{2\sqrt{x+5} + \sqrt[4]{(x+5)^3}} &= \int \frac{4t^3 dt}{2t^2 + t^3} = 4 \int \frac{t}{t+2} dt = 4 \int \left(1 - \frac{2}{t+2}\right) dt = \\ &= 4t - 8 \ln|t + 2| + C = 4\sqrt[4]{x+5} - 8 \ln|\sqrt[4]{x+5} + 2| + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

$\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ifodaning ratsional funksiyasini trigonometrik almashtirishlar yordamida integrallash. Ushbu

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b^2 \neq 4ac,$$

integralni qaraymiz, bu yerda integral osti funksiya o'z argumentlarining ratsional funksiyasidan iborat. Bunday integrallarni elementar funksiyalar

orqali ifodalash mumkinligini ko'rsatish uchun dastlab ildiz ostidagi ifodani to'la kvadratga ajratamiz:

$$ax^2 + bx + c = a \left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) = a \left(\left(x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \right)$$

va $\alpha = b/2a$, $\beta^2 = |(4ac - b^2)/4a^2|$ deb belgilashlar kiritib, ildizdan $|a|$ absolyut qiymatni chiqarsak, ildiz quyidagi to'rtta

$\sqrt{(x + \alpha)^2 + \beta^2}$, $\sqrt{(x + \alpha)^2 - \beta^2}$, $\sqrt{\beta^2 - (x + \alpha)^2}$, $\sqrt{-\beta^2 - (x + \alpha)^2}$ ko'rinishdan birini oladi. Oxirgi holda ildiz, shu bilan birga integral ham mavjud emas.

Agar ildiz $\sqrt{(x + \alpha)^2 + \beta^2}$ ko'rinishda bo'lsa,

$$x + \alpha = \beta \operatorname{tg} t, \quad dx = \frac{\beta}{\cos^2 t} dt \quad (5.35)$$

deb yangi t o'zgaruvchini kiritamiz, u holda bu ildiz

$$\sqrt{(x + \alpha)^2 + \beta^2} = \sqrt{\beta^2 \operatorname{tg}^2 t + \beta^2} = \frac{\beta}{\cos t}$$

ko'rinishga keladi, berilgan integral esa

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R \left(\beta \operatorname{tg} t - \alpha, \frac{\sqrt{|a|\beta}}{\cos t} \right) \frac{\beta}{\cos^2 t} dt$$

trigonometrik ifodalar ratsional funksiyasining integraliga aylanadi.

Agar ildiz $\sqrt{(x + \alpha)^2 - \beta^2}$ ko'rinishda bo'lsa,

$$x + \alpha = \frac{\beta}{\sin t}, \quad dx = -\frac{\beta \cos t}{\sin^2 t} dt \quad (5.36)$$

deb yangi t o'zgaruvchini kiritish, uni

$$\sqrt{(x + \alpha)^2 - \beta^2} = \sqrt{\frac{\beta^2}{\sin^2 t} - \beta^2} = \beta \operatorname{ctg} t$$

shkalga, berilgan integralni esa

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = - \int R \left(\frac{\beta}{\sin t} - \alpha, \sqrt{|a|\beta} \operatorname{ctg} t \right) \frac{\beta \cos t}{\sin^2 t} dt$$

trigonometrik ifodalar ratsional funksiyasining integraliga keltiradi.

Agar idiz $\sqrt{\beta^2 - (x + \alpha)^2}$ ko'rinishda bo'lsa,

$$x + \alpha = \beta \sin t, \quad dx = \beta \cos t dt \quad (5.37)$$

deb yangi t o'zgaruvchini kiritib, uni

$$\sqrt{\beta^2 - (x + \alpha)^2} = \sqrt{\beta^2 - \beta^2 \sin^2 t} = \beta \cos t$$

ko'rinishda yozamiz, mos integralni esa

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx = \int R(\beta \sin t - \alpha, \beta \cos t) \beta \cos t dt$$

sinus va kosinuslar ratsional funksiyasining integrali shakliga keltiramiz.

Shunday qilib, uchala holda ham sinus va kosinuslarga ratsional bog‘liq funksiyalarning integralini hosil qildik. Demak, bu integrallar elementar funksiyalar orqali ifodalanadi.

5.38-Misol. $\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+5}}$ integralni toping.

► Kvadrat uchhadlarni to‘la kvadratlarga ajratamiz:

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+5}} = \int \frac{dx}{((x+1)^2+2)\sqrt{(x+1)^2+4}}.$$

Bu yerda $x + 1 = 2 \operatorname{tg} t$ deb yangi t o‘zgaruvchini kiritamiz. U holda $dx = \frac{2dt}{\cos^2 t}$ bo‘ladi va shuning uchun so‘ngi integral

$$\begin{aligned} \int \frac{2dt}{\cos^2 t(4\operatorname{tg}^2 t+2)\sqrt{4\operatorname{tg}^2 t+4}} &= \frac{1}{2} \int \frac{\cos t dt}{2\sin^2 t + \cos^2 t} = \frac{1}{2} \int \frac{\cos t dt}{\sin^2 t + 1} = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{d(\sin t)}{\sin^2 t + 1} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg}(\sin t) + C \end{aligned}$$

ko‘rinishni oladi. Endi $\sin t$ ifodani x o‘zgaruvchi orqali ifodalaymiz:

$$\sin t = \frac{\operatorname{tg} t}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 t}} = \frac{x+1}{2\sqrt{1+(x+1)^2/4}} = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}}.$$

Shunday qilib,

$$\int \frac{dx}{(x^2+2x+3)\sqrt{x^2+2x+5}} = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+5}} + C. \blacktriangleleft$$

5.39-Misol. $\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{7-6x-x^2}} dx$ integralni toping.

► Kvadrat uchhadni to‘la kvadratga ajratamiz:

$$\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{7-6x-x^2}} dx = \int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{16-(x+3)^2}} dx.$$

Bu yerda $x + 3 = 4 \sin t$ deb o‘zgaruvchilarni almashtirsak, $dx = 4 \cos t dt$ bo‘ladi va so‘ngi integral

$$\begin{aligned} \int \frac{(4\sin t-4)^2 4 \cos t dt}{\sqrt{16-16\sin^2 t}} &= 16 \int (\sin^2 t - 2\sin t + 1) dt = \\ &= 16 \int \left(\frac{1-\cos 2t}{2} - 2\sin t + 1 \right) dt = 16 \left(\frac{3}{2}t - \frac{1}{4}\sin 2t + 2\cos t \right) + C. \end{aligned}$$

ko‘rinishni oladi. $\sin t = (x + 3)/4$ bo‘lganligi uchun, $t = \arcsin(x + 3)/4$ va

$$\cos t = \sqrt{1 - \left(\frac{x+3}{4}\right)^2} = \frac{\sqrt{7-6x-x^2}}{4},$$

$$\sin 2t = 2 \sin t \cos t = \frac{(x+3)\sqrt{7-6x-x^2}}{8}$$

bo'ladi. Demak,

$$\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{7-6x-x^2}} dx = 16 \left(\frac{3}{2} \arcsin \frac{x+3}{4} - \frac{(x+3)\sqrt{7-6x-x^2}}{32} + \frac{\sqrt{7-6x-x^2}}{2} \right) + C$$

va uni ixchamlasak, nihoyat

$$\int \frac{(x-1)^2}{\sqrt{7-6x-x^2}} dx = 24 \arcsin \frac{x+3}{4} + \frac{(13-x)\sqrt{7-6x-x^2}}{2} + C.$$

tenglikni hosil qilamiz. ◀

$\sqrt{ax^2 + bx + c}$ ifodaning ratsional funksiyasini Eyler almashtirishlari yordamida integrallash.

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx, a, b, c \in \mathbb{R}, a \neq 0, b^2 \neq 4ac \quad (5.38)$$

aniqmas integralni Eyler almashtirishlari deb nomlanuvchi o'zgaruvchilarni almashtirish yordamida t o'zgaruvchining ratsional funksiyasidan olinadigan integralga keltirish mumkin.

Eylerning birinchi almashtirishi. Agar (5.38) integralda $a > 0$ bo'lsa,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = \pm x\sqrt{a} + t \quad (5.39)$$

deb olamiz. Aniqlik uchun $\sqrt{a}$ oldida plyus ishorasini olamiz va (5.39) ning ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak,

$$ax^2 + bx + c = ax^2 + 2xt\sqrt{a} + t^2$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglikdan x va dx differensialni t o'zgaruvchi

orqali $x = \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}$ va $dx = 2 \frac{-t^2\sqrt{a} + bt - c\sqrt{a}}{(b - 2t\sqrt{a})^2} dt$ formulalar bilan

ifodalaymiz. Bundan tashqari

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = x\sqrt{a} + t = \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}} \sqrt{a} + t.$$

Shunday qilib, (5.38) dagi integral osti funksiya (5.39) almashtirishdan so'ng t o'zgaruvchining $R^*(t)$ ratsional funksiyasiga aylanar ekan:

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx &= \\ &= 2 \int R\left(\frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}}, \frac{t^2 - c}{b - 2t\sqrt{a}} \sqrt{a} + t\right) 2 \frac{-t^2\sqrt{a} + bt - c\sqrt{a}}{(b - 2t\sqrt{a})^2} dt = \int R^*(t) dt. \end{aligned}$$

Eylerning ikkinchi almashtirishi. Agar (5.35) integralda $c > 0$ bo'lsa,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt \pm \sqrt{c} \quad (5.40)$$

deb olamiz. Aniqlik uchun $\sqrt{c}$ oldida plyus ishorasini olamiz va (5.40) ning ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak,

$$ax^2 + bx + c = x^2t^2 + 2xt\sqrt{c} + c$$

tenglik hosil bo'ladi va undan x va dx differensialni t o'zgaruvchi orqali

$$\text{ifodalaymiz: } x = \frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2} \text{ va } dx = 2 \frac{t^2\sqrt{c}-bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2} dt.$$

Bundan tashqari

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = xt + \sqrt{c} = \frac{2t\sqrt{c} - b}{a - t^2} t + \sqrt{c}.$$

Bu ifodalarni (5.35) ga qo'yib,

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx &= \\ &= 2 \int R\left(\frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2}, \frac{2t\sqrt{c}-b}{a-t^2} t + \sqrt{c}\right) \frac{t^2\sqrt{c}-bt+a\sqrt{c}}{(a-t^2)^2} dt = \int R^*(t) dt \end{aligned}$$

ratsional funksiyaning integralini hosil qildik.

Eylarning uchinchi almashtirishi. Agar $ax^2 + bx + c$ kvadrat uchhad $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ildizlarga ega bo'lsa,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = (x - \alpha)t \quad (5.41)$$

deb olamiz.

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

Ekanligini inobatga olgan holda, (5.41) tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz:

$$a(x - \alpha)(x - \beta) = (x - \alpha)^2 t^2.$$

Bu tenglikning ikkala tomonini $x - \alpha$ ifodaga qisqartirib, so'ngra x va dx differensialni yangi t o'zgaruvchi orqali ifodalaymiz:

$$x = \frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}, \quad dx = 2at \frac{\beta - \alpha}{(a - t^2)^2} dt,$$

hamda,

$$\sqrt{ax^2 + bx + c} = a \frac{\beta - \alpha}{a - t^2} t.$$

Bu ifodalarni (5.38) ga qo'yish integral osti funksiyanini yana t o'zgaruvchining ratsional funksiyasiga olib keladi:

$$\begin{aligned} \int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx &= \\ &= 2a \int R\left(\frac{a\beta - \alpha t^2}{a - t^2}, a \frac{\beta - \alpha}{a - t^2} t\right) \frac{(\beta - \alpha)t}{(a - t^2)^2} dt = \int R^*(t) dt. \end{aligned}$$

5.40-Misol. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-9}}$ integralni toping.

► $a = 1 > 0$ bo'lganligi uchun Eylerning birinchi almashtirishidan foydalanamiz: $\sqrt{x^2 + 2x - 9} = x + t$. Bu tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak, $x^2 + 2x - 9 = x^2 + 2xt + t^2$ tenglik hosil bo'ladi. O'xshash hadlarni qisqartirib, tenglikni $2x(1 - t) = t^2 + 9$ ko'rinishda yozamiz va bundan

$$x = \frac{t^2 + 9}{2(1 - t)}, \quad dx = \frac{-t^2 + 2t + 9}{2(1 - t)^2} dt$$

tengliklarga ega bo'lamiz.

$$\sqrt{x^2 + 2x - 9} = x + t = \frac{t^2 + 9}{2(1 - t)} + t = \frac{-t^2 + 2t + 9}{2(1 - t)}$$

ekanligini inobatga olgan holda, x va dx differensialni dastlabki integralga qo'yamiz va natijada

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+2x-9}} &= \int \frac{4(-t^2+2t+9)(1-t)^2}{2(1-t)^2(-t^2+2t+9)(t^2+9)} dt = \\ &= 2 \int \frac{dt}{t^2+9} = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{t}{3} + C = \frac{2}{3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{x^2+2x-9}-x}{3} + C \end{aligned}$$

qidirilgan integralni topamiz. ◀

5.41-Misol. $\int \frac{dx}{x\sqrt{4+4x-x^2}}$ integralni toping.

► $c = 4 > 0$ bo'lganligi uchun Eylerning ikkinchi almashtirishidan foydalanamiz: $\sqrt{4 + 4x - x^2} = xt - 2$. Bu tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak $4 + 4x - x^2 = x^2t^2 - 4xt + 4$ yoki undan $x^2(t^2 + 1) = 4x(1 + t)$ tenglik hosil bo'ladi. O'z navbatida so'ngi tenglikdan x ni yangi t o'zgaruvchi orqali ifodalaymiz: $x = \frac{4(1+t)}{t^2+1}$. U holda $dx =$

$$\frac{-4(t^2+2t-1)}{(t^2+1)^2} dt. \text{ Bundan tashqari } \sqrt{4 + 4x - x^2} = xt - 2 = t \frac{4(1+t)}{t^2+1} -$$

$2 = \frac{2(t^2+2t-1)}{t^2+1}$ ekanligini inobatga olgan holda x va dx uchun tengliklarni dastlabki integralga qoyamiz:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4+4x-x^2}} = \int \frac{-4(t^2+2t-1)(t^2+1)^2}{8(t+1)(t^2+2t-1)(t^2+1)^2} dt = -\frac{1}{2} \int \frac{dt}{1+t} =$$

$$= -\frac{1}{2} \ln|t+1| + C = -\frac{1}{2} \ln \left| \frac{\sqrt{4+4x-x^2+2}}{x} + 1 \right| + C$$

va natijada qidirilgan integralni topdik. ◀ x

5.42-Misol. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-6}}$ integralni toping.

► Ildiz ostidagi kvadrat uchhadning ildizlari $x_1 = -2$ va $x_2 = 3$, ya'ni $x^2 - x - 6 = (x+2)(x-3)$ bo'lganligi uchun Eylerning uchinchi almashtirishidan foydalanamiz. $\sqrt{x^2 - x - 6} = t(x+2)$ tenglik orqali yangi t o'zgaruvchini kiritamiz. Tenglikning ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz: $(x+2)(x-3) = t^2(x+2)^2$ va bu yerda dastlab tenglikni $x+2$ ifodaga qisqartirib, so'ngra x ni t o'zgaruvchi orqali ifodalaymiz:

$$x = \frac{3+2t^2}{1-t^2}.$$

U holda $dx = \frac{10t}{(1-t^2)^2} dt$ va $\sqrt{x^2 - x - 6} = t(x+2) = \frac{5t}{1-t^2}$.

Topilganlarni berilgan integralga qo'yib, yangi t o'zgaruvchi bo'yicha integrallaymiz:

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-x-6}} &= \int \frac{10t(1-t^2)(1-t^2)}{(3+2t^2)(1-t^2)^2 5t} dt = \int \frac{2}{3+2t^2} dt = \int \frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}} t + C = \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\sqrt{x^2-x-6}}{x+2} + C = \\ &= \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2(x-3)}{3(x+2)}} + C \end{aligned}$$

va qidirilgan integralni topamiz. ◀

Binom differensialining integrali. Aniqmas integralning 1-xossasiga ko'ra integral osti ifoda integral osti funksiya boshlang'ichining differensialidan iborat. Agar integral osti funksiya ratsional bo'lsa, integral osti ifoda ba'zan ratsional differensial, agar irratsional funksiya bo'lsa, irratsional differensial deb ataladi.

$x^q(a+bx^r)^p dx$ ($a \neq 0, b \neq 0$) ifodani *binom differensial* deb ataymiz. Bu yerda biz q, r va p —ratsional, a va b —haqiqiy sonlar bo'lgan hollarni qaraymiz. q, r va p darajalarga nisbatan uchta holda $\int x^q(a+bx^r)^p dx$ integral elementar funksiyalar orqali ifodalanadi:

1) Agar p – butun son bo‘lsa, $x = t^s$ deb almashtirish natijasida binom differensialining integrali ratsional kasrning integraliga aylanadi, bu yerda s – butun son q, r kasrlar maxrajlarining eng kichik umumiy karralisi;

2) Agar $\frac{q+1}{r}$ nisbat butun son bo‘lsa, $a + bx^r = t^s$ deb almashtirish olinsa, berilgan integral ratsional kasrning integraliga aylanadi, bu yerda s – butun son p kasrning maxraji;

3) Agar $\frac{q+1}{r} + p$ butun son bo‘lsa, $\frac{a}{x^r} + b = t^s$ almashtirish olinsa, bu holda ham berilgan integral ratsional kasrning integraliga aylanadi, bu yerda s – butun son p kasrning maxraji;

5.43-Misol. $\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}}$ integralni toping.

► Integralning shaklini almashtiramiz:

$$\int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}} = \int x^{-4} (1+x^2)^{-1/2} dx.$$

Bu yerda $q = -4, r = 2, p = -1/2, a = 1, b = 1$.

$\frac{q+1}{r} + p = \frac{-4+1}{2} - \frac{1}{2} = -2$ – butun son bo‘lganligi uchun (3-hol) $\frac{a}{x^r} + b = t^s$ yoki $\frac{1}{x^2} + 1 = t^2$ deb almashtirish olamiz. Shuning uchun

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^4 \sqrt{1+x^2}} &= \left| \begin{array}{l} \frac{1}{x^2} + 1 = t^2, \quad t = \sqrt{1+x^2}/x, \\ x = (t^2 - 1)^{-1/2}, dx = -(t^2 - 1)^{-3/2} t dt \end{array} \right| = \\ &= \int \frac{-(t^2-1)^{-3/2} t dt}{(t^2-1)^{-2} \sqrt{1+(t^2-1)^{-1}}} = - \int \frac{(t^2-1)^2 t dt}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}} \sqrt{1+\frac{1}{t^2-1}}} = \\ &= - \int \frac{(t^2-1)^2 t dt}{(t^2-1)^{\frac{3}{2}} \frac{t}{\sqrt{t^2-1}}} = - \int (t^2 - 1) dt = t - \frac{1}{3} t^3 + C = \\ &= \frac{\sqrt{1+x^2}}{x} - \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \right)^3 + C = \frac{(2x^2-1)\sqrt{1+x^2}}{3x^3} + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

5.44-Misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}}$ integralni toping.

► Integralning shaklini almashtiramiz:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}} = \int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{10} dx.$$

Bu yerda $q = -1/2$, $r = 1/4$, $p = -10$ (butun son), $a = 1$, $b = 1$ bo'lganligi uchun $x = t^s$ ko'rinishdagi almastirishni, ya'ni $x = t^4$ deb olamiz. U holda

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x}(\sqrt[4]{x}+1)^{10}} &= \left| \begin{array}{l} x = t^4, t = x^{1/4}, \\ dx = 4t^3 dt \end{array} \right| = \int \frac{4t^3 dt}{t^2(t+1)^{10}} = 4 \int \frac{t}{(t+1)^{10}} dt = \\ &= 4 \int \frac{t+1-1}{(t+1)^{10}} dt = 4 \int \frac{dt}{(t+1)^9} - 4 \int \frac{dt}{(t+1)^{10}} = \\ &= 4 \cdot \left(-\frac{1}{8(t+1)^8} \right) - 4 \cdot \left(-\frac{1}{9(t+1)^9} \right) + C = \frac{4}{9(t+1)^9} - \frac{1}{2(t+1)^8} + C = \\ &= \frac{4}{9(\sqrt[4]{x}+1)^9} - \frac{1}{2(\sqrt[4]{x}+1)^8} + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

5.45-Misol. $\int \frac{\sqrt[3]{4\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}} dx$ integralni toping.

► Integralning shaklini almashtiramiz:

$$\int \frac{\sqrt[3]{4\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3} dx$$

Shunday qilib, $q = -\frac{1}{2}$, $r = \frac{1}{4}$, $p = \frac{1}{3}$, $\frac{q+1}{r} = 2$. Shuning uchun

$$\sqrt[4]{x} + 1 = t^3, x = (t^3 - 1)^4, dx = 4(t^3 - 1)^3 3t^2 dt, t = \sqrt[3]{\sqrt[4]{x} + 1}$$

deb almashtirish olamiz. U holda

$$\begin{aligned} \int \frac{\sqrt[3]{4\sqrt{x}+1}}{\sqrt{x}} dx &= \int \frac{t}{(t^3-1)^2} \cdot 12t^2 (t^3 - 1)^3 dt = 12 \int (t^6 - t^3) dt = \\ &= 12 \cdot \frac{t^7}{7} - 12 \cdot \frac{t^4}{4} + C = \frac{12}{7} (\sqrt[4]{x} + 1)^{7/3} - 3(\sqrt[4]{x} + 1)^{4/3} + C. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Mazkur bobning oxirida muhim bir mulohazani ta'kidlab o'tish kerak: aniqmas integral aslini olganda yordamchi qurol bo'lib, u ilm-fanning ko'p jabhalarida tadbiqga ega bo'lgan aniq integralni hisoblash uchungina kerak bo'ladi. Aniq integral bilan keyingi bobda tanishamiz.

Nazorat savollari

1. Boshlang'ich funksiya tushunchasi.
2. Aniqmas integral tushunchasi.
3. Aniqmas integralning xossalari.
4. Aniqmas integralda o'zgaruvchilarni almashtirish.
5. Aniqmas integralda bo'laklab integrallash.
6. Aniqmas integralda bo'laklab integrallash qaysi formulaga asoslanadi?
5. Qanday funksiyalar ratsional funksiya deb ataladi?
8. Sodda ratsional kasrlarning turlarini sanab bering.
9. Qanday kasrlar to'g'ri ratsional kasr deyiladi?
10. Tog'ri ratsional kasrlarni sodda ratsional kasrlarga yoyish haqidagi teorema.
11. Qanday almashtirishga universal trigonometrik almashtirish deyiladi?
12. Eyler almashtirishlari deb qanday almashtirishlarga aytiladi?

Mashqlar.

Asosiy integrallar jadvalidan foydalanib quyidagi integrallarni toping:

1. $\int \sqrt{ax} dx$.
2. $\int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}}$.
3. $\int \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{x})^2}{\sqrt{ax}} dx$.
4. $\int (2x + 3 \cos x) dx$.
5. $\int 2^x e^x dx$.
6. $\int \operatorname{tg}^2 x dx$.
5. $\int \frac{2-\sin x}{\sin^2 x} dx$.
8. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}}$.

Quyidagi integrallarni o'zgaruvchilarni almashtirish usuli bilan toping:

9. $\int \frac{x dx}{3+5x^2}$.
10. $\int \frac{\operatorname{arctg} 3x}{1+9x^2} dx$.
11. $\int \frac{(2+\ln x)^4}{x} dx$.
12. $\int \frac{x dx}{\sqrt{2+x^2}}$.
13. $\int \frac{x^3 dx}{5+4x^4}$.
14. $\int \frac{x^3 dx}{1+4x^8}$.
15. $\int \frac{dx}{x^2+10x+34}$.
16. $\int \frac{dx}{9+5x^2}$.

Quyidagi integrallarni bo'laklab integrallash usuli bilan integrallang:

15. $\int \arccos x dx$.
18. $\int x \cos x dx$.
19. $\int x \ln x dx$.
20. $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}} dx$.
21. $\int e^x \sin x dx$.
22. $\int \operatorname{arctg} x dx$.
23. $\int \ln x dx$.
24. $\int e^{3x} \cos 5x dx$.

Quyidagi integrallarni toping:

25. $\int \frac{5x+3}{x^2-6x+18} dx$.
26. $\int \frac{2x^2-9x-3}{x^3-2x^2-3x} dx$.
25. $\int \frac{x+11}{x^2+x-12} dx$.
28. $\int \frac{(x^2+3x+3)dx}{(x+1)^3(x+2)}$.
29. $\int \frac{dx}{x(x^2+2)}$.
30. $\int \frac{(5x^2-12)dx}{(x^2-6x+13)^2}$.
31. $\int \cos^3 7x \sin^6 7x dx$.
32. $\int \frac{\sin^3 3x}{2+\cos^2 3x} dx$.
33. $\int \frac{dx}{\sin^6 5x}$.

$$\begin{aligned}
34. \int \frac{2+\cos x}{2-\cos x} dx & . \quad 35. \int \frac{dx}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x} & 36. \int \frac{dx}{3-\sin x + 2\cos x} & . \\
35. \int \frac{dx}{(3\sqrt{x}+9)\sqrt{x}} & . \quad 38. \int \frac{\sqrt[5]{x-7}}{3\sqrt{x-7} + \sqrt[5]{(x-7)^6}} dx & . \quad 39. \int \frac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x-3}+1} dx & . \\
40. \int \frac{dx}{x\sqrt{4+x^2}} & . \quad 41. \int \frac{dx}{(1+x)\sqrt{1+x-x^2}} & . \quad 42. \int \frac{x-\sqrt{3x-x^2-2}}{x\sqrt{3x-x^2-2}} dx & . \\
43. \int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^3}(1+\sqrt[6]{x})^2} & . \quad 44. \int \frac{dx}{\sqrt{x^3\sqrt{2+\sqrt[3]{x}}}} & .
\end{aligned}$$

Javoblar.

$$\begin{aligned}
1. \frac{2}{3}x\sqrt{ax} + C. \quad 2. \frac{n}{n-1}x^{(n-1)/n} + C. \quad 3. 2\sqrt{ax} + 2x + \frac{2}{3}\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{a}} + C. \quad 4. x^2 + \\
3\sin x + C. \quad 5. \frac{2^xe^x}{\ln 2 + 1} + C. \quad 6. -x + \operatorname{tg} x + C. \quad 5. -2\operatorname{ctg} x - \ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right| + C. \\
8. \ln|x + \sqrt{x^2 - 7}| + C. \quad 9. \frac{1}{10}\ln|3 + 5x^2| + C. \quad 10. \frac{\operatorname{arctg}^2 3x}{6} + C. \\
11. \frac{1}{5}(2 + \ln x)^5 + C. \quad 12. \sqrt{2 + x^2} + C. \quad 13. \frac{1}{16}\ln|5 + 4x^4| + C. \\
14. \frac{1}{8}\operatorname{arctg}(2x^4) + C. \quad 15. \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+5}{3} + C. \quad 16. \frac{1}{3\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{5}x}{3}\right) + C. \\
15. x \arccos x - \sqrt{1 - x^2} + C. \quad 18. x \sin x + \cos x + C. \quad 19. \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + \\
C. \quad 20. \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}\ln x - \frac{9}{4}\sqrt[3]{x^2} + C. \quad 21. \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C. \\
22. x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\ln|1 + x^2| + C. \quad 23. x(\ln x - 1) + C. \\
24. \frac{1}{34}e^{3x}(3\cos 5x + 5\sin 5x) + C. \quad 25. \frac{5}{2}\ln|x^2 - 6x + 18| + \\
6\operatorname{arctg}\frac{x-3}{3} + C. \quad 26. \ln\left|\frac{x(x+1)^2}{x-3}\right| + C. \quad 25. \ln\left|\frac{(x-3)^2}{x+4}\right| + C. \quad 28. \ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right| - \\
\frac{1}{2(x+1)^2} + C. \quad 29. \frac{1}{4}\ln\frac{x^2}{x^2+2} + C. \quad 30. \frac{13x-159}{8(x^2-6x+13)} + \frac{53}{16}\operatorname{arctg}\frac{x-3}{2} + C. \\
31. \frac{\sin^7 7x}{49} - \frac{\sin^9 7x}{63} + C. \quad 32. -\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\frac{\sin 3x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{3}\sin 3x + C. \\
33. \frac{2\operatorname{ctg}^3 5x}{15} - \frac{\operatorname{ctg}^5 5x}{25} + C. \quad 34. \frac{8}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{x}{2}\right) - 2x + C.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \text{35. } \frac{1}{\sqrt{6}} \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{tg} x \right) + C. \quad \text{36. } \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{tg}(x/2) - 1}{2} + C. \quad \text{37. } 6\sqrt[6]{x} - \\
& 18 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt[6]{x}}{3} + C. \quad \text{38. } \frac{10}{7} \ln |3 + (x - 7)^{7/10}| + C. \quad \text{39. } (\sqrt{x - 3} - \\
& 3)^2 6 \ln |\sqrt{x - 3} + 1| + C. \quad \text{40. } \frac{1}{2} \ln \left| \operatorname{tg} \frac{\operatorname{arctg}(x/2)}{2} \right| + C. \\
& \text{41. } -2 \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{1+x-x^2+x+1}}{x} + C. \quad \text{42. } -\ln x - 2 \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{2-x}{x-1}} + C. \\
& \text{43. } 6 \operatorname{arctg} \sqrt[12]{x} - \frac{6\sqrt[12]{x}}{1+\sqrt[6]{x}} + C. \quad \text{44. } -\frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}} \right)^3 + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{2+\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}} + C.
\end{aligned}$$

VI BOB. ANIQ INTEGRAL

6.1. Aniq integral tushunchasiga keltiriladigan masalalar

Bosib o'tilgan yo'l haqidagi masala. Agar moddiy nuqtaning $v = v(t)$ oniy tezligi ma'lum bo'lsa, uning $[t_0; T]$ vaqt mobaynida bosib o'tgan S yo'lini topish masalasini qaraymiz.

Qo'yilgan masalani yechish uchun, $[t_0; T]$ vaqt oralig'ini $t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T$ vaqt momentlari (nuqtalar) bilan n ta $[t_{i-1}; t_i]$, $i = 1, 2, \dots, n$ qismaniy vaqt oraliqlariga bo'lamiz va $[t_{i-1}; t_i]$ kesmaning uzunligini $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ orqali, bu uzunliklarning eng kattasini esa $d = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta t_i$ orqali belgilaymiz. Agar $[t_{i-1}; t_i]$ kesma yetarlicha kichik bo'lsa, bu vaqt oralig'idagi harakatni tekis harakat deb hisoblab, undagi bosib o'tilgan s_i yo'lni $s_i \approx v(\tau_i) \Delta t_i$ taqribiy tenglik bilan hisoblash mumkin, bu yerda $\tau_i \in [t_{i-1}; t_i]$. Shuning uchun $[t_0; T]$ vaqt oralig'ida bosib o'tilgan yo'l

$$S \approx v(\tau_1) \Delta t_1 + v(\tau_2) \Delta t_2 + \dots + v(\tau_n) \Delta t_n = \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Vaqt oraliqlari qanchalik darajada kichik bo'lsa, bu yig'indi shunchalik darajada aniq bo'ladi, vaqt oraliqlarini kichiraytirishga bo'linish nuqtalari sonini oshirish hisobiga erishish mumkin, ya'ni $n \rightarrow \infty$ bo'lganda $d \rightarrow 0$ bo'ladi. Shunday qilib, $v = v(t)$ tezlik bilan harakatlanayotgan moddiy nuqtaning $[t_0; T]$ vaqt oralig'ida bosib o'tgan yo'li sifatida

$$S = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n v(\tau_i) \Delta t_i$$

miqdorni olish mumkin.

Egri chiziqli trapetsiyaning yuzi haqida masala. Yuqoridan uzluksiz va nomanfiy $y = f(x)$ funksiyaning grafigi bilan yon tomonlardan esa $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan, quyidan esa Ox o'q bilan chegaralangan yassi figurani *egri chiziqli trapetsiya* deb ataymiz.

6.1-rasmda tasvirlangan egri chiziqli trapetsiyaning S_{aABb} yuzini topish masalasini qaraymiz.

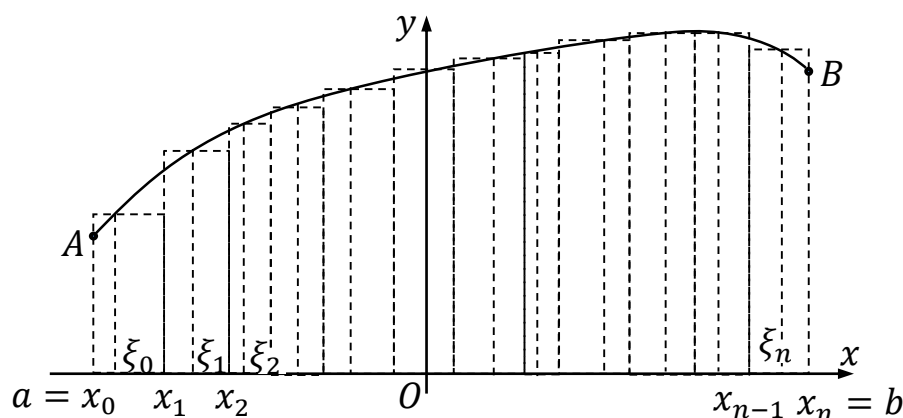
Qo'yilgan masalani yechish uchun, $[a; b]$ kesmani $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ nuqtalar bilan n ta $[x_{i-1}; x_i]$ qismaniy kesmalarga ajratamiz va ularning uzunliklarini $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, 2, \dots, n$ orqali, bu uzunliklarning eng kattasini esa $d = \max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k$ orqali belgilaymiz. Har bir $[x_{i-1}; x_i]$ qismaniy kesmada ξ_i nuqta nuqta tanlaymiz. U holda $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ ko'paytma tomonlari $f(\xi_i)$ va Δx_i bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuzini beradi: $s_i = f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$. Ularning

$$\sum_{i=1}^n s_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

yig'indisi esa zinasimon shakldagi figuraning yuzini beradi. Ana shu zinasimon figuraning yuzi qaralayotgan egri chiziqli trapetsiyaning yuziga taqriban teng bo'ladi. Qisman kesmalar uzunliklari qanchalik kichik bo'lsa, bu taqribiy tenglik shunchalik aniq bo'ladi. Shunday qilib egri chiziqli trapetsiyaning yuzi sifatida

$$S_{aABb} = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

limitni olish mumkin.



6.1-rasm

6.2. Aniq integral

Integral yig'indi va uning limiti. $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada aniqlangan bo'lsin.

6.1-Ta'rif. Nuqtalarning chekli sonidagi

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$$

to'plamiga $[a; b]$ kesmaning bo'linishi deb ataladi va u

$$T = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$$

ko'rinishda belgilanadi.

T bo'linishdagi qisman kesma deb ataluvchi $[x_{i-1}; x_i] \subseteq [a; b]$ kesmaning uzunligini $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n$ orqali belgilaymiz.

$$d = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i \quad (6.1)$$

tenglik bilan aniqlanuvchi songa, T bo'linishning diametri deb ataymiz.

Agar $[a; b]$ kesma T bo'linishining ixtiyoriy nuqtasi T' bo'linishning ham nuqtasi bo'lsa, T' bo'linish T bo'linishdan keyin keladigan (yoki T bo'linishning davomi) deb ataladi. Demak T' bo'linish T bo'linishga yangi bo'linish nuqtalarini qo'shishdan hosil qilinarkan, shuning uchun $T \subset T'$ belgilanish ma'noga ega.

$[a; b]$ kesmaning T bo‘linishi berilgan bo‘lsin. Har bir qismaniy kesmada ixtiyoriy ravishda $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ nuqta tanlaymiz.

6.2-Ta’rif. $f(x)$ funksiyaning ξ_i nuqtalardagi $f(\xi_i)$ qiymatlari bilan qismaniy kesmalar Δx_i uzunliklarining ko‘paytmalari yig‘indisidan tuzilgan

$$S(T) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (6.2)$$

ifodaga $f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesma bo‘yicha berilgan T bo‘linishdagi va ξ_i nuqtalarning tanlanishidagi *integral yig‘indisi* deb ataymiz.

Biz yuqorida $[a; b]$ kesmada nomanfiy bo‘lgan $f(x)$ funksiyaning integral yig‘indisi zinasimon shakldagi figuraning yuzini berisdhini ko‘rgan edik.

6.3-Ta’rif. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, bo‘linishning diametri $d < \delta$ bo‘ladigan har qanday T bo‘linishda va ξ_i nuqtalarning har qanday tanlanishida

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i - I \right| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, I soni $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ *integral yig‘indining limiti* deb ataladi.

Integral yig‘indilarning limiti uchun

$$I = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (6.3)$$

belgilashdan foydalanamiz.

6.1-Mulohaza. Bo‘linishlar diametri d nolga intilganda, qismaniy kesmalar soni n cheksiz ortadi, ya’ni $d \rightarrow 0$ bo‘lganda $n \rightarrow \infty$ bo‘ladi.

6.1-Misol. Ixtiyoriy $x \in [a; b]$ uchun $f(x) = A = \text{const}$ funksiya integral yig‘indilari limitini toping.

► Bu funksiyaning integral yig‘indisi $[a; b]$ kesmaning bo‘linishiga ham, $[x_{i-1}; x_i] \subseteq [a; b]$ qismaniy kesmalarda ξ_i nuqtalarning tanlanishiga ham bog‘liq emas:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n A(x_i - x_{i-1}) = A \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = A(b - a).$$

Shuning uchun mazkur funksiyaning integral yig‘indilari limiti (6.3) tenglikga ko‘ra

$$I = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = A(b - a)$$

qiymatga teng bo‘ladi. ◀

6.2-Misol. Quyidagi tenglik bilan aniqlanuvchi

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x - \text{ratsional;} \\ 0, & \text{agar } x - \text{irratsional} \end{cases}$$

Dirixle funksiyasi uchun $[a; b]$ kesma bo'yich integral yigindilarining limiti mavjud yoki mavjud emasligini aniqlang.

► Agar $[a; b]$ kesmaning ixtiyoriy T bo'linishlarida qisman kesmalarda faqat ratsional $\xi_i \in \mathbb{Q}, i = 1, 2, \dots, n$ nuqtalarni tanlasak, ixtiyoriy integral yig'indi

$$S(T) = \sum_{i=1}^n D(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = b - a$$

ko'rinishda bo'ladi. U holda bunday yigindilarning $d \rightarrow 0$ dagi limiti $b - a$ bo'ladi. Ixtiyoriy T bo'linishning qisman kesmalarida $\xi_i \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ irratsional qiymatlar tanlansa, integral yig'indi nolga teng bo'ladi:

$$S(T) = \sum_{i=1}^n D(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^n 0 \cdot \Delta x_i = 0.$$

Natijada ularning limitlari ham nolga teng bo'ladi. Bu esa 6.3-Ta'rifga ziddir, limit qisman kesmalarda ξ_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liq bo'lmasligi kerak. Shuning uchun Dirixle funksiyasi uchun tuzilgan integral yig'indilarning limiti mavjud emas. ◀

Aniq integral.

6.4-Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesmadagi integral yig'indilari chekli $I \in \mathbb{R}$ limitga ega bo'lsa, $f(x)$ funksiya bu kesmada *integrallanuvchi* deyiladi.

Bu yerda $f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesmadagi har bir integral yig'indisi bu kesmaning birorta T bo'linishiga va $[x_{i-1}; x_i], i = 1, 2, \dots, n$ qisman kesmalarda tanlangan ξ_i nuqtalar to'plamiga mos kelishini eslatib o'tish lozim. Integral yig'indilarning I limiti bo'linishlarning d diametri nolga intilishi bo'yicha olinadi va bu limit 6.3-Ta'rifga ko'ra qisman kesmalarda ξ_i nuqtalarning tanlanishiga bog'liq emas. Bu limit

$$I = \int_a^b f(x) dx \quad (6.4)$$

orqali belgilanadi va u $f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesma bo'yicha olingan *aniq integrali* deb ataladi.

Shunday qilib, (6.3) va (6.4) tengliklarga ko'ra

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \quad (6.5)$$

tenglikni aniq integralning ta'rif sifatida olish mumkin.

6.3-Misol. $\int_a^b dx$ integralni hisoblang.

► Integral osti funksiya $f(x) \equiv 1$ bo'lganligi uchun, ixtiyoriy $\xi \in [a; b]$ nuqtada $f(\xi) = 1$ bo'ladi. Shuning uchun

$$\int_a^b dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n 1 \cdot \Delta x_i = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \lim_{d \rightarrow 0} (b - a) = b - a. \blacktriangleleft$$

$f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesma bo'yicha aniq integrali sondan iborat bo'lib, u integrallash o'zgaruvchisining belgilanishiga bog'liq emas. Aniq integralning qiymatini $f(x)$ integral osti funksiya va integrallash oralig'i aniqlaydi. Integrallash oralig'ining chetlarini integrallash chegaralari (chap chetni integrallashning quyi chegarasi, o'ng chetni esa integrallashning yuqori chegarasi) deb ataymiz.

$f(x)$ funksiya integrallanuvchi bo'lishining zaruriy sharti quyidagi teoremda keltirilgan.

6.1-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u bu kesmada chegaralangan bo'ladi.

► Teskarisidan faraz qilamiz, ya'ni $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lgan $f(x)$ funksiya bu kesmada chegaralanmagan bo'lsin. Funksiyaning integrallanuvchanligi ta'rifiga ko'ra, bu funksiyaning mazkur kesmadagi integral yig'indilari chekli limitga ega bo'ladi. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni tanlaymiz. U holda integral yig'indilar limitining 6.3-Ta'rifiga ko'ra shunday $\delta > 0$ son topilib, bo'linishning diametri $d < \delta$ bo'ladigan har qanday T bo'linishda va ξ_i nuqtalarning har qanday tanlanishida

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i - I \right| < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu yerdan, bo'linish diametri $d < \delta$ bo'lgan integral yig'indilar to'plami chegaralanagan ekanligi kelib chiqadi. Bu integral yig'indilardan birini tanlaymiz. Qilgan farazimizga ko'ra, $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada chegaralanmagan, u holda $f(x)$ funksiya chegaralanmagan $[x_{i-1}; x_i]$ qisman kesma topiladi. $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ mos nuqtani tanlash hisobiga integral yig'indidagi $f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ hadni absolyut qiymati bo'yicha ixtiyoriy katta qilish mumkin va shuning bilan birga bu hadning hisobiga integral yig'indi ham absolyut qiymati bo'yicha ixtiyoriy katta bo'ladi. Bu esa mumkin emas, chunki integral yig'indini integral yig'indilarning chegaralangan to'plamidan tanlagan edik. Yuzaga kelgan qarama-qarshilik qilingan farazning noto'g'ri ekanligidan dalolat beradi va teoremaning tasdig'ini isbotlaydi. ◀

Funksiyaning kesmada chegaralanganligi uning bu kesmada integrallanuvchi bo'lishi uchun faqat zaruriy shart, ammo yetarli shart

emasligini ta'kidlab o'tamiz. Masalan, Dirixle funksiyasi (6.2-Misol) ixtiyoriy $[a; b] \subset \mathbb{R}$ kesmada chegaralangan, ammo integrallanuvchi emas, chunki mos integral yig'indilarning limiti mavjud emas.

6.3. Quyi va yuqori Darbu yig'indilari va integrallari

Quyi va yuqori Darbu yig'indilari. $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada aniqlangan va $T = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$ bu kesmaning birorta bo'linishi, hamda $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n$ bo'lsin. $f(x)$ funksiyaning $[x_{i-1}; x_i]$ qisman kesmadagi aniq yuqori va aniq quyi chegaralarini mos ravishda

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x) \text{ va } m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x), i = 1, 2, \dots, n$$

orqali belgilaymiz va ulardan

$$\underline{S}(T) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i, \quad \bar{S}(T) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i \quad (6.6)$$

yig'indilarni tuzamiz. $\underline{S}(T) \leq \bar{S}(T)$ ekanligi ravshan. $\underline{S}(T)$ yig'indi $f(x)$ funksiyaning T bo'linishga mos keluvchi quyi, $\bar{S}(T)$ esa yuqori Darbu yig'indisi deb ataladi (J.G.Darbu (1842-1917)-fransuz matematigi).

Bu yig'indilarning qiymati $f(x)$ funksiyaning mazkur bo'linishga mos keluvchi $S(T)$ integral yig'indiga ham yoki boshqa bo'linishlarga mos keluvchi integral yig'indilarga teng bo'lmasligi mumkin, chunki funksiya $[x_{i-1}; x_i]$ qisman kesmada M_i yoki m_i qiymatlarni qabul qilmasligi ham mumkin.

Darbu yig'indilarining xossalari. Bu xossalar quyidagilardan iborat:

1. Agar $f(x)$ funksiya chegaralangan bo'lsa, ixtiyoriy T bo'linishda $\underline{S}(T)$ va $\bar{S}(T)$ aniqlangan.

► Funksiya chegaralangan bo'lganligi uchun M_i va $m_i, i = 1, 2, \dots, n$ chekli, shuning uchun (6.6) yig'indilar ma'noga ega. ◀

2. Agar $T \subset T'$ va bunda T' bo'linish T bo'linishga m ta nuqtani qo'shishdan hosil bo'lsa, $\bar{S}(T') \leq \bar{S}(T)$ va $\underline{S}(T) \leq \underline{S}(T')$ bo'ladi.

► Faraz qilaylik T_1 bo'linish T bo'linishga yangi bitta $x' \in [x_{j-1}; x_j]$ bo'linish nuqtasini qo'shishdan hosil bo'lgan bo'lsin. U holda $\bar{S}(T)$ yig'indidagi $M_j(x_j - x_{j-1})$ had yangi $\bar{S}(T_1)$ yig'indida ikkita qo'shiluvchining

$$M'_j(x' - x_{j-1}) + M''_j(x_j - x')$$

yig'indisi bilan almashtiriladi, bu yerda M'_j va M''_j mos ravishda $f(x)$ funksiyaning $[x_{j-1}; x']$ va $[x'; x_j]$ kesmalardagi aniq yuqori chegaralari. Bu kesmalar $[x_{j-1}; x_j]$ kesmaning qismlari hisoblanadi va shuning uchun

funksiyaning ulardagi qiymatlarining aniq yuqori chegarasi M_j dan katta bo'lmaydi, ya'ni $M'_j \leq M_j$ va $M''_j \leq M_j$. U holda

$$M'_j(x' - x_{j-1}) + M''_j(x_j - x') \leq M_j(x' - x_{j-1}) + M_j(x_j - x') = M_j(x_j - x_{j-1}).$$

Bundan esa $\bar{S}(T_1) \leq \bar{S}(T)$ tengsizlik hosil bo'ladi. Agar T_1 bo'linishga yana bitta nuqta qoshib T_2 bo'linishni hosil qilinsa va uning uchun $T \subset T_1 \subset T_2$ o'rinli bo'ladi. Bu bo'linishlar ketma ketligi uchun hozirgina $\bar{S}(T_2) \leq \bar{S}(T_1) \leq \bar{S}(T)$ ekanligini ko'rsatdik. Bu jarayonni davom ettirib, qo'shilgan nuqtalar sonini m taga yetkaziladi va natijada $\bar{S}(T') \leq \bar{S}(T)$ tengsizlikga kelamiz. $\underline{S}(T) \leq \underline{S}(T')$ tengsizlik ham xuddi shu singari isbotlanadi. ◀

3. $[a; b]$ kesmaning ixtiyoriy ikkita T_1 va T_2 bo'linishlari uchun

$$\underline{S}(T_1) \leq \bar{S}(T_2) \quad (6.7)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

► $T_1 \subset T_1 \cup T_2$ va $T_2 \subset T_1 \cup T_2$ bo'lganligi uchun 2-xossaga ko'ra

$$\underline{S}(T_1) \leq \underline{S}(T_1 \cup T_2) \leq \bar{S}(T_1 \cup T_2) \leq \bar{S}(T_2). \blacktriangleleft$$

4. $[a; b]$ kesmaning ixtiyoriy T bo'linishi uchun

$$\underline{S}(T) \leq S(T) \leq \bar{S}(T)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

► $[a; b]$ kesmaning T bo'linishi aniqlagan barcha $[x_{i-1}; x_i]$ qisman kesmalardan olingan olingan ixtiyoriy $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ nuqtasi uchun $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda

$$\underline{S}(T) = \sum_{i=1}^n m_i \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i = \bar{S}(T),$$

ya'ni $\underline{S}(T) \leq S(T) \leq \bar{S}(T)$. ◀

5. $[a; b]$ kesmaning ixtiyoriy T bo'linishi va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i], i = 1, 2, \dots, n$ nuqtalar to'plami topildiki, ular uchun

$$0 \leq \bar{S}(T) - S(T) < \varepsilon, \quad 0 \leq S(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

► $[a; b]$ kesmada birorta $T = \{x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n\}$ bo'linishni olamiz va

$$\bar{S}(T) = \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i, \quad M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x)$$

yig'indini qaraymiz. Aniq yuqori chegaraning 3.7-Ta'rifiga ko'ra shunday $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$ nuqtani topish mumkinki, bunda $0 \leq M_i - f(\xi_i) < \frac{\varepsilon}{b-a}, i = 1, 2, \dots, n$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

So'ngi tengsizlikni Δx_i qiymatga ko'paytirib, $i = 1, 2, \dots, n$ bo'yicha yig'indi tuzamiz va natijada

$$0 \leq \sum_{i=1}^n M_i \cdot \Delta x_i - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot (b-a) = \varepsilon$$

yoki $0 \leq \bar{S}(T) - S(T) < \varepsilon$ tengsizlikga ega bo'lamiz. Ikkinchi $0 \leq S(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$ tengsizlik ham xuddi shu singari isbotlanadi.

Quyi va yuqori Darbu integrallari. 3-xossaga ko'ra, $f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesmani ixtiyoriy bo'linishlar bo'yicha quyi Darbu yigindilari to'plami yuqoridan ixtiyoriy yuqori Darbu yig'indisi bilan chegaralangan, yuqori Darbu yig'indilari to'plami esa quyidan ixtiyoriy quyi Darbu yig'indisi bilan chegaralangan. Shuning uchun barcha T bo'linishlar $\mathcal{T}$ to'plamining chekli aniq quyi va aniq yuqori chegaralari mavjud:

$$I_* = \sup_{T \in \mathcal{T}} \underline{S}(T) \quad \text{va} \quad I^* = \inf_{T \in \mathcal{T}} \bar{S}(T) \quad (6.8)$$

hamda bunda

$$\underline{S}(T) \leq I_* \leq I^* \leq \bar{S}(T) \quad (6.9)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. I_* va I^* sonlar mos ravishda $f(x)$ funksiyaning quyi va yuqori Darbu integrallari deb ataladi.

Darbuning asosiy lemmasi. $[a; b]$ kesmaning T' bo'linishi T bo'linishga l ta nuqtani qo'shishdan hosil qilingan bo'lsin. U holda $0 \leq \bar{S}(T) - \bar{S}(T') \leq (M - m)ld$, $0 \leq \underline{S}(T) - \underline{S}(T') \leq (M - m)ld$ va $I^* = \lim_{d \rightarrow 0} \bar{S}(T)$, $I_* = \lim_{d \rightarrow 0} \underline{S}(T)$.

6.4. Funksiya integrallanuvchi bo'lishligining shartlari

6.2-Teorema (Darbu). $[a; b]$ kesmada chegaralangan $f(x)$ funksiya bu kesmada integrallanuvchi bo'lishligi uchun, $I^* = I_*$, ya'ni $\lim_{d \rightarrow 0} (\bar{S}(T) - \underline{S}(T)) = 0$ bo'lishi zarur va yetarli.

► Isbotlash paytida quyidagilarni inobatga olamiz:

1) $\lim_{d \rightarrow 0} (\bar{S}(T) - \underline{S}(T)) = 0$ shart, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, bo'linishning diametri $d < \delta$ bo'ladigan har qanday T bo'linishlarda $|\bar{S}(T) - \underline{S}(T)| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi degan ma'noni anglatadi;

2) $\underline{S}(T) \leq \bar{S}(T)$ bo'lganligi uchun $|\bar{S}(T) - \underline{S}(T)| < \varepsilon$ tengsizlik $\bar{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$ tengsizlikga teng kuchli.

Zarurligi. $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi, ya'ni $I = \int_a^b f(x)dx$ integral mavjud bo'lsin. Bu esa, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, bo'linishning diametri $d < \delta$ bo'ladigan har qanday T bo'linishda va ξ_i nuqtalarning har qanday tanlanishida

$$|S(T) - I| < \frac{\varepsilon}{4}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

O'z navbatida bunday bo'linishlarning T birortasi uchun 5-xossaga ko'ra shunday $\xi'_i \in [x_{i-1}; x_i], \xi''_i \in [x_{i-1}; x_i], i = 1, 2, \dots, n$ nuqtalar to'plamlari topildiki, ulardan tuzilgan

$$S'(T) = \sum_{i=1}^n f(\xi'_i) \cdot \Delta x_i, S''(T) = \sum_{i=1}^n f(\xi''_i) \cdot \Delta x_i$$

integral yig'indilar $\bar{S}(T) - S'(T) < \varepsilon/4$, $S''(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon/4$ tengsizliklarni qanoatlantiradi. Demak,

$$\begin{aligned} \bar{S}(T) - \underline{S}(T) &= (\bar{S}(T) - S'(T)) + (S'(T) - I) + \\ &+ (I - S''(T)) + (S''(T) - \underline{S}(T)) < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon, \end{aligned}$$

ya'ni $\lim_{d \rightarrow 0} (\bar{S}(T) - \underline{S}(T)) = 0$. Zarurligi isbotlandi.

Yetarliligi. $\bar{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$ bo'lsin. U holda (6.9), ya'ni $\underline{S}(T) \leq I_* \leq I^* \leq \bar{S}(T)$ o'rinli bo'ladi, bundan esa $0 \leq I^* - I_* \leq \bar{S}(T) - \underline{S}(T)$ tengsizlikni yoki ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $0 \leq I^* - I_* < \varepsilon$ tengsizlikni yozish mumkin. Bu esa $I_* = I^*$ ekanligidan dalolat beradi.

Endi $I_* = I^* = I$ deb hisoblasak, ixtiyoriy bo'linish uchun $\underline{S}(T) \leq I \leq \bar{S}(T)$ tengsizlik bajariladi. 4-xossaga ko'ra $\underline{S}(T) \leq S(T) \leq \bar{S}(T)$. Shunday qilib hosil qilingan tengsizliklardan

$$|S(T) - I| \leq \bar{S}(T) - \underline{S}(T) \quad (6.10)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Shartga ko'ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, $d < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha bo'linishlarda $\bar{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda (6.10) tengsizlikga ko'ra $d < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi bo'linishlarda $|S(T) - I| < \varepsilon$ bo'ladi. Bu esa $I = \lim_{d \rightarrow 0} S(T)$ ekanligidan dalolat beradi, ya'ni $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi. ◀

6.3-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u bu kesmada integrallanuvchi ham bo'ladi.

► Shartga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz, u holda 4.33-Kantor teoremasiga ko'ra funksiya bu kesmada tekis uzluksiz hamdir.

Bu esa ixtiyoriy $\frac{\varepsilon}{b-a} > 0$ son uchun shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $|\xi_1 - \xi_2| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $\xi_1, \xi_2 \in [a; b]$ nuqtalarda $|f(\xi_1) - f(\xi_2)| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi degan ma'noni anglatadi.

$d < \delta$ shart bajariladigan T bo'linishni olamiz. U holda $M_i - m_i < \varepsilon/(b-a)$, bu yerda odatdagidek $M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x)$ va $m_i =$

$\inf_{x \in [x_{i-1}; x_i]} f(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$. Shuning uchun,

$$\bar{S}(T) - \underline{S}(T) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{b-a} \sum_{i=1}^n \Delta x_i = \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon,$$

ya'ni $\bar{S}(T) - \underline{S}(T) < \varepsilon$. Yuqorida isbotlangan 6.2-Teoremaga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi. ◀

6.4-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada aniqlangan va monoton bo'lsa, u bu kesmada integrallanuvchi ham bo'ladi.

► $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada monoton, aniqlik uchun ixtiyoriy $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in [a; b]$ nuqtalarda $f(x_1) < f(x_2)$ va M_i, m_i yuqorida aniqlangan qiymatlar bo'lsin. $f(x)$ funksiyaning $[x_{i-1}; x_i]$ kesmalarda monotonligi tufayli $M_1 = m_2, M_2 = m_3, \dots, M_{n-1} = m_n$ bo'ladi. Shuning uchun

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) &= (M_1 - m_1) + (M_2 - m_2) + \dots + (M_n - m_{n-1}) = \\ &= M_n - m_1 = f(b) - f(a). \end{aligned}$$

Bo'linishning diametri $d < \delta = \frac{\varepsilon}{f(b)-f(a)}$ bo'lsin, u holda

$$\begin{aligned} \bar{S}(T) - \underline{S}(T) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) \Delta x_i < \sum_{i=1}^n (M_i - m_i) d < \\ &< (f(b) - f(a)) \cdot \frac{\varepsilon}{f(b) - f(a)} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Bu yerda ham 6.2-Teoremaga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi. ◀

6.5-Teorema. $[a; b]$ kesmada chegaralangan va bu kesmaning chekli sondagi nuqtalarida uzilishga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya bu kesmada integrallanuvchi hamdir.

► a va b nuqtalar oralig'ida faqat bitta x' uzilish nuqtasi bo'lgan holni qarash yetarli. m va M sonlar mos ravishda $f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesmadagi aniq quyi va aniq yuqori chegaralari bo'lsin. Yetarlicha kichik ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ sonni olamiz va $[a; x' - \varepsilon/(8(M-m))]$ va $[x' - \varepsilon/(8(M-m)); b]$ kesmalarni qaraymiz (6.2-rasm). Bu kesmalarning har

birida $f(x)$ funksiya uzluksiz va demak shunday $\delta' > 0$ son topiladiki, diametrlari $d < \delta'$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday T bo'linishlarda $M_i - m_i < \varepsilon/(2(b-a)), i = 1, 2, \dots, n$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

$$\begin{array}{c} x_0 \quad x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x' \quad \dots \quad x_{n-1} \quad x_n \\ \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{a \quad x' - \varepsilon' \quad x' + \varepsilon' \quad b} \end{array} \quad \varepsilon' = \frac{\varepsilon}{8(M-m)}$$

6.2-rasm

$\delta = \min\{\delta', \varepsilon/(8(M-m))\}$ bo'lsin. Diametrlari $d < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy T bo'linishlarni qaraymiz. Bu bo'linishlar uchun $\sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i$ yig'indini ikkita $\sum (M_i - m_i)\Delta x'_i + \sum (M_i - m_i)\Delta x''_i$ yig'indi ko'rinishida yozamiz. Birinchi yig'indiga x' nuqtaning $\varepsilon/(8(M-m))$ atrofi tashqarisiga to'laligicha tushgan qisman kesmalar tushadi, ikkinchi yig'indiga esa x' nuqtaning $\varepsilon/(8(M-m))$ atrofiga to'laligicha yoki u bilan umumiy nuqtalarga ega bo'lgan qisman kesmalar tushadi.

Birinchi yig'indi uchun 6.3-Teoremaning isbotidagi singari

$$\sum (M_i - m_i)\Delta x'_i < \varepsilon/2$$

bo'ladi, ikkinchi yig'indiga x' nuqtaning $\varepsilon/(8(M-m))$ atrofiga to'laligicha tushgan qisman kesmalar uzunliklarining yig'indisi $\varepsilon/(4(M-m))$ dan oshmaydi. Bu kesmaga qisman tushgan qisman kesmalar esa kopi bilan ikkita, shuning uchun ular uzunliklarining yig'indisi $2\delta \leq \varepsilon/(4(M-m))$ dan oshmaydi. Demak,

$$\sum (M_i - m_i)\Delta x'_i \leq (M-m) \sum \Delta x'_i < (M-m)\varepsilon/(2(M-m)) = \varepsilon/2.$$

Shunday qilib, $d < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha T bo'linishlarda

$$\begin{aligned} \bar{S}(T) - \underline{S}(T) &= \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i < \sum (M_i - m_i)\Delta x'_i + \sum (M_i - m_i)\Delta x''_i < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

bo'ladi. Bu esa $f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi ekanligini anglatadi. ◀

Natija. Kesmada bo'lakli uzluksiz bo'lgan funksiya bu kesmada integrallanuvchi ham bo'ladi.

6.5. Aniq integralning asosiy xossalari

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsin. U holda

1) $f(x) + g(x)$ funksiya ham $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi

va

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx;$$

2) $C \cdot f(x)$ funksiya ham integrallanuvchi bo'ladi va

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx$$

bu yerda C — o'zgarmas son.

3) $f(x) \cdot g(x)$ funksiya ham $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi;

4) $f(x)$ funksiya ixtiyoriy $[c; d] \subset [a; b]$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi;

5) Agar $c \in [a; b]$ bo'lsa

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

va agar $f(x)$ funksiya $[a; c]$ va $[c; b]$ kesmalarda integrallanuvchi bo'lsa, u $[a; b]$ kesmada ham integrallanuvchi bo'ladi va

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx;$$

6) Agar integrallash chegaralari ustma-ust tushsa, ya'ni $a = b$ bo'lsa,

$$\int_a^a f(x)dx = 0;$$

7) Integrallash chegaralarining o'rnini almashtirilsa, integral o'z ishorasini o'zgartiradi:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx;$$

8) Agar ixtiyoriy $x \in [a; b]$ nuqtada $f(x) \geq 0$ bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

bo'ladi va agar ixtiyoriy $x \in [a; b]$ nuqtada $f(x) \leq g(x)$ bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx;$$

9) $|f(x)|$ funksiya $[a; b]$ ($a < b$) kesmada integrallanuvchi bo'ladi

va

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

10) Agar m va M sonlar mos ravishda $f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari bo'lsa,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

► $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘lsin. U holda $\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ va $\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \cdot \Delta x_i$ limitlar mavjud bo‘ladi.

1) Ketma-ketlikning limiti xossalriga ko‘ra

$$\begin{aligned} & \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \\ & = \lim_{d \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \cdot \Delta x_i \right) = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) + g(\xi_i)) \cdot \Delta x_i. \end{aligned}$$

Demak $f(x) + g(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi.

$$\begin{aligned} \text{Shunday qilib, } \int_a^b (f(x) + g(x))dx &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(\xi_i) + g(\xi_i)) \cdot \Delta x_i = \\ &= \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx. \end{aligned}$$

1-xossa isbotlandi.

2) 2-xossa ham xuddi shu singari isbotlanadi.

3) Funksiyalarning ko‘paytmasini

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{1}{4} ((f(x) + g(x))^2 - (f(x) - g(x))^2)$$

ko‘rinishda yozib olamiz.

1-xossaning isbotidagi singari limitlarning xossaligidan va 1-xossaning o‘zidan foydalanib $H(x) = (f(x) + g(x))^2$ va $E(x) = (f(x) - g(x))^2$ funksiyalarning $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

1 va 2-xossalarga ko‘ra $(H(x) - E(x))/4$ funksiya $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘ladi. Demak, $f(x) \cdot g(x)$ funksiya ham bu kesmada integrallanuvchi bo‘ladi. 3-xossa isbotlandi.

4) $[a; b]$ kesmaning bo‘linishlari $[c; d]$ kesmaning ham bo‘linishlarini o‘zida saqlaydi, shu saababli $[a; b]$ kesma uchun tuzilgan integral yig‘indilar limitining mavjudligidan, $[c; d]$ kesma uchun tuzilgan integral yig‘indilar limitining mavjudligi kelib chiqadi. Shunday qilib, $f(x)$ funksiya $[c; d]$ kesmada integrallanuvchi bo‘ladi. 4-xossa isbotlandi.

5) Xossaning birinchi qismini osongina isbotlash mumkin:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^k f(\xi_i) \cdot \Delta x_i +$$

$$+\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=k+1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx,$$

bu yerda bo'linishlar quyidagicha olingan:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_m = c < x_{m+1} < \dots < x_n = b.$$

Xossaning ikkinchi qismini isbotlaymiz.

$[a; c] \cup [c; b] = [a; b]$ bo'ladigan $[a; c]$ va $[c; b]$ kesmalarni qaraymiz, ya'ni $a < c < b$.

$T' = \{x'_0, x'_1, \dots, x'_n\}$ bo'linish $[a; c]$ kesmaning bo'linishi, $T'' = \{x''_0, x''_1, \dots, x''_n\}$ esa $[c; b]$ kesmaning bo'linishi bo'lsin. Funksiya bu kesmalarda integrallanuvchi bo'lganligi uchun $\lim_{d' \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi'_i) \cdot \Delta x'_i$ va

$\lim_{d'' \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi''_i) \cdot \Delta x''_i$ limitlar mavjud, bu yerda $d' = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x'_i$, $d'' = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x''_i$.

Shuning bilan birga $T' \cup T'' = T$ bo'linish $[a; b]$ kesmaning bo'linishi bo'ladi.

$d = \min(d', d'')$ bo'lsin, u holda

$$\lim_{d' \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi'_i) \cdot \Delta x'_i + \lim_{d'' \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi''_i) \cdot \Delta x''_i$$

yig'indi mavjud va

$$\begin{aligned} & \lim_{d' \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi'_i) \cdot \Delta x'_i + \lim_{d'' \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi''_i) \cdot \Delta x''_i = \\ & = \lim_{d \rightarrow 0} \left(\sum_{i=1}^n f(\xi'_i) \Delta x'_i + \sum_{i=1}^n f(\xi''_i) \Delta x''_i \right) = \\ & = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (f(\xi'_i) \cdot \Delta x'_i + f(\xi''_i) \Delta x''_i) = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i. \end{aligned}$$

Demak, $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi ekan va $\int_a^c f(x)dx +$

$$\int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx. \text{ 5-xossa isbotlandi.}$$

6) $[a; a]$ kesmaning bo'linishlari 0 ga teng va demak $\int_a^a f(x)dx = 0$ bo'ladi. 6-xossa isbotlandi.

7) Agar $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ nuqtalar $[a; b]$ kesmaning bo'linishi bo'lsa, $[b; a]$ kesmaning bo'linishi $b = x_0 > x_1 > \dots > x_n = a$ nuqtalar bo'ladi. U holda $[a; b]$ kesma qisman kesmalarining uzunliklari uchun $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ tenglik o'rinli bo'lsa,

$[b; a]$ kesmaning qismaniy kesmalarining uzunliklari $\Delta x_i = -(x_i - x_{i-1}) = \Delta x'_i$ tenglik bilan topiladi.

Demak $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = - \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x'_i$, bundan esa

$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$ tenglikni hosil qilamiz. 7-xossa isbotlandi.

8) $a < b$ bo'lsin. U holda $\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i$. Bu tengsizlikda limitga o'tsak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i \leq \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b g(x)dx$$

qidirilgan tengsizlikni hosil qilamiz. 8-xossa isbotlandi.

9) Birinchidan, f funksiyaning chegaralanganligidan $|f|$ funksiyaning ham chegaralanganligi kelib chiqadi, ikkinchidan ixtiyoriy $\xi \in [a; b]$ va $\eta \in [a; b]$ nuqtalar uchun $||f(\xi)| - |f(\eta)|| \leq |f(\xi) - f(\eta)|$ tengsizli o'rinli bo'ladi, bundan esa $[a; b]$ kesmaning har qanday $T = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ bo'linishi uchun

$$|M_i| - |m_i| = \sup_{\xi, \xi' \in [x_{i-1}; x_i]} ||f(\xi')| - |f(\xi)|| \leq \sup_{\xi, \xi' \in [x_{i-1}; x_i]} |f(\xi') - f(\xi)| \leq M_i - m_i$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bundan esa, agar $\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)\Delta x_i = 0$

bo'lsa, u holda $\lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n (|M_i| - |m_i|)\Delta x_i = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Shuning uchun 6.2-Darbu teoremasiga ko'ra $f(x)$ funksiyaning integrallanuvchanligidan $|f(x)|$ funksiyaning ham integrallanuvchanligi kelib chiqadi.

Ixtiyoriy $x \in [a; b]$ uchun $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ ekanligidan, 8-xossaga ko'ra $-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$, ya'ni, (modulning xossasiga ko'ra) $\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$. 9-xossa isbotlandi.

10) Shartga ko'ra ixtiyoriy $x \in [a; b]$ nuqtalarda $m \leq f(x) \leq M$, u holda 8-xossaga ko'ra

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx,$$

chap va o'ng tomondagi integrallarga 2-xossani qo'llab, 6.3-Misoldan foydalansak

$$\int_a^b m dx = m \int_a^b dx = m(b-a), \int_a^b M dx = M \int_a^b dx = M(b-a).$$

U holda $m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$. 10-xossa isbotlandi. ◀

O'rta qiymat haqida teorema.

6.6-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, bu kesmada

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) \quad (6.11)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $c \in [a; b]$ nuqta mavjud.

► $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lganligi uchun 2.25-Veyershtassning ikkinchi teoremasiga ko'ra

$$\min_{x \in [a; b]} f(x) = m \leq f(x) \leq M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$$

munosabatlarni qanoatlantiruvchi m va M sonlar mavjud bo'ladi. U holda aniq integralning 10-xossasiga ko'ra

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

va bu yerdan

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x) dx}{b-a} \leq M.$$

Agar $\int_a^b f(x) dx / (b-a) = \mu$ deb olsak $m \leq \mu \leq M$ bo'ladi, u holda 2.23-

Teoremaga ko'ra, $[a; b]$ kesmada $f(c) = \mu$ tenglikni qanoatlantiruvchi c

nuqta mavjud bo'ladi. Shuning uchun $\int_a^b f(x) dx / (b-a) = f(c)$ yoki

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a) \text{ bo'ladi. } \blacktriangleleft$$

6.6. Yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan integrallar

$f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsin. U holda bu funksiya ixtiyoriy $[a; x]$ kesmada ham integrallanuvchi bo'ladi, bu yerda

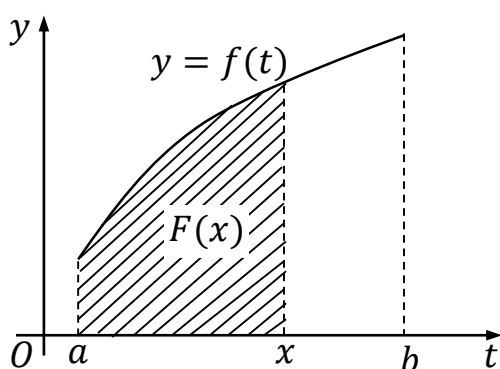
$a \leq x \leq b$, ya'ni ixtiyoriy $x \in [a; b]$ uchun $\int_a^x f(t) dt$ integral ma'noga

ega. Biz bu yerda qulaylik uchun integrallash o'zgaruvchisini t orqali belgiladik, chunki integrallashning yuqori chegarasi x deb olingan.

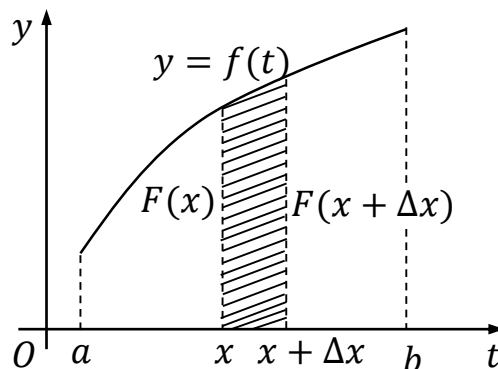
$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad (6.12)$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya $[a; b]$ kesmada aniqlangan va uni *yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan integral* deb ataymiz.

Agar ixtiyoriy $x \in [a; b]$ nuqtada $f(x) > 0$ bo'lsa, $F(x)$ funksiyani geometrik jihatdan 6.3-rasmda tasvirlangan egri chiziqli trapetsiya bo'yalgan qismining yuzi sifatida tavsiflash mumkin.



6.3-rasm



6.4-rasm

6.7-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, (6.12) tenglik bilan aniqlanuvchi $F(x)$ bu kesmada uzluksiz bo'ladi.

► $x \in [a; b], x + \Delta x \in [a; b]$ bo'lsin. U holda (6.12) tenglikdan

$$\begin{aligned} F(x + \Delta x) &= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \\ &= F(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt, \end{aligned}$$

shuning uchun (6.4-rasm)

$$\Delta F = F(x + \Delta x) - F(x) = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \quad (6.13)$$

$f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lganligi uchun u bu kesmada chegaralangan hamdir, ya'ni ixtiyoriy $x \in [a; b]$ nuqtalarda $|f(x)| < M$ tengsizlik o'rinli bo'ladigan $M > 0$ son mavjuddir. Bu tengsizlikdan $|\Delta F|$ ifodani baholash uchun foydalanamiz:

$$|\Delta F| = \left| \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \right| \leq \left| \int_x^{x+\Delta x} |f(t)|dt \right| \leq \left| \int_x^{x+\Delta x} Mdt \right| \leq M|\Delta x|.$$

Bu tengsizlikdan ixtiyoriy $x \in [a; b]$ nuqtalarda $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta F = 0$ ekanligi kelib chiqadi, bu esa $F(x)$ funksiyaning barcha $x \in [a; b]$ nuqtalarda uzluksizligini bildiradi. ◀

6.8-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi va $x_0 \in [a; b]$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, (6.12) tenglik bilan aniqlanuvchi $F(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi va

$$F'(x_0) = f(x_0) \quad (6.14)$$

bo'ladi.

► x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning uzluksizlik nuqtasi va ε ixtiyoriy musbat son bo'lsin. U holda funksiyaning nuqtadagi uzluksizlik ta'rifidan, shunday $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ son topiladiki, $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in [a; b]$ nuqtalarda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/2$ tengsizlik bajariladi.

$$\int_{x_0}^x f(x_0) dt = f(x_0)(x - x_0)$$

bo'lganligi uchun

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt - \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right) = \\ &= \frac{1}{x - x_0} \left(\int_{x_0}^x f(t) dt - \int_{x_0}^x f(x_0) dt \right) = \frac{1}{x - x_0} \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt. \end{aligned}$$

Bu yerda aniq integralning 9-xossasini inobatga olsak, $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha $x \in [a; b]$ nuqtalarda

$$\begin{aligned} \left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| &= \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x (f(t) - f(x_0)) dt \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{|x - x_0|} \left| \int_{x_0}^x |f(t) - f(x_0)| dt \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \cdot \frac{\varepsilon}{2} |x - x_0| = \varepsilon \end{aligned}$$

tengsizlik o'rinli bo'li bo'ladi. Demak funksiyaning nuqtadagi hosilasi ta'rifiga ko'ra qidirilgan

$$F'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = f(x_0)$$

tenglikni hosil qilamiz. ◀

6.1-Natija. $[a; b]$ kesmada uzluksiz $f(x)$ funksiyaning ixtiyoriy boshlang'ichi

$$\int_a^x f(t) dt + C, \quad a \leq x \leq b$$

ko'rinishda bo'ladi.

► 6.8-Teoremaga ko'ra $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ichi bo'ladi, 5.1-Teoremaga ko'ra uning har qanday

boshlang'ichi $F(x)$ funksiyadan o'zgarmasga farq qiladi. Shunday qilib, aniqmas integrallar va aniq integrallar o'zaro

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C$$

tenglik bilan bog'lanar ekan. ◀

Biz uchinchi bobda ixtiyoriy uzluksiz funksiyaning boshlang'ichi mavjudligi haqidagi teoremani isbotsiz keltirgan edik. Endi ana shu teoremaning isbotini keltiramiz.

6.9-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, bu kesmada $f(x)$ funksiyaning boshlang'ichi mavjud.

► Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, 6.3-Teoremaga ko'ra u bu kesmada integrallanuvchi hamdir. Shuning uchun qilingan farazlarda ixtiyoriy $x_0 \in [a; b]$ nuqtalarda o'rinli bo'lgan (6.14) tenglikga ko'ra

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ichi bo'ladi. ◀

6.7. Aniq integralni hisoblash

Nyuton-Leybnis formulasi. Aniq integralni integral yig'indilarning limiti sifatida hisoblash mumkin. Ammo bu usul katta hajmdagi hisoblash ishlarini olib borishni talab qiladi. Agar uzluksiz integral osti funksiyaning boshlang'ichi ma'lum bo'lsa, aniq integralni ana shu boshlang'ich yordamida hisoblash mumkinligi quyidagi teorema tasdig'ida keltirilgan.

6.10-Teorema (integral hisobning asosiy teoremasi). $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lsin. Agar $F(x)$ funksiya uning bu kesmadagi ixtiyoriy boshlang'ichi bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (6.15)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu formula *Nyuton-Leybnis formulasi* deb ataladi.

► 6.1-Natijaga ko'ra $f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesmadagi ixtiyoriy boshlang'ichini

$$F(x) = C + \int_a^x f(t)dt$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin. Bu yerda x o'rniga a qiymatni qo'yib, $F(a) = C$ tenglikga ega bo'lamiz va bundan esa

$$F(x) = F(a) + \int_a^x f(t)dt$$

tenglik hosil bo'ladi. Keyingi qadamda x o'rniga b qiymatni qo'yib (6.15) tenglikni hosil qilamiz. ◀

(6.15) tenglikning o'ng tomonidagi ayirma simvolik ravishda $F(x)|_a^b$ ko'rinishda yoziladi va natijada Nyuton-Leybnis formulasi

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$$

ko'rinishni oladi.

Aniq integralda o'zgaruvchilarni almashtirish. (6.15) Nyuton-Leybnis formulasi aniq integral belgisi ostida o'zgaruvchilarni almashtirish imkonini beradi.

6.11-Teorema. Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz, $\varphi(t)$ funksiya esa $[\alpha; \beta]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi, bunda $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ va $t \in [\alpha; \beta]$ bo'lganda $\varphi(t) \in [a; b]$ bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \quad (6.16)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu formula aniq integralda *o'zgaruvchilarni almashtirish formulasi* deb ataladi.

► Shartga ko'ra $f(x)$ va $\varphi(t)$ funksiyalar mos ravishda $[a; b]$ va $[\alpha; \beta]$ kesmalarda uzluksiz va $t \in [\alpha; \beta]$ bo'lganda $\varphi(t) \in [a; b]$, u holda 2.20-Teoremaga ko'ra $f(\varphi(t))$ murakkab funksiya $[\alpha; \beta]$ kesmada uzluksiz bo'ladi. Integral osti funksiyalarning uzluksizligi tufayli nafaqat (6.16) tenglikdagi aniq integrallar, balki ularga mos aniqmas integrallar ham mavjud. Shuning uchun (6.16) tenglikdagi ikkala integralni ham hisoblashda Nyuton-Leybnis formulasidan foydalanish mumkin.

Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning birorta boshlang'ichi bo'lsa,

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Aniqmas integralning invariantlik xossasiga ko'ra

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C_1.$$

Ikkala integralga ham Nyuton-Leybnis formulasini qo'llab

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

va

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

tengliklarni hosil qilamiz va ulardan (6.16) kelib chiqadi. ◀

6.4-Misol. $\int_1^e \frac{dx}{(1 + \ln^2 x)}$ integralni hisoblang.

► $\ln x = t$ almashtirishdan foydalanamiz. U holda $x = e^t, dx = e^t dt$. Integrallash chegaralarini hisoblaymiz: $\ln x = t$ tenglikda $x = 1$ bo'lsa, $t = \ln 1 = 0$ va $x = e$ bo'lsa $t = \ln e = 1$ bo'ladi. Demak x o'zgaruvchi $[1; e]$ kesmada o'zgarsa, yangi t o'zgaruvchi $[0; 1]$ kesmada o'zgarar ekan. Shunday qilib

$$\begin{aligned} \int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)} &= \left| \begin{array}{l} \ln x = t \Rightarrow x = e^t, dx = e^t dt, \\ \text{agar } x = 1 \text{ bo'lsa, } t = 0, \\ \text{agar } x = e \text{ bo'lsa, } t = 1. \end{array} \right| = \int_0^1 \frac{e^t dt}{e^t(1 + t^2)} = \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{1 + t^2} = \arctg t \Big|_0^1 = \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4} - 0 = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

qiymatni hosil qildik. ◀

6.5-Misol. $\int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \int_0^{\pi/2} \cos^n x dx$ tenglikni isbotlang.

► O'ng tomondagi integralda $t = \pi/2 - x$ deb yangi o'zgaruvchi kiritamiz. U holda $dt = -dx$. Integrallash chegaralarini hisoblaymiz: $\pi/2 - x = t$ tenglikda $x = 0$ bo'lsa, $t = \pi/2$ va $x = \pi/2$ bo'lsa $t = 0$ bo'ladi. Demak x o'zgaruvchi 0 va $\pi/2$ oralig'ida o'zgarsa, yangi t o'zgaruvchi $\pi/2$ va 0 oralig'ida o'zgaradi. Shunday qilib, $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$ tenglikni inobatga olsak

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n \left(\frac{\pi}{2} - x \right) dx = - \int_{\pi/2}^0 \sin^n t dt = \int_0^{\pi/2} \sin^n t dt.$$

Aniq integralning qiymati integrallash o'zgaruvchisining belgilanishiga bog'liq emas, shuning uchun berilgan tenglik o'rinli. ◀

Ayrim hollarda aniq integralni hisoblashni osonlashtiradigan teoremani keltiramiz.

6.12-Teorema. $f(x)$ funksiya O koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'lgan $[-a; a], a > 0$ kesmada integrallanuvchi bo'lsin. U holda

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^a f(x) dx, & \text{agar } f(x) - \text{juft funksiya,} \\ 0, & \text{agar } f(x) - \text{toq funksiya.} \end{cases}$$

► Aniq integralning 5-xossasiga ko'ra

$$\int_{-a}^a f(x) dx = \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx$$

O'ng tomondagi birinchi integralda $x = -t, dx = -dt, t = -x$ deb o'zgaruvchilarni almashtiramiz. U holda

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = -\int_a^0 f(-t)dt = \int_0^a f(-t)dt = \int_0^a f(-x)dx$$

va demak

$$\int_{-a}^a f(x)dx = \int_0^a [f(-x) + f(x)]dx$$

Bu tenglikda juft funksiyalar uchun $f(-x) = f(x)$, toq funksiyalar uchun $f(-x) = -f(x)$ tengliklardan foydalanib, teorema tasdig'idagi tengliklarni hosil qilamiz. ◀

Aniq integralda bo'laklab integrallash.

6.13-Teorema. Agar $u(x)$ va $v(x)$ funksiyalar $[a; b]$ kesmada uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\int_a^b u dv = uv|_a^b - \int_a^b v du \quad (6.17)$$

Bu formula aniq integralda *bo'laklab integrallash formulasi* deb ataladi.

► Teoremaning shartiga ko'ra berilgan funksiyalarning $uv = u(x)v(x)$ ko'paytmasi $[a; b]$ kesmada

$$(uv)' = uv' + vu'$$

tenglik bilan aniqlanadigan hosilaga ega, ya'ni uv funksiya $uv' + vu'$ funksiyaga boshlang'ich bo'ladi. Nyuton-Leybnis formulasini qo'llab

$$\int_a^b (uv' + vu')dx = uv|_a^b$$

tenglikni hosil qilamiz. Yig'indini integrallash qoidasiga ko'ra bu tenglikni

$$\int_a^b uv' dx + \int_a^b vu' dx = uv|_a^b$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerdan

$$\int_a^b uv' dx = uv|_a^b - \int_a^b vu' dx$$

Differensialning ta'rifiga ko'ra $v' dx = dv, u' dx = dx$, shuning uchun so'ngi tenglikdan (6.17) tenglik kelib chiqadi. ◀

6.6-Misol. $\int_0^{\pi} x \cos x dx$ integralni hisoblang.

► $u = x, dv = \cos x dx$ deb bo'laklab integrallaymiz:

$$\int_0^{\pi} x \cos x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx, \\ dx = \cos x dx, v = \sin x \end{array} \right| = (x \sin x)|_0^{\pi} - \int_0^{\pi} \sin x dx =$$

$= (x \sin x)|_0^\pi + \cos x|_0^\pi = \pi \sin \pi - 0 + \cos \pi - \cos 0 = -1 - 1 = -2$
 qiymatga ega bo‘lamiz. ◀

6.8. Xosmas integrallar

Chegaralari chekli aniq integral mavjudligining zaruriy sharti integrallash oraliq‘ida integral osti funksiyaning chegaralanganligi hisoblanadi. Biroq nazariy muammolarni qarashda va amaliy masalalrni yechishda ba‘zan integrallashda chegaralanmagan funksiyalardan va cheksiz oraliqlardan foydalanish zarurati paydo keladi. Bunday hollarda yuzaga keladigan integrallar *xosmas integrallar* deb ataladi.

Cheksiz oraliq bo‘yicha integrallar. $f(x)$ funksiya $[a; +\infty)$ cheksiz yarim oraliqda aniqlangan va ixtiyoriy $[a; b]$ chekli kesmada integrallanuvchi bo‘lsin. U holda $[a; +\infty)$ cheksiz yarim oraliqda yuqori chegarasi o‘zgaruvchi bo‘lgan aniq integral sifatida

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx \quad (6.18)$$

funksiya aniqlangan.

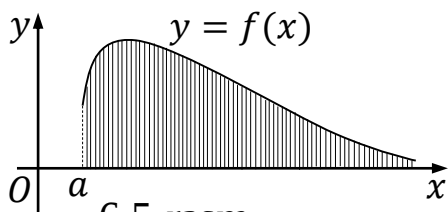
6.5-Tarif. (6.18) tenglik bilan anilantuvchi $F(b)$ funksiyaning $b \rightarrow +\infty$ dagi limitini $f(x)$ funksiyaning $[a; +\infty)$ cheksiz oraliq bo‘yicha olingan *xosmas integrali* (yoki *birinchi tur xosmas integral*) deb ataladi va

$\int_a^{+\infty} f(x)dx$ ko‘rinishda belgilanadi.

Agar aytib o‘tilgan limit mavjud va chekli bo‘lsa, xosmas integral *yaqinlashuvchi*, aks holda, ya‘ni limit cheksiz yoki mavjud bo‘lmasa, xosmas integral *uzoqlashuvchi* deyiladi.

Shunday qilib, 6.5-Ta‘rifga va (6.18) formulaga ko‘ra

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x)dx \quad (6.19)$$



6.5-rasm

Ixtiyoriy $x \in [a; +\infty)$ nuqtada $f(x) \geq 0$ bo‘lsa, yaqinlashuvchi aniqmas integralning qiymati geometrik jihatdan $x = a$ to‘g‘ri chiziq, Ox o‘q va $f(x)$ funksiyaning grafigi bilan chegaralangan cheksiz uzun egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng (6.5-rasm).

6.7-Misol. $\int_a^{+\infty} e^{-x}dx$ integralni hisoblang yoki uning uzoqlashuvchiligini aniqlang.

► Ta‘rifga ko‘ra

$$\int_a^{+\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (-e^{-x}|_a^b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{e^b} + 1\right) = 1.$$

Demak, berilgan integral yaqinlashuvchi va 1 ga teng. ◀

6.8-Misol. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ integralni hisoblang yoki uning uzoqlashuvchiligini aniqlang.

► Ta'rifga ko'ra

$$\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln x|_a^b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\ln b - \ln 1) = +\infty.$$

Demak, berilgan integral uzoqlashuvchi ekan. ◀

6.9-Misol. $\int_a^{+\infty} \cos x dx$ integralni hisoblang yoki uning uzoqlashuvchiligini aniqlang.

► Ta'rifga ko'ra

$$\int_a^{+\infty} \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \cos x dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sin x|_a^b) = \lim_{b \rightarrow +\infty} (\sin b).$$

Biroq so'ngi limit mavjud emasligi ma'lum, shuning uchun ta'rifga ko'ra berilgan integral uzoqlashuvchi bo'ladi. ◀

6.10-Misol. $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ integral α parametrning qanday qiymatlarida yaqinlashuvchi bo'lishini aniqlang.

► $\alpha = 1$ bo'lganda $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx$ integralning uzoqlashuvchi bo'lishini 6.8-misolda ko'rdik.

$\alpha \neq 1$ bo'lganda ta'rifga ko'ra

$$\begin{aligned} \int_a^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha} dx &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b \frac{1}{x^\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \Big|_a^b \right) = \lim_{b \rightarrow +\infty} \frac{b^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \\ &= \begin{cases} +\infty, & \text{agar } \alpha < 1 \\ \frac{1}{\alpha-1}, & \text{agar } \alpha > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Shunday qilib, $\alpha \leq 1$ bo'lsa, berilgan integral uzoqlashuvchi va $\alpha > 1$ bo'lsa yaqinlashuvchi bo'lar ekan. ◀

6.2-Mulohaza. Agar $F(+\infty) = \lim_{b \rightarrow +\infty} F(b)$ deb shartli belgilashni kiritsak, xosmas integralning ta'rifiga ko'ra

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} (F(b) - F(a)) = F(+\infty) - F(a)$$

tenglikini yozish mumkin, bu yerda $F'(x) = f(x)$. Bu esa xosmas integral uchun Nyuton-Leybnis formulasini

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = F(x)|_a^{+\infty} = F(+\infty) - F(a)$$

ko‘rinishda yozish imkonini beradi.

$f(x)$ funksiya $(-\infty; b]$ cheksiz yarim oraliqda aniqlangan va ixtiyoriy $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi bo‘lsin. U holda $(-\infty; b]$ cheksiz yarim oraliqda quyi chegarasi o‘zgaruvchi bo‘lgan aniq integral sifatida

$$\Psi(a) = \int_a^b f(x)dx \quad (6.20)$$

funksiya aniqlangan.

6.6-Tarif. (6.20) tenglik bilan aniqlanuvchi $\Psi(a)$ funksiyaning $a \rightarrow -\infty$ dagi limitini $f(x)$ funksiyaning $(-\infty; b]$ cheksiz oraliq bo‘yicha olingan *xosmas integrali* deb ataladi va $\int_{-\infty}^b f(x)dx$ ko‘rinishda belgilanadi.

Agar aytib o‘tilgan limit mavjud va chekli bo‘lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi, aks holda, ya’ni limit cheksiz yoki mavjud bo‘lmasa, xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

Nihoyat, agar $f(x)$ funksiya burun $\mathbb{R}$ son o‘qida aniqlangan va ixtiyoriy $[a; b]$ chekli kesmada integrallanuvchi bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $c \in \mathbb{R}$ uchun

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx \quad (6.21)$$

tenglik bilan $f(x)$ funksiya cheksiz $(-\infty; +\infty)$ oraliq bo‘yicha xosmas integral aniqlanadi. Agar (6.21) tenglikning o‘ng tomonidagi ikkala xosmas integral ham bir-biriga bog‘liq bo‘lmagan holda yaqinlashuvchi bo‘lsa, bunday xosmas integral yaqinlashuvchi, aks holda, ya’ni bu ikki xosmas integrallardan biri yoki ikkalasi ham uzoqlashuvchi bo‘lsa, bu xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

6.14-Teorema. (6.21) tenglik bilan aniqlanuvchi xosmas integralning yaqinlashuvchiligi va qiymati $c \in \mathbb{R}$ nuqtaning joylanishiga bog‘liq emas.

► Isbot uchun $d \in \mathbb{R}$ ($d \neq c$) nuqtani olamiz va

$$\int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^d f(x)dx + \int_d^{+\infty} f(x)dx$$

ekanligini ko‘rsatamiz.

Xosmas integrallarning 6.5, 6.6-Tariflaridan va aniq integralning 5-xossasiga ko‘ra

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^d f(x)dx + \int_d^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx = \\
&= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^d f(x)dx + \int_d^c f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_c^b f(x)dx = \\
&= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^d f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\int_d^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \right) = \\
&= \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^d f(x)dx + \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_d^b f(x)dx = \int_{-\infty}^d f(x)dx + \int_d^{+\infty} f(x)dx
\end{aligned}$$

tenglik teoremaning tasdig'ini isbotlaydi. ◀

Cheksiz oraliq bo'yicha yaqinlashuvchi xosmas integrallarning asosiy xossalari. *Cheksiz oraliq bo'yicha yaqinlashuvchi xosmas integrallarning xossalari aniq integralning xossalari bilan bir xil va shuning uchun bu xossalarning bayoni bilangina chegaralanamiz. Ularning isbotini kitobxon xosmas integralning 6.5 va 6.6-Tariflaridan, aniq integralning mos xossalari va funksiya limitining xossalari foydalanib isbot qilishi mumkin.*

Biz quyida $[a; +\infty)$ oraliq bo'yicha xosmas integrallarning xossalarini keltiramiz. Bu xossalar $(-\infty; b]$ va $(-\infty; +\infty)$ oraliqlar bo'yicha olingan xosmas integrallar uchun ham o'rinli.

1) Agar yaqinlashuvchi xosmas integralda integrallash chegaralarining o'rnini almashtirilsa, integral o'z ishorasini o'zgartiradi:

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = - \int_{+\infty}^a f(x)dx \quad (6.22)$$

2) $f(x)$ funksiya ixtiyoriy $[a; b] \subset [a; +\infty)$ kesmada integrallanuvchi va $c > a$ bo'sin. U holda $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ va $\int_c^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integrallar bir vaqtda yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'ladi va bu xosmas integrallar yaqinlashuvchi bo'lsa

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^{+\infty} f(x)dx \quad (6.23)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

3) Yaqinlashuvchi xosmas integral chiziqlilik xossasiga ega, ya'ni agar $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ va $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ xosmas integrallar yaqinlashuvchi bo'lsa, $\lambda f(x) + \mu g(x)$ ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$) funksiyaning $[a; +\infty)$ oraliq bo'yicha xosmas integrali yaqinlashuvchi bo'ladi va

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f(x) + \mu g(x)) dx = \lambda \int_a^{+\infty} f(x) dx + \mu \int_a^{+\infty} g(x) dx \quad (6.24)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

4) $[a; +\infty)$ oraliqda $f(x) \leq g(x)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning bu oraliq bo'yicha yaqinlashuchi xosmas integrallari uchun

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \leq \int_a^{+\infty} g(x) dx \quad (6.25)$$

tengsizlik o'rinli.

Cheksiz oraliq bo'yicha xosmas integrallarning yaqinlashish alomatlari. Funksiyani cheksiz oraliq bo'yicha integrallashdan oldin, birinchidan, u bu oraliqqa tegishli bo'lgan ixtiyoriy kesma bo'yicha integrallanuvchi ekanligiga, va ikkinchidan, bu funksiyaning mos xosmas integrali yaqinlashuvchi bo'lishiga ishonch hosil qilish kerak. Cheksiz oraliq bo'yicha xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lishining bir necha belgilarini ko'rib chiqamiz.

6.15-Teorema. Ixtiyoriy $b > a$ uchun $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a; b]$ kesmada integrallanuvchi va ixtiyoriy $x \in [a; b]$ nuqtada $0 \leq f(x) \leq g(x)$ bo'lsin. U holda

1) Agar $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

2) Agar $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integral uzoqlashuvchi bo'lsa, $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ integral ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

► 1) $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsin. Ixtiyoriy $x \geq a$ nuqtada $f(x) \geq 0$ bo'lganligi uchun $F(b) = \int_a^b f(x) dx$ funksiya b argumentning kamaymaydigan funksiyasi bo'ladi, chunki agar $b < c$ bo'lsa,

$$F(c) = \int_a^c f(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx \geq \int_a^b f(x) dx = F(b).$$

Ixtiyoriy $x \geq a$ nuqtada $f(x) \leq g(x)$ bo'lganligi uchun, aniq integralning 8-xossasiga ko'ra ixtiyoriy $[a; b]$ kesmada

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Biroq bu tengsizlikning o‘ng tomonidagi integral $g(x)$ funksiyaning $[a; +\infty)$ oraliq bo‘yicha yaqinlashuvchi xosmas integralidan katta emas. Shu sababli ixtiyoriy $a < b$ uchun

$$F(b) = \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^{+\infty} g(x)dx = I.$$

Shunday qilib, $F(b) = \int_a^b f(x)dx$ integral b argumentning kamaymaydigan va yuqoridan chegaralangan funksiyasi ekan. Shuning uchun, monoton va chegaralangan funksiya limiti mavjudligi haqidagi 4.1-Tasdiqqa ko‘ra $F(b)$ funksiya $b \rightarrow +\infty$ da chekli limitga ega bo‘ladi, bu esa ta’rifga ko‘ra $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integralning yaqinlashuvchi ekanligini anglatadi.

2) $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral uzoqlashuvchi bo‘lsin. Teskarisidan faraz qilaylik, ya’ni, $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo‘lsin. U holda teoremaning isbot qilingan birinchi qismiga ko‘ra $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo‘ladi bu esa teorema shartiga ziddir. Shuning uchun $g(x)$ funksiyaning $[a; +\infty)$ oraliq bo‘yicha olingan xosmas integralning yaqinlashuvchi degan faraz noto‘g‘ri, ya’ni $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi. ◀

6.16-Teorema. $f(x)$ va $g(x)$ funksiylar ixtiyoruy $[a; b] \subset [a; +\infty)$ kesmada integrallanuvchi va $x \geq a$ bo‘lganda nomanfiy qiymatlarni qabul qilsin va $g(x)$ funksiya x argumentning yetarlicha katta qiymatlarida nolga aylanmasin. U holda, agar chekli musbat

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k > 0 \quad (6.26)$$

limit mavjud bo‘lsa,

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx \text{ va } \int_c^{+\infty} f(x)dx \quad (6.27)$$

xosmas integrallar bir vaqtda yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo‘ladi.

► (6.26) tenglikdan limitning ta’rifiga ko‘ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $M > 0$ son topilib, $x > M$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalarda

$$(k - \varepsilon)g(x) < f(x) < (k + \varepsilon)g(x) \quad (6.28)$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi. Biz $a > M$ deb hisoblashimiz mumkin, chunki xosmas integralning ikkinchi xossasiga ko‘ra $[a; +\infty)$ va $[M; +\infty)$ oraliqlar bo‘yicha olinadigan xosmas integrallar bir vaqtda yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo‘ladi.

ε sonni $k - \varepsilon > 0$ bo‘ldigan qilib tanlaymiz. Agar (6.27) integrallarning ikkinchisi yaqinlashuvchi bo‘lsa, 3-xossaga binoan $\int_a^{+\infty} (k + \varepsilon)g(x)dx$ integral ham va demak 6.14-teoremaga ko‘ra (6.27) integrallarning birinchisi ham yaqinlashuvchi bo‘ladi. Agar birinchi integral yaqinlashuvchi bo‘lsa, 6.14-Teoremaga ko‘ra $\int_a^{+\infty} (k + \varepsilon)g(x)dx$ integral ham va demak (6.27) integrallarning ikkinchisi ham yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Endi (6.27) integrallarning biri uzoqlashuvchi bo‘lsa, ikkinchisi ham uzoqlashuvchi bo‘lishini ko‘rsatamiz. Bu integrallardan birinchisi uzoqlashuvchi bo‘lsin, (6.28) tengsizliklarni inobatga olsak, 6.14-Teoremaga ko‘ra $\int_a^{+\infty} (k + \varepsilon)g(x)dx$ va demak 3-xossaga ko‘ra esa (6.27) integrallarning ikkinchisi ham uzoqlashuvchi bo‘ladi. Xuddi shu singari ikkinchi integral uzoqlashuvchi bo‘lsa, 3-xossaga ko‘ra $\int_a^{+\infty} (k - \varepsilon)g(x)dx$ integralning uzoqlashuvchiligi va bundan esa 6.14-Teoremaga binoan (6.27) integrallardan birinchisining uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi. ◀

6.17-Teorema. 1) Agar x argumentning yetarlicha katta qiymatlarida $0 \leq f(x) \leq M/x^\alpha$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral yaqinlashuvchi bo‘ladi, bu yerda $\alpha > 1$ va $M > 0$ o‘zgarmas sonlar.

2) Agar x argumentning yetarlicha katta qiymatlarida $M/x \leq f(x)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral uzoqlashuvchi bo‘ladi, bu yerda $M > 0$.

► 1) Teorema shartiga bo‘yicha $\alpha > 1$, u holda 6.10-Misolga ko‘ra $\bar{g}(x) = 1/x^\alpha$ funksiyaning $[a; +\infty)$ oraliq bo‘yicha xosmas integrali yaqinlashuvchi va demak 3-xossaga binoan $g(x) = M/x^\alpha$ funksiyaning ham bu oraliq bo‘yich xosmas integrali yaqinlashuvchi bo‘ladi. Teorema

shartidagi $0 \leq f(x) \leq M/x^\alpha$ tengsizlikni inobatga olsak, 6.14-Teoremaga ko'ra $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

2) 6.8-Misolda $\bar{g}(x) = 1/x$ funksiyaning $[a; +\infty)$ oraliq bo'yicha xosmas integrali uzoqlashuvchi ekanligini ko'rgan edik, u holda 3-xossaga ko'ra $g(x) = M/x$ funksiyaning ham xosmas integrali uzoqlashuvchi bo'ladi. Agar teorema shartidagi $M/x \leq f(x)$ tengsizlikni inobatga olsak,

6.14-Teoremaga ko'ra $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ integral ham uzoqlashuvchi bo'ladi. ◀

6.11-Misol. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^5}}$ integral yaqinlashishini tekshiring.

► $x \geq 1$ bo'lsa, $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1+x^5}} < \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} = g(x)$ bo'ladi va 6.10-

Misolga ko'ra $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{x^5}}$ integral yaqinlashuvchi bo'ladi, u holda 6.14-

Teoremaga ko'ra $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^5}}$ integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi. ◀

6.12-Misol. $\int_1^{+\infty} \frac{x+2}{x\sqrt{x}} dx$ integral yaqinlashishini tekshiring.

► $x \geq 1$ bo'lsa, $f(x) = \frac{x+2}{x\sqrt{x}} > \frac{x}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} = g(x)$. 6.10-Misolda

$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ xosmas integralning uzoqlashuvchi ekanligini ko'rgan edik.

Shuning uchun 6.14-Teoremaga ko'ra berilgan integral ham uzoqlashuvchi bo'ladi. ◀

6.13-Misol. $\int_1^{+\infty} \frac{2x^2+1}{x^3+3x+4} dx$ integral yaqinlashishini tekshiring.

► $x \geq 1$ bo'lganda integral ostidagi funksiya $f(x) = \frac{2x^2+1}{x^3+3x+4} >$

0 va uni $f(x) = \frac{2+1/x^2}{x+3/x+4/x^2}$ ko'rinishda yozamiz. Integral ostidagi

funksiyaning bu tasviridan ko'rinib turibdiki, $x \rightarrow +\infty$ da u $\bar{f}(x) = 2/x$ funksiya singari o'zgaradi. Shuning uchun taqqoslash funksiyasi sifatida $g(x) = 1/x$ funksiyani olamiz.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x^2+1}{x^3+3x+4} : \frac{1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2x^2+1)x}{x^3+3x+4} = 2 \neq 0,$$

ekanligini va $\int_a^{+\infty} \frac{1}{x} dx$ integralning uzoqlashuvchiligini (6.8-Misol)

inobatga olsak, 6.15 -Teoremaga ko'ra $\int_1^{+\infty} \frac{2x^2 + 1}{x^3 + 3x + 4} dx$ integral ham uzoqlashuvchi bo'ladi. ◀

6.7-Ta'rif. Agar $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ xosmas integral absolyut yaqinlashuvchi deyiladi.

6.8-Ta'rif. Agar $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integral yaqinlashuvchi, $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ integral esa uzoqlashuvchi bo'lsa, $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ xosmas integral shartli yaqinlashuvchi deyiladi.

6.18-Teorema. Agar $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

► $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan ixtiyoriy x nuqtada $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ tengsizli o'rinli bo'ladi. Bu tengsizlikdan esa $0 \leq |f(x)| + f(x) \leq 2|f(x)|$ tengsizlini yozish mumkin.

Teorema shartiga ko'ra $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ integral yaqinlashuvchi, shuning uchun $\int_a^{+\infty} 2|f(x)| dx = 2 \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi. U holda 6.15-Teoremaga ko'ra $|f(x)| + f(x)$ funksiyaning $[a; +\infty)$ oraliq bo'yicha xosmas integrali ham yaqinlashuvchi bo'ladi. Xosmas integrallarning 3-xossasiga ko'ra (6.24) tenglikda $\lambda = 1, \mu = -1$ deb olib

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \int_a^{+\infty} (|f(x)| + f(x)) dx - \int_a^{+\infty} |f(x)| dx$$

tenglikni yozamiz. Bu tenglikning o'ng tomonidagi ikkala integral ham yaqinlashuvchi, shuning uchun chap tomonfagi integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi. ◀

6.19-Teorema (Abel-Dirixle alomati). $[a; +\infty)$ oraliqda uzluksiz $f(x)$ funksiya chegaralangan $F(x)$ boshlang'ichga ega, $g(x)$ funksiya

esa bu oraliqda uzluksiz differensiallanuvchi va monoton kamayuvchi bo'lib, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ bo'lsin. U holda $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'ladi.

► Teorema shartiga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a; +\infty)$ oraliqda uzluksiz, u holda 6.3-Teoremaga ko'ra u ixtiyoriy $[a; b] \subset [a; +\infty)$ kesmada integrallanuvchi bo'ladi. $f(x)g(x)$ ko'paytmaning uzluksizligi tufayli u ham bunday kesmalarda integrallanuvchi bo'ladi. $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ichi bo'lganligi uchun $f(x)dx = d(F(x))$ bo'ladi. Bo'laklab integrallab

$$\begin{aligned} \int_a^x f(t)g(t)dt &= \int_a^x g(t)d(F(t)) = \\ &= F(x)g(x) - F(a)g(a) - \int_a^x F(t)g'(t)dt. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Teorema shartiga ko'ra $[a; +\infty)$ oraliqda $F(x)$ funksiya chegaralangan, ya'ni shunday $M > 0$ soni mavjudki, ixtiyoriy $x \geq a$ nuqtalarda $|F(x)| < M$ o'rinli va $x \rightarrow +\infty$ da $g(x) \rightarrow 0$, u holda 2.11-Teoremaga ko'ra $F(x)g(x)$ ko'paytma $x \rightarrow +\infty$ da cheksiz kichik bo'ladi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)g(x) = 0.$$

$g(x)$ funksiya $[a; +\infty)$ oraliqda monoton kamayuvchi bo'lganligi uchun, ixtiyoriy $x \geq a$ nuqtada $g'(x) \leq 0$ bo'ladi va

$$\begin{aligned} \int_a^x |F(t)g'(t)|dt &\leq M \cdot \int_a^x |g'(t)|dt = -M \int_a^x g'(t)dt = \\ &= M(g(a) - g(x)) \leq Mg(a), \end{aligned}$$

chunki ixtiyoriy $x \geq a$ nuqtada $g(x) \geq 0$ va $g(a) \geq g(x)$.

Demak, $\Phi(x) = \int_a^x |F(t)g'(t)|dt$ funksiya yuqoridan chegaralangan ekan, ma'lumki u $[a; +\infty)$ oraliqda kamaymaydi. Shuning uchun, monoton va chegaralangan funksiya limiti mavjudligi haqidagi 4.1-Tasdiqqa ko'ra $\Phi(x)$ funksiya $x \rightarrow +\infty$ da chekli limitga ega bo'ladi.

Shunday qilib, (6.29) tenglikning o'ng tomonidagi barcha hadlar $x \rightarrow +\infty$ da chekli limitga ega bo'lar ekan. Shuning uchun bu tenglikning chap tomonidagi ifoda ham $x \rightarrow +\infty$ da chekli limitga ega bo'ladi, bu esa $f(x)g(x)$ funksiyaning $[a; +\infty)$ oraliq bo'yicha xosmas integrali yaqinlashuvchi ekanligini anglatadi. ◀

6.14-Misol. $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^\alpha} dx, \alpha > 0$ integral yaqinlashishini tekshiring.

► Integral ostidagi funksiyani $f(x) = \sin x$ va $g(x) = 1/x^\alpha$ funksiyalarning ko'paytmasi sifatida tasvirlash mumkin. $f(x) = \sin x$ funksiya hamma joyda chegaralangan $F(x) = -\cos x$ boshlang'ichga ega, $g(x) = 1/x^\alpha$ funksiya esa $x \geq 1$ bo'lganda uzluksiz differensiallanuvchi va monoton kamayadi, hamda $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1/x^\alpha = 0$.

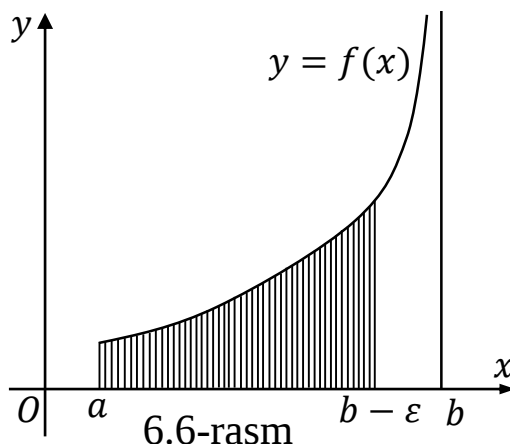
Demak, Abel-Dirixle alomatining barcha shartlari bajarilar ekan, shuning uchun berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi. ◀

Chegaralanmagan funksiyalarning integrallari. $f(x)$ funksiya ixtiyoriy yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ qiymatda $[a; b - \varepsilon]$ kesmada integrallanuvchi, ammo $[a; b)$ oraliqda chegaralanmagan bo'lsin.

ε o'zgaruvchining

$$J(\varepsilon) = \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx$$

funksiyasini aniqlaymiz. Agar $[a; b)$ da $f(x) \geq 0$ bo'lsa, bu funksiya yuzani aniqlaydi (6.6-rasm).



6.9-Ta'rif. Agar chekli $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} J(\varepsilon) = J$ limit mavjud bo'lsa, bu limitni biz $f(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesma bo'yicha olingan xosmas integrali deb ataymiz va uni aniq integrallardagi singari $\int_a^b f(x) dx$ ko'rinishda belgilaymiz.

Chegaralanmagan funksiyaning xosmas integralini ikkinchi tur xosmas integral deb ataymiz. Shunday qilib ikkinchi tur xosmas integrallar

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \quad (6.30)$$

tenglik bilan aniqlanar ekan.

Agar (6.30) tenglikning o'ng tomonidagi chekli limit mavjud bo'lsa, $\int_a^b f(x) dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi, aks holda, ya'ni limit mavjud bo'lmasa yoki cheksiz bo'lsa xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

6.10-Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $\varepsilon > 0$ ning ixtiyoriy yetarlicha qiymatida $[a + \varepsilon; b]$ kesmada integrallanuvchi va $(a; b]$ oraliqda chegaralanmagan bo'lsa,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \quad (6.31)$$

tenglik bilan aniqlanuvchi integralga ikkinchi tur xosmas integral deb ataymiz.

(6.31) tenglikning o'ng tomonidagi limit chekli bo'lsa, xosmas integral yaqinlashuvchi, aks holda uzoqlashuvchi deb ataladi.

6.11-Ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $[a; c - \varepsilon]$ va $[c + \varepsilon; b]$ kesmalarda integrallanuvchi, bu yerda $\varepsilon > 0$ yetarlicha kichik ixtiyoriy son, ammo $x = c$ nuqtaning atrofida chegaralanmagan bo'lsa,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \quad (6.32)$$

tenglik bilan aniqlanuvchi integralga ikkinchi tur xosmas integral deb ataymiz.

(6.32) tenglikning o'ng tomonidagi ikkala integral ham bir-biriga bo'g'liq bo'lmagan holda yaqinlashuvchi bo'lsa, xosmas integral yaqinlasuvchi, aks holda, ya'ni bu tenglikning o'ng tomonidagi integrallardan biri yoki ikkalasi ham uzoqlashuvchi bo'lsa, xosmas integral uzoqlashuvchi deyiladi.

6.15-Misol. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ integral yaqinlashishini tekshiring.

► Integral ostidagi $f(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ funksiya ixtiyoriy $[0; 1 - \varepsilon]$ kesmada uzluksiz va demak unda integrallanuvchi, ammo $\lim_{x \rightarrow 1-0} (1/\sqrt{1-x^2}) = +\infty$. U holda ta'rifga ko'ra

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} [\arcsin(1-\varepsilon) - \arcsin 0] = \\ &= \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

Demak berilgan xosmas integral yaqinlashuvchi ekan.

Biz quyida chegaralanmagan funksiyalar xosmas integrallarining yaqinlashish alomatlarini isbotsiz keltiramiz. Ularning isboti cheksiz oraliq bo'yicha xosmas integrallardagi singari bo'ladi. Ularni tekshirib ko'rishni kitobxonga havola qilamiz.

6.20-Teorema. Ixtiyoriy yetarlicha kichik $\varepsilon > 0$ qiymatda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a; b - \varepsilon]$ kesmada integrallanuvchi, $(b - \varepsilon; b)$ oraliqda esa chegaralanmagan va $[a; b)$ oraliqda $0 \leq f(x) \leq g(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. U holda

1) agar $\int_a^b g(x)dx$ xosmas integral yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ integral ham yaqinlashadi;

2) agar $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral uzoqlashuvchi bo'lsa, $\int_a^b g(x)dx$ integral ham uzoqlashadi.

6.21-Teorema. $[a; b)$ oraliqda musbat qiymatlarni qabul qiluvchi $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = b$ nuqtaning atrofida chegaralanmagan va $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$ chekli limit mavjud bo'lsin. U holda $\int_a^b f(x)dx$ va $\int_a^b g(x)dx$ xosmas integrallar bir vaqtda yaqinlashadi yoki uzoqlashadi.

6.12-Ta'rif. Agar $\int_a^b |f(x)|dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ integral absolyut yaqinlashuvchi deyiladi.

6.22-Teorema. Agar $\int_a^b |f(x)|dx$ integral yaqinlashuvchi bo'lsa, $\int_a^b f(x)dx$ integral ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

6.23-Teorema. $f(x)$ funksiya faqat $(b - \varepsilon; b)$ oraliqdagina chegaralanmagan bo'lsin, bu yerda $\varepsilon > 0$ yetarlicha kichik son. Agar shunday musbat $\alpha < 1$ son topilib, b nuqtaga yetarlicha yaqin barcha x ($x < b$) nuqtalarda $|f(x)| \leq M/(b - x)^\alpha$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, bunda $M > 0$ va x nuqtaga bog'liq emas, u holda $\int_a^b f(x)dx$ xosmas integral absolyut yaqinlashadi.

6.9. Aniq integralning tadbirlari

Integral hisob matematik tahlilning amaliyotda eng ko'p qo'llaniladigan bo'limlaridan biri hisoblanadi. Biz quyida uning geometrik tadbirlarini va mexanikada, fizikada, texnikada va iqtisodiyotda uchraydigan masalalarni yechishda qo'llashni ko'rib chiqamiz.

Aniq integralning geometrik tadbiri

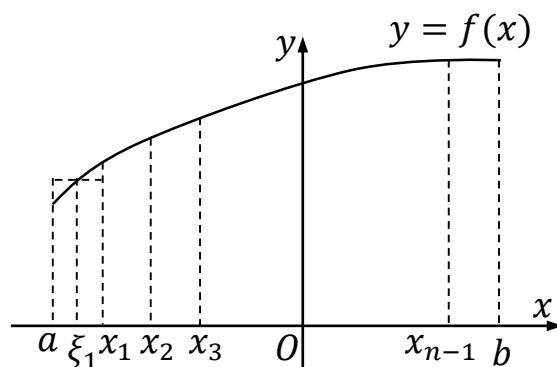
Yassi figuraning yuzi. 1) $[a; b]$ kesmada manfiy bo'lmagan qiymatlarni qabul qiluvchi $y = f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin.

$y = f(x)$ funksiyaning grafigi, Ox o'q, $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzini topamiz (6.7- rasm). Bunday figurani egri chiziqli trapetsiya deb ataymiz.

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ nuqtalar yordamida $[a; b]$ kesmani n ta $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{n-1}, b)$ qismga ajratamiz va ularning uzunliklarini mos ravishda

$$\Delta x_1 = x_1 - x_0, \Delta x_2 = x_2 - x_1, \dots, \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

orqali belgilaymiz. So'ngra bu bo'linish nuqtalari orqali Oy o'qqa parallel qilib funksiya grafigi bilan kesishguncha kesmalar o'tkazamiz.



6.7-rasm

Natijada egri chiziqli trapetsiya n ta yo'lakga bo'linadi.

Birinchi yo'lakni Δx_1 asosli va balandligi $f(\xi_1)$ bo'lgan to'g'ri tortburchak bilan almashtiramiz, bu yerda ξ_1 —to'g'ri tortburchakning asosi bo'lgan $[x_0; x_1]$ kesmadan olingan birorta nuqta. Bu to'g'ri tortburchakning yuzi $f(\xi_1)\Delta x_1$ ga teng.

Bunday almashtirishni ikkinchi, uchinchi va boshqa yo'laklar bilan bajaramiz. Natijada yuzlari $f(\xi_2)\Delta x_2, f(\xi_3)\Delta x_3, \dots, f(\xi_n)\Delta x_n$ ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklarni hosil qilamiz. Ana shu to'g'ri to'rtburchaklar yuzlari yig'indisini trapetsiya yuzining taqribiy qiymati sifatida olamiz:

$$S \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

Aniq integralni kiritishdagi singari d orqali Δx_i kesmalar uzunliklarining eng kattasini belgilaymiz. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzi deb hosil qilingan yig'indining $d \rightarrow 0$ dagi limitiga aytamiz, ya'ni

$$S = \lim_{d \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i.$$

Bu limit esa integral ekanligi ravshan, shuning uchun egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

$$S = \int_a^b f(x)dx \quad (6.32)$$

formula bilan hisoblanadi.

2) Endi $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada manfiy qiymatlarni qabul qilsin. U holda $y = f(x)$ funksiyaning grafigi Ox o'qdan pastda joylashgan bo'ladi va

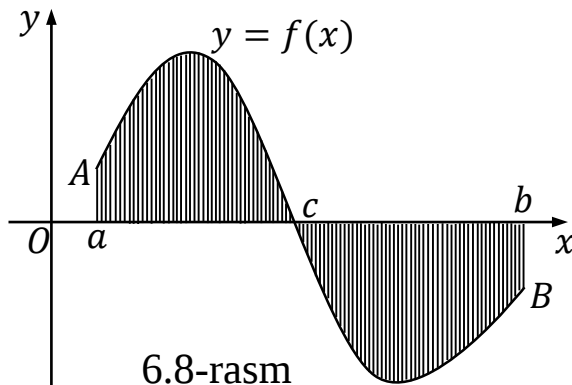
$$\int_a^b f(x)dx < 0$$

bo'ladi. Shuning uchun bu funksiyaning grafigi hosil qilgan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi

$$S = - \int_a^b f(x) dx \text{ yoki } S = \left| \int_a^b f(x) dx \right| \quad (6.33)$$

formula bilan hisoblanadi.

3) x o'zgaruvchi $c \in (a; b)$ nuqtadan o'tishda $f(x)$ funksiya o'z ishorasini o'zgartirsin, ya'ni $abAB$ egri chiziqli trapetsiyaning bir qismi Ox o'qdan yuqorida, qolgan qismi esa Ox o'qdan pastda joylashgan bo'lsin (6.8-rasm). Bu holda aytib o'tilgan yuza ikkita yuzaning yig'indisidan iborat bo'ladi:



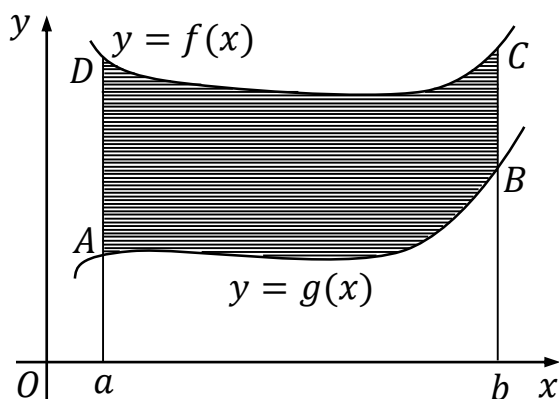
6.8-rasm

$$S = S_{aAc} + S_{cBb} = \int_a^c f(x) dx + \left| \int_c^b f(x) dx \right|$$

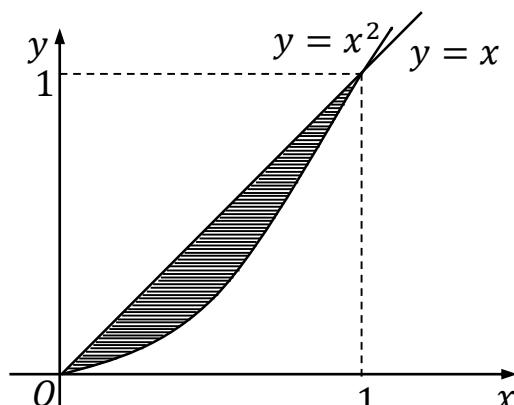
yoki

$$S = \int_a^c f(x) dx - \int_c^b f(x) dx \quad (6.34)$$

4) $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a; b]$ kesmada uzluksiz va $f(x) > g(x) > 0$ bo'lsin. Yuqoridan $y = f(x)$ egri chiziq bilan, quyidan esa $y = g(x)$ egri chiziq bilan yon tomonlardan esa $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan figuraning S yuzi $aDCb$ rapetsiyaning S_{aDCb} yuzi bilan $aABb$ trapetsiyaning S_{aABb} yuzlarining ayirmasiga teng (6.9- rasm).



6.9-rasm



6.10-rasm

Shunday qilib

$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

yoki

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx \quad (6.35)$$

formulaga ega bo'lamiz.

6.16-Misol. $y = x^2$ va $y = x$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzini toping (6.10-rasm).

► Bu chiziqlar kesishgan nuqtani topamiz: $x^2 = x$ yoki $x(x - 1) = 0$. Demak chiziqlar $O(0; 0)$ va $P(1; 1)$ nuqtalarda kesishar ekan. U holda integrallash chegaralari $a = 0$ va $b = 1$ bo'ladi. Shuning uchun qidirilayotgan yuzani (6.35) formula bo'yich topsak

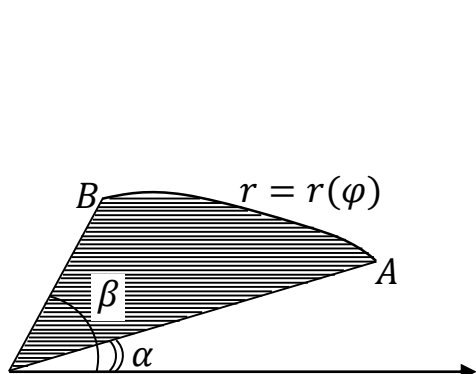
$$S = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^1 - \left. \frac{x^3}{3} \right|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

5) Egri chiziq qutb koordinatalarida $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [\alpha; \beta]$ tenglama bilan berilgan bo'lsin (6.11-rasm). Bu egri chiziq va qutb o'qi bilan mos ravishda α va β burchak tashkil qiluvchi o'qlar bilan chegaralangan figurani egri chiziqli sektor deb ataymiz. Ana shu egri chiziqli sektorning yuzi

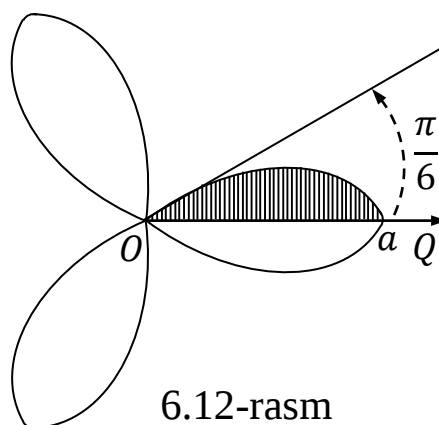
$$S = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2(\varphi) d\varphi \quad (6.36)$$

formula bilan hisoblanadi.

6.17-Misol. $r = a \cos 3\varphi$ chiziq bilan chegaralangan “uch bargli gul” figurasining yuzini toping (6.12-rasm).



6.11-rasm



6.12-rasm

► Dastlab “gulning” bitta bargi yuzining yarmini, ya'ni figura yuzining 1/6 qismini hisoblaymiz.

$$\frac{1}{6}S = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/6} (a \cos 3\varphi)^2 d\varphi = \frac{a^2}{2} \int_0^{\pi/6} \frac{1 + \cos 6\varphi}{2} d\varphi =$$

$$= \frac{a^2}{4} \left(\varphi \Big|_0^{\pi/6} + \frac{1}{6} \sin 6\varphi \Big|_0^{\pi/6} \right) = \frac{\pi a^2}{24}.$$

Bundan esa $S = \pi a^2/4$ yuzaning qiymatini hosil qilamiz. ◀

6) Egri chiziqli trapetsiya

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad t \in [\alpha; \beta]$$

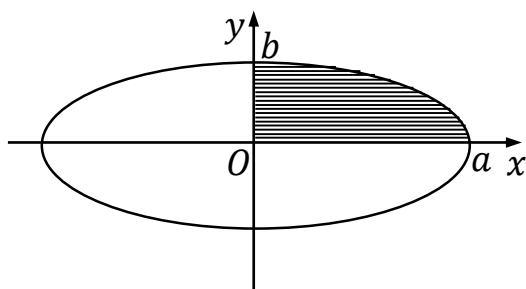
parametrik tenglama bilan berilgan egri chiziq va $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar va Ox bilan chegaralangan bo'lsa, uning yuzi

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} y(t)x'(t)dt \quad (6.37)$$

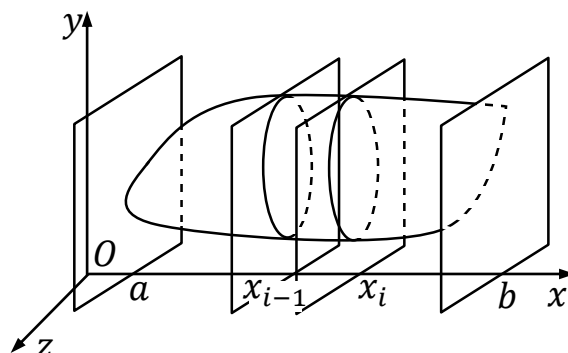
formula bilan hisoblanadi, bu yerda α va β integrallash chegaralari $x(\alpha) = a$ va $x(\beta) = b$ tengliklardan aniqlanadi.

6.18-Misol. $x = a \cos t, y = b \sin t$ ellips bilan chegaralangan figuraning yuzini toping.

► Dastlab S yuzaning $1/4$ qismini topamiz. Bu yerda x o'zgaruvchi 0 dan a gacha o'zgaradi, demak t o'zgaruvchi $\pi/2$ dan 0 gacha o'zgaradi (6.13-rasm). U holda



6.13-rasm



6.14-rasm

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}S &= \int_{\pi/2}^0 b \sin t \cdot (-a \sin t)dt = -ab \int_{\pi/2}^0 \sin^2 t dt = \\ &= \frac{ab}{2} \int_{\pi/2}^0 (1 - \cos 2t)dt = ab \left(\frac{t}{2} \Big|_0^{\pi/2} - \frac{\sin 2t}{4} \Big|_0^{\pi/2} \right) = \frac{\pi ab}{4}. \end{aligned}$$

Bundan esa $S = \pi ab$ qidirilayotgan yuzani hosil qilamiz. ◀

Jism hajmi. $x = a$ va $x = b$ tekisliklar orasida joylashgan jismni qaraymiz. Bu jismning Ox o'qqa perpendikulyar tekisliklar bilan kesimining yuzi $x \in [a; b]$ nuqtaga bog'liq bo'lib, bu bog'liqlik $[a; b]$ kesmada uzluksiz $S(x)$ funksiyadan iborat bo'lsin (6.14-rasm).

$[a; b]$ kesmani $T = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, \dots, x_n = b\}$ nuqtalar yordamida n ta bo'lakga bo'lamiz, natijada qaralayotgan jism ham n ta

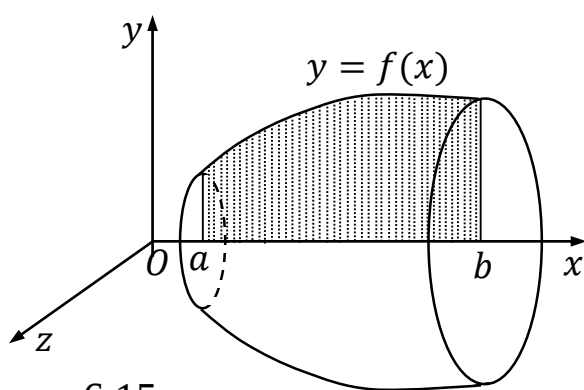
silindrsimon qismlarga bo‘linadi. $[x_{i-1}; x_i]$ kesmadan ixtiyoriy ravishda ξ_i nuqtani tanlaymiz. $[x_{i-1}; x_i]$ kesmaga mos keluvchi silindrning balandligi $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ ga teng bo‘ladi, shuning uchun bu silindr hajmining taqribiy qiymati sifatida $S(\xi_i)\Delta x_i$ ko‘paytmani olish mumkin. U holda qaralayotgan jism hajmining taqribiy qiymati sifatida

$$V \approx \sum_{i=1}^n S(\xi_i)\Delta x_i$$

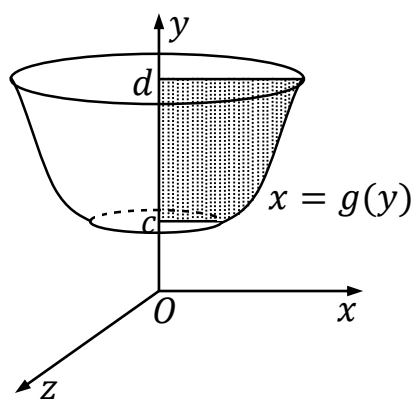
yig‘indini olish mumkin. Bu yig‘indi esa uzluksiz $S(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesma bo‘yicha integral yig‘indisi bo‘ladi. Aniq integralni kiritishdagi singari d orqali Δx_i kesmalar uzunliklarining eng kattasini belgilaymiz. $d \rightarrow 0$ da bu yig‘indining limiti $S(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesma bo‘yicha aniq integralini beradi. Shuning uchun jismning hajmi

$$V = \int_a^b S(x)dx \quad (6.38)$$

formula bilan hisoblanadi.



6.15-rasm



6.16-rasm

Yuqorida hajmi hisoblangan jismga qilingan faraz $[a; b]$ kesmada aniqlangan uzluksiz nomanfiy funksiya grafigidan hosil bo‘lgan egri chiziqli trapetsiyani Ox o‘q atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jism uchun ham o‘rinli (6.15- rasm). Bu holda $S(x) = \pi f^2(x)$ bo‘ladi, shuning uchun bu aylanma jismning hajmi

$$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx \quad (6.39)$$

formula bilan hisoblanadi. Xuddi shu singari asosi $[c; d]$ kesma bo‘lgan va bu kesmada uzluksiz nomanfiy $x = g(y)$ funksiya grafigi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyani Oy o‘q atrofida aylantirishdan hosil bo‘lgan jismning (6.16-rasm) hajmi

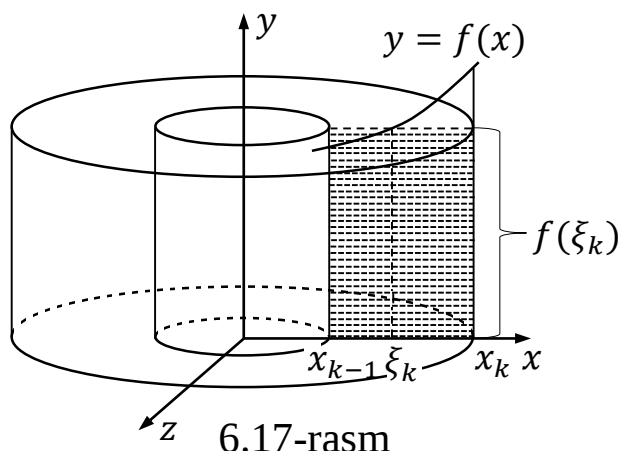
$$V_y = \pi \int_c^d g^2(y)dy \quad (6.40)$$

formula bilan hisoblanadi.

Asosi Ox o'qdagi $[a; b]$ ($a \geq 0$) kesma bo'lgan va bu kesmada uzluksiz nomanfiy $f(x)$ funksiyaning grafigi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyani Oy o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning V hajmini topamiz (6.17-rasm).

Dastlab balandligi $f(\xi_k)$, asosi $[x_{k-1}; x_k]$ kesmadan iborat bo'lgan to'g'ri to'rtburchakni Oy o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan xalqasimon silindrning hajmini topamiz. Bu hajm ikkita doiraviy silindr hajmlarining ayirmasiga teng:

$$\begin{aligned}\Delta V_k &= \pi f(\xi_k)x_k^2 - \pi f(\xi_k)x_{k-1}^2 = \pi f(\xi_k)(x_k^2 - x_{k-1}^2) = \\ &= \pi f(\xi_k)(x_k + x_{k-1})(x_k - x_{k-1}).\end{aligned}$$



$[a; b]$ kesmaning $T = \{x_0 = a, x_1, \dots, x_{k-1}, x_k, \dots, x_n = b\}$ bo'linishida Δx_k kesma uzunliklarining eng kattasi d yetarlicha kichik bo'lganda $x_k \approx x_{k-1} \approx \xi_k$ deb hisoblash mumkin bo'ladi. Shuning uchun

$$\Delta V_k \approx 2\pi f(\xi_k)\xi_k \cdot \Delta x_k$$

taqribiy tenglikga ega bo'lamiz. U holda qaralayotgan jism hajmining taqribiy qiymati sifatida

$$V \approx 2\pi \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\xi_k \Delta x_k$$

yig'indini olish mumkin. Bu yig'indi esa uzluksiz $xf(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesma bo'yicha integral yig'indisi bo'ladi. $d \rightarrow 0$ da bu yig'indining limiti $xf(x)$ funksiyaning $[a; b]$ kesma bo'yicha aniq integralini beradi. Shuning uchun jismning hajmi

$$V = 2\pi \int_a^b xf(x)dx \quad (6.41)$$

formula bilan hisoblanadi.

$f(x)$ va $g(x)$ uzluksiz funksiylar grafiklari va $x = a, x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan yassi figurani Ox va Oy o'qlar atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismlarning hajmlari mos ravishda

$$V_x = \pi \int_a^b (f^2(x) - g^2(x)) dx, \quad V_y = 2\pi \int_a^b x(f(x) - g(x)) dx \quad (6.42)$$

tengliklar bilan topiladi, bu yerda $0 \leq a \leq b$ va ixtiyoriy $x \in [a; b]$ uchun $0 \leq g(x) \leq f(x)$ deb faraz qilingan.

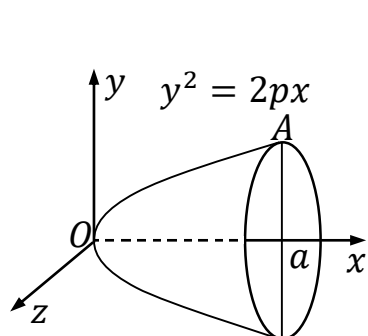
Agar egri chiziqli trapetsiyaning chegaralovchi chiziq $x = x(t), y = y(t), t \in [\alpha; \beta]$ parametrik tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, u holda bu trapetsiyaning Ox o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmini topish uchun (6.39) formulada o'zgaruvchilarni almashtirish kerak.

Bu yerda $x = a$ bo'lsa, $t = \alpha$ va $x = b$ bo'lsa, $t = \beta$ bo'ladi deb faraz qilsak

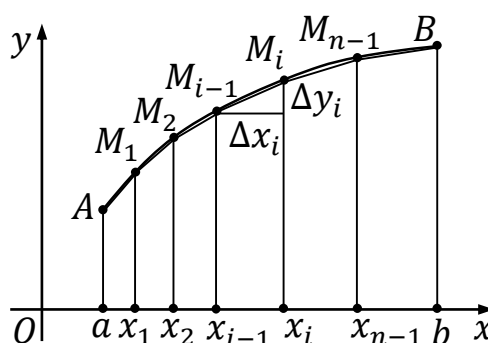
$$V_x = \pi \int_a^b y^2(t) x'(t) dt \quad (6.43)$$

tenglikni hosil qilamiz.

6.19-Misol. $y^2 = 2px$ parabolaning OA yoyini Ox o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmini toping (6.18-rasm).



6.18-rasm



6.19-rasm

► Parabolaning OA yoyi tenglamasi $y = \sqrt{2px}$, $p > 0$ bo'ladi.

Shuning uchun qaralayotgan jismning hajmi $V = \pi \int_a^b y^2 dx =$

$$\pi \int_a^b 2p x dx = \pi p a^2 \text{ bo'ladi. } \blacktriangleleft$$

Egri chiziq yoyi uzunligi. Oxy tekislikda $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ tenglama bilan egri chiziq berilgan bo'lsin (6.19-rasm). Egri chiziqning $x = a, x = b$ vertikal to'g'ri chiziqlar orasida joylashgan AB yoyining uzunligini topamiz.

Dastlab yoy uzunligi tushunchasini kiritamiz. AB yoyda absissalari $a, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n$, bo'lgan $A, M_1, M_2, \dots, M_i, \dots, M_n, B$ nuqtalarni olamiz va $AM_1, M_1M_2, \dots, M_nB$ vatarlarni o'tkazamiz. Bu vatarlarning uzunliklarini mos ravishda $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n$ orqali belgilaymiz. U holda $\overline{AB}$

yoyga ichki chizilgan $A, M_1 M_2 \dots M_n B$ siniq chiziqni hosil qilamiz. Bu siniq chiziqning uzunligi

$$s_n = \sum_{k=1}^n \Delta s_i$$

qiymatga teng bo'ladi.

$\overline{AB}$ yoyning s uzunligi deb, ichki chizilgan siniq chiziq uzunligining siniq chiziq eng katta kesmasi nolga intilgandagi limitiga aytiladi:

$$s = \lim_{\max \Delta s_i \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \Delta s_i \quad (6.44)$$

Dastlab, agar $f(x)$ funksiya va uning $f'(x)$ hosilasi $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa bu limitning mavjudligini isbotlaymiz.

Har doimgidek $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ va $\Delta y_i = f(x_i) - f(x_{i-1})$ belgilashlarni kiritamiz. U holda Pifagor teoremasiga ko'ra

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \Delta x_i$$

Ildiz ostidagi nisbatga 5.12-Lagranj teoremasini qo'llasak

$$\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i)$$

bu yerda $x_{i-1} < \xi_i < x_i$. Demak, $\Delta s_i = \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i$ bo'ladi.

Shunday qilib, ichki chizilgan siniq chiziqning uzunligi

$$s_n = \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i \quad (6.45)$$

tenglikni qanoatlantiradi.

Shartga ko'ra, $f'(x)$ hosila va demak $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz. Shuning uchun bu funksiyaning (6.45) integral yig'indisining limiti mavjud va u aniq integralga teng bo'ladi:

$$s = \lim_{\max \Delta x_i \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \Delta x_i = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

Shunday qilib, egri chiziq yoyining uzunligi uchun

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx \quad (6.46)$$

formulani hosil qildik.

6.20-Misol. $y^2 = x^3, y \geq 0$ egri chiziqning $A(0; 0)$ va $B(1; 1)$ nuqtalar orasidagi yoyining uzunligini toping.

► Egri chiziqning tenglamasidan $y = x^{\frac{3}{2}}$ tenglamani hosil qilamiz. U holda, $y' = \frac{3}{2}\sqrt{x}$. Shunday qilib, yoy uzunligi (6.46) formulaga ko'ra

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4}x} dx = \frac{9}{4} \cdot \frac{2}{3} \left(1 + \frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{8}{27} \left(\frac{13}{8}\sqrt{13} - 1\right).$$

Endi egri chiziq o'zining

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (6.47)$$

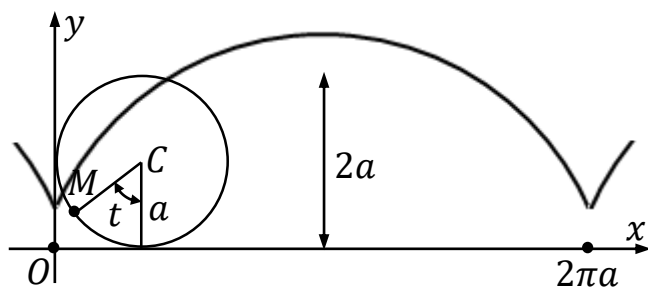
parametrik tenglamasi bilan berilgan bo'lsin, bu yerda $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ berilgan $[\alpha; \beta]$ kesmada uzluksiz va uzluksiz $\varphi'(t)$ va $\psi'(t)$ hosilalarga ega, hamda bu kesmada $\varphi'(t) \neq 0$. Bu holda (6.47) tenglamalar biror $y = f(x)$ funksiyaning aniqlaydi va uning hosilasi $\frac{dy}{dx} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$ tenglik bilan aniqlanadi.

$a = \varphi(\alpha)$, $b = \psi(\beta)$ bo'lsin. U holda (6.46) integralda $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t) dt$ deb o'zgaruvchilarni almashtirsak

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + \left[\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right]^2} \varphi'(t) dt \quad \text{yoki} \quad s = \int_\alpha^\beta \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2} dt. \quad (6.48)$$

6.21-Misol. $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ parametrik tenglamalar bilan berilgan sikloida deb ataluvchi egri chiziqning bitta arkasi uzunligini toping.

► Sirpanmasdan aylanayotgan g'ildirak aylanasi qo'zg'almas nuqtaning trayektoriyasi sikloida deb ataladi (6.20-rasm). Bitta arka parametrning $0 \leq t \leq 2\pi$ o'zgarishi bilan aniqlanadi. Koordinata funksiyalar uchun hosilalarni topamiz:



6.20-rasm

$$x'(t) = a(1 - \cos t); \quad y'(t) = a \sin t.$$

Yoy uzunligini hisoblash uchun formuladagi integral osti ifodani soddalashtiramiz:

$$\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} = \sqrt{a^2(1 - 2\cos t + \cos^2 t + \sin^2 t)} =$$

$$= \sqrt{2a^2(1 - \cos t)} = 2a \sin \frac{t}{2}.$$

Hosil qilingan ifodani (6.48) formulaga qo'yib, integralni hisoblaymiz

$$s = \int_0^{2\pi} 2a \sin \frac{t}{2} dt = 8a$$

va yoy uzunligini hosil qilamiz. ◀

Fazoviy egri chiziq

$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), (\alpha \leq t \leq \beta) \quad (6.49)$$

parametrik tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, uning yoyi uzunligi unga ichki chizilgan siniq chiziq uzunligining siniq chiziq eng uzun kesmasi nolga intilgandagi limiti sifatida aniqlanadi. Agar $\varphi(t), \psi(t), \chi(t)$ funksiyalar va ularning $\varphi'(t), \psi'(t), \chi'(t)$ hosilalari $[\alpha; \beta]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, yoy uzunligi

$$s = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt \quad (6.50)$$

formula bilan hisoblanadi.

6.22-Misol. t parametr 0 dan 2π gacha o'zgarganda $x = a \cos t, y = a \sin t, z = amt$ parametrik tenglamalar bilan berilgan vint chizig'ning uzunligini toping.

► Chiziqning tenglamalaridan hosilalar $x'_t = -a \sin t, y'_t = a \cos t, z'_t = am$ bo'ladi. Ularni (6.50) formulaga qo'yib,

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + a^2 m^2} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + m^2} dt = \\ &= 2\pi a \sqrt{1 + m^2}. \end{aligned}$$

yoy uzunligini topamiz. ◀

Egri chiziq yoyi uzunligining differensial. $y = f(x)$ tenglama bilan egri chiziq berilgan va bunda $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsin. Bu egri chiziqning boshi $A(a; f(a))$ nuqtada va oxiri o'zgaruvchan $M(x; f(x))$ nuqtada bo'lgan $\widetilde{AM}$ yoyini qaraymiz (6.21-rasm). U holda $\widetilde{AM}$ yoyining uzunligi

$$s = \int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt$$

formula bilan topiladi. Integral ostidagi $\sqrt{1 + [f'(t)]^2}$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lganligi uchun

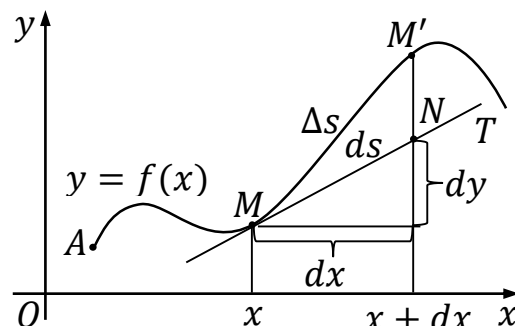
$$\frac{ds(x)}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\int_a^x \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt \right) = \sqrt{1 + [f'(x)]^2}.$$

Bu yerdan $\widetilde{AM}$ yoy uzunligining differensial uchun

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \quad (6.51)$$

formulani hosil qilamiz.

Egri chiziq yoyi uzunligi differensialining geometrik ma'nosi shundan iboratki, bunda u $M(x; f(x))$ nuqtada egri chiziqqa o'tkazilgan MT urinmaning $M(x; y)$ va $N(x + dx; y + dy)$ nuqtalarini tutashiruvchi MN kesmaning uzunligiga teng (6.21-rasm). $dx = \Delta x$ orttirmaning yetarlicha kichik qiymatlarida $y = f(x)$ egri chiziqning



6.21-rasm

bu orttirmaga mos keluvchi $\overline{MM'}$ yoyi uzunligi egri chiziqning M nuqtasida o'tkazilgan MT urinmaning MN kesmasi uzunligiga taqriban teng, ya'ni $\Delta s \approx ds$.

Fazoviy egri chiziq

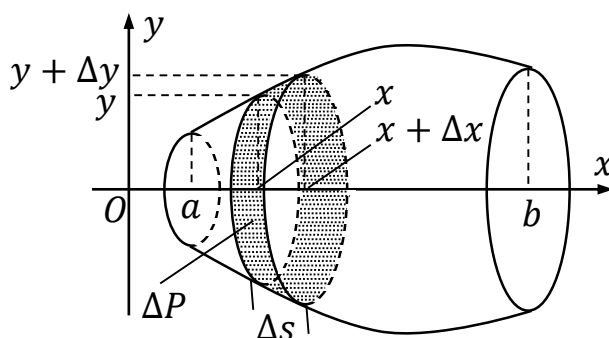
$$x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

parametrik tenglamalar bilan berilgan va bunda $\varphi(t)$, $\psi(t)$ va $\chi(t)$ funksiyalar $[\alpha; \beta]$ kesmada uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa,

$$ds = \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [\chi'(t)]^2} dt \quad (6.52)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Aylanma sirt yuzi. $[a; b]$ kesmada aniqlangan $y = f(x)$ funksiya grafigini Ox o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtni qaraymiz (6.22-rasm).



6.22-rasm

Sirtning 6.22-rasmida tasvirlangan ΔP qismining yuzini topamiz. Uning yuzini ham ΔP orqali belgilaymiz. Bu yuza taqriban asoslarining radiuslari y va $y + \Delta y$ va yasovchisi Δs bo'lgan kesik konusning yon sirti yuziga teng. Kichik asosning radiusi r , katta asosning radiusi R va yasovchisi L

bo'lgan kesik konus yon sirtining yuzi $\pi(R + r)L$ formula bilan hisoblanadi. Shuning uchun

$$\Delta P \approx \pi(y + y + \Delta y)\Delta s.$$

Bu yerda $\Delta y \cdot \Delta s$ had boshqa hadlarga nisbatan yuqoriroq tartibli kichik miqdor bo'lganligi uchun $dP = 2\pi y ds$ deb olish mumkin.

Egri chiziq yoyi uzunligi differensial uchun (6.51) formulani qo'llasak

$$dP = 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$$

tenglikni hosil qilamiz. Shuning uchun aylanma sirtning yuzi

$$P = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx \quad (6.53)$$

formula bilan hisoblanadi.

Agar egri chiziq

$$x = \varphi(t), y = \psi(t) \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

parametrik tenglamalar bilan berilgan bo'lsa, aylanma sirt yuzi

$$P = 2\pi \int_\alpha^\beta \psi(t)\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt \quad (6.54)$$

formula bilan hisoblanadi.

6.23-Misol. Radiusi R bo'lgan shart sirtining yuzini toping.

► Shar sirtini $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \leq x \leq R$ tenglama bilan berilgan chiziqni Ox o'q atrofida aylantirib hosil qilish mumkin. Simmetriya tufayli aylananing birinchi chorakda yotgan qismini Ox atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirtning P_1 yuzi shar sirtining yarmiga teng bo'ladi.

Integral ostidagi ifodani topamiz:

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}, \quad 1 + (y')^2 = 1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2} = \frac{R^2}{R^2 - x^2}.$$

(6.53) formulaga qo'yib P_1 yuzani topamiz:

$$P_1 = 2\pi \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}} dx = 2\pi \int_0^R R dx = 2\pi R^2.$$

Topilgan P_1 yuzani ikkiga ko'paytirib, shar yuzini topamiz: $P_{\text{shar}} = 4\pi R^2$. ◀

6.24-Misol. Sikloidaning bitta arkasini Ox o'q atrofda aylantirishdan hosil bo'lgan sirtning yuzini toping.

► Sikloidaning parametrik tenglamalarini 6.21-Misoldagi singari yozamiz: $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$. Bu yerda ham bitta arka

parametrning $0 \leq t \leq 2\pi$ o'zgarishiga mos kelishini inobatga olamiz. Koordinata funksiyalar uchun hosilalarni topamiz:

$$\begin{aligned}x'(t) &= a(1 - \cos t); \\y'(t) &= a \sin t.\end{aligned}$$

Ularni (6.54) formulaga qo'yib sikloidaning bitta arkasidan hosil qilingan sirtning

$$\begin{aligned}P &= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt = \\&= 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot 2a \cdot \sin \frac{t}{2} dt = \\&= -16\pi a^2 \int_0^{2\pi} \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2}\right) d\left(\cos \frac{t}{2}\right) dt = \\&= -16\pi a^2 \left(\cos \frac{t}{2} - \frac{1}{3} \cos^3 \frac{t}{2}\right) \Big|_0^{2\pi} = \frac{64\pi a^2}{3}\end{aligned}$$

yuzini hosil qildik. ◀

Aniq integralning fizik tadbiqu

Massa, inersiya va statik momentlarni hisoblash. Diskret nuqtalar sistemasining massasi barcha nuqtalar massalarining yig'indisiga teng. Massasi uzluksiz taqsimlangan ob'ektlarda $\rho(M)$ zichlik M nuqtaning ob'ekt joylashgan sohadagi holatiga bog'liq bo'ladi.

Zichlik o'zgarmas ρ bo'lganda, jismning m massasi bu zichlikning jism V hajmiga ko'paytmasiga teng bo'ladi: $m = \rho V$. Xuddi shu singari zichligi ρ_s o'zgarmas bo'lgan va yuzi S bo'lgan yassi figuraning massasi $m = \rho_s S$ ko'paytmaga teng bo'ladi, chiziqli zichligi o'zgarmas ρ_s bo'lgan s uzunlikka ega bo'lgan egri chiziqning massasi $m = \rho_s s$ ga teng bo'ladi. Ammo zichlik M nuqtaning holatiga bog'liq bo'ladigan $\rho(M)$ funksiya bilan berilgan bo'lsa, jismning massasini hisoblash integral hisobni qo'llashni talab qiladi. Bir qator sodda hollarda bu masalani *aniq integral* yordamida yechish mumkin.

Fazoviy Γ egri chiziq $Oxyz$ to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \leq t \leq b$$

parametrik tenglamalari bilan va $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi $\rho_s(t)$ funksiya massaning uzunlik bo'yicha taqsimlanishini beruvchi zichlikni ifodalasin, bundan tashqari

$$\rho_s(t) = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta m(t)}{\Delta s(t)} \quad (6.55)$$

tenglik o'rinli bo'lsin, bu yerda Δm – uzunligi Δs bo'lgan egri chiziqli yoyining massasi bo'lib, ular t parametrning $[t, t + \Delta t] \subset [a, b]$ kesmada o'zgarishiga mos keladi.

(6.55) tenglikdan 2.13-Teorema ko'ra

$$\Delta m(t) = \rho_s(t) \cdot \Delta s(t) + \alpha(\Delta t) \cdot \Delta s(t)$$

tenglikni yozish mumkin, bu yerda $\alpha(\Delta t)$ funksiya $\Delta t = 0$ nuqtada cheksiz kichik. U holda egri chiziqli yoyi uzunligining differensial uchun (6.52) formulaga ko'ra

$$dm(t) = \rho_s(t) \cdot ds(t) = \rho_s(t) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$$

bo'ladi, shuning uchun butun yoyning massasi

$$m = \int_a^b dm(t) = \int_a^b \rho_s(t) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt \quad (6.56)$$

formula bilan hisoblanadi. Xususiyl holda $[a, b]$ kesmada differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya bilan berilgan va $\rho_s(x)$ chiziqli zichlikka ega egri chiziqlikning massasi

$$m = \int_a^b \rho_s(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

tenglik bilan topiladi.

$[a, b]$ kesmada integrallanuvchi $\rho(x)$ va $S(x)$ funksiyalar mos ravishda jism zichligini va Ox o'qqa perpendikulyar kesimning yuzini ifodalasa, jismning $[x, x + \Delta x]$ kesmaga mos keluvchi qismining massasi

$$\Delta m \approx \rho(x)S(x)\Delta x$$

taqribiy tenglikni qanoatlantiradi, shuning uchun uning to'liq massasi

$$m = \int_a^b \rho(x)S(x)dx \quad (6.57)$$

aniq integral bilan topiladi.

Oxy tekislikda massalari $m_1, m_2, \dots, m_n$ bo'lgan $M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n)$ nuqtalar sistemasi berilgan bo'lsin.

6.13-Ta'rif. Material nuqtalar sistemasining Ox va Oy o'qlarga nisbatan I_x va I_y inersiya momentlari deb, bu nuqtalar massalarining mos koordinata o'qigacha bo'lgan masofalari kvadratlariga ko'paytmalarining yig'indisiga aytiladi:

$$I_x = \sum_{k=1}^n m_i y_i^2; \quad I_y = \sum_{k=1}^n m_i x_i^2$$

6.14-Ta'rif. Material nuqtalar sistemasining Ox va Oy o'qlarga nisbatan S_x va S_y statik momentlari deb, bu nuqtalar massalarining mos

koordinata o'qigacha bo'lgan masofalariga ko'paytmalarining yig'indisiga aytiladi:

$$S_x = \sum_{k=1}^n m_i y_i; \quad S_y = \sum_{k=1}^n m_i x_i.$$

Massalari uzluksiz taqsimlangan jismning inersiya momentini hisoblash integral hisobni qo'llashni talab qiladi. Agar jism massasi differensialining biror $t \in [a, b]$ parametrga bog'liqligi $dm(t)$ va o'qqacha bo'lgan $r(t)$ masofa ma'lum bo'lsa, inersiya momenti uchun

$$I = \int_a^b r^2(t) dm(t) \quad (6.58)$$

tenglikni yozish mumkin.

Oxy tekislikda γ egri chiziq $x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$ parametrik tenglamalar bilan berilgan bo'lib, massaning uzunlik bo'yicha taqsimlanishini $\rho_s(t), a \leq t \leq b$ funksiya ifodalasa, u holda (6.56) va (6.58) formulalarga ko'ra egri chiziqning Ox o'qqa nisbatan inersiya momenti

$$I_x = \int_a^b \rho_s(t) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} y^2(t) dt \quad (6.59)$$

formula bilan hisoblanadi. Xuddi shu singari Oy o'qqa nisbatan inersiya momenti

$$I_y = \int_a^b \rho_s(t) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} x^2(t) dt \quad (6.60)$$

formula bilan hisoblanadi.

Xususiyl holda $[a, b]$ kesmada differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya bilan berilgan va $\rho_s(x)$ chiziqli zichlikka ega egri chiziqning koordinata o'qlariga nisbatan inersiya momentlari

$$I_x = \int_a^b \rho_s(x) \cdot f^2(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx,$$

$$I_y = \int_a^b \rho_s(x) \cdot x^2 \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

tengliklar bilan topiladi.

Inersiya momentini hisoblashga qilingan mulohazalarni statik momentlar uchun takrorlab (6.59), (6.60) formulalar va ularning xususiyl hollari uchun mos ravishda

$$S_x = \int_a^b \rho_s(t) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} y(t) dt \quad (6.61)$$

$$S_y = \int_a^b \rho_s(t) \cdot \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} x(t) dt \quad (6.62)$$

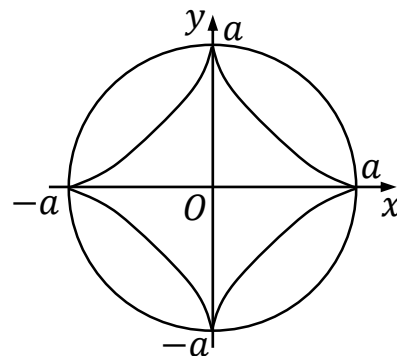
$$S_x = \int_a^b \rho_s(t) \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx;$$

$$S_y = \int_a^b \rho_s(t) \cdot x \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

formulalarni yozish mumkin.

6.25-Misol. $x = a \cos^3 t$, $y = a \sin^3 t$ astroidaning (6.23-rasm) birinchi chorakda yotgan qismining statik va inersiya momentlarini hisoblang.

► Astroidaning koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligi tufayli $I_x = I_y$ va $S_x = S_y$ bo'ladi. Shuning uchun momentlarni faqat Ox o'qqa nisbatan hisoblash yetarli. Zichlikni $\rho_s(t) = 1$ deb olamiz. Birinchi chorak uchun $0 \leq t \leq \pi/2$ bo'ladi. Demak (6.59) va (6.61) formulalarga ko'ra



6.23-rasm

$$\begin{aligned} I_x = I_y &= \int_0^{\pi/2} a^2 \sin^6 t \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = \\ &= 3a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^6 t \cos t \sin t dt = 3a^3 \int_0^{\pi/2} \sin^7 t \cos t dt = \\ &= \frac{3a^3}{8} \sin^7 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{8} a^3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_x = S_y &= \int_0^{\pi/2} a \sin^3 t \sqrt{(-3a \cos^2 t \sin t)^2 + (3a \sin^2 t \cos t)^2} dt = \\ &= 3a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^3 t \cos t \sin t dt = 3a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos t dt = \\ &= \frac{3a^2}{5} \sin^5 t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{3}{5} a^2. \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Bajarilgan ishni hisoblash. F kuch ta'sirida M material nuqtani Ox o'q bo'ylab a nuqtadan b nuqtaga ($a < b$) o'tganda bajarilgan A ishni hisoblaymiz. Fizika kursidan ma'lumki F kuch o'zgarmas va Ox o'q bo'ylab yo'nalgan bo'lsa, u holda A bajarilgan ish F kuchning F qiymati bilan $s = b - a$ bosib o'tilgan yo'lning ko'paytmasiga teng: $A = F \cdot s$.

Ox o'q M material nuqtaga ta'sir qiluvchi F kuch $[a, b]$ kesmada x o'zgaruvchining uzluksiz funksiyasidan iborat bo'lsin:

$$F = F(x).$$

$[a, b]$ kesmani $x_0 = a < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b$ nuqtalar yordamida $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$ uzunliklarga ega bo'lgan n ta qismga ajratamiz. Har bir $[x_{k-1}, x_k]$ qisman kesmada ixtiyoriy ravishda ξ_k nuqtani olamiz. Δx_k yetarlicha kichik bo'lganda F kuchning bu kesmadagi qiymatini o'zgarimas va $F = F(\xi_k)$ ga teng deb hisoblashimiz mumkin. U holda ΔA_k ishni

$$\Delta A_k \approx F(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

taqribiy tenglik bilan hisoblash mumkin. Shuning uchun

$$A_n = \sum_{k=1}^n \Delta A_k = \sum_{k=1}^n F(\xi_k) \cdot \Delta x_k$$

yig'indi F kuchning $[a, b]$ kesmada bajarigan A ishiga taqriban teng bo'ladi. Boshqa tomondan A_n yig'indi $F(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi integral yig'indisidan iborat. Shu sababli F kuchning $[a, b]$ kesmada bajarigan A ishi sifatida bu yig'indining $\max_{1 \leq k \leq n} \Delta x_k \rightarrow 0$ dagi limitini olish tabiiy va bu limit $F(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmada uzluksizligi tufayli mavjud. Shunday qilib qidirilayotgan A ish

$$A = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n F(\xi_k) \cdot \Delta x_k = \int_a^b F(x) dx \quad (6.63)$$

aniq integral bilan hisoblanar ekan.

6.26-Misol. Agar prujinaga $1N$ kuch ta'sir qilganda 1 sm cho'zilsa, uni 4 sm cho'zish uchun qancha ish bajarish kerak?

► Guk qonuniga ko'ra prujinani $x\text{ sm}$ chozish uchun $F = kx$ kuch sarflash kerak bo'ladi. k prapositionallik koefitsiyenti $x = 0,01$ bo'lganda $F = 1\text{ N}$ shartdan topiladi, demak $k = 1/0,01 = 100$ yoki $F(x) = 100x$. Topilgan $F(x)$ kuchning ifodasini (6.63) formulaga qo'yamiz, bunda $a = 0$ va $b = 0,04$:

$$A = \int_0^{0,04} 100x dx = 50x^2 \Big|_0^{0,04} = 0,08 \text{ (joul)}$$

natijada bajarilgan A ishni topdik. ◀

Zaryad miqdorini hisoblash. O'tkazgich bo'ylab vaqtning $t \in [T_1, T_2]$ momentida $I(t) \geq 0$ kuch bilan tok o'tmoqda. $[T_1, T_2]$ vaqt oralig'ida o'tkazgich orqali o'tgan Q tok miqdorini topamiz. $[T_1, T_2]$ vaqt oralig'ini $T_1 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n = T_2$ nuqtalar yordamida $\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n$ uzunliklarga ega bo'lgan n ta qismga ajratamiz. U holda Δt_k vaqt oralig'i yetarlicha kichik bo'lganda $I(t)$ tok kuchining bu kesmadagi

qiymatini o'zgaras va $I = I(\tau_k)$ ga teng deb hisoblashimiz mumkin, bu yerda $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ birorta vaqt momenti. U holda Δt_k vaqt oralig'ida o'tkazgich orqali

$$\Delta Q_k \approx I(\tau_k) \cdot \Delta t_k$$

miqdorda tok o'tgan deb hisoblashimiz mumkin. Bu miqdorlarni barcha vaqt oraliqlari bo'yicha qo'shib chiqib va barcha bo'linishlar bo'yicha limitga o'tib

$$Q = \int_{T_1}^{T_2} I(t) dt \quad (6.64)$$

vaqtning T_1 momentidan T_2 momentigacha bo'lgan vaqt davomida o'tazgich orqali o'tgan tok miqdorini hisoblash formulasini hosil qildik.

6.27-Misol. Elektr zanjiridagi kuchlanish tushuvi 220 v. Elektr zanjirga qarshiligi 15 Om bo'lgan doimiy iste'molchi ulangan va 0,2 Om/c tezlik bilan qo'shimcha qarshilik kiritiladi. Elektr zanjir orqali 1 minut davomida qancha zaryad miqdori oqib o'tadi?

► Om qonuniga ko'ra U kuchlanish, I tok kuchi va R qarshilik o'zaro $I = U/R$ munosabat bilan bo'g'langan. Masala shartiga ko'ra zanjirning qarshiligi $R(t) = 15 + 0,2t$ qonun bo'yicha o'zgaradi. U holda Om qonuniga ko'ra zanjirdagi tok kuchi

$$I(t) = \frac{U}{R(t)} = \frac{220}{15 + 0,2t}$$

qonuniyat bo'yicha o'zgaradi. Shuning uchun zanjir orqali 1 minut davomida oqib o'tgan zaryad miqdori

$$\begin{aligned} \int_0^{60} I(t) dt &= \int_0^{60} \frac{220}{15 + 0,2t} dt = \frac{220}{0,2} \ln(15 + 0,2t) \Big|_0^{60} = \\ &= 1100 \cdot \ln \frac{27}{15} \approx 646,57 \text{ Kl.} \end{aligned}$$

qiymatga teng. ◀

Aniq integralning iqtisodiyotga tadbiqu

Ishlab chiqarilgan mahsulotning hajmi. Agar iqtisodiyotda ma'lum va hisoblashlarda qo'llanilib kelinayotgan Kobba-Duglasning ishlab chiqarish funksiyasida mehnat xarajatlari vaqtga chiziqli bog'liq va kapital xarajatlar o'zgaras bo'lsa, funksiya $g(t) = (\alpha t + \beta)e^{\gamma t}$ ko'rinishda bo'ladi. U holda T yil mobaynida ishlab chiqarilgan mahsulotning hajmi

$$Q = \int_0^T (\alpha t + \beta) e^{\gamma t} dt \quad (6.65)$$

formula bilan hisoblanadi.

6.28-Misol. Kobba-Duglas funksiyasi $g(t) = (t + 1)e^{3t}$ ko‘rinishda bo‘lsa, 4 yil davomida ishlab chiqarilgan maxsulotning hajmini toping.

► Bu yerda $Q = \int_0^4 (1 + t)e^{3t} dt = \left| \begin{array}{l} u = 1 + t; \quad du = dt; \\ dv = e^{3t} dt; \quad v = \frac{1}{3}e^{3t} \end{array} \right| =$

$$= \frac{1+t}{3}e^{3t} \Big|_0^4 - \frac{1}{3} \int_0^4 e^{3t} dt = \frac{5}{3}e^{12} - \frac{1}{3} - \frac{1}{9}e^{12} + \frac{1}{9} = \frac{14}{9}e^{12} - \frac{2}{9} \approx$$

$\approx 2,53 \cdot 10^5$ shartli birlik. ◀

Diskontlash.

6.15-Ta’rif. p yillik foizda T yildan so‘ng olingan natijaviy miqdor asosida boshlang‘ich mablag‘ning qiymatini aniqlash diskontlash deb ataladi.

Diskontlash masalasi kapital quyilmalarning iqtisodiy samaradorligini aniqlashda uchraydi.

K_t – o‘tgan t vaqt davomida olingan mablag‘ miqdori, K – esa diskontlangan (boshlang‘ich) mablag‘ bo‘lsin.

Agar yillik foizlar oddiy bo‘lsa, $K_t = K(1 + it)$ bo‘ladi, bu yerda $i = p/100$ – salmoq foiz stavkasi. U holda $K = K_t/(1 + it)$.

Agar yillik foizlar murakkab bo‘lsa, $K_t = K(1 + it)^t$ va demak $K = K_t/(1 + it)^t$ bo‘ladi.

Quyiladigan kapital quyilmalar vaqt bo‘yicha o‘zgarib, u $f(t)$ funksiya orqali ifodalansin va i salmoq stavkasida foizlar uzluksiz hisoblansin. U holda T vaqt davomida $K = \int_0^T f(t)e^{-it} dt$ bo‘ladi.

6.29-Misol. Agar boshlang‘ich kapital quyilma 10 mln. pul birligini tashkil qilgan va foiz stavkasi 8%, hamda har yili kapital quyilmani 1 mln. pul birligiga oshirish rejalashtirilgan bo‘lsa, 3 yilda olinadigan diskont daromadni aniqlang.

► Bu yerda kapital quyilma $f(t) = 10 + 1 \cdot t = 10 + t$ funksiya orqali berilgan. U holda $K = \int_0^T (10 + t)e^{-0,08t} dt \approx 30,5$ mln. pul birligi. ◀

6.10. Aniq integralni hisoblashning taqribiy usullari

Ilmiy tadqiqotlar va muhandislik hisob-kitoblarini olib borishda aniq integralning qiymatini topish muhim o‘rin tutadi. Agar integral osti funksiyaning boshlang‘ichi ma’lum bo‘lsa, *Nyuton-Leybnis formulasidan* foydalanilib, bu masalani osongina hal qilish mumkin. Biroq har doim ham integral osti funksiyaning boshlang‘ichini elementar funksiyalar orqali

ifodalab bo'lmaydi, ba'zan esa integral osti funksiya jadval ko'rinishida (masalan, eksperimental o'lchovlarning natijasi sifatida) berilgan bo'lishi mumkin, bu holda esa boshlang'ich funksiyaning analitik ko'rinishi umuman mavjud bo'lmaydi. Bunday hollarda hisoblash matematikasining usullari yordamida aniq integralning qiymatini taqribiy hisoblash bilan kifoyalanish mumkin.

Biz quyida aniq integralni taqribiy hisoblashning bir necha usulini ko'rib chiqamiz.

To'g'ri to'rtburchaklar formulasi. $[a, b]$ kesmada uzluksiz $y = f(x)$ funksiya berilgan va $\int_a^b f(x)dx$ integralni hisoblash talab qilingan bo'lsin.

$[a, b]$ kesmani $x_k = a + k \cdot \Delta x, k = 0, 1, \dots, n$ nuqtalar yordamida uzunliklari $\Delta x = (b - a)/n$ ga teng bo'lgan n ta teng qismga ajratamiz (6.24-rasm). ξ_k orqali $[x_{k-1}, x_k]$ kesmaning o'rtasini belgilaymiz: $\xi_k = (x_k + x_{k-1})/2$ va funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz: $\bar{y}_1 = f(\xi_1), \bar{y}_2 = f(\xi_2), \dots, \bar{y}_n = f(\xi_n)$. Asosi $[x_{k-1}, x_k]$ kesma va balandligi $\bar{y}_k$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yasaymiz.

U holda bu n ta to'g'ri to'rtburchaklar yuzalarining yig'indisi qidirilayotgan aniq integralning taqribiy qiymatini beruvchi zinasimon shakldagi figuraning yuzinini aniqlaydi:

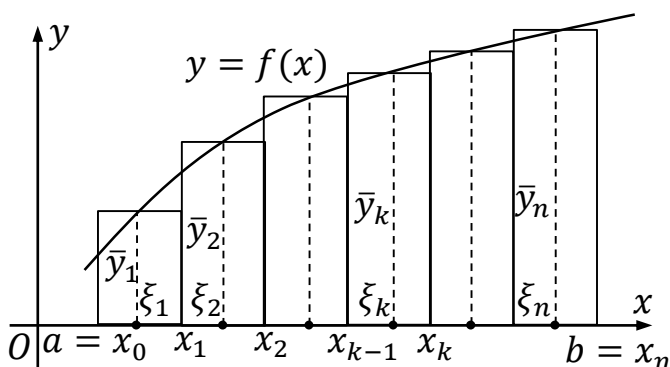
$$\int_a^b f(x)dx \approx \Delta x(\bar{y}_1 + \bar{y}_2 + \dots + \bar{y}_n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right). \quad (6.66)$$

(6.66) formula to'g'ri to'rtburchaklar formulasi deb ataladi.

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lsa, (6.66) taqribiy tenglikning absolyut xatoligi

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^3 \cdot M}{24n^2}$$

formula bilan baholanadi, bu yerda $M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$.



6.24-rasm

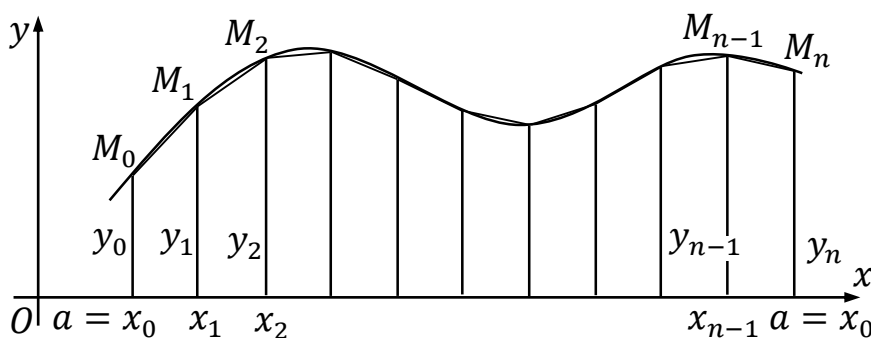
$$|R_n| = \left| \int_a^b f(x)dx - \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{x_k + x_{k-1}}{2}\right) \right|$$

Trapetsiyalar formulasi. To'g'ri to'rtburchaklar formulasini hosil qilishdagi singari, bu yerda ham $[a, b]$ kesmani $x_k = a + k \cdot \Delta x, k =$

$0, 1, \dots, n$ nuqtalar yordamida uzunliklari $\Delta x = (b - a)/n$ ga teng bo'lgan n ta teng qismga ajratamiz (6.25-rasm). Funktsiyaning bu nuqtalardagi qiymatlarini $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_n = f(x_n)$ orqali belgilaymiz. Funktsiya grafigining $M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), M_2(x_2, y_2), \dots, M_n(x_n, y_n)$ nuqtalarini tutashtirib $M_0M_1M_2 \dots M_n$ siniq chiziq o'tkazamiz. Bu siniq chiziqning kesmalarini yon tomon sifatida olib to'g'ri burchakli trapetsiyalar yasaymiz. Ana shu yasalgan trapetsiyalarning asoslari y_{k-1}, y_k , balandliklari esa Δx bo'ladi. Bu trapetsiyalar yuzlarining yig'indisini qidirilayotgan aniq integralning taqribiy qiymati sifatida olamiz:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{y_0 + y_1}{2} \Delta x + \frac{y_1 + y_2}{2} \Delta x + \dots + \frac{y_{n-1} + y_n}{2} \Delta x = \\ &= \frac{b - a}{2n} \left[f(a) + f(b) + 2 \sum_{k=1}^n f(x_k) \right] \end{aligned} \quad (6.67)$$

(6.67) formula *trapetsiyalar formulasi* deb ataladi.



6.25-rasm

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lsa, (6.67) taqribiy tenglikning absolyut xatoligi

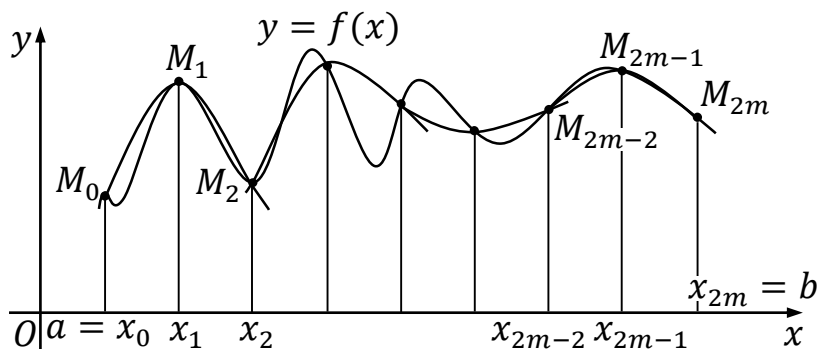
$$|R_n| \leq \frac{(b - a)^3 \cdot M}{12n^2}$$

formula bilan baholanadi, bu yerda $M = \max_{a \leq x \leq b} |f''(x)|$.

Parabolalar (Simpson) formulasi. To'g'ri to'ryburchaklar formulasida funksiya grafigi zinasimon shakldagi siniq chiziq bilan, trapetsiyalar formulasida funksiya grafigining vatarlaridan iborat siniq chiziq bilan almashtirilgan bo'lsa, parabolalar formulasida funksiya grafigi parabolalar bilan almashtiriladi.

$[a, b]$ kesmani bu safar juft sondagi $n = 2m$ ta teng kesmalarga ajratamiz va bo'linish nuqtalari $x_k = a + k \cdot \Delta x, k = 0, 1, \dots, 2m, \Delta x = (b - a)/2m$ bo'lsin. Funktsiya bu nuqtalarda $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), \dots, y_{2m} = f(x_{2m})$ qiymatlarni qabul qiladi. Funktsiya grafigining

$[x_0, x_1], [x_1, x_2]$ kesmalarga mos keladigan qismini $M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1)$ va $M_2(x_2, y_2)$ nuqtalardan o'tuvchi $y = A(x - x_1)^2 + B(x - x_1) + C$ parabola bilan almashtiramiz (6.26-rasm). A, B, C – hozircha noma'lum koeffitsiyentlar bo'lib, ular M_0, M_1, M_2 nuqtalarning koordinatalarini parabola tenglamasiga qo'yib topiladi. $x_2 - x_1 = \Delta x$ va $x_0 - x_1 = -\Delta x$ ekanligini inobatga olgan holda nuqtalarning koordinatalarini parabola tenglamasiga qo'yib, A, B, C koeffitsiyenlarga nisbatan cizikli



6.26-rasm

$$\begin{cases} A(\Delta x)^2 - B \cdot \Delta x + C = y_0, \\ C = y_1, \\ A(\Delta x)^2 + B \cdot \Delta x + C = y_2. \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemani yechib, noma'lum

$$A = \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2(\Delta x)^2}, B = \frac{y_2 - y_0}{2 \cdot \Delta x}, C = y_1$$

koeffitsiyentlarning qiymatlarini topdik. Shunday qilib funksiya grafigi $[x_0, x_2]$ kesmada

$$y(x) = y_1 + \frac{y_2 - y_0}{2 \cdot \Delta x} (x - x_1) + \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2(\Delta x)^2} (x - x_1)^2$$

parabola bilan almashtirilar ekan. Parabolani ana shu kesmada integrallaymiz:

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^{x_2} y(x) dx &= \int_{x_0}^{x_2} \left(y_1 + \frac{y_2 - y_0}{2 \cdot \Delta x} (x - x_1) + \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{2(\Delta x)^2} (x - x_1)^2 \right) dx \\ &= y_1 x \Big|_{x_0}^{x_2} + \frac{y_2 - y_0}{4 \cdot \Delta x} (x - x_1)^2 \Big|_{x_0}^{x_2} + \frac{y_0 - 2y_1 + y_2}{6 \cdot (\Delta x)^2} (x - x_1)^3 \Big|_{x_0}^{x_2} = \\ &= y_1 2 \cdot \Delta x + \frac{1}{3} (y_2 - 2y_1 + y_0) \cdot \Delta x = \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2). \end{aligned}$$

$f(x)$ funksiyaning $[x_0, x_2]$ kesma bo'yicha aniq integralining taqribiy qiymati sifatida parabolaning bu kesma bo'yicha integralining ana shu qiymatini olamiz:

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)dx \approx \int_{x_0}^{x_2} y(x)dx = \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Xuddi shu singari $[x_2, x_4], \dots, [x_{2m-2}, x_{2m}]$ kesmalar bo'yicha

$$\int_{x_2}^{x_4} f(x)dx \approx \int_{x_2}^{x_4} y(x)dx = \frac{\Delta x}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$$

.....

$$\int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} f(x)dx \approx \int_{x_{2m-2}}^{x_{2m}} y(x)dx = \frac{\Delta x}{3}(y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m})$$

aniq integral uchun taqribiy tengliklarni hosil qilamiz.

$x_0 = a, x_{2m} = b$ ekanligini inobatga olgan holda, bu taqribiy tengliklarning chap va o'ng tomonlarini qo'shib

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &\approx \frac{\Delta x}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2 + y_2 + 4y_3 + y_4 + \\ &\dots + y_{2m-2} + 4y_{2m-1} + y_{2m}) = \\ &= \frac{\Delta x}{3}[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})] \end{aligned}$$

yoki

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{6m}[y_0 + y_{2m} + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1})] \quad (6.68)$$

formulani hosil qildik. (6.68) formula *parabolalar formulasi* deb ataladi.

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz to'rtinchi tartibli hosilaga ega bo'lsa, (6.68) taqribiy tenglikning absolyut xatoligi

$$|R_n| \leq \frac{(b-a)^5 \cdot M}{180 \cdot (2m)^4}$$

formula bilan baholanadi, bu yerda $M = \max_{a \leq x \leq b} |f^{(IV)}(x)|$.

6.30-Misol. $\int_0^1 \frac{dx}{2x+1}$ aniq integralni to'g'ri to'rtburchaklar,

trapetsiya va parabolalar formulasiga ko'ra $n = 4$ hol uchun taqribiy hisoblang va natijalarni integralning aniq qiymati bilan taqqoslang.

► Dastlab integralning aniq qiymatini topamiz:

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x+1} = \frac{1}{2} \ln(2x+1) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} \ln 3 \approx 0.5493.$$

Endi $[0, 1]$ kesmani $x_0 = 0; x_1 = 0,25; x_2 = 0,5; x_3 = 0,75; x_4 = 1$ nuqtalar bilan to'rtta teng qismlarga ajratamiz.

To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi bilan hisoblash. Ajratilgan teng qismlarning o‘rtalarini topamiz: $\xi_1 = (x_0 + x_1)/2 = 0,125$; $\xi_2 = (x_1 + x_2)/2 = 0,375$; $\xi_3 = (x_2 + x_3)/2 = 0,625$; $\xi_4 = (x_3 + x_4)/2 = 0,875$ va funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlarini hisoblaymiz: $f(\xi_1) = 0,8$; $f(\xi_2) = 0,5704$; $f(\xi_3) = 0,4342$; $f(\xi_4) = 0,3536$. Hisoblangan qiymatlarni to‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasiga qo‘yib

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x+1} \approx \frac{b-a}{n} (f(\xi_1) + f(\xi_2) + f(\xi_3) + f(\xi_4)) = \\ = \frac{1}{4} (0,8 + 0,5704 + 0,4342 + 0,3536) \approx 0,53955.$$

Hisoblangan natijaning xatoligini baholaymiz. Integral osti $f(x) = 1/(2x+1)$ funksiya $f''(x) = 8/(2x+1)^3$ ikkinchi tartibli hosilaga ega va bu hosila uchun

$$M = \max_{0 \leq x \leq 1} |f''(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{8}{(2x+1)^3} \right| = 8$$

tenglik o‘rinli. To‘g‘ri to‘rtburchak formulasidagi xatolikni baholash formulasiga ko‘ra xatolik $8/(24 \cdot 4^2) = 1/48 \approx 0,021$ qiymatdan oshmaydi. Endi aniq qiymat bilan taqribiy qiymat orasidagi farqni topaylik: $0,5493 - 0,53955 = 0,00975 < 0,021$, ya‘ni haqiqiy xatolik formula bo‘yicha xatolikdan haqiqatda kam ekan.

Trapetsiyalar formulasi bilan hisoblash. Funksiyaning $x_i, i = 0, 1, 2, 3, 4$ buqralardagi y_i qiymatlarini taqriban hisoblaymiz: $y_0 = 1$, $y_1 \approx 0,66667$, $y_2 = 0,5$, $y_3 = 0,4$, $y_4 = 0,33333$. Hisoblangan bu qiymatlarni trapetsiyalar formulasiga qo‘yib

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x+1} \approx \frac{b-a}{2n} (y_0 + y_4 + 2(y_1 + y_2 + y_3)) = \\ = \frac{1}{8} (1 + 0,33333 + 2(0,66667 + 0,5 + 0,4)) \approx 0,558333.$$

Hisoblangan natijaning xatoligini baholaymiz. To‘g‘ri to‘rtburchaklar formulasi bilan hisoblashda $M = \max_{0 \leq x \leq 1} f''(x) = 8$ ekanligini aniqlagan edik. Shuning uchun trapetsiyalar formulasining xatoligini hisoblash formulasiga ko‘ra xatolik $8/(12 \cdot 4^2) = 0,08333$ qiymatdan oshmaydi. Endi aniq qiymat bilan taqribiy qiymat orasidagi farqni topaylik: $0,5493 - 0,558333 = 0,009033 < 0,08333$, ya‘ni haqiqiy xatolik formula bo‘yicha xatolikdan haqiqatda kam ekan.

Parabolalar formulasi bilan hisoblash. Yuqorida hisoblangan $y_i, i = 0, 1, 2, 3, 4$ qiymatlarni Simpson formulasiga qo‘yamiz:

$$\int_0^1 \frac{dx}{2x+1} \approx \frac{b-a}{3n} (y_0 + y_4 + 2y_2 + 4(y_1 + y_3)) =$$

$$= \frac{1}{12} (1 + 0,33333 + 2 \cdot 0,5 + 4 \cdot (0,66667 + 0,4)) = 0,55.$$

Hisoblangan natijaning xatoligini baholaymiz. Integral osti funksiya integrallash kesmasida uzluksiz to'rtinchi tartibli hosilaga ega: $f^{IV}(x) = 384/(2x+1)^5$ va bu hosila uchun

$$M = \max_{0 \leq x \leq 1} |f^{IV}(x)| = \max_{0 \leq x \leq 1} \left| \frac{384}{(2x+1)^3} \right| = 384$$

qiymatni yozish mumkin. Simpson formulasining xatoligini hisoblash formulasiga ko'ra hisoblangan natijaning xatoligi $384/(180 \cdot 4^4) = 1/120 = 0,00833$ qiymatdan oshmaydi. Endi aniq qiymat bilan taqribiy qiymat orasidagi farqni topaylik: $0,5493 - 0,55 = 0,0007 < 0,0083$, ya'ni haqiqiy xatolik formula bo'yicha xatolikdan haqiqatda kam ekan.

Bitta integralni uchta usul bilan taqribiy hisobladik va Simpson formulasi to'g'ri tortburchaklar va trapetsiya formulalariga nisbatan aniqlik darajasi ancha yuqori ekanligini aniqladik. ◀

Nazorat savollari

1. Aniq integral tushunchasiga keltriladigan masalalar: bosib o'tilgan yo'l haqida masala.
2. Aniq integral tushunchasiga keltriladigan masalalar: egri chiziqli trapetsiyaning yuzi haqida masala.
3. Darbu yig'indilari va ularning xossalari.
4. Aniq integralning xossalari.
5. O'rta qiymat haqida teorema.
6. Integral hisobning asosiy teoremasi (Nyuton-Leybnis formulasi).
7. Aniq integralda o'zgaruvchilarni almashtirish.
6. Aniq integralda bo'laklab integrallash.
9. Xosmas integrallar.
10. Yassi figuraning yuzi.
11. Aylanma jismning hajmi.
12. Egri chiziq yoyining uzunligi.
13. Aylanma sirt yuzi.
14. Massa, inersiya va statik momentlarni aniq integral yordamida hisoblash.
15. Bajarilgan ishni aniq integral yordamida hisoblash.
16. O'tkazgich orqali o'tgan tok miqdorini aniq integral yordamida hisoblash.

17. Aniq integralning iqtisodiyotga tadbiqu.
 16. Aniq integralni taqribiy hisoblashning to'g'ri to'rtburchaklar formulasi.
 19. Aniq integralni taqribiy hisoblashning trapetsiyalar formulasi.
 20. Aniq integralni raqribiy hisoblashning parabolalar formulasi.

Mashqlar.

O'zgaruvchilarni almashtirish usuli bilan quyidagi aniq integrallarni hisoblang:

$$\begin{aligned}
 &1. \int_e^{e^3} \frac{\ln x}{x} dx. \quad 2. \int_{\pi/6}^{\pi/4} \sin^5 4x \cos 4x dx. \quad 3. \int_4^9 \frac{x dx}{1 + \sqrt{x}}. \quad 4. \int_1^{22} \frac{dx}{4 + \sqrt{x+3}}. \\
 &5. \int_0^2 x \sqrt[3]{4+x^2} dx. \quad 6. \int_1^e \frac{\sqrt[3]{2+3 \ln x}}{x} dx. \quad 7. \int_0^1 \frac{x^5}{1+4x^6} dx. \quad 6. \\
 &\int_0^{\pi/2} e^{3 \sin 5x} \cos 5x dx. \quad 9. \int_1^2 \frac{e^{2/x}}{x^2} dx. \quad 10. \int_{\pi^2/36}^{\pi^2/16} \frac{\sin 3\sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx. \quad 11. \\
 &\int_0^{2/\sqrt[4]{3}} \frac{x}{9+25x^4} dx. \quad 12. \int_0^\pi \frac{1}{3+2 \cos x} dx.
 \end{aligned}$$

Bo'laklab integrallash usuli bilan quyidagi aniq integrallarni hisoblang:

$$\begin{aligned}
 &13. \int_0^{\pi/6} x \cos 3x dx. \quad 14. \int_0^1 x^3 e^{2x^2+1} dx. \quad 15. \int_0^e \ln(3x+2) dx. \\
 &16. \int_0^{\pi/2} (2x+3) \sin 7x dx. \quad 17. \int_0^{\pi/12} (3x+1) \operatorname{tg}^2 4x dx. \quad 16. \int_1^3 \operatorname{arctg} 7x dx. \\
 &19. \int_1^5 x e^{9x} dx. \quad 20. \int_0^1 x e^{-x} dx. \quad 21. \int_0^{\pi/2} x \cos x dx. \quad 22. \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x}. \\
 &23. \int_1^2 x \log_2 x dx. \quad 24. \int_0^{\pi/2} e^{2x} \cos x dx. \quad 16. \int_1^e \ln^3 x dx.
 \end{aligned}$$

Quyidagi chegarasi cheksiz xosmas integrallarning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlang va yaqinlashuvchi bo'lsa, qiymatini hisoblang:

$$\begin{aligned}
 &26. \int_2^\infty \frac{dx}{x^2 - 4x + 8}. \quad 27. \int_2^\infty \frac{(x-2)dx}{x^2 - 4x + 8}. \quad 26. \int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{(2x+3)^5}}. \quad 29. \int_e^\infty \frac{dx}{x^5 \sqrt{\ln x}}. \\
 &30. \int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 2x + 17}. \quad 31. \int_e^\infty \frac{dx}{(2x+e) \ln^2(2x+e)}.
 \end{aligned}$$

Quyidagi chegaralanmagan funksiyalar xosmas integrallarining yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlang va yaqinlashuvchi bo'lsa, qiymatini hisoblang:

$$32. \int_1^e \frac{dx}{x^3 \sqrt{2 \ln x}} \quad 33. \int_0^1 \frac{dx}{x^4 \sqrt{-3 \ln x}} \quad 34. \int_1^{1/e} \frac{dx}{x \ln^3 x} \quad 35. \int_0^1 \frac{dx}{x \ln^3 x}.$$

$$36. \int_0^2 \frac{dx}{\sqrt[4]{4-x^2}} \quad 37. \int_3^4 \frac{dx}{\sqrt[4]{x-3}} \quad 38. \int_2^5 \frac{dx}{\sqrt[3]{4-x}} \quad 39. \int_0^1 \frac{dx}{x^4 \sqrt{-\ln^3 x}}.$$

40. $y = x^5$ va $y = x$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzini toping.

41. $y^2 = 3x + 4$ va $x - y - 2 = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzini toping.

42. $x = 0, x = \pi/2, y = 0$ va $y = \sin x$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning yuzini toping.

43. $r = a \sin 2\varphi$ chiziq bilan chegaralangan “ikki bargli gul” figurasining yuzini toping.

44. $r = a \operatorname{tg} \varphi$ ($a > 0$) chiziq va $\varphi = \pi/4$ to'g'ri chiziq bilan chegaralangan figuraning yuzini toping.

45. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ sikloidaning bitta arkasi bilan chegaralangan figuraning yuzini toping (6.21-rasm).

46. $x = t^2 - 1, y = t^3 - t$ parametrik tenglama bilan berilgan egri chiziq sirtmog'ining yuzini toping.

47. $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi$) va $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chizikli trapetsiyani Ox o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmini toping.

48. $y = \sqrt{x}, x = 0$ va $y = 1$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chizikli trapetsiyani Oy o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmini toping.

49. $y = x^2$ va $y^2 = x$ egri chiziqlar bilan chegaralangan figurani Ox o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmini toping.

50. $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ sikloidaning bitta arkasi bilan chegaralangan figurani Ox o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmini toping (6.21-rasm).

51. $y = \ln \cos x$ egri chiziqning absissalari $x_1 = \pi/6$ va $x_2 = \pi/3$ bo'lgan nuqtalari orasidagi yoyining uzunligini toping.

52. $\begin{cases} x = a \cos^3 t \\ y = a \sin^3 t \end{cases}$ egri chiziqning t parametrning $t_1 = 0$ va $t_2 = \pi$ qiymatlariga mos keluvchi nuqtalari orasidagi yoyi uzunligini toping.

53. $y = 2\sqrt{x}$ egri chiziqlarning $O(0,0)$ va $M(1,2)$ nuqtalari orasidagi yoyini Ox o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirt yuzini toping.

54. $\begin{cases} x = e^t \sin t \\ y = e^t \cos t \end{cases}$ egri chiziqlarning t parametrining $t_1 = 0$ va $t_2 = \pi/2$ qiymatlariga mos keluvchi nuqtalari orasidagi yoyini Ox o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan aylanma sirt yuzini toping.

55. Zichligi o'zgarmas 1 bo'lgan $x = a \cos t, y = a \sin t$ aylana yuqori yoyining koordinata o'qlariga nisbatan inersiya va statik momentlarini toping.

56. $y = 2x$ to'g'ri chiziqlarning $O(0,0)$ va $M(1,2)$ nuqtalar orasidagi kesmasining koordinata o'qlariga nisbatan inersiya va statik momentlarini toping.

57. Agar prujinaga 1N kuch ta'sir qilganda 5 sm cho'zilsa, uni 25 sm cho'zish uchun qancha ish bajarish kerak?

58. Elektr zanjiridagi boshlang'ich kuchlanish tushuvi 220 v. Elektr zanjirga qarshiligi 10 Om bo'lgan doimiy iste'molchi ulangan va 0,25 Om/c tezlik bilan qo'shimcha qarshilik kiritiladi va kuchlanish tushuvi 0,02 v/s tezlik bilan ortadi. Elektr zanjir orqali 2 minut davomida qancha zaryad miqdori oqib o'tadi?

59. Bir tonna yukni bir kilometr ga tashish narxi $f(x) = 10/(x + 2)$ (pul birl./km) funksiya bilan aniqlanadigan bo'lsa, bir tonna yukni 20 km masofa tashish xarajatini hisoblang.

60. $\int_1^2 \frac{dx}{2x+1}$ aniq integralni to'g'ri to'rtburchaklar, trapetsiya va parabolalar formulasiga ko'ra $n = 4$ hol uchun taqribiy hisoblang va natijalarni integralning aniq qiymati bilan taqqoslang.

Javoblar.

1. 4. 2. $9/512$. 3. $29/3 - 2 \ln 4/3$. 4. $6 - 8 \ln 1,5$. 5. $6 - 3\sqrt[3]{4}/2$. 6. $(5\sqrt[3]{5} - -2\sqrt[3]{2})/4$. 7. $(\ln 5)/24$. 8. $(e^3 - 1)/15$. 9. $(e^2 - 2)/2$.

10. $\sqrt{2}/3$. 11. $\frac{1}{30} \arctg\left(\frac{20}{3\sqrt{3}}\right)$. 12. $\frac{\pi}{\sqrt{5}}$. 13. $\frac{\pi}{18} - \frac{1}{9}$. 14. $\frac{1}{8}(e^3 + e)$.

15. $\frac{3e+2}{3} \ln(3e+2) - e - \frac{2}{3} \ln 2$. 16. $\frac{19}{49}$. 17. $\frac{\pi+4}{16}\sqrt{3} - \frac{\pi^2}{96} - \frac{\pi}{12} - \frac{3 \ln 2}{16}$. 18. $3 \arctg 21 - \arctg 7 - \frac{1}{16} \ln \frac{221}{15}$. 19. $\frac{1}{81}(44e^{45} + 1)$. 20. $1 - \frac{2}{e}$. 21. $\frac{\pi}{2} - 1$. 22. $\frac{\pi(9-4\sqrt{3})}{36} + \frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$. 23. $2 - \frac{3}{4 \ln 2}$. 24. $\frac{e^\pi - 2}{5}$. 25. $6 -$

2e. 26. $\pi/4$. 27. uzoql. 26. $\frac{\sqrt{3}}{27}$. 29. uzoql. 30. $\frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{1}{4}$. 31. $\frac{1}{2 \ln(3e)}$.
 32. $\frac{3}{4} \sqrt[3]{4}$. 33. uzoql. 34. $-\frac{1}{2}$. 35. uzoql. 36. $\pi/2$. 37. $4/3$. 36. $\frac{3}{2} \sqrt[3]{4}$. 39. uzoql.
 40. $1/3$. 41. $19\frac{1}{18}$. 42. 1. 43. $\frac{\pi a^2}{4}$. 44. $\frac{a^2}{8}(4 - \pi.)$ 45. $3\pi a^2$. 46. $\frac{8}{15}$. 47.
 $\pi^2/2$. 46. $4\pi/5$. 49. $3\pi/10$. 50. $5\pi a^3$. 51. $\frac{1}{2} \ln \frac{7 + 4\sqrt{3}}{3}$. 52. $3a$.
 53. $\frac{8\pi}{3}(\sqrt{8} - 1)$. 54. $\frac{2\pi\sqrt{2}}{5}(e^\pi - 2)$. 55. $I_x = I_y = \pi a^3, S_x = S_y = 0$. 56.
 $I_x = \frac{4}{3}\sqrt{5}, I_y = \frac{\sqrt{5}}{3}, S_x = \sqrt{5}, S_y = \frac{\sqrt{5}}{2}$. 57. 0,625 (joul). 56. $840 \ln 4 +$
 96. 59. $10 \ln 10$ pul birligi. 60. $S_{\text{aniq}} = 0,255413, S_{\text{to'g'ri}} = 0,255045,$
 $S_{\text{trapets.}} = 0,256151, S_{\text{parab.}} = 0,255423$.

ADABIYOTLAR

1. *Alimov Sh.O., Ashurov R.R.* Matematik analiz.1,2,3 qismlar. T. Mumtoz so‘z, 2018 y.
2. *Азларов Т.А., Мансуров Х.* Математик анализ. 1,2 қисмлар, Т.Ўқитувчи, 1986 й.
3. *Соатов Ё.У.* Олий математика. 1,2,3 жилдлар. Т.Ўзбекистон, 1996 й.
4. *Xurramov Sh.R.* Oliy matematika. 1,2 jildlar. T. Cho‘lpon, 2018 y.
5. *Пискунов Н.С.* Дифференциал ва интеграл ҳисоб. 1,2 қисмлар. Т.Ўқитувчи, 1974 й.
6. *Фихтенгольц Г.М.* Математик анализ асослари. 1,2 том. Т.Ўқитувчи, 1972 й.
7. *Бугров Я.С., Никольский С.М.* Дифференциальное и интегральное исчисление. М.Наука, 1988 г.
8. *Лунгу К.Н., Макаров Е.В.* Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 1,2. – 2-е изд. М. ФИЗМАТЛИТ, 2010.
9. *Ulrich L.Rohde, G.C.Jain, Ajay K.Poddar, A.K.Ghosh.* Introduction to differential calculus. John Wiley, 2012 y.
10. *Michail Mackison.* Higher Mathematics. Zeta Maths Limited. 2021 y.

MUNDARIJA

KIRISH.....	3
I BOB. SONLI TO‘PLAMLAR. SONLI KETMA-KETLIKLAR.....	4
1.1.To‘plamlar nazariyasi elementlari	4
1.2. Sonli to‘plamlar	6
1.3. Sonli ketma-ketlik va uning limiti	10
1.4. Kompleks sonlar va ular ustida amallar	20
II BOB. BIR O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYANING LIMITI VA UZLUKSIZ- LIGI	32
2.1. Funksiya tushunchasi. Funksiyalarning berilish usullari	32
2.2. Funksiyaning limiti	39
2.3. Limitlar haqida teoremlar.....	46
2.4. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksyalar.....	50
2.5. Limitga ega bo‘lgan funksiyalarning xossalari	57
2.6. Funksiyaning uzluksizligi	67
2.7. Cheksiz kichik funksyalarni taqqoslash	82
2.8. Tekis uzluksizlik	90
III BOB. BIR O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYANING HOSILASI VA DIFFE- RENSIALI.....	94
3.1. Hosila	94
3.2. Ba’zi bir elementar funksiyalarning hosilasi.....	104
3.3. Hosila hisoblash qoidalari	106
3.4. Differensial	117
3.5. Yuqori tartibli hosila va differensiallar	121
3.6. Differensial hisobning asosiy teoremlari.....	128
3.7. Teylor formulasi	139
IV BOB. BIR O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYANI TEKSHIRISH.....	153
4.1. Funksiyaning o‘shish va kamayish shartlari	153
4.2. Funksiyaning ekstremumi	156
4.3. Funksiya grafigining qavariqligi va botiqligi	165
4.4. Funksiya grafigining asimptotalari	171
4.5. Funksiyani tekshirishning umumiy sxemasi va funksiya grafigini yasash	175
4.6. Tenglamaning haqiqiy ildizlarini taqribiy hisoblash	180
V BOB. ANIQMAS INTEGRAL	188

5.1. Boshlang'ch funksiya tushunchasi	188
5.2. Aniqmas integral va uning xossalari	188
5.3. Integrallashning asosiy usullari	192
5.4. Ratsional kasrlarni integrallash	197
5.5. Trigonometrik funksiyalarni integrallash	212
5.6. Irratsional ifodalarni integrallash	217
VI BOB. ANIQ INTEGRAL	231
6.1. Aniq integral tushunchasiga keltiriladigan masalalar	231
6.2. Aniq integral	232
6.3. Quyi va yuqori Darbu yig'indilari va integrallari	236
6.4. Funksiya integrallanuvchi bo'lishligining shartlari	238
6.5. Aniq integralning asosiy xossalari	241
6.6. Yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan integrallar	246
6.7. Aniq integralni hisoblash	249
6.8. Xosmas integrallar	253
6.9. Aniq integralning tadbirlari	265
6.10. Aniq integralni hisoblashning taqribiy usullari	284
ADABIYOTLAR	295

Shamsiyev Rahim Najmiddinovich

DIFFERENSIAL VA INTEGRAL HISOB

DARSLIK

I QISM

**«ALFRAGANUS UNIVERSITY»
NODAVLAT TA'LIM TASHKILOTI**

**Manzil: Toshkent shahar, Yunusobod tumani,
Qoraqamish ko'chasi, 2A-uy.**

**Bosishga ruxsat etildi 27.12.2024-yil.
Bichimi 60x84 $\frac{1}{16}$. Ofset qog'ozi.
“Temes New Roman” garniturası.
Hisob-nashr tabog'i. 18,6. Adadi 50 dona.
Buyurtma № 31. Bahosi kelishilgan narxda.**

**“DAVR MAXSIMUM MEDIA”
МЧЖ матбаа корхонасида чоп этилди.
Корхона манзили: Тошкент шаҳар
Олмазор тумани Шифокорлар шаҳарчаси, 15 уй.**