O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

BAYJUMANOV ABDUSATTAR ABDUQODIROVICH

NOCHIZIQLI MANTIQIY TENGLA MALAR TIZIMINI YECHISH VA ULARNING MURAKKABLIGINI BAHOLASHNING SAMARALI USULLARI

01.01.03 – Hisoblash matematikasi va diskret matematika
(fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI FAN DOKTORI (DSc) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Toshkent – 2025

UO‘K: 519.957

Fizika-matematika fanlari doktori (DSc)
dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата дисертации доктора (DSc)
по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of the doctor
of physical and mathematical sciences (DSc)

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02RAQAMLI ILMIY KENGASH

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

BAYJUMANOV ABDUSATTAR ABDUQODIROVICH

NOCHIZIQLI MANTIQIY TENGLAMALAR TIZIMINI YECHISH VA ULARNING MURAKKABLIGINI BAHOLASHNING SAMARALI USULLARI

01.01.03 – Hisoblash matematikasi va diskret matematika
(fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI FAN DOKTORI (DSc) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Toshkent – 2025

Fan doktori (Doctor of Science) dissertatsiyasi mavzusi Oʻzbekiston Respublikasi Oliy taʼlim, fan va innovatsiyalar huzuridagi Oliy Attestatsiyasi komissiyasida B2024.3.DSc/FM275 raqam bilan roʻyxatga olingan.

Dissertatsiya Mirzo Ulugʻbek nomidagi Oʻzbekiston milliy univesitatida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (oʻzbek, rus, ingliz (resume)) Ilmiy kengash veb sahifsi (http://ik-fizmat.nuu.uz) va "Ziyonet" Axborot taʼlim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy maslahatchi:	**Kabulov Anvar Vasilovich** texnika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Hayotov Abdullo Raxmonovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Kalimbetov Burxan Teshebaevich fizika-matematika fanlari doktori, professor (Qozogʻiston)
	Allakov Ismoil Fizika-matematika fanlari doktori, professor
Yetakchi tashkilot:	**Toshkent shahridagi Turin politexnika universiteti**

Dissertatsiya himoyasi Mirzo Ulugʻbek nomidagi Oʻzbekiston Milliy univesiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 raqamli Ilmiy kengashning 2025-yil "20" iyun soat 14:00 dagi majlisida boʻlib oʻtadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet koʻchasi, 4-uy.Tel.: (+99871) 227-12-24, faks: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan Mirzo Ulugʻbek nomidagi Oʻzbekiston Milliy univesitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (____ raqam bilan roʻyxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet koʻchasi, 4-uy.Tel.: (+99871) 227-12-24.

Dissertatsiya avtoreferati 2025-yil "5" iyun kuni tarqatildi.

(2025-yil "5" iyun dagi № 5 -raqamli reyestr bayonnomasi).

OʻZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TAʼLIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI * MIRZO ULUGʻBEK NOMIDAGI OʻZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI *

M.M.Aripov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., professor

Z.R.Raxmonov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d.

R.D.Aloyev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash huzuridagi ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., professor

KIRISH (fan doktori dissertatsiyasi annotatsiyasi (DSc))

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida olib borilayotgan tadqiqotlarda mantiq algebrasi, prognozlash, tanib olish, tasniflash, koʻp oʻzgaruvchili funksiyalarining mutlaq ekstremallarini izlash usullaridan foydalangan holda amaliy masalalarni yechishga bagʻishlangan tadqiqotlar dolzarb boʻlib, tibbiyot, geologiya, gidrologiya, boshqaruv, kompyuter texnologiyalari sohalarida keng qoʻllaniladi. Mantiqiy usullar bir qator muhim sohalar: biologiya, tibbiyot, harbiy ishlar, avtomatlashtirish, boshqaruv, eksperimental rejalashtirish va boshqalarda, umuman olganda, faqat miqdoriy emas, balki hamma joyda – miqdorlar oʻrtasidagi munosabatlar muhim ahamiyatga ega boʻlib, ular koʻrib chiqilayotgan jarayonlarni tavsiflaydi va mantiqan bogʻlaydi. Soʻnggi paytlarda paydo boʻlgan mantiqiy algebra usullarini qoʻllashning yangi sohasi – bu koʻplab obyektlar va hodisalarni tanib olish, tibbiy yoki texnik diagnostika, zamonaviy mashinalarni qurish, test muammolarini tekshirish va ularni mantiqiy tenglamalar tizimini yechishga keltirish muhim vazifalardan biri boʻlib qolmoqda.

Hozirgi kunda jahonda mantiqiy tenglamalar tizimining yechimlarini qurish fan va texnikaning turli sohalarida, sun’iy intellekt, ishlab chiqarish mantigʻi, boshqaruv qarorlarini qabul qilish, tibbiy diagnostika, mantiqiy va tanib olish algebrasi, algebraik kriptoanaliz, mantiqiy-kombinatoriy masalalari, dasturlashtiriladigan mantiqiy qurilmalar va boshqalarda mantiqiy masalalarni xalq xoʻjaligida qoʻllash uchun yildan-yilga yangi imkoniyatlar yaratmoqda. Masalan, mantiqiy tanib olish tizimlarida oʻzlarining tanib olish algoritmlarini qurish uchun diskret tahlilga asoslangan mantiqiy usullar va unga asoslangan fikrlar hisobi qoʻllaniladi. Umumiy holda, mantiqiy tanib olish usulidan foydalanish mantiqiy bogʻlanishlar mavjudligini oʻz ichiga olib, bunda oʻzgaruvchilar tanib olingan obyektlar yoki hodisalarning mantiqiy belgilari boʻlgan mantiqiy tenglamalar tizimi orqali ifodalash maqsadli ilmiy tadqiqotlardan hisoblanadi.

Mamlakatimizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tadbiqiga ega boʻlgan nochiziqli mantiqiy tenglamalar tizimini yechish va ularning murakkabligini baholashning samarali usullarini ishlab chiqish kabi dolzarb yoʻnalishlarga katta e’tibor qaratilmoqda. Bu esa matematiklar va boshqa soha olimlari oʻrtasida yaqin va oʻzaro uzviy aloqalarni oʻrnatishga asos boʻlmoqda. Bunda texnik va iqtisodiy sohalarda qoʻshma jamoalar barqaror ishlab kelmoqda, lekin kiberxavfsizlik, algebraik kriptoanaliz, timsollarni aniqlash va identifikatsiya qilish sohalarida bu jarayon hali boshlangʻich bosqichda. “Funksional analiz, algebra, differensial tenglamalar, matematik fizika, matematik modellashtirish, hisoblash matematikasi va diskret matematika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” ustuvor yoʻnalishlar boʻyicha xalqaro standartlar darajasidagi ilmiy izlanishlar olib borish OʻzR FA V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatining asosiy vazifalaridan biri hisoblanadi[1]. Qaror ijrosini ta’minlashda algebraik kripto tahlilning amaliy muammolarini yechish, bashorat qilish, tanib olish, tasniflash va koʻp oʻzgaruvchilarning mutlaq ekstremallarini qidirishda evristik usullarning

---

[1] Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida” gi PQ-4708-son Qarori.

aniqligini oshirish uchun mantiqiy tenglamalar tizimlarining yechimlarini topish muammosi alohida ahamiyatga ega.

Dissertatsiya ishi O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi № UP-4947 - sonli Farmonida, “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi Qarorlarida belgilangan vazifalarni hal etadi. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 17-fevraldagi № PP –2789-son “Fanlar akademiyasi faoliyatini yanada takomillashtirish, ilmiy-tadqiqot faoliyatini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi 27-apreldagi№ PP-3682-son. 2017-yil 20-apreldagi “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi № PP -2909-son “Innovatsion g‘oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga tatbiq etish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 24-maydagi O‘zbekiston Milliy universitetida fan va pedagoglar bilan O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 7-oktabrdagi № ID-8839-son Qarorida “Yagona ijtimoiy rivojlanish konsepsiyasi” – O‘zbekiston Respublikasini 2030-yilgacha iqtisodiy rivojlantirish to‘g‘risida”, shuningdek, mazkur faoliyat sohasida qabul qilingan boshqa me’yoriy-huquqiy hujjatlar[2].

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot O‘zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi[2].

Algebraik kriptotahlil, prognozlash, tanibolish, tasniflash, ko‘po‘zgaruvchili funksiyalarning mutlaq ekstremallarini izlashning amaliy masalalarini yechishning evristik usullarining to‘g‘riligini oshirish uchun mantiqiy tenglamalar tizimlari yechimlarini topish masalalarini hal qilish bo‘yicha tadqiqotlar yetakchi universitetlar va tadqiqot markazlari, jumladan, Albert universiteti (Kanada), Stenford universiteti, Massachusets texnologiya instituti (AQSh), Kembrij universiteti, Oksford universiteti (Buyuk Britaniya), Kioto universiteti (Yaponiya), Melburn universiteti (Avstraliya), Texnika universiteti Myunxen (Germaniya), Sinxua universiteti (Xitoy), Lozanna federal politexnika maktabi (Shvetsariya), Seul milliy universiteti (Koreya Respublikasi), Amsterdam universiteti (Niderlandiya), Per va Mari Kyuri universiteti (Fransiya), M.V.Lomonosov nomidagi Moskva davlat universiteti, A.A.Dorodnitsyn nomidagi Rossiya Fanlar akademiyasi hisoblash markazi (Rossiya), V.M.Glushkov nomidagi Kibernetika institutida (Ukraina) olib borilmoqda.

Ma’lumotlarning aniqligini ta’minlash uchun mantiqiy tenglamalardan foydalanish bo‘yicha butun dunyo bo‘ylab olib borilgan ilmiy tadqiqotlar natijasida

[2] Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi quyidagi manbalar: http://www.ds.mpg.de/en, http://www.ox.ac.uk/, http://www.bioe.neu.edu, http://www.zbit.uni-tuebingen.de/, http://neel.cnrs.fr/?lang=fr, https://www.kribb.re.kr/eng/sub02/sub02_07_03.jsp, https://www.cbcb.umd.edu/, http://www.arizona.edu/, https://mipt.ru/science/labs/laboratory_of_the_biophysics_of_excitable_systems/ va boshqa manbalar asosida ishlab chiqilgan.

bir qator ilmiy natijalar qo‘lga kiritildi: evristik algoritmlarning optimal korrektorlarini sintez qilish muammosi Yu.I.Juravlevning yetakchilik algoritmlari mantiqiy funksiyalarni minimallashtirish, testerlarni qurish, funksiyalarning monotonligini tekshirish uchun ishlab chiqilgan (Rossiya hisoblash markazi, RFA); ishonchlilik masalalarida mantiqiy tenglamalar tizimlarining umumiy yechimini qo‘llash (Buyuk Pyotr San-Peterburg Politexnika Universiteti); mantiqiy tenglamalar tizimini yechish usullari, mantiqiy tenglamalar tizimini yechish masalalari (V.P. Astafiev nomidagi Krasnoyarsk davlat pedagogika universiteti); mantiqiy determinantlar usulida disyunktiv tenglamalar sistemasini yechish (XNURE, Xarkov-Ukraina).

Dunyoda noravshanlikni oldini olish uchun quyidagi muammolarni hal qilish bo‘yicha qator ustivor yo‘nalishlarda ilmiy tadqiqot ishlari olib borilmoqda, jumladan, Ma’lumotlarning qisman mantiqiy funksiyalar va tizimlarning ko‘pnomli bajarish, kuchsiz aniqlangan mantiqiy funksiyalar va tizimlarni amalga oshiradigan ko‘phadlarni sintez qilish algoritmlaridan iborat.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Ma’lumotlarning aniqligini ta’minlashmaqsadida algebraik kripto tahlilning amaliy muammolarini yechish, bashorat qilish, tanib olish, tasniflash va ko‘p o‘zgaruvchilarning mutlaq ekstremumlarni qidirishda evristik usullarining aniqligini oshirish uchun mantiqiy tenglamalar tizimlarining yechimlarini topish muammosi alohida ahamiyatga ega.

Ma’lumotlarni qayta ishlashda to‘g‘ri qaror qabul qilishni ta’minlashmodellari, nazariyasi, uslublarini yaratishning nazariy va amaliy muammolari bo‘yicha ilmiy tadqiqot ishlari, mantiqiy usullarga asoslangan keng ko‘lamli masalalarning algoritmlari va adabiyot manbalarini tahlil qilish quyidagi olimlarning ishlarida ko‘rib chiqilgan: V.M.Glushkov, K.Shennon, G.Murtaza, I.Hussayin, J.Nakaxara, J.Rijmen, K.Chand, K.Gupta, K.Nyberg, M.Malik, Hasan Omar, Zhjou YUyang, P.Junod, S.V.Yablonskiy, Y.I.Juravlev, V.I.Rvachev, V.S.Leontyev, V. Kondratyev va hokazolarning Ma’lumotlarni qayta ishlashda to‘g‘ri qaror qabulni ta’minlashning rivojlanishiga qo‘shgan xissalarini alohida ta’kidlash maqsadga muvofiqdir.

O‘zbekistonda mantiqiy tenglamalarni yechish masalalariga oid tadqiqotlar V.Q.Qabulov, Sh.A.Ayupov, M.M.Aripov, N.X.Kasimov, A.V.Kabulov, I.X.Normatov, E.U.O‘rinboyev, N.A.Ignatyev, N.Mirzayev, A.F.Babajanov, M.Berdimurodov va boshqalar tomonidan olib borilgan. Hozirgi vaqtda boshqaruv tizimlarini dinamik modellashtirishning barcha darajalarida boshqaruvni takomillashtirish uchun to‘g‘ri qarorlarni qabul qilishning mantiqiy usullari hamda to‘liq shakllantirilmagan sohalarda evristik algoritmlar yordamida olingan natijalarning aniqligini oshirish uchun chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar tizimlarini yechish usullari yetarli darajada o‘rganilmagan.

Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilayotgan oliy ta’lim muassasasining ilmiy tadqiqot ishlari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetining ilmiy tadqiqot ishlar rejasiga muvofiq F3-201906117-“Orol dengizida qishloq xo‘jaligi ishlab chiqarishiga ekologik vaziyatlarning ta’sirini aniqlash monitoringi uchun dasturiy ta’minot” va BV-M-F4-004-“Funksional jadvallar algebrasi asosida murakkab tizimlarni boshqarishni algoritmlash tamoyillarini ishlab chiqish” doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi Jegalkin polinomlaridan iborat nochiziqli tenglamalar darajalarini pasaytirish, o‘zgaruvchilarni guruhlash, formulalarini transformatsiya qilish va soddalashtirish asosida nochiziqli mantiqiy tenglamalar tizimini yechish metodologiyasi, usullari va texnologiyasini ishlab chiqish va samaradorligini baholashdan iborat.

Tadqiqot vazifalari:

mantiqiy tenglamalar sistemasini ikkinchi darajali va undan yuqori chiziqli, chiziqli bo‘lmagan tenglamalarning maksimal izchil kichik sistemalarga bo‘laklash orqaliy yechish metodikasini ishlab chiqish;

mantiqiy funksiyalarni dekodlash va monoton funksiyalar soni va dekodlash algoritmining murakkabligi haqidagi teoremalarni isbotlash masalasini hal qilish asosida mantiqiy tenglamalar sistemalarining maksimal izchil quyi tizimlarini izlash;

ikkinchi darajali chiziqli va chiziqli bo‘lmagan tenglamalar sistemalarini mulohazalarni o‘zgartirish va guruhlash usullari bilan yechish va murakkab konyunksiyalarning yutilish me’zonini isbotlash;

murakkab konyuksiyalarning dizyunktiv normal shakllarini o‘zgartirish va minimallashtirishga asoslangan ikkinchi darajali yuqori nochiziqli mantiqiy tenglamalar sistemalarini yechish;

maxsus turdagi ikkinchi darajali nochiziqli tenglamalar sistemalarini mulohazalarni guruhlash va murakkab konyuksiyalarning dizyunktiv normal shakllarini minimallashtirish usullari bilan yechish;

mantiqiy chiziqli va nochiziqli tenglamalar sistemasini yechish uchun tuzilgan algoritmlarning dasturiy ta’minotini yaratish.

Tadqiqotning obyekti – nochiziqli mantiqiy tenglamalar sistemalari va ikkinchi darajali maxsus nochiziqli mantiqiy tenglamalar sistemalari, turli asoslarda ko‘rsatilgan mantiqiy xulosalar va ularni o‘zgartirishdan iborat.

Tadqiqotning predmeti – tenglamalar sistemalari, evristik (samarali) algoritmlar va boshqaruv va diagnostika qarorlarini qo‘llab-quvvatlash uchun ishlatiladigan optimal usullarni sintez qilish uchun modellar, usullar, algoritmlar va dasturiy ta’minot to‘plamlaridan iborat.

Tadqiqot usullari. Dissertatsiya ishida mantiqiy xulosalarni tranformatsiyalash (o‘zgartirish), k-qiymatli mantiq, dizyunktiv normal shakllar sinfidagi va Jegalkin polinomidagi mantiqiy funksiyalarni minimallashtirish, ehtimollar nazariyasi, tanib olish metodlari, diskret matematika nazariyasi, murakkab mantiqiy ifodalarni samarali ko‘paytirish, matematik statistika, chiziqli mantiqiy algebra, obyektga yo‘naltirilgan dasturlashdan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

mantiqiy tenglamalari sistemalarini ikkinchi va undan yuqori darajali chiziqli, chiziqli bo‘lmagan tenglamalarning maksimal izchil (qo‘shma) kichik tizimlariga bo‘lish yo‘li bilan yechish metodikasi ishlab chiqilgan;

mantiqiy xulosalarni tranformatsiyalash (o‘zgartirish) va guruhlash usullari tuzilib, murakkab birikmalarni singdirish me’zonlari, shuningdek, ikkinchi va undan yuqori darajali chiziqli va chiziqli bo‘lmagan tenglamalar sistemasini yechish uchun ularni minimallashtirish isbotlangan;

maxsus sinfning ikkinchi darajali nochiziqli tenglamalar sistemalarini yechish uchun kompleks birikmalarning dizyunktiv normal shakllarini (d.n.f.) minimallashtirish va guruhlash usulining murakkabligini baholash uchun mantiqiy xulosalarni guruhlash va minimallashtirish usullari ishlab chiqilgan;

formulalarni ixtiyoriy asosdan dizyunktiv normal shakllariga va Jegalkin polinomiga optimal almashtirish bo‘yicha teoremalar isbotlangan;

murakkab dizyunktiv normal shakllarni ko‘paytirishni qo‘llashda ishlab chiqilgan algoritmlarning samaradorligi bo‘yicha teoremalar isbotlangan va ularning murakkabligi baholangan;

nochiziqli mantiqiy tenglamalar sistemalarining ikkinchi tartibdan yuqori bo‘lgan murakkabligi baholari va birinchi tartibli atroflik tomonidan murakkab birikmalarni singdirish me’zonlari isbotlangan;

boshqaruv va kollegial diagnostika yechimlarini qabul qilishni qo‘llab-quvvatlashning samarali usullarining aniqligini oshirish masalasini hal qilishda evristik algoritmlarning ixtiyoriy murakkab mantiqiy darajalari tizimlarini optimal hal qilish uchun algoritmik tizim va dasturiy ta’minot majmuasi ishlab chiqilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

samarali algoritmlar va ularning dasturiy ta’minoti ishlab chiqilgan;

mantiqiy xulosalarni turli asoslarda tasvirlash va ularni guruhlash usullari bilan minimallashtirish uchun mantiqiy xulosalarni tranformatsiyalashga (o‘zgartirishga) asoslangan nochiziqli mantiqiy tenglamalar yechilgan;

simmetrik shifrlash algoritmlari S-bloklarining algebraik modeli bo‘lgan dizyunktiv normal shakl sinfidagi mantiqiy xulosalarni guruhlash va minimallashtirishga asoslangan ikkinchi darajali maxsus nochiziqli mantiqiy tenglamalar sistemasi yechilgan;

boshqaruv va kollegial diagnostika yechimlarini qabul qilishni qo‘llab-quvvatlash uchun evristik algoritmlarning ixtiyoriy murakkab mantiqiy darajalari tizimlarini optimal hal qilish uchun algoritmik tizim va dasturiy ta’minot majmuasi ishlab chiqilib, boshqaruv yechimlarini topish tartibi ishlab chiqilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi tavsiya etilgan modellar, isbotlangan teoremalar, sinov natijalarining to‘g‘riligi, shuningdek, dissertatsiyaning asosiy nazariy qoidalarini bosma nashrlarda va xalqaro ilmiy konferensiyalarda ma’ruzalarda sinovdan o‘tkazish, eksperimental tadqiqotlar va ishlab chiqilgan dasturiy ta’minotning amaliyotda qo‘llanilishi bilan tasdiqlangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati chiziqli hamda chiziqli bo‘lmagan ikkinchi darajali va ikkinchi darajadan yuqori bo‘lgan kichik tizimlarga bo‘linish yo‘li bilan chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar tizimini yechish texnologiyasi, transformatsiya, guruhlash usullari va dizyunktiv normal shakl va Jegalkin ko‘phadlari sinfida mantiqiy xulosalarni minimallashtirish bilan tasdiqlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati simmetrik shifrlash algoritmlarining S-bloklarining algebraik modeli bo‘lgan dizyunktiv normal shakl sinfidagi mantiqiy xulosalarni guruhlash va minimallashtirishga asoslangan ikkinchi darajali maxsus nochiziqli mantiqiy tenglamalar sistemasini yechish bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Dissertatsiya ishida nochiziqli mantiqiy tenglamalar mulohazalarini minimallashtirish usullari bo‘yicha olingan ilmiy natijalar asosida:

ixtiyoriy bazis, birinchi, ikkinchi va ikkinchi darajadan yuqori Jegalkin polinomi va dizyunktiv normal shakllar (d.n.f.) ko‘rinishida berilgan mantiqiy tenglamalar tizimlarining yechimlarini topish uchun samarali optimal algoritmlari ishlab chiqilgan va mulohazalarni optimallashtirishda (minimallashtirishda), OT-Atex-2018-486 “Dasturlashtirilgan mantiqiy kontrollerlar va ularni loyihalash uchun avtomatlashtirilgan CAD mantiqiy tizimiga asoslangan mantiqiy boshqaruv va axborotni himoya qilish tizimlarini joriy etish” mavzusidagi amaliy loyihada algoritmlarni mikrokontrollerlarga yozish jarayonida mantiqiy tenglamalarni minimallashtirish usullari qo‘llaniladi (O‘zbekiston Milliy universitetining 2024-yil 24-iyuldagi 04/11-2809-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijaning qo‘llanilishi mikrokontroller asosida shifrlash algoritmlarini optimal tarzda amalga oshirish va tahlil qilish imkonini bergan;

maxsus tipdagi ikkinchi darajali nochiziqli tenglamalar sistemalarining formulalarini guruhlash va minimallashtirish yo‘llari bilan ishlab chiqilgan samarali yechish usullari UNICON tashkilotida simmetrik shifrlash algoritmlarining bardoshligini baholash bo‘yicha ilmiy tadqiqot loyihasida qo‘llanilgan (UNICON DUK tashkilotining 2024-yil 5-sentyabrdagi 6-2/1757-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, AES va Kuznechik simmetrik shifrlash algoritmlarining algebraik kriptotahlil modelini minimallashtirish asosida, davrlar soni 6 ga yetganda, argumentlar soni uch baravar, tenglamalar soni esa o‘n baravar kamayish imkonini bergan;

chiziqli bo‘lmagan ikkinchi darajali tenglamalar sistemalarining mantiqiy ifodalarini transformatsiyalash va guruhlash usullari bilan yechish hamda murakkab konyunksiyalarning yutilish me’zonini isbotlash usullari ishlab chiqilgan bo‘lib, Qoraqalpog‘iston Respublikasi ichki ishlar vazirligi axborot resurslari markazida AES va Kuznechik simmetrik shifrlash algoritmlarini bardoshligini baholashda qo‘llanilgan (Qoraqalpog‘iston Respublikasi Ichki ishlar vazirligining 2024-yil 30-avgustdagi 20/1310-sonli ma’lumotnoma). Natijada, AES va Kuzneshik simmetrik shifrlash algoritmlarining algebraik kriptoanalizi modelini minimallashtirish asosida raundlari soni 6-ga yetganda argumentlar uch barobarga kamaytirish va tenglamalar soni o‘n millionga kamaytirish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Tadqiqot natijalari 13 ta xalqaro va 8 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida hamda Sharof Rashidov nomidagi Samarqand davlat universiteti Intellektual tizimlar va kompyuter texnologiyalar fakultetining kafedralararo ilmiy seminari va Muhammad al-Xorazmiy nomidagi Toshkent axborot texnologiyalari universiteti kafedralar aro birlashgan Ilmiy seminari hamda Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universiteti Amaliy matematika va intellektual texnologiyalar fakulteti “Hisoblash matematikasi va axborot tizimlari” kafedrasining ilmiy seminarlarida aprobatsiyadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinishi. Dissertatsiya ishi mavzusi bo‘yicha jami 45 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 15 ta ilmiy maqola, jumladan, 7 tasi xorijiy (7 tasi Scopus xalqaro bazaga kiritilgan jurnallarda, shu jumladan, 1 tasi Q1 kvartil) jurnallarda va 8 ta Respublika jurnallarda e’lon qilingan. O‘zbekiston Respublikasi Adliya Vazirligi huzuridagi intellektual mulk agentligidan 2 ta dasturlar majmuasiga guvohnoma (DGU)lar olingan.

Dissertatsiya hajmi va tuzilishi. Dissertatsiya kirish qismi, beshta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati va ilovalardan iborat. Dissertatsiyaning hajmi 160 betni tashkil etgan.

DISSERTASINING ASOSIY MAZMUNI

Kirishda dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zaruriyati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga muvofiqligi asoslanadi. Tadqiqotning maqsad va vazifalari belgilab olingan, shuningdek tadqiqot obyekti va predmeti aniqlangan. Shular asosida olingan tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati, natijalarni amaliyotga tatbiq etilishi, chop etilgan ishlar, shuningdek, dissertatsiya tuzilishi haqida ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyadagi **“Nochiziqli mantiqiy tenglamalar sistemasini yechish metodologiyasi”** nomli birinchi bob to‘rt paragrafdan iborat bo‘lib, unda Jegalkin polinomlari tomonidan aniqlangan chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar sistemalarining alohida sinflari o‘rganiladi, ularni chiziqli, chiziqli bo‘lmagan quyi tizimlarga bo‘lish asosida ularni yechish metodologiyasi ishlab chiqilgan. Ikkinchi va ikkinchi tartibdan yuqori tartibli nochiziqli mantiqiy tenglamalar sistemasini yechish va ularning murakkabligini baholashning mavjud usullarini o‘rganish ko‘rib chiqilgan.

1.1 paragrafda chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar sistemasini yechish va ularning samaradorligi va murakkabligini baholashning mavjud usullarini o‘rganishni taklif qiladi. Umuman olganda, chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar sistemalarini yechish ildizlarni qidirishning yuqori shoxlanish (ветвящегося) jarayonini va oraliq yechimlarni keng qidirishni amalga oshirish zarurati bilan bog‘liq. Qoida tariqasida, bu shunchalik kattaki, hatto zamonaviy yuqori tezlikdagi kompyuterlar ham uni amalga oshira olmaydi. Biroq, aniq tenglamalarning xususiyatlarini hisobga olgan holda, ildizlarni topish jarayoni ko‘pincha sezilarli darajada tezlashishi mumkin. Shuning uchun chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalarni yechishning samarali usullarini ishlab chiqishning asosiy yo‘li tenglamalarni tasniflash va har bir sinf uchun mos usullarni ishlab chiqishdir.

1.2 paragrafda nochiziqli mantiqiy tenglamalarning mos kelmaydigan tizimlarini quyi tizimlarga bo‘lish asosida yechishning metodologiyasi va uslubiy jihatlariga bag‘ishlangan.

O‘zgaruvchilarning boshlang‘ich alifbosi $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bo‘lsin. Mantiqiy tenglamalar sistemasini ko‘rib chiqamiz $F(x) = \tilde{\alpha}$:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_m \end{array}\right\} \qquad (1)$$

bu yerda f_i - tizimlar ustidagi formulalar orqali amalga oshiriladigan mantiqiy funksiyalar (bundan keyin biz ularni bazislar deb ataymiz)

$$B_1, B_2, B_3\ va\ B_4 : B_1 = \{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \overline{x}, x_1 \sim x_2, x_1 \to x_2, x_1 \oplus x_2, x_1 / x_2\},$$
$$B_2 = \{x_1 \oplus x_2, x_1 \& x_2,\ 1, 0\},\ B_3 = \{x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, \overline{x}\},\ B_4 = \{x_1 \oplus x_2, 1, 0\},$$
$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in E_m^2 = \{0,1\}.$$

Shunday qilib, dissertatsiyada ushbu mantiqiy tenglamalar sistemasini o‘rganamiz:

$$\{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1,\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_2, \ldots,\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_m\},$$

bu yerda har bir funksiya (mulohaza) $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), i = 1, 2, \ldots, m$ ixtiyoriy funksiyalar sistemasidagi formulalar orqali amalga oshirilishi mumkin:

$$\widetilde{D} = \{\overline{x}, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \to x_2, x_1 \sim x_2, (x_1 \oplus x_2) mod 2, x_1/x_2, 1\},\ \alpha_i \in \{0,1\}.$$

Mantiqiy o‘zgarishlardan foydalanib, sistemaning har bir $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ mulohazasi Jegalkin polinomi ko‘rinishiga keltiriladi va mantiqiy tenglamalar tizimining uch turiga bo‘linadi:

1) chiziqli

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \alpha, (a_i, \alpha \in \{0,1\});$$

2) ikkinchi darajali nochiziqli tenglamalar

$$\textstyle\sum_{ij=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \oplus \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = \alpha, (a_{ij}, b_i, \alpha \in \{0,1\}), i < j;$$

3) ikkinchi darajadan yuqori nochiziqli tenglamalar

$$\sum \Omega \in \{\Omega\} a_\Omega x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} = \alpha, \Omega = \{i_1, i_2 \ldots, i_k\},$$

bu yerda { Ω} barcha Ω qism to‘plamlar to‘plami,

$$\Omega \in \{1, 2, \ldots n\}; (\alpha, a_\Omega) \in \{0,1\}.$$

bunda barcha turdagi sistemalar alohida ko‘rib chiqiladi.

Shubhasiz, vektor $\widetilde{\beta} \in E_n^2$ (1) tizimning yechimi bo‘ladi, agar u bir vaqtning o‘zida uchta turdagi tizimlarning yechimi bo‘lsa.

Ushbu bo‘lim, shuningdek, mantiqiy formulalarni bir asosdan ikkinchisiga o‘tkazish mezonlarini beradi. Mezonlar analitik teoremalar shaklida isbotlangan.

1.3 paragrafda nochiziqli mantiqiy tenglamalar tizimlarining maksimal birgalikdagi quyi tizimlarini izlash usullarini o‘rganish monotonik mantiqiy funksiyalarning maksimal yuqori nolini qidirish algoritmi asosida taklif etiladi.

Mantiqiy tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin:

$$\boldsymbol{M} = \{f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1, f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1,\ldots, f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1\} \qquad (2)$$

1-ta’rif. Og‘irlik P_i dep tenglamalari $f_i, i = 1, 2,...,m$ hammasining sonini nomlaylik $f_i \in M$ shu kabi $f_i \cdot f_j \neq 0$,$i \neq j$.

To‘plamning $\alpha_{i_1},...,\alpha_{i_k}$ birlik koordinatalari $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in E_m^2$ bo‘lsin.

Monotonik mantiqiy funksiyani ko‘rib chiqamiz: $q(y_1, \ldots, y_m)$:

$$q(y_1,\ldots,y_m) = \begin{cases} 0, \text{agar } \{ f_{i_1} = 1, \ldots, f_{i_k} = 1\} \text{ birgalikda bo‘lsa,} \\ 1 - \text{aks xolda.} \end{cases}$$

Tizimning (1) maksimal birgalikdagi quyi tizimini topish uchun biz $q(y_1, \ldots, y_m)$ funksiyaning maksimal yuqori noli (m.y.n.)ni qidirishning A_M algoritmidan foydalanamiz. $q(\tilde{y})$ funksiyasining $y_{i_1},\ldots, y_{i_m}$, o‘zgaruvchilari $P_{i_1} \geq P_{i_2} \leq \ldots \leq P_{i_m}$ to‘plamining leksikografik tartibida saqlanadi.

Faraz qilaylik, $f_i, i = 1,2,...,m$ (2) sistemaning mantiqiy xulosalari quyidagi bazisda berilgan bo‘lsin: $\{\overline{x}, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2\}$. (2) tizimning quyi tizimi quyidagi shaklga ega:

$$\{U_{11} \vee U_{12} \vee \ldots \vee U_{1p_1} = 1, U_{21} \vee U_{22} \vee \ldots \vee U_{2p_2} = 1, \ldots, U_{t1} \vee U_{t2} \vee \ldots \vee U_{tp_t} = 1\}. \qquad (3)$$

1-teorema. (3) tizim faqat va faqat $U_{1j_1}, U_{2j_2}, \ldots, U_{tj_t}$ e.k.lar mavjud bo‘lganda izchil bo‘ladi, shu kabi

$$\mathop{\&}_{k=1}^{t} U_{kj_k} \neq 0. \qquad (4)$$

Tizim (3) uchun birgalikda bo‘lish shartlarini aniqlaylik. (4) shartning bajarilishini tekshirishning samarali protseduralaridan birini taklif qilaylik. Tasavvur qilaylik d.n.f. $N_i,\ i = 1,2,...,t$ sistema (3) ortogonal d.n.f. $N_i^0 = K_{i1} \vee K_{i2} \vee \ldots \vee K_{it_i},\ i = 1,2,...,t-1$ da induksiya orqali biz tizimning birgalikda bo‘lishini aniqlaymiz.

1.4 paragrafda nochiziqli mantiqiy tenglamalar tizimini yechishda k – qiymatli mantiqning monoton funksiyalarini o‘rganishni nazarda tutadi. O‘zgaruvchilarning monoton funksiyalari n sonini $\psi(n)$ ixtiyoriy tartib bo‘yicha aniqlash uchun baholar murakkabligi topilgan.

2-teorema. k elementlarning qisman tartiblangan 0<1,0<2,…,0<k-1 qiymatlari to‘plami uchun moonoton funksiyalarining $\psi(n)$ soni uchun

$$\psi(n) = 2^{\frac{1}{\sqrt{\pi(k-1)}}} \cdot \frac{k^{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot (1 + \varepsilon(n)).$$

teorema isbotlangan.

3-teorema. k-qiymatli n o‘zgaruvchili mantiqning monoton f funksiyasi uchun qisqartirilgan d.n.f. yagona minimal (eng qisqa) d.n.f. bo‘ladi.

II bobda **“Birinchi va ikkinchi tartibli chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar tizimini yechish usullari”** taklif qilingan.

2.1-da o‘zgaruvchilarni yo‘q qilish usuli bilan chiziqli mantiqiy tenglamalar tizimlarining yechimlari taklif etiladi. Chiziqli mantiqiy tenglamalar tizimi (ch.m.t.) berilsin:

$$\{\mathrm{f}_1=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\ \mathrm{x_j}\oplus\beta_1=\alpha_1,\mathrm{f}_2=\sum_{j=1}^{n}a_{2j}\ \mathrm{x_j}\oplus\beta_2=\alpha_{2,\ldots\ldots,}\mathrm{f_m}=\sum_{j=1}^{n}a_{mj}\ \mathrm{x_j}\oplus\beta_{\mathrm{m}}=\alpha_{\mathrm{m}}\ \},\quad(5)$$

bu yerda $a_{\rm j}$, $b_{\rm j}$, $a_{\rm ij}\in\{1.0\}$, i=1,…,m; j=1,…,n, Σ belgi orqali bir nechta mantiqiy moduli 2 bilan qo‘shish nazarda tutilgan. Mos kelmaydigan tenglamalarni olib tashlash masalasi moduli 2 orqali qo‘shish va o‘zgaruvchilarni ketma-ket yo‘q qilish usullari yordamida amalga oshiriladi.

Tizim (5) birgalicta bo‘lsin va *NN* orqali (5) sistemadagi yechimlar sonini belgilaymiz.

4-teorema. n o‘zgaruvchili m birgalikdagi chiziqli mantiqiy tenglamalar tizimi uchun $NN=2^{\rm n-m}$ tenglik hamma vaqt bajariladi.

1-natija. n o‘zgaruvchili chiziqli mantiqiy tenglamalarning har qanday ixtiyoriy tizimi $2^{\rm n-1}$ tadan ko‘p bo‘lmagan yechimlarga ega bo‘ladi.

2.2 paragrafda mantiqiy xulosalarni soddalashtirish uchun ikkinchi tartibli mantiqiy tenglamalarni transformatsiyalash (o‘zgartirish) usullari ishlab chiqilgan. Jegalkin ko‘phadiga o‘tkazish mezonlari isbotlangan.

5-teorema. $\{U_i\}_{/}^{m}\equiv\{U_j{*}\}_{\Sigma}^{m1}$ transformatsiya yolg‘iz tarzda mod2 kengaytmasi sifatida taqdim etiladi:

$$\mathbf{\Lambda}_{i=1}^{m}\mathrm{U_i}\oplus\sum_{i=3}^{m}(\mathbf{\Lambda}_{j=i}^{m}\mathrm{U_j})\oplus 1,\ \text{bu yerda}\ \{U_i\}_{/}^{m}=U_1/U_2/\ldots/U_m,\quad(6)$$

6-teorema. $\{\mathrm{U_i}\}_{V}^{m}\equiv\{\mathrm{U}_j^{*}\}_{\Sigma}^{ml}$ transformatsiya quyidagi shaklga ega:

$$\{\mathrm{U}_j^{*}\}_{\Sigma}^{ml}=\sum(\boldsymbol{U}_{i_1}^{i_1}\ \&\ \boldsymbol{U}_{i_2}^{i_2}\ \&\ldots\boldsymbol{U}_{i_k}^{i_k}),\quad(7)$$

bu yerda

$$(\sigma_1\vee\sigma_2\vee\ldots\vee\sigma_m=1),\{\sigma_{i_1},\sigma_{i_2},\ldots,\sigma_{i_k}\}\in\{\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_m\},$$
$$\sigma_{i_1}=\sigma_{i_2}=\ldots=\sigma_{i_k}=1,i_k\in\{1,2,\ldots,\mathrm{m}\},\ \mathrm{k}\le\mathrm{m}.$$

7-teorema. $\mathrm{D}_2=\{0,1,\ \mathrm{x}_1\ \&\ \mathrm{x}_2,\ \mathrm{x}_1\oplus\mathrm{x}_2\}$ bazisda implikatsiya operatsiyasining ketma-ketligi o‘ziga xos tarzda Jegalkin polinomi shaklida ifodalanadi:

$$\underset{i=1}{\overset{m}{\Rightarrow}}\mathrm{U}_i\equiv\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-(\frac{t}{2}-1)}\ \sum_{j=2i}^{m-t+2}\ \sum_{k=j+1}^{m-t+3}\ldots\sum_{l=n+1}^{m}(\mathrm{U_{2i-1}U_jU_k\ldots U}_l)\oplus\sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-\frac{(p-1)}{2}}\ \sum_{j=2i}^{m-p+2}\ \sum_{k=j+1}^{m-p+3}\ldots\sum_{l=n+1}^{m}(\mathrm{U_{2i-1}U_jU_k\ldots U}_l)\oplus\mathrm{C},$$

bu yerda

$$t=\begin{cases}2,4,\ldots,m,\ agar\ m\ juft\ bo'lsa\\ 1,3,\ldots,m,\quad aks\ holda\end{cases};\quad p=\begin{cases}1,3,\ldots,m-1,\ agar\ m\ juft\ bo'lsa\\ 2,4,\ldots,m-1\ \ aks\ holda\end{cases};$$

$$c=\begin{cases}1,\ agar\ m\ juft\ bo'lsa\\ 0,\ aks\ holda\end{cases};\qquad K_{\Sigma}^{\rightarrow}=\begin{cases}1+\dfrac{2}{3}(2^m-1),\ agar\ m\ juft\ bo'lsa\\ \dfrac{1}{3}(2^{m+1}-1),\quad aks\ holda\end{cases},$$

p, t qiymatlar esa m.k. dagi argumentlar soni.

8-teorema. $\{U_i\}^{m}_{\sim} \equiv \{U^{*}_{j}\}^{ml}_{\Sigma}$ transformatsiya yagona tarzda mod2 polinomi sifatida quyidagicha ifodalanadi:

$$\underset{i=1}{\overset{m}{\approx}} A_i = \begin{cases} \neg\sum\limits_{i=1}^{m} U_i, & agar\ m\ juft\ bo'lsa, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} U_i, & aks\ holda \end{cases}; \quad K_{\Sigma}(m) = \begin{cases} m+1, & agar\ m\ juft\ bo'lsa, \\ m, & aks\ holda \end{cases}; \quad L_{\Sigma}(m) = m.$$

9-Teorema. Analitik shakldagi $\{U_i\}^{m}_{\&} \equiv \{U_j{*}\}^{m1}_{\Sigma}$ transformatsiya mod2 kengaytmasi

$$\mathop{\&}_{i=1}^{m}(\neg U_i) = \mathop{\&}_{i=1}^{m} U_i \oplus \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1}^{3}\ldots\sum_{k=l+1}^{m} U_i U_j \ldots U_k \oplus \ldots \oplus \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} U_i U_j \oplus \sum_{i=1}^{m} U_i \oplus 1$$

shaklida yagona tarzda ifodalanadi.

10-teorema. Agar $P(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k})$ ni quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin bo‘lsa:

$$Uj_1(\sigma_{i_1} \oplus Uj_2(\overline{\sigma_{i_1}}, \sigma_{i_2}) \oplus Uj_3(\overline{\sigma_{i_1}}, \overline{\sigma_{i2}}, \sigma_{i_3}) \oplus ... \oplus Uj_k(\overline{\sigma_{i_1}}, ..., \overline{\sigma_{i_{k-1}}}, \sigma_{i_k}) \oplus Uj_{k+1}(\overline{\sigma_{i_1}}, ..., \overline{\sigma_{i_{k-1}}}, \overline{\sigma_{i_k}}), \quad (8)$$

unda $P(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k})$ polinom qat’iyan bir qimatga teng bo‘ladi, bu yerda $Uj_i \in U_i, = 1, 2, ..., k+1.$

2-natija. $Uj_1 \oplus ... \oplus Uj_{i-1} \oplus Uj_{i+1} \oplus ... \oplus Uj_{k+1} \equiv Uj_i \oplus 1$, agar Uj_i (8) formulaning shartini qanoatlantirsa, bunda Uj_i m.k. i=1,2,…,k+1.

2.3 paragrafda polinomlarni transformatsiyalashga asoslangan chiziqli bo‘lmagan ikkinchi tartibli tenglamalar tizimini yechishning optimal usuli ishlab chiqilgan.

Ikkinchi darajali chiziqli bo‘lmagan quyidagi tenglamalar tizimi berilgan bo‘lsin:

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{(1)}_{ij} x_i\ x_j \oplus \sum\limits_{i=1}^{n} b^{(1)}_{ij}\ x_i = \alpha_1 \\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{(2)}_{ij} x_i\ x_j \oplus \sum\limits_{i=1}^{n} b^{(2)}_{ij}\ x_i = \alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{(m)}_{ij} x_i\ x_j \oplus \sum\limits_{i=1}^{n} b^{(m)}_{ij}\ x_i = \alpha_m \end{array}\right\} \quad (9)$$

bu yerda α_{κ}, $b^{(k)}_{i}$, $a^{(k)}_{ij} \in E^2_n = \{0,1\}$, $k = 1,\ldots,m$; $i, j = 1,\ldots,n$ koeffitsiyentlar va shuningdek, $i \le j$ hamda $x_i \cdot x_i = x_i$.

(9) tenglamalar tizimini yozishni soddalashtirish usuli x_i, x_j elementlarni guruhlashdir va sistemaning turli tenglamalarida ishtirok etadigan chiziqli $x_{i_1} \oplus ... \oplus x_{i_k}$ shakllarini tanlashdir.

$x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus ... \oplus x_{i_k} : Y_{i_1,i_2,...,i_k} = x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus ... \oplus x_{i_k}$ yig‘indini $Y_{i_1,i_2...,i_k}$ bilan belgilaymiz, bu yerda $1 \le k \le n$; $x_{i_j} \in X^n = \{x_1,\dots,x_n\}$, $1 \le j \le k$.

(9) tizimda qavslar ichidan $Y_{i_1,i_2...,i_k}$ shakldagi har xil summalarni topib qo‘yish uchun ko‘plab variantlar mavjud ekanligini payqash mumkin.

{Y} - (9) tizimdagi barcha mumkin bo‘lgan guruhlar to‘plami bo‘lsin.

Faraz qilaylik, (9) sistemaning formulalar elementlarini ba’zi bir guruhlashdan so‘ng quyidagi sistema olingan bo‘lsin:

$$\left\{\sum_{i,j=1}^{t} a^{(1)}_{ij} z_i z_j = \alpha_1, \sum_{i,j=1}^{t} a^{(2)}_{ij} z_i z_j = \alpha_2, ..., \sum_{i,j=1}^{t} a^{(m)}_{ij} z_i z_j = \alpha_m\right\} \tag{10}$$

bu yerda $i \le j$, $z_i, z_j \in \{Y\}$, t - (10) tizimda ishlatiladigan {Y} to‘plamning kuchi.

$\Psi = \sum_{Y\in\{Y\}} \varphi_Y |Y|$ raqam orqali (10) sistemaning murakkabligini belgilaymiz, bu yerda φ_Y - (10) sistemadagi $Y, Y \in \{Y\}$ larning qatnashish soni va |Y| - Y dagi elementlar soni.

Guruhlashning vazifasi barcha mumkin bo‘lgan (10) tizimlar orasidan φ_Y maksimalni beradigan birini topishdir.

(9) tenglamalar tizimining har bir ifodasini $//a_{ij}//_{nxn}$, $a_{ij}=1$ matritsa sifatida alohida ko‘rsatish mumkin, agar (10) tizimning tegishli tenglamalarida $x_i x_j$ ko‘paytmani o‘z ichiga olgan bo‘lsa, aks holda $a_{ij}=0$ bo‘ladi.

Keling $B=//a_{ij}//_{nxn}$ - (9) sistemaning qandaydir tenglamasining mos keladigan matritsasi bo‘lsin.

11-teorema. Agar a_{ij}, $i = i_1,\dots,i_k$; $j = j_1,\dots,j_t$ (9) sistemaning $f(x_1,\dots,x_n)$ funksiyasiga mos keladigan B matritsasining birlik-submatritsasi bo‘lsa, u holda $f(x_1,\dots,x_n) = Y_{i1\dots ik} \cdot Y_{j1\dots jt} \oplus f^2(x_1,\dots,x_n)$.

3-natija. Agar

$$a^{\tau_1}_{ij}(i = i_1,\dots,i_k; j = j_1,\dots,j_t; \tau_1 = 1,\dots,T_1),\ b^{\tau_2}_{ln}(l = l_1,\dots,l_Q; n = n_1; \tau_2 = 1,\dots,T_2),$$
$$a^{\tau_3}_{mr}(m = m_1; r = r_1; \tau_3 = 1,\dots,T_3)$$

barchasi B matritsasining bir hil birlik-submatritsalari bo‘lsa, u holda

$$f = (Y_{i_1\dots i_k} \cdot Y_{j_1\dots j_t})^{\tau_1} \oplus (x_{n_1} Y_{l_1\dots l_q})^{\tau_2} \oplus (x_{m_1} \cdot x_{r_1})^{\tau_3},$$

bu yerda T_1, T_2, T_3 – turli guruhlar soni.

Aytaylik, B matritsaning barcha bir xil birlik-submatritsalari to‘plami $\{B\}$ bo‘lsin.

Natija 3 asosida (9) tizim xulosalari elementlarini optimal guruhlash uchun murakkablik baholarini qurish va aniqlash isbotlangan.

Agar L_J^2 *va* L_D^2 mos ravishda ikkinchi darajali Jegalkin ko‘phadining va uning d.n.f.larining uzunliklari (e.k. soni) bo‘lsa, unda bizga ma’lum:

$$L_J^2 \le C_n^2 + n,\ L_D^2 \le 2^{(C_n^2 + n - 1)}.$$

Agar $L^2_{J_y}$, $L^2_{D_y}$ orqali ikkinchi darajali Jegalkin ko‘phadining va uning d.n.f. larining uzunliklarini belgilasak, unda soddalashtirish algoritmi ishlagandan so‘ng $L^2_{J_y} \le n,\ L^2_{D_y} \le 2^{n-1}$ bo‘lishi isbotlangan.

Bu yerdan shuni ko‘rish mumkinki, elementlarni guruhlash masalasi ikkinchi darajali Jegalkin ko‘phadining maksimal uzunligini C_n^2 ga qisqartiradi va uning d.n.f. ni $2^{(C_n^2)}$ marta kamaytiradi.

Mayli $\mathcal{R}(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x})) = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_t$ - guruhlangan shaklning ikkinchi darajali Zhegalkin polinomi bo‘lsin, bu yerda $U_i = U_i(\tilde{x}, Y(\tilde{x})),\ i = 1, 2, \ldots, t.$

12-teorema. R formulasidan olingan d.n.f. 2^{t-1} m.k.ga ega, agar t toq bo‘lsa:

$$\sum_{i=1}^{t} U_i = \wedge_{i=1}^{t} U_i \vee \vee_{j=1}^{t-1} \vee_{i=j+1}^{t} (R_{ji}\overline{U_i}\overline{U_j}) \vee \ldots \vee \vee_{j=1}^{t-k_1+1} \vee_{\tau=j+1}^{t-k_1+2} \ldots \vee_{(i=l+1)}^{t} (R_{j\tau\ldots i}\overline{U_j}\overline{U_\tau}\ldots\overline{U_i}), \quad (11)$$

va t juft bo‘lgan holatda:

$$\sum_{i=1}^{t} U_i = \vee_{i=1}^{t} R_i\overline{U_i} \vee \vee_{i=1}^{t-2} \vee_{j=i+1}^{t-1} \vee_{l=j+1}^{t} (R_{ijl}\overline{U_i}\overline{U_j}\overline{U_l} \vee \ldots \vee_{i=1}^{t-k_1+1} \vee_{j=i+1}^{t-k_1+2} \ldots \vee_{k=l+1}^{t} (R_{ij\ldots k}\overline{U_i}\overline{U_j}\ldots\overline{U_k}), \quad (12),$$

bu yerda k_1 - inkor bilan m.k.lar soni, $\Re ij.\ l$ - $U_i, U_j, \ldots, U_l$ lardan boshqa $U_k, k = 1, 2, \ldots, t$ m, k larning ko‘paytmasi.

12-teoremaning xulosalariga asoslanib (9) tizimning har bir tenglamasi uchun quyidagi ko‘rinishdagi ifodasini olamiz:

$$\mathcal{R}(\tilde{x},\ \mathrm{Y}(\tilde{x})) = \alpha : \mathcal{R}(\tilde{x},\ \mathrm{Y}(\tilde{x})) = \vee x_{i_1}^{\sigma_1} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k} Y_{v_1 \ldots v_p}^{\sigma_{k+1}} \ldots Y_{w_1 \ldots w_r}^{\sigma_{k+l}}.$$

Keling, uni alohida turga mansub d.n.f. va har bir a’zosini murakkab konyunksiya deb ataylik. Ikkinchi darajali chiziqli bo‘lmagan tenglamalar tizimining ildizlarini izlashni ko‘rib chiqaylik:

$$\{U_{11} \vee U_{12} \vee \ldots \vee U_{1n_1} = 1, U_{21} \vee U_{22} \vee \ldots \vee U_{2n_2} = 1, \ldots, U_{m1} \vee U_{m2} \vee \ldots \vee U_{mn_m} = 1\}, \quad (13)$$

bu yerda $U_{ij}, i = 1, 2, \ldots, m; j = 1, 2, \ldots, n_i$ murakkab konyunksiyalar (m.k.) quyidagi shaklga ega: $x_{i_1}^{\sigma_1} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k} Y_{v_1 \ldots v_{t_1}}^{\sigma_{k+1}} \ldots Y_{w_1 \ldots w_{t_l}}^{\sigma_{k+l}}$

Agar $\underset{m}{\overset{k=1}{\wedge}} U_{kj_k} \neq 0,\ j_k \in \{1, 2, \ldots, n_k\},\ k = \overline{1, n}$ bo‘lsa, u holda

$$\underset{m}{\overset{k=1}{\wedge}} U_{kj_k} = 1 \quad (14)$$

tenglamaning yechimlari (13) sistemaning yechimlari bo‘ladi.

(14) tenglamani quyidagi shaklga keltirish mumkin: $x_{j_1}^1 \ldots x_{j_t}^t Y_{p_1 \ldots p_{k_1}}^{t+1} \ldots Y_{q_1 \ldots q_{k_l}}^{t+l} = 1.$ Bundan tashqari, bu tenglama $\{x_{j_1} = \delta_1, \ldots, x_{j_t} = \delta_t, Y_{p_1 \ldots p_{k_1}} = \delta_{t+1}, \ldots, Y_{q_1 \ldots q_{k_l}} = \delta_{t+l}\}$ chiziqli tenglamalar tizimiga ekvivalent bo‘lib, bu yerda $Y_{v_1 \ldots v_t} = x_{v_1} \oplus x_{v_2} \oplus \ldots \oplus x_{v_t}$.

Algoritmning natijasi (9) tizimni qanoatlantiradigan chiziqli tenglamalarning bir vaqtning o‘zidagi yechimi bo‘ladi.

2.4-da maxsus sinfning dis'yunktiv normal shakllarini minimallashtirish usullari ishlab chiqilgan. Maxsus turdagi d.n.f. ni soddalashtirishning asosiy mezonlari isbotlangan.

Faraz qilaylik

$$\mathrm{U}(\bar{x},\mathrm{Y}(\bar{x}))=x_{i_1}^{\sigma_1}...x_{i_l}^{\sigma_l}Y_{V_1..V_p}^{\delta_1}...Y_{W_1..W_r}^{\delta_q} \text{ va } \{x_{i_1}=\sigma_1,Y_{V_1...V_p}=\delta_{1,...,}x_{i_l}=\sigma_l,Y_{W_1...W_r}=\delta_q\}. \quad (15)$$

(15) tizim noizchil bo‘ladi faqat va faqat agar $x_{i_1}^{\sigma_1}...x_{i_l}^{\sigma_l}Y_{V_1..V_p}^{\delta_1}...Y_{W_1..W_r}^{\delta_q}=0$ bo‘lgandagina.

13-teorema. $Y_{i_1..i_k}^{\sigma_1}...Y_{j_1..j_p}^{\sigma_j}\cdot Y_{1..q}^{\sigma_{j+1}},Y_{i_1..i_k}^{\sigma_1}...Y_{j_1..j_p}^{\sigma_j}\,Y_{V_1..V_l}^{\sigma}$ murakkab konyunksiyalar aynan teng bo‘ladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

$a)\ \sigma_1\oplus\sigma_2\oplus...\oplus\sigma_j\oplus\sigma_{j+1}=\sigma,$ b) $\mathrm{Y}_{i_1..i_k}\oplus...\oplus\mathrm{Y}_{j_1...j_p}\oplus\mathrm{Y}_{\tau_1...\tau_q}=\mathrm{Y}_{V_1..V_l}$.

Teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

4-natija. Agar

$\sigma_1\oplus\sigma_2\oplus\ldots\oplus\ \sigma_l=\bar{\sigma}$ bo'lsa, u holda $x_{i_1}^{\sigma_1}\cdot x_{i_2}^{\sigma_2}\cdot...\cdot x_{i_l}^{\sigma_l}\cdot\mathrm{Y}_{i_1..i_l}^{\sigma}\equiv 0$ bo'ladi.

5-natija. Agar

$\sigma_1\oplus\sigma_2\oplus\ldots\oplus\ \sigma_l=\sigma$ bo'lsa, u holda $x_{i_1}^{\sigma_1}\cdot x_{i_2}^{\sigma_2}\cdot...\cdot\mathrm{Y}_{i_1..i_l}^{\sigma}\equiv x_{i_1}^{\sigma_1}\cdot x_{i_2}^{\sigma_2}\cdot...\cdot x_{i_l}^{\sigma_l}$ bo'ladi .

6-natija. Agar

$\sigma_1\oplus\sigma_2\oplus\ldots\oplus\sigma_l=\sigma$ bo'lsa,u holda $x_{i_1}^{\sigma_1}\cdot x_{i_2}^{\sigma_2}\cdot...\cdot x_{i_l}^{\sigma_l}\cdot\mathrm{Y}_{i_1..i_{l+1}}^{\sigma}=x_{i_1}^{\sigma_1}\cdot x_{i_2}^{\sigma_2}\cdot...\cdot x_{i_l}^{\sigma_l}\cdot\overline{x_{i_{l+1}}}$ bo'ladi .

7-natija. Agar

$\sigma_1\oplus\sigma_2\oplus\ldots\oplus\ \sigma_l=\bar{\sigma}$ bo'lsa, u holda $x_{i_1}^{\sigma_1}\cdot x_{i_2}^{\sigma_2}\cdot...\cdot x_{i_l}^{\sigma_l}\cdot\mathrm{Y}_{i_1..i_{l+1}}^{\sigma}=x_{i_1}^{\sigma_1}\cdot x_{i_2}^{\sigma_2}\cdot...\cdot x_{i_l}^{\sigma_l}\cdot x_{l+1}$ bo'ladi.

8-natija. Agar

$\sigma''=\sigma_1\oplus\sigma_2\oplus\ldots\oplus\sigma_l\oplus\sigma'$ bo'lsa, u holda $x_{i_1}^{\sigma_1}\cdot x_{i_2}^{\sigma_2}\cdot...\cdot x_{i_l}^{\sigma_l}\cdot\mathrm{Y}_{i_1..i_l i_{l+1}..i_k}^{\sigma'}=x_{i_1}^{\sigma_1}\cdot x_{i_2}^{\sigma_2}\cdot...\cdot x_{i_l}^{\sigma_l}\cdot\mathrm{Y}_{i_{l+1}..i_k}^{\sigma}$ bo'ladi.

9-natija. Quyidagi tenglik hamma vaqt bajariladi:

$$\mathrm{Y}_{i_1..i_k}^{\sigma_1}\cdot\mathrm{Y}_{i_1..i_k i_{k+1}..i_m}^{\sigma_2}=\mathrm{Y}_{i_1..i_k}^{\sigma_1}\cdot\mathrm{Y}_{i_{k+1}..i_m}^{\sigma_1\oplus\sigma_2}.$$

14-teorema. Aytaylik, $U(\tilde{x},\ \mathrm{Y}(\tilde{x}))\ ,U_1(\tilde{x},\ \mathrm{Y}(\tilde{x})),\ \ldots\ ,U_{\mathrm{m}}(\tilde{x},\ \mathrm{Y}(\tilde{x}))$ murakkab konyunksiyalar va $U_i(\tilde{x},\ \mathrm{Y}(\tilde{x}))\wedge U(\tilde{x},\ \mathrm{Y}(\tilde{x}))\neq 0$ (i=1,2,…,m) bo‘lsin. U holda agar har bir $U_i(\tilde{x},\ \mathrm{Y}(\tilde{x}))$ konyunksiyani quyidagi shartlar asosida:

$$a)\bigvee_{i=1}^{m}\mathrm{D_i}(\tilde{\mathrm{x}},\mathrm{Y}(\tilde{\mathrm{x}}))\ \equiv 1;\ \ б)[U(\ \tilde{\mathrm{x}},\mathrm{Y}(\tilde{\mathrm{x}}))\to\bigwedge_{i=1}^{m}\mathrm{C_i}(\tilde{\mathrm{x}},\mathrm{Y}(\tilde{\mathrm{x}}))]\equiv 1, U_i(\tilde{x},\ \mathrm{Y}(\tilde{x}))\ =D_i(\tilde{x},\ \mathrm{Y}(\tilde{x}))\wedge C_i(\tilde{x},\ \mathrm{Y}(\tilde{x}))$$

shakllarda ifodalash mumkin bo‘lsa, u holda

$$[\ \boldsymbol{U}(\tilde{\mathrm{x}},\mathrm{Y}(\tilde{\mathrm{x}}))\to\bigvee_{i=1}^{m}\mathrm{U_i}(\tilde{\mathrm{x}},\mathrm{Y}(\tilde{\mathrm{x}}))]\equiv 1$$

tenglik hamma vaqt bajariladi.

15-teorema. Agar

$\mathrm{Y}_{i_1...i_n}^{\sigma}=\mathrm{Y}_{j_1^1...j_k^1}^{\sigma_1}\oplus...\oplus\mathrm{Y}_{v_1^t...v^t}^{\sigma_t}$ va $\sigma\neq\overline{\sigma_1}\oplus\overline{\sigma_2}\oplus...\oplus\overline{\sigma_t}$ bo‘lsa, u holda polinomlarni transformatsiyashga asoslanib quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$[\mathrm{Y}_{i_1...i_n}^{\sigma}\to(\mathrm{Y}_{j_1^1...j_k^1}^{\sigma_1}\vee...\vee\mathrm{Y}_{v_1^t...v^t}^{\sigma_t})]\equiv 1.$$

10-natija. Agar

$$\left[A(\tilde{x}, Y(\tilde{x})) \to \mathop{\wedge}_{i=1}^{t} A_i(\tilde{x}, Y(\tilde{x})) \right] \equiv 1,\ \sigma \neq\ \bar{\sigma}1 \oplus \bar{\sigma}2 \oplus ... \oplus \bar{\sigma}t,\ Y^{\sigma}_{i_1 ... i_n} = Y^{\sigma_1}_{j_1^1 ... j_k^1} \oplus ... \oplus Y^{\sigma_t}_{v_1^t ... v_\tau^t}\ ,$$

u holda $[A(\tilde{x}, Y(\tilde{x}))Y^{\sigma}_{i_1 ... i_n} \to (A_1(\tilde{x},\ Y(\tilde{x}))Y^{\sigma_1}_{j_1^1 ... j_k^1} \vee ... \vee A_t(\tilde{x},\ Y(\tilde{x}))Y^{\sigma_t}_{v_1^t ... v^t}\ )] \equiv 1.$

2.5 paragrafda polinomlarni transformatsiyalashga asoslangan ikkinchi tartibli chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar tizimini yechishning optimal usuli berilgan va ikkinchi tartibli chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar tizimini yechishning umumiy sxemasi keltirilgan :

Mantiqiy tenglamalar tizimi $\to$ *tenglamada ishtirok etuvchi mulohazalar elementlarini guruhlash* $\to$ *Tizimning mulohazalarini maxsus d.n.f. larga transformatsiyalash* $\to$ *Murakkab konyunksiyalarni ko‘paytirish* $\to$ *Maxsus d.n.f. lar ni minimallashtirish* $\to$ *Tizimning ildizlarini topish.*

III bob “Ikkinchi tartibdan yuqori chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar tizimini yechish usullari” ikkinchi darajadan yuqori chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar tizimlari sinfini o‘rganadi. Dissertatsiyaning ushbu bobida Jegalkin ko‘phadlari bilan ko‘rsatilgan chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar sistemalarining mantiqiy xylosalar murakkab konyunksiyalarining 1-tartibli dizyunksiya atrofi o‘rganiladi.

3.1-da dizyunktiv shakllar sinfida ikkinchi tartibdan yuqori bo‘lgan mantiqiy tenglamalar xulosalarini minimallashtirish usullarini ishlab chiqadi. Murakkab konyunksiyaning birinchi darajali atrofi tomonidan singdirilish mezonlari isbotlangan.

Faraz qilaylik, $U\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right), U_1\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right), \dots, U_m\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right)$ formulalar chiziqli ko‘phadlarning mantiqiy ko‘paytmalaridan $x^{\sigma_1}_{i_1} \cdots x^{\sigma_k}_{i_k} Y^{\sigma_{k+1}}_{v_1 \cdots v_t} \cdots Y^{\sigma_{k+l}}_{w_1 \cdots w_p}$ tashkil topgan murakkab konyunksiyalar bo‘lsin .

16-teorema. Bizga $U\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right), U_1\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right), \dots, U_m\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right)$ murakkab konyunksiyalar va $U_i\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) \wedge U\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) \neq 0$, i=1,2,…, m berilgan bo‘lsin.

Agar har bir $U_i\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right)$ konyunksiyaning $U_i\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) = D_i\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) \wedge C_i\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right)$ ko‘rinishda ifodalanishi quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi shaklda yozish mumkin bo‘lsa:

$$a) \mathop{\vee}_{i=1}^{m} D_i\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) = 1;\ b) \left[U\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) \to \mathop{\wedge}_{i=1}^{m} C_i\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) \right] = 1, \text{ u holda}$$

$$\left[U\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) \to \mathop{\vee}_{i=1}^{m} U_i\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) \right] = 1$$

tenglik bajariladi.

17-teorema. Agar $\sigma \neq \overline{\sigma_1} \oplus \overline{\sigma_2} \oplus \ldots \oplus \overline{\sigma_t},\ Y^{\sigma}_{i_1 \cdots i_n} = Y^{\sigma_1}_{j_1^1 \cdots j_k^1} \oplus \ldots \oplus Y^{\sigma_t}_{v_1^t \cdots v_\tau^t}$ bo‘lsa,

$\left[Y^{\sigma}_{i_1 \cdots i_n} \to \left(Y^{\sigma_1}_{j_1^1 \cdots j_k^1} \vee \ldots \vee Y^{\sigma_t}_{v_1^t \cdots v_\tau^t} \right) \right] = 1$ tenglik bajariladi.

11-natija. Agar $\left[A\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) \to \mathop{\wedge}_{i=1}^{t} A_i\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) \right] = 1$ hamda

$\sigma \neq \overline{\sigma_1} \oplus \overline{\sigma_2} \oplus \ldots \oplus \overline{\sigma_t}$, $Y^{\sigma}_{i_1 \ldots i_n} = Y^{\sigma_1}_{j_1^1 \cdots j_k^1} \oplus \ldots \oplus Y^{\sigma_t}_{v_1^t \ldots v_\tau^t}$ bo‘lsa, u holda quyidagi tenglik hamma vaqt bajariladi

$$\left[A\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) Y^{\sigma}_{i_1 \cdots i_n} \to \left(A_1\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) Y^{\sigma_1}_{j_1^1 \cdots j_k^1} \vee \ldots \vee A_t\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) Y^{\sigma_t}_{v_1^t \ldots v_\tau^t} \right) \right] = 1 .$$

18-teorema.

Aytaylik, $U(\tilde{x},\ \mathrm{Y}(\tilde{x}))$,$U_i(\tilde{x},\ \mathrm{Y}(\tilde{x})) - U = U^1 \cdot U^2, U_i = U_i^1 \cdot U_i^2, \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}.$ shaklida ifodalanishi mumkin bo‘lgan murakkab konyunksiyalar bo‘lsin. U holda agar *a*) $(U^1 \to \wedge_{i=1}^m U_i^1) \equiv 1$, b) $(U^2 \to \vee_{i=1}^m U_i^2) \equiv 1$ bo′lsa, $(U \to \vee_{i=1}^m U_i) \equiv 1$ bo′ladi.

Murakkab konyunksiyalarning diszyunksiyasini mantiqiy soddalashtirish algoritmi

2-ta’rif. $U\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right)$ murakkab konyunksiyaning(m.k) 1-tartibli atrofi $S_1(U, \Re)$ deb murakkab konyunksiyalarning $\Re\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right)$ disyunksiyasida $U \cdot U' \neq 0$ bo‘ladigan, ya'ni. $N_U \cap N_{U'} \neq \varnothing$ shart bajariladigan U' (m.k.) lar yig‘indisiga aytiladi.

Mayli $U \cdot U' = 1$ quyidagi tizimga bir xil bo‘lgan mantiqiy tenglamalar bo‘lsin:

$$\{ U\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) = 1,\ U'\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) = 1 \} . \tag{16}$$

Faraz qilaylik:

$$\{ U\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) = x_{i_1}^{\sigma_1} \cdots x_{i_k}^{\sigma_k} Y^{\sigma_{k+1}}_{v_1 \ldots v_t} \cdots Y^{\sigma_{k+l}}_{w_1 \ldots w_p},\ U'\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) = x_{j_1}^{\delta_1} \cdots x_{j_t}^{\delta_t} Y^{\delta_{t+1}}_{q_1 \ldots q_l} \cdots Y^{\delta_{t+l'}}_{p_1 \ldots p_d} \} .$$

Shubhasiz, (16) sistema quyidagi tenglamalar sistemasiga ekvivalentdir

$$\begin{cases} x_{i_1} = \sigma_1, x_{j_1} = \delta_1, \cdots, x_{i_k} = \sigma_k, x_{j_t} = \delta_t; \\ Y_{v_1 \cdots v_t} = \sigma_{k+1}, Y_{q_1 \ldots q_l} = \delta_{t+1}, \cdots, Y_{w_1 \ldots w_p} = \sigma_{k+l}, Y_{p_1 \ldots p_d} = \delta_{t+l'} . \end{cases} \tag{17}$$

(17) izchil bo‘lsa, unda α to‘plam mavjudligini ko‘rish oson, ya’ni $U\left(\alpha\right) = 1$, $U'\left(\alpha\right) = 1$, $N_U \cap N_{U'} \neq \varnothing$, aks holda $N_U \cap N_{U'} = \varnothing$.

Shunday qilib, U (m.k.)ning $S_1(U, \Re)$ 1- tartibli atrofga kirishini tekshirish (17) tizimning izchilligini aniqlashga olib kelar ekan. Agar (17)-tizim izchil bo‘lsa, unda $U \subseteq S_1(U, \Re)$, aks holda $U \not\subset S_1(U, \Re)$.

Mayli $U\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) = x_{i_1}^{\sigma_1} \cdots x_{i_k}^{\sigma_k} Y^{\sigma_{k+1}}_{v_1 \ldots v_{i_1}} \cdots Y^{\sigma_{k+t}}_{w_1 \ldots w_{i_t}}$. Keling, $r = k + i_1 + \cdots + i_t$ sonni U (m.k.) ning $\Re\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right)$ dagi darajasi deb ataymiz. Bu yerda $\theta_U^{\Pi} = \sum_{i=1}^{p} r_i - r$, $S_1(U, \Re) = \{U, U_1, \ldots, U_l\}$; r_i- U_i ning darajasi. Maxsus shakldagi $\Re\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) = U_1 \vee U_2 \vee \ldots \vee U_m$ d.n.f.ni 1- tartibli atrofga kirish metodi orqali mantiqiy soddalashtirish algoritmi ishlab chiqilgan.

3.2 paragrafda nochiziqli mantiqiy tenglamalarning ikkinchi tartibdan yuqori sistemalarini yechish va ularning murakkabligini baholash usullari o‘rganilgan, mantiqiy tenglamalar tizimini yechishning asosiy tamoyillari tavsiflangan, mantiqiy tenglamalarning bir vaqtning o‘zida maksimal quyi tizimlari yechimlarini olish algoritmlari tuzilgan.

Mayli mantiqiy tenglamalar tizimi Jegalkin polinomi shaklida $D_2 = \{1, x_1 + x_2, x_1 \wedge x_2\}$ bazisda berilgan bo‘lsin:

$$\{f_1 = \sum_{j=1}^{k_1} U_{1j} = \alpha_1, f_2 = \sum_{j=1}^{k_2} U_{2j} = \alpha_2, ..., f_m = \sum_{j=1}^{k_m} U_{mj} = \alpha_m\} \qquad (18)$$

bu yerda U_{ij} - m.k; $\alpha_i \in \{0,1\}$; $i = 1,\ldots,m$; $j = 1,\ldots, k_i$. (18) sistema tenglamalarining har bir ifodasini birinchi bobda muhokama qilingan formulalar yordamida (12-teorema) va quyidagi identifikatsiyalar orqali d.n.f. ga aylantiramiz:

$$\neg(U_1 \wedge U_2 \wedge ... \wedge U_e) = \bar{U}_1 \vee \bar{U}_2 \vee ... \vee \bar{U}_e, \ \neg(U_1 \vee U_2 \vee ... \vee U_e) = \bar{U}_1 \wedge \bar{U}_2 \wedge ... \wedge \bar{U}_e,$$

$$U \wedge (U_1 \vee U_2 \vee .. \vee U_e) = U_1 \wedge U \vee ... \vee U_2 \wedge U \vee ... \vee U_e \wedge U.$$

Bu yerda har bir d.n.f. quyidagi mantiqiy operatsiyalar yordamida bosqichma-bosqich soddalashtirilgan:

$$\bar{U} \wedge U = 0;\ 0 \wedge U = 0;\ 0 \vee U = U;\ U \vee U = U;\ 1 \wedge U = U;\ U \wedge U = U;\ \bar{U} \vee U = 1;\ 1 \vee U = 1;$$

$$U \vee U \wedge B = U;\ U \wedge \bar{x} \vee U \wedge x = U.$$

Natijada biz tenglamalar tizimini qo‘lga kiritganimizni ko‘rish oson:

$$\{D_1 = U_{11} \text{v} \ldots \text{v}\, U_{1t_1} = 1,\ D_2 = U_{21} \text{v} \ldots \text{v}\, U_{2t_2} = 1, \ldots,\ D_m = U_{m1} \text{v} \ldots \text{v}\, U_{mt_m} = 1\}, \quad (19)$$

bu yerda U_{ij} -m.k., $i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,t_i, D_i$ - f_i, $i = 1,\ldots, m$ ni amalga oshiradigan qisqartirilgan d.n.f.

Yechimlarni topish uchun (19) sistemani bir ekvivalent $D_1 \ \& \ D_2 \& \ldots \& D_m = 1$ tenglamaga keltiradigan d.n.f larni ko‘paytirish usuli ishlab chiqilgan, bunda chap tomoni d.n.f. shaklida ifodalanadi: $K_1 \text{v}\, K_2 \text{v} \ \ldots \ \text{v}\, K_t = 1$, bu erda $K_i -$ m .k. , $i = 1,\ldots,t$.

Keling $\chi(D_1 \& D_2)$ orqali $D_1 \& D_2$ ko‘paytmalarning uzunligini (murakkablik bahosi) belgilaylik va ma’lumki u $\chi(D_1 \& D_2) = m_1 \cdot m_2$.

Agar $U_i = U_j^1$ bo‘lsa quyidagini ko‘rish oson:

$$D_1 \& D_2 = U_i \vee (\mathbf{V}_{\tau=1,\tau\neq i}^{m_1} U_i)(\mathbf{V}_{t=1,t\neq j}^{m_2} U_t), \chi(D_1 \& D_2) = 1 + (m_1 - 1)(m_2 - 1).$$

1-lemma. Agar D_1 va D_2 d.n.f.larda

$$U_{i1} = Ax^{\sigma},\ U^1_{j1} = Ax^{\neg\sigma},\ \sigma \in \{0,1\},\ (U_{i1} \to U^1_{jt}) \equiv 1, (U^1_{j1} \to U_{it}) \equiv 1$$

bo‘lsa, u holda $U_{it} \wedge U^1_{jt} \equiv U_{i1} \wedge U^1_{j1} \equiv 0$ o‘rinli.

19-teorema. Agar D_1 va D_2 d.n.f.larda:

$$U_{i1} = Ax^{\sigma}, U^I_{j1} = Ax^{\bar{\sigma}}, x \in \{x_1,\ldots,x_n\}, \sigma \in \{0,1\}, (U_{i1} \to U^I_{jt1}) \equiv 1, (U^1_{j1} \to U_{i1}) \equiv 1,$$

$$(U_{ikq} \to A) \equiv 1,\ (U^1_{jng} \to A) \equiv 1,\ q = 1,\ldots,\ell; \gamma = 1,\ldots,m \quad \text{bo‘lsa,}$$

u holda quyidagilar o‘rinli bo‘ladi:

$$D_1 \& D_2 = A \text{ v}(V_{r=2}^{m_1} U_{i_r})(V_{r=2}^{m_2} U_{i_t}), \chi(D_1 \& D_2) = (m_1 - \ell - 1)(m_2 - m - 1),\ r \neq k_q,\ t \neq n_\gamma.$$

Ko‘rib chiqilgan xulosalar va teoremalar asosida A1, A2, A3, A4 algoritmlari yaratilgan va quyidagi natijalar olingan:

-A_1 algoritmi uchun:

$$D_1 \& D_2 = A_{i_1} \vee A_{i_2} \vee \ldots \vee A_{i_q} \vee (\mathrm{V}_{\tau=q+g+1}^{m_1} U_{i_\tau})(\mathrm{V}_{t=q+\gamma+1}^{m_2} \mathrm{U}_{j_t}^1),$$

bu yerda $A_{i_k} \in (U_{i_k}, \mathrm{U}_{j_k}^1), k = 1,\ldots, q$; q va γ - D_1 va D_2 d.n.f. dagi ortiqcha m.k.lar soni va

$$\chi(D_1 \& D_2) = q + (m_1 - q - g)(m_2 - q - \gamma) - q = (m_1 - q - g)(m_2 - q - \gamma);$$

-A_2 algoritmi uchun:

$$D_1 \& D_2 = A_{i_1} \vee \ldots \vee A_{i_q} \vee U_{i_{q+g+1}} \vee \ldots \vee U_{i_{q+g+l}} \vee (\mathbf{V}_{\tau= q+g+l+1}^{m_1} U_{i_\tau})(\mathbf{V}_{t= q++l+1}^{m_2} \mathrm{U}_{j_t}^1),$$

$$\chi(D_1 \& D_2) = q + l + (m_1 - q - g - l)(m_2 - q - \gamma - l);$$

-A_3 algoritmi uchun:

$$D_1 \& D_2 = Ai_1 v \ldots v Ai_q v Ui_{q+g+1} v \ldots v Ui_{q+g+l} v Ui_{q+g+l+1} v \ldots v Ui_{q+g+l+k} v(\bigvee_{\tau = q+g+l+k+1}^{m_1} Ui_\tau)(\bigvee_{t=q+\gamma+l+1}^{m2} U^1 j_t),$$

$$\chi(D_1 \& D_2) = q + l + k + \left[m1 - (q + g + l + k) \right]\left[m2 - (q + \gamma + l) \right].$$

-A_4 algoritmi uchun:

$$D_1 \& D_2 = Ai_1 v \ldots v Ai_q v Ui_{q+g+1} v \ldots v Ui_{q+g+l} v \quad Ui_{q+g+l+1} v \ldots v Ui_{q+g+l+k} v$$

$$v U^1 j_{q+\gamma+l+1} v \ldots v U^1 j_{q+\gamma+l+m} v \ (V_{\tau=q+g+l+k+1}^{m_1} Ui_\tau)(\mathbf{V}_{t= q++l+m+1}^{m_2} U^1 j_t),$$

$$\chi(D_1 \& D_2) = q + l + k + m + [m_1 - (q + g + l + k)][m_2 - (q + \gamma + l + m].$$

Aytaylik,

$$D = Ai_1 v \ldots v Ai_q v Ui_{q+g+1} v \ldots v Ui_{q+g+l} v Ui_{q+g+l+1} v \ldots v Ui_{q+g+l+k} v Ui^1_{q+\gamma+l+1} v \ldots v Ui^1_{q+\gamma+l+m}$$ va

A_1, A_2, A_3, A4 algoritmlari yordamida olingan ko‘paytmalarning natijasi bo‘lsin.

U holda quyidagi belgilashlar kiritamiz: ¬P (U,G) va ¬S(U,G), mos ravishda U va G m.k.lar bir-birini singdirmaydi va bir-biriga yopishmaydi.

20-teorema. D d.n.f .da U_i, U_j, $i \neq j$ murakkab konyunksiyalar bir-birini singdirmaydi va bir-biriga yopishmaydi, ya’ni $\neg P(Ui, Uj)$, $\neg S(Ui, Uj)$.

Agar A_1 algoritmini amalga oshirish tartibi boshqalar bilan o‘zgartirilsa, avvalgi teoremaning xulosalari noto‘g‘ri bo‘lishi mumkin va shuning uchun algoritmlarni amalga oshirish birinchi navbatda A_1 algoritmi bajarilganda optimal hisoblanadi.

D_1&D_2 ko‘paytmaning natijasini olish uchun D_1 va D_2 d.n.f. larning faqat oz sonli m.k.larini ko‘paytirish va kamaytirish kerakligini ko‘rish oson:

$$(\mathrm{V}_{\tau = q+g+l+k+1}^{m_1} Ui_\tau), (\mathrm{V}_{t= q+ \gamma+l+m+1}^{m_2} U^1 j_t).$$

Bu yerda d.n.f. larning murakkablik bahosi quyidagicha hisoblanadi:

agar

$$\chi_1(\mathrm{D}_1 \& \mathrm{D}_2) = [m_1 - (\mathrm{q}+\mathrm{g}+1+\mathrm{k})]\,[m_2 - (\mathrm{q}+\gamma+1+\mathrm{m})] \text{ va } \mathrm{q}+\mathrm{g}+1+\mathrm{k} = m_1 \text{ yoki}$$
$$\mathrm{q}+\gamma+1+\mathrm{m} = m_2, \text{ u holda } \chi_1(\mathrm{D}_1 \& \mathrm{D}_2) = 0 \text{ va } \mathrm{D}_1 \& \mathrm{D}_2 = \mathrm{D}.$$

Ushbu algoritmni barcha tenglamalar (xulosalar) uchun davom ettirsak, natijada bitta d.n.f. (19) tizimning barcha xulosalarining ko‘paytmasi bo‘ladi.

Ikkinchi tartibdan yuqori nochiziqli mantiqiy tenglamalar tizimlarini yechishning murakkabligini baholash.

Bizga (19) tizim berilsin. Tizimda biz quyidagi shakldagi ko‘paytmalarni ko‘rib chiqamiz:

$$U_{1i_1} \& U_{2i_2} \& \ldots \& U_{mi_m}, \text{ bu erda } \mathrm{i_j} \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{t_j}\}. \qquad (20)$$

(20) -shakldagi barcha ko‘paytmalar sonini Ψ orqali belgilaymiz va $\psi = \prod_{i=1}^{m} \mathrm{t_i}$ aniq ekanligini bilamiz.

Aytaylik, D_1 mukammal d.n.f. da ifodalansin. (19) tizimni yechishning A_1 algoritmi har bir $\mathrm{U_{1i}}(\mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{t_1})$ m.k. uchun $(U_{1i} \to U_{ji_j}) \equiv 1, (\mathrm{j} = 2, 3, \ldots, \mathrm{m})$ shart bajariladigan shunday $U_{2i_2}, \ldots, U_{mi_m}$ m.k.lar topishdan iborat.

(19) tizimning yechimi $\tilde{\alpha}$ to‘plam bo‘ladi, bu yerda $U_{1i}(\tilde{\alpha}) = 1.$ A_1 algoritmining ψ_{A_1} murakkablik bahosi taxminan $\psi_{A1} \leq 2^{\mathrm{n}} \cdot \sum_{i=2}^{m} t_i$ bo‘lishini ko‘rish qiyin emas. Ravshanki $\psi_{A1} \leq \psi$, agar $n < \sum_{i=1}^{m} \log_2 \mathrm{t_i} - \log_2(\sum_{i=2}^{m} t_i).$

Faraz qilaylik tizimning barcha xulosalari ixtiyoriy d.n.f. ko‘rinishida yozilsin.

Endi (19) tizim uchun A_2 algoritmni ko‘rib chiqamiz.

Aytaylik $\mathrm{t_j} = \min \mathrm{t_j}, \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}$ bo‘lsin. $\mathrm{D_i}$ d.n.f. ning barcha U lari uchun (19) tizimning yechimlarini quyidagi tarzda izlaymiz:

a) $\mathrm{D_j}, \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, \mathrm{i}-1, \mathrm{i}+1, \ldots, \mathrm{m}$ d.n.f.da barcha U m.k.lar uchun $\mathrm{S_1}(\mathrm{U}, \mathrm{D_j})$ birinchi tartibli atrof quramiz;

b) $\mathrm{S_1}(\mathrm{U}, \mathrm{D_j}), \mathrm{j} = 1, \ldots, \mathrm{i}-1, \mathrm{i}+1, \ldots, \mathrm{m}$ atrofning $\mathrm{T_j}$ to‘plamga bir vaqtta tegishli bo‘ladigan U intervalning barcha uchlari to‘plamini belgilaymiz. Shubhasiz, U to‘plam (19) sistemaning yechimlari bo‘ladi.

Bu yerda $\mathrm{T_j} = U_{\alpha \in \mathrm{S1(U,Dj)}} \mathrm{N}\alpha$. Bu algoritm uchun quyidagi bahoni ko‘rish oson:

$$\psi_{\mathrm{A2}} \leq \mathrm{t_j}\Big(\sum_{j=1, j \neq i}^{m} t_j + |\,\mathrm{N}\alpha\,| \cdot \sum_{=1, j \neq i}^{m} \big|\,\mathrm{S_1}(\mathrm{U}, \mathrm{D_j})\,\big|\Big), \qquad (21)$$

bu yerda |M| - M to‘plamning kuchi.

Birinchi tartibli atrof va “deyarli barcha funksiyalar” uchun d.n.f. ning metrik xarakteristikalari tahliliga asoslanib, (21) da ikkinchi had birinchidan asimptotik ravishda juda kichik ekanligini isbotlash mumkin va shunining uchun birinchi hadni hisoblash kifoya qiladi.

3.3 paragrafda nochiziqli mantiqiy tenglamalar sistemalarining yechimi murakkab konyunksiyalarning dizyunksiyalarini minimallashtirish asosida berilgan.

Muammoni qo‘yilishi. Bu yerda bir murakkab konyunksiyaning boshqa murakkab konyunksiyalar to‘plami tomonidan analitik yutilish mezonlarini ko‘rib chiqamiz.

Quyidagi murakkab konyunksiyalar to‘plamini ko‘rib chiqaylik:

$$\{U(\tilde{x}, Y(\tilde{x})), U_1(\tilde{x}, Y(\tilde{x})), \cdots, U_m(\tilde{x}, y(\tilde{x}))\}.$$

Faraz qilaylik $M(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x})) = U_1(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x})) \vee \cdots \vee U_m(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x}))$ murakkab konyunksiyalarning d.n.sh.i bo‘lsin. Masala U murakkab konyunksiyani M d.n.sh.ga singdirish formatsiyalangan , ya'ni $[U \to M] \equiv 1$ yoki $[U \to \bigvee_{i=1}^{m} U_i] \equiv 1$.

Yutilish mezonlari.

21-teorema. $M(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x})) = U_1(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x})) \vee \cdots \vee U_m(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x}))$ diszyunksiy murakkab $U(\tilde{x}, Y(\tilde{x}))$ konyunksiyani yutadi faqat va faqat shundaki, agar

$$\{U(\tilde{x}, y(\tilde{x})) = 1,\ U_1(\tilde{x}, y(\tilde{x})) = 0\ , U_m(\tilde{x}, y(\tilde{x})) = 0\} \tag{22}$$

sistema birgalikda bo‘lmasa.

22-teorema. Faraz qilaylik

$$U_1(\tilde{x}, Y(\tilde{x})) = x_{\iota_1}^{\sigma_1} \cdots x_{\iota_k}^{\sigma_k}\, Y_{v_1^1 \cdots v_{\kappa_1}^1}^{\wp_1} \cdots Y_{v_1^t \cdots v_{k_t}^t}^{\wp_t} \cdots Y_{n_1^1 \cdots n_{m_1}^1}^{\wp_{t+q+1}} \cdots Y_{n_1^\tau \cdots n_{m_\tau}^t}^{\wp_{t+q+\tau}},$$

$$U_2(\tilde{x}, Y(\tilde{x})) = x_{j_1}^{\alpha_1} \cdots x_{j_c}^{\alpha_c} \cdot Y_{p_1^1 \cdots p_{z_1}^1}^{\alpha_{c+1}} \cdot Y_{p_1^2 \cdots p_{z_2}^2}^{\alpha_{c+2}} \cdots \cdot Y_{p_1^e \cdots p_{z_e}^e}^{\alpha_{c+e}}$$

ortogonal bo‘lmagan ifodalardan tashkil topgan murakkab konyunksiyalar bo‘lsin.

Agar

$$(x_{i_1}^{\sigma_1} \cdots x_{i_k}^{\sigma_k} \to x_{j_1}^{\alpha_1} \cdots x_{j_c}^{\alpha_c}) \equiv 1,\ \{\sum_{i=1}^{t} \wp_i = \alpha_{c+1}, \sum_{i=1}^{t} Y_{v_1^i \cdots v_{k_i}^i} = Y_{p_1^1 \cdots p_{z_1}^1}, \tag{23}$$

$$\sum_{i=1}^{q} \wp_{t+i} = \alpha_{c+2}, \sum_{i=1}^{q} Y_{w_1^i \cdots w_{e_i}^i} = Y_{p_1^2 \cdots p_{z_2}^2}, \ldots, \sum_{i=1}^{\tau} \wp_{t+q+i} = \alpha_{c+e}, \sum_{i=1}^{\tau} \gamma_{n_1^i \cdots n_{m_i}^i} = \gamma_{p_1^e \cdots p_{z_e}^e}\}$$

bo‘lsa, u holda $[U_1(\tilde{x}, y(\tilde{x})) \to U_2(\tilde{x}, y(\tilde{x}))] \equiv 1$, ya'ni U_1 murakkab konyunksiya U_2 murakkab konyunksiya tomonidan yutiladi.

Quyida murakkab konyunksiyalarning dizyunksiyalarini soddalashtirishning asosiy mezonlari ko‘rib chiqiladi va ikkinchi tartibli chiziqli bo‘lmagan ifodalarning murakkab konyunksiyalarining tengliklaridan foydalangan holda chiziqli bo‘lmagan ifodalarning ixtiyoriy tartibi uchun murakkab konyunksiyalarning umumiylashtirilgan shakli isbotlanadi.

23-teorema. Murakkab konyunksiyalar

$$Y_{i_{1..}i_k}^{\sigma_1} \ldots Y_{j_{1..}j_p}^{\sigma_j} \cdot Y_{1..q}^{\sigma_{j+1}},\ Y_{i_{1..}i_k}^{\sigma_1} \ldots Y_{j_{1..}j_p}^{\sigma_j} Y_{V_{1..}V_l}^{\sigma}. \tag{24}$$

aynan bir xil bo‘ladi, agar quyidagi shartlar bajarilsa:

$a) \sigma_1 \oplus \sigma_2 \oplus \ldots \oplus \sigma_j \oplus \sigma_{j+1} = \sigma,$

b) $Y_{i_1..i_k} \oplus ... \oplus Y_{j_1..j_p} \oplus Y_{\tau_1..\tau_q} = Y_{V_1..V_l}$.

3.4 paragfarda murakkab konyunksiyalar darajalariga asoslangan chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar tizimini echishning optimal usuli ko‘rib chiqiladi. Mantiqiy xulosalari murakkab konyunksiyalarning dizyunksiyalaridan iborat chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar tizimi uchun

$$\begin{cases} D_1 = U_{11}(\tilde{x}, Y(\tilde{x})) \vee U_{12}(\tilde{x}, Y(\tilde{x})) \vee \ldots \vee U_{1t_1}(\tilde{x}, Y(\tilde{x})) = 1 \\ D_2 = U_{21}(\tilde{x}, Y(\tilde{x})) \vee U_{22}(\tilde{x}, Y(\tilde{x})) \vee \ldots \vee U_{2t_2}(\tilde{x}, Y(\tilde{x})) = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ D_m = U_{m1}(\tilde{x}, Y(\tilde{x})) \vee U_{m2}(\tilde{x}, Y(\tilde{x})) \vee \ldots \vee U_{mt_m}(\tilde{x}, Y(\tilde{x})) = 1 \end{cases} \tag{25}$$

bu yerda $U_{ij}(\tilde{x}, y(\tilde{x}))$ - m.k. $U_{ij} = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} ... x_{i_k}^{\sigma_k} Y_{v_1...w_1}^{\sigma_{k+1}} ... Y_{v_t...w_t}^{\sigma_{k+t}}$, $i = 1,\ldots,m; j = 1,\ldots,t_i, D_i$ - f_i, $i = 1,\ldots,m$ funksiyani amalga oshiradigan qisqartirilgan d.n.f., U konyunksiya va R ko‘paytmalarning $R \cdot U \neq 0$, ya'ni $N_R \cap N_U \neq \varnothing$, bu erda $R = U_1 \cdot U_2 \cdot \ldots \cdot U_t$, shart bajariladigan S(R ,U) haqiqatlik atrofi (U-m.k) tushunchasi kiritilgan va keyinchalik quyidagi ifoda olingan:

$$R_t = x_{j_1}^{\sigma_1} x_{j_2}^{\sigma_2} ... x_{j_l}^{\sigma_l} Y_{l_1...m_1}^{\sigma_{l+1}} Y_{l_2...m_2}^{\sigma_{l+2}} ... Y_{l_t...m_t}^{\sigma_{l+t}}. \tag{26}$$

Endi, nol hadlarni olib tashlash va ixcham almashtirishlarni qo‘llash orqali olingan ifodani soddalashtiramiz.

Natijada quyidagi tenglama hosil bo‘ladi:

$$x_{t_1}^{\sigma''_1} x_{t_2}^{\sigma''_2} ... x_{t_k}^{\sigma''_k} Y_{p_1..q_1}^{\sigma''_{m+1}} Y_{p_2..q_2}^{\sigma''_{m+2}} ... Y_{p_t..q_t}^{\sigma''_{m+t}} = 1.$$

Nol vaziyat $x \& \bar{x} = 0, Y^{\sigma} \& Y^{\bar{\sigma}} = 0$ yuzaga keladigan kombinatsiyalarni yo‘q qilish va soddalashtirish $x^{\sigma} \& x^{\sigma} = x^{\sigma}, Y^{\sigma} \& Y^{\sigma} = Y^{\sigma}$ orqali quyidagi shakldagi tenglamalar to‘plamini olamiz:

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \& x_{i_2}^{\sigma_2} \& \ldots \& x_{i_k}^{\sigma_k} Y_{p_1..q_1}^{\sigma_{k+1}} Y_{p_2..q_2}^{\sigma_{k+2}} ... Y_{p_t..q_t}^{\sigma_{k+t}} = 1$$

va ularning har biri uchun $\bar{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ yechim yozamiz, bu yerda $\alpha_\gamma = \sigma_\gamma$, agar $\gamma \in \{i_1, i_2, \ldots, i_t\}$ bo‘lsa.

Algoritmning natijasi (25) tizimni qanoatlantiradigan chiziqli tenglamalarning bir vaqtning o‘zida tizimlarining yechimi bo‘ladi.

IV bobdagi **maxsus sinfning ikkinchi darajali nochiziqli mantiqiy tenglamalar tizimlarini yechishda** Jegalkin polinomlari bilan aniqlangan ikkinchi darajali chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar tizimlarining alohida sinflari o‘rganiladi. Maxsus sinflarning ikkinchi darajali Jegalkin polinomidan olingan maxsus disyunktiv normal shakllarni minimallashtirishning ba’zi muammolari ko‘rib chiqiladi. Zhegalkin ko‘phadlari bilan aniqlangan ikkinchi darajali chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar tizimining alohida sinfidagi konyunksiyalarining birinchi tartibli atrofi tomonidan murakkab konyunksiyalarni singdirish mezoni taklif etiladi.

Ikkinchi darajali chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar tizimlarining maxsus klassi o‘rganiladi:

$$\mathcal{R} = \{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1, f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_2, \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_m\}.$$

R dan olingan $f\left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right)$ ning xulosasi quyidagi shaklga ega:

$$f = \sum_{\substack{i,j=k\\ i<j}}^{k+3} a_{ij}x_ix_j \oplus \sum_{\substack{i,j=e\\ i<j}}^{e+3} b_{ij}x_ix_j \oplus \sum_{\substack{i,j=p\\ i<j}}^{p+3} c_{ij}x_ix_j \oplus \sum_{\substack{i,j=q\\ i<j}}^{q+3} d_{ij}x_ix_j \oplus \sum_{i=t}^{t+3} x_i, \text{ bu yerda}$$

$$k+3<e,\ e+3<p,\ p+3<q,\ q+3<t,$$

$$\sum_{i,j=k}^{k+3} a_{ij} = \sum_{i,j=e}^{e+3} b_{ij} = \sum_{i,j=p}^{p+3} c_{ij} = \sum_{i,j=q}^{q+3} d_{ij} = 4, \{a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, e_i\} \in \{0,\ 1\}.$$

Bu yerda $\oplus$, $\sum$ belgilari mod2 yig‘indisi sifatida nazarda tutiladi.

4.1 paragrafda elementlarni guruhlash, yangi o‘zgaruvchilarni kiritish, m.k.larni o‘nli tasvirlashning optimal usulidan foydalanish orqali maxsus d.n.f.larni soddalashtirish va ikkinchi darajali chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar tizimlarining maxsus sinfi uchun formulalarni amalga oshirishning asosiy xususiyatlari orqali f funksiani maxsus d.n.f. ga o‘tkazish yordamida xulosalarni ixcham tasvirlash masalalari o‘rganilgan.

Bu yerda $\sum_{i,j=v}^{v+3} q_{ij}x_ix_j$ va $\sum_{i=w}^{w+1} e_ix_i$ shakldagi summani f funksiyaning elementlar guruhi deb ataymiz. Bundan tashqari, R tizimining turli tenglamalarining guruhlari juftlikda mos kelmaydi.

R tizimini yechish usuli elementlarni guruhlash, yangi o‘zgaruvchilarni kiritish, so′ngra d.n.f. ga aylantirish va ularni soddalashtirishning ixcham tasviridan iborat. R tizimning yechimlarini izlash chiziqli mantiqiy tenglamalar tizimini yechish algoritmi yordamida amalga oshiriladi.

R dan olingan har bir $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ xulosaning boshlang‘ich bosqichida 20 ta elementar konyunksiya ishtirok etishi, guruhlash va yangi o‘zgaruvchilar kiritilgandan so‘ng R tizimining $F(\tilde{x}, Y(\tilde{x}))$* xulosalarida 9 tadan ko‘p bo‘lmagan chiziqli birikmalar bo‘lishi isbotlangan. Ushbu tenglik bo′yicsa $U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_t = \vee_{\sigma1\oplus\sigma2\oplus\ldots\oplus\sigma t=1} U_1^{\sigma_1} \& U_2^{\sigma_2} \& \ldots \& U_t^{\sigma_t}$ quyidagiga ega bo‘lamiz:

$L_k(f) = 2^{20}, L_k(F) = 2^9$. Ko‘rinib turibdiki, f va F xulosaning murakkabligidagi farq 2^{11} martaga qisqartiriladi, ya'ni $L_k = \frac{L_k(f)}{L_k(F)} = \frac{2^{20}}{2^9} = 2^{11}$, bu yerda $L_k(Q)$ - Q d.n.f tarkibiga kiruvchi murakkab konyunksiyalar soni.

Bu shuni anglatadiki, elementlarni guruhlash va maxsus sinfining ikkinchi darajali tenglamalari uchun yangi o‘zgaruvchilarni kiritish usuli 2^{11} marta mantiqiy tenglamalar xulosalarining murakkabligini kamaytiradi.

4.2 paragrafda ushbu tizimni echish uchun R* quyi tizimlar birinchi tartibli atrof algoritmi yordamida aniqlanadi va chiziqli mantiqiy tenglamalar ko‘rinishiga keltiriladi

$$x_{j_1}^{\sigma'_1}\, x_{j_2}^{\sigma'_2} \ldots\ldots x_{j_k}^{\sigma'_l}\, Y_{l_i m_i}^{\sigma'_{l+i}} Y_{l_j m_j r_j}^{\sigma'_{l+j}} Y_{l_k m_k r_k s_k}^{\sigma'_{l+k}} = 1,\ l \le \mathrm{n},\ \mathrm{i} \le 8,\ \mathrm{j} \le 16,\ \mathrm{k} \le 32,$$

va maxsus d.n.f.ni soddalashtirishda nol identifikatorlardan foydalanish va ikkinchi darajali chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar tizimlarining maxsus sinfi uchun formulalarni amalga oshirishning asosiy xususiyatlaridan foydalanamiz va biz shaklning quyidagicha tenglamalari to‘plamini olamiz: $x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \& \ldots \& x_{i_k}^{\sigma_k} = 1,$ va har biri uchun $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mathrm{n}})$ yechim yozamiz, bu yerda.

$$\alpha_\gamma = \begin{cases} \sigma_\gamma \text{ ,agar } \gamma \in (\mathrm{i}_1,\ \mathrm{i}_2, \ldots,\ \mathrm{i}_\mathrm{k}\}, \\ * \text{ , aks holda.} \end{cases}$$

4.3 paragrafda asosiy quyi dasturlarning tavsifi, kattalashtirilgan blok-sxema va ikkinchi darajali mantiqiy tenglamalarning maxsus tizimlari uchun dastur ko‘rsatmalari keltirilgan . Sinov namunasi sifatida o‘zgaruvchilar soni 100 ga va tenglamalar soni 50 ga teng bo‘lgan ikkinchi darajali chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar tizimlarining maxsus klassi amalga oshiriladi.

V bobda “**Nochiziqli mantiqiy tenglamalar tizimlarining yechimlarini dasturiy ta’minlash” I-IV boblarda** bayon qilingan algoritmlarning ishlab chiqilgan modellari asosida amalga oshiriladi va xulosa formulalari ixtiyoriy bazis, Jegalkin polinomlari, dizyunktiv normal formakar va chiziqli tenglamalar shakllarida bo‘lgan mantiqiy tenglamalar tizimini yechish uchun xizmat qiladi

5.1 paragrafda ixtiyoriy bazisdagi chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar tizimlarini yechish usullarini dasturiy ta’minot bilan amalga oshirishni tavsiflaydi. Chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar tizimlarini echish dasturining tavsifi va tuzilishi SISTEMA dasturda berilgan bo‘lib, unda foydalaniladigan identifikatorlar, kirish va chiqish ma’lumotlarining tavsifi, protseduralarning tarkibi va funksiyasi, ko‘rsatmalar va ishlashga tayyorgarlik ko‘rsatilgan va dasturni amalga oshirish uchun zarur bo‘lgan ma’lumotlar berilgan. Ixtiyoriy asosdagi mantiqiy tenglamalar tizimining sinov namunasi ko‘rib chiqilgan.

5.2 paragrafda amalga oshirilgan **RSLLY** (chiziqli mantiqiy tenglamalarni yechish tizimlari) dasturining tavsifi va tuzilishini beradi, chiziqli mantiqiy tenglamalar tizimini yechish usullarini amalga oshirish, noizchil tenglamalarni aniqlash va ushbu tenglamalarni tizimdan chiqarib tashlash, uning ishlash prinsipini tavsiflash va tavsiflash dasturining blok diagrammasi. Aniqlik uchun chiziqli mantiqiy tenglamalarning sinov namunasi ko‘rib chiqiladi va tizimning ildizlarini topishning ishlash printsipi ko‘rsatilgan.

5.3 paragrafda ikkinchi tartibdan yuqori chiziqli bo‘lmagan mantiqiy tenglamalar tizimini echish usullarini amalga oshirish dasturining blok diagrammasi, amalga oshirilgan **GDNF** dasturining tuzilishini va uning ishlash prinsipi tavsifi taqdim etiladi. Shuningdek, formulalarni ixtiyoriy asosda d.n.f. ga transformasiya qilish uchun dastur taklif qilingan va amalga oshirilganlarning tavsifi va tuzilishi dasturlari ishlangan. Aniqlik uchun test misoli ko‘rib chiqilgan.

XULOSA

Dissertatsiya ixtiyoriy bazis, birinchi, ikkinchi, ikkinchi darajadan yuqori Jegalkin polinomi va dizyunktiv normal shakllar (d.n.f.) ko‘rinishida berilgan mantiqiy tenglamalar tizimlarining yechimlarini topish uchun samarali algoritmlarni ishlab chiqishga va ularni amalga oshirishga bag‘ishlangan. Shu maqsadda quyidagi ishlar amalga oshirildi:

1. Mantiqiy tenglamalari tizimlarini chiziqli, chiziqli bo‘lmagan ikkinchi va undan yuqori darajali tenglamalarning maksimal izchil kichik tizimlariga bo‘lish yo‘li bilan yechish metodikasi ishlab chiqilgan;
2. Mantiqiy funksiyalarni dekodlash masalalarini yechish, shuningdek, monoton funksiyalar soni va dekodlash algoritmining murakkabligi haqidagi teoremalarni isbotlash asosida mantiqiy tenglamalar tizimlarining maksimal quyi tizimlarini izlash algoritmi ishlab chiqilgan;
3. Chiziqli va chiziqli bo‘lmagan ikkinchi darajali tenglamalar sistemalarining mantiqiy ifodalarini transformatsiyalash va guruhlash usullari bilan yechish hamda murakkab konyunksiyalarning yutilish mezonini isbotlash usullari ishlab chiqilgan.
4. Ikkinchi darajadan yuqori nochiziqli mantiqiy tenglamalar tizimini murakkab konyunksiyalarning d.n.f.sini transformatsiyalash va minimallashtirish asosida yechish usullari ishlab chiqilgan;
5. Maxsus tipdagi ikkinchi darajali nochiziqli tenglamalar sistemalarining formulalarini guruhlash va murakkab konyunksiyalarning d.n.f.sini minimallashtirish yo‘llari bilan yechish usullari ishlab chiqilgan.
6. Ixtiyoriy bazis, Jegalkin ko‘phadlari va disyunktiv normal shakllarda berilgan mantiqiy tenglamalar tizimlarining yechimlarini qurish vazifasini amalga oshiruvch dasturiy majmua ishlab chiqilgan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА по ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНОЙ СТЕПЕНИ ДОКТОРА НАУК

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМ.МИРЗО УЛУГБЕКА

БАЙЖУМАНОВ АБДУСАТТАР АБДУКАДИРОВИЧ

ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕЛИНЕЙНЫХ БУЛЕВЫХ УРАВНЕНИЙ И ОЦЕНКИ ИХ СЛОЖНОСТИ

01.01.03 – Вычислительная математика и дискретная математика (физико-математические науки)

АВТОРЕФЕРАТ ДОКТОРСКОЙ (DSc) ДИССЕРТАЦИИ ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент – 2025

Тема докторской (DSc) диссертации по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за B2024.3.DSc/FM275.

Диссертация выполнена в Национальном университет Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице по адресу (http://ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» по адресу (www.ziyonet.uz).

Научный консультант:	**Кабулов Анвар Василович,** доктор технических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Хаётов Абдулло Рахмонович** доктор физико-математических наук, профессор
	Калимбетов Бурхан Тешебаевич доктор физико-математических наук, профессор (Казахстан)
	Аллаков Исмоил доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	**Туринский политехнический университет в г.Ташкенте**

Защита диссертации состоится «20» июня 2025 года в 14:00 часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «5» июня 2025 года.

(протокол рассылки № 5 от «5» июня 2025 года).

М Р. Арипов
Председатель Научного совета по присуждению научных степеней, д.т.н., профессор

З.Р.Рахмонов
Ученый секретарь научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., доцент

Р.Д.Алоев
Председатель научного семинара при научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора наук (DSc))

Актуальность и необходимость темы диссертации. Мировые исследования, посвященные решению прикладных задач методами алгебры логики, прогнозирования, распознавания, классификации, поиска абсолютных экстремумов функций многих переменных являются актуальными и имеют широкое применение в областях знаний биологии, медицины, геологии, гидрологии, управления, вычислительной техники, военного дела, автоматики, управления, планирования экспериментов и.т.д., и вообще всюду, где имеются связывающие их логические зависимости. Новой областью приложения методов алгебры логики, обозначившейся в последнее время, является проблема распознавания множества объектов и явлений, медицинской или технической диагностики, построения современных автоматов, проверка тестовых задач и.т.д., которая может быть сведена к решению систем логических уравнений.

В мире известно, что построение решений системы булевых уравнений в настоящее время широко применяется в различных областях науки и техники, в задачах искусственного интеллекта, продукционной логики, принятия управленческих решений, медицинской диагностики, логического и алгебры распознавания, алгебраического криптоанализа, логико-комбинаторных задачах, программируемых логических устройствах и.т.д, и год за годом открываются новые возможности использования логических задач в народном хозяйстве. Например, в логических системах распознавания для построения собственного алгоритмов распознавания используются логические методы, основанные на дискретном анализе и базирующихся на нем исчислениях высказываний. В общем случае применение логического метода распознавания предусматривает наличие логических связей, выраженных через систему булевых уравнений, в которой переменными являются логические признаки распознаваемых объектов или явлений.

В Республике Узбекистан наибольшее число эвристических методов было предложено при исследовании прикладных задач методами прогнозирования, распознавания, искусственного интеллекта, классификации и идентификации, поиска абсолютных экстремумов функций многих переменных. Проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям «Функциональный анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, математическая физика, математическое моделирование, вычислительная и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика» в деятельности Института математики имени В.И.Романовского АН РУз, является одной из основных задач[1].

В диссертационной работе решаются задачи, обозначенные в Указе Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», в

---

[1]Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП–4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 07 мая 2020 года.

Постановлениях Президента Республики Узбекистан № ПП-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», № ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», № ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах дальнейшему развитию системы высшего образования», в выступлении Президента Республики Узбекистан от 24 мая 2019 года в Национальном университете Узбекистана с деятелями науки и образования, в Указе Президента Республика Узбекистан № ID-8839 от 07 октября 2019 года «Концепция комплексного социально-экономического развития Республики Узбекистан до 2030 года», а также других нормативно-правовых актах принятых по данной сфере деятельности[2].

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий Республики Узбекистан: IV«Математика, механика и информатика».

Обзор международных научных исследований по теме диссертации.Исследования по решению проблемы поиска решений систем логических уравнений для повышения точности эвристических методов решения прикладных задач алгебраического криптоанализа, прогнозирования, распознования, классификации, поиска абсалютных экстремумов функций многих переменных проводят ведущие университеты и исследовательские центры, в том числе такие как: Университет Альберта (Канада), Стэнфордский университет, Массачусетский технологический институт (США), Кембриджский университет, Оксфордский университет (Великобритания), Киотский университет (Япония), Мельбурнский университет (Австралия), Мюнхенский технический университет (Германия), Университет Синьхуа (Китай), Лозаннская федеральная политехническая школа (Швейцария), Сеульский национальный университет (Республика Корея), Амстердамский университет (Нидерланды), Университет Пьера и Марии Кюри (Франция), Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова, Вычислительный центр им. А.А.Дородницына Российской академии наук (Россия), Институт кибернетики им. В.М. Глушкова (Украина).

В результате проведенных научных исследований в мире по использованию логических уравнений для обеспечения точности данных получены ряд научные результаты: проблема синтеза оптимальных корректоров эвристических алгоритмов была поставлена Ю.И.Журавлевым, под его руководством разработаны алгоритмы минимизации булевых функций, построения тестеров, проверки монотонности функций (Российский вычислительный центр РАН);применение общего решения систем логических уравнений в задачах надежности (Сан-Петербургский политехнический

[2]Указ Президента Республики Узбекистан от 7 февраля 2017 г. №УП-4947 «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан»

университет Петра Великого); способы решения систем логических уравнений, проблемы решения системы логических уравнений(Красноярский государственный педагогический университет им. В.П.Астафьева); решение систем дизъюнктивных уравнений методом логических определителей (ХНУРЭ. Г. Харьков-Украина).

Ряд научных исследований проводятся в мире по ряду приоритетных направлений, в том числе полиномиальная реализация частичных логических функций и систем данных, алгоритмы полиномиального синтеза, реализующие слабо определенные логические функции и системы (Национальная центральная научная библиотека Белорусской академии наук) и др.

Степень изученности проблемы. Для обеспечения точности данных особое значение приобретает задача решения практических задач алгебраического криптоанализа, прогнозирования, распознавания, классификации и повышения точности эвристических методов поиска абсолютных экстремумов многих переменных.

При анализе данных с помощью алгоритмов и методик анализа данных, основанных на моделях, теориях и методах построения алгоритмов и методах построения алгоритмов исследования проводили В.М.Глушков, К.Шеннон, Г.Муртаза, И.Муссайин, Ж.Накахара, Ж.Рижмен, К.Чанд, К.Гупта, К.Нойберг, М.Малик, Хасан Омар, З.Юянг, П. Жунод, С.В.Яблонский, Ю.И.Журавлев, В.И.Рвачев, В.С.Леонтьев, В.Кондратьев и другие.

Исследования, связанные с решением логических уравнений, проводили В.К.Кабулов, Ш.А.Аюпов, М.М.Арипов, Н.Х.Касымов, А.В.Кабулов, И.Х.Норматов, Н.А.Игнатьев, Н.Мирзаев, А.Ф.Бабаджанов, М.Бердымуродов и другие. В настоящее время недостаточно изучены логические методы принятия правильных решений для улучшения управления на всех уровнях динамического моделирования систем управления, а также методы решения систем нелинейных логических уравнений для повышения точности результатов, получаемых с помощью эвристических алгоритмов.

Связь диссертационного исследования с планами научно-исследовательских работ высшего образовательного учреждения, где выполнена диссертация. Диссертационное исследование проводилось в рамках научно-исследовательского проекта Ф3-201906117-«Программное обеспечение для мониторинга влияния условий окружающей среды на сельскохозяйственное производство в районе Аральского моря» и БВ-М-Ф4-004-«Разработка принципов алгоритмизации управления сложными системами на основе алгебры функциональных таблиц», согласно плана научно-исследовательских работ Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Целью исследования является разработка методологии, методов и технологии решения систем нелинейных логических уравнений и оценка их эффективности на основе уменьшения степени, группирования переменных, трансформации и минимизации формул нелинейных уравнений, состоящих из полиномов Жегалкина.

Решаемые задачи.

разработка метода решения системы логических уравнений путем разбиения ее на максимально согласованные подсистемы линейных и нелинейных уравнений второй степени и выше;

поиск максимально совместных подсистем систем логических уравнений на основе решения задачи расшифровки логических функций и доказательства теорем о числе монотонных функций и сложности алгоритма расшифровки;

решение систем линейных и нелинейных уравнений второго порядка, используя методы трансформации, группировки и доказательства критерия поглощения для сложных конъюнкций;

решение систем нелинейных логических уравнений вышевторого порядка на основе трансформации и минимизации дизъюнктивных нормальных форм сложных конъюнкций;

решение систем нелинейных уравнений второго порядка специального вида с использованием методов группировки переменных и минимизации дизъюнктивных нормальных форм сложных конъюнкций;

создание программного обеспечения для алгоритмов, предназначенных для решения систем логических линейных и нелинейных уравнений.

Обьектом исследования являются системы нелинейных булевых уравнений и системы специальных нелинейных булевых уравнений второй степени, булевые высказывания, заданные в различных базисах, и их трансформация.

Предметом исследования являются модели, методы, алгоритмы и программный комплекс синтеза оптимальных методов, служащих для решения систем логических уравнений эвристических (эффективных) алгоритмов и поддержки принятия управленческих и диагностических решений

Методы исследования. При проведении диссертационных исследований использовались следующие методы: трансформация булевых высказываний, к-значной логики, минимизация булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм (д.н.ф.) и полинома Жегалкина, теория вероятностей; распознавание образов; теория дискретной математики; эффективное умножение сложных булевых выражений; математическая статистика; линейная булева алгебра; объектно-ориентированное программирование.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

разработана методология решения систем булевых уравнений разбиением их на максимальные совместные подсистемы линейных, нелинейных уравнений второй степени и выше;

построены методы трансформации и группирования высказываний, доказаны критерии поглощения сложных конъюнкций, а также их мнимизации для решения систем линейных, нелинейных уравнений второй и выше степени;

разработаны методы группирования высказываний и минимизации дизъюнктивных нормальных форм сложных конъюнкций для решения систем нелинейных уравнений второй степени специального класса и доказана оценка сложности метода группирования;

доказаны теоремы об оптимальном преобразовании формул от произвольного базиса к д.н.ф. и полинома Жегалкина;

доказана теорема об эффективности разработанных алгоритмов при использовании умножения сложных д.н.ф. и дана оценка их сложности;

доказаны оценки сложности систем нелинейных булевых уравнений выше второго порядка и критерии поглощения сложных конъюнкций окрестностью первого порядка;

разработана алгоритмическая система и программный комплекс для оптимального решения систем произвольных сложных логических уровнений эвристических алгоритмов при решении вопроса повышения точности эффективных методов для поддержки принятия управленческих и коллегиальных диагностических решений.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

разработаны эффективные алгоритмы и их программная реализация:

для решения нелинейных булевых уравнений на основе трансформации логических высказываний для представления в различных базисах и минимизации высказываний методами их группирования;

для решения систем специальных нелинейных булевых уравнений второй степени на основе группирования и минимизации логических высказываний в классе д.н.ф., которые являются алгебраической моделью S-блоков симметрических алгоритмов шифрования;

разработана алгоритмическая система и программный комплекс для оптимального решения систем произвольных сложных логических уровнений эвристических алгоритмов для поддержки принятия управленческих и коллегиальных диагностических решений, в том числе процедура выработки принятия управленческих решений.

Достоверность результатов исследований обоснована корректностью предложенных моделей, доказанными теоремами, результатами тестирования, а также апробацией основных теоретических положений диссертации в печатных трудах и докладах на международных научных конференциях, экспериментальными исследованиями и практическим применением разработанных программных средств.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость исследований подтверждается созданной впервые технологией решения систем нелинейных булевых уравнений разбиением их на подсистемы линейных, нелинейных второй степени и выше , методами трансформации, группирования и минимизации сложных булевых высказываний в классе д.н.ф. и полиномов Жегалкина.

Практическая значимость результатов исследований заключается в возможности решения систем специальных нелинейных булевых уравнений второй степени на основе группирования и минимизации логических высказываний в классе д.н.ф., которые являются алгебраической моделью S-блоков симметрических алгоритмов шифрования.

Внедрение результатов исследования. На основе научных результатов, полученных в диссертации по методам минимизации аргументов нелинейных логических уравнений:

разработанные эффективные оптимальные алгоритмы для поиска решений систем логических уравнений, заданных в виде произвольного базиса, полиномов Жегалкина первого, второго и выше порядков и дизъюнктивных нормальных форм использованы при оптимизации (минимизации) логических высказываний, в практическом проекте ОТ-Атех-2018-486 «Реализация систем логического управления и защиты информации на базе программируемых логических контроллеров и автоматизированных логических систем автоматизированного проектирования для их проектирования», где используются методы минимизации логических уравнений в процессе записи алгоритмов для микроконтроллеров (Справка Национального университета Узбекистана от 24 июля 2024 г. № 04/11-2809) и применение научного результата позволило оптимально реализовать и проанализировать алгоритмы шифрования на базе микроконтроллеров;

разработанные эффективные методы решения на основе группирования и минимизации формул для систем нелинейных уравнений второго порядка специального вида были использованы в научно-исследовательской работе в ГУП ЮНИКОН для оценки стойкости алгоритмов симметричного шифрования (справка ГУП ЮНИКОН № 6-2/1757 от 05.09.2024) и результате на основе минимизации модели алгебраического криптоанализа алгоритмов симметричного шифрования AES и Кузнечика при достижении числа раундов 6, число аргументов было сокращено в три раза, а число уравнений — в десять раз;

разработанные методы решения систем нелинейных логических уравнений второго порядка с использованием методов преобразования, группировки и доказательства критерия поглощения сложных конъюнкций использованы при оценке стойкости алгоритмов симметричного шифрования AES и Кузнечик в Центре информационных ресурсов МВД Республики Каракалпакстан (справка МВД Республики Каракалпакстан от 30 августа 2024 г. № 20/1310), и в результате алгебраическая модель криптоанализа алгоритмов симметричного шифрования AES и Кузнечика, основанная на минимизации числа раундов, позволила сократить число аргументов в три раза, а число уравнений — на десять миллионов при достижении числа раундов 6.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертации представлены и обсуждены на 13 международных и 8 республиканских научно-практических конференциях, а также на межкафедральном научном семинаре факультета интеллектуальных систем и компьютерных технологий Самаркандского государственного университета имени Шарофа Рашидова, совместном межкафедральном научном семинаре Ташкентского университета информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий и научных семинарах кафедры «Вычислительная математика и информационные системы» факультета прикладной математики и интеллектуальных технологий Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликовано 45 научных работ, из них 15 научных статей опубликованы в научных изданиях, рекомендованных к публикации Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан по основным научным результатам докторских диссертаций, в том числе 7 в зарубежных журналах (из них 7 входят в международную базу данных Scopus, в том числе 1 в квартиль Q1) и 8 в республиканских журналах, а также получены 2 сертификатов на пакет прикладных программ из Агентства по интеллектуальной собственности при Министерстве юстиции Республики Узбекистан.

Структура и объем диссертации. Структура диссертации состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Объем диссертации составляет 160 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность темы диссертации, обосновано соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан, сформулированы цель и задачи, а также определены объект и предмет исследования, научная и практическая значимость результатов исследования, приводится информация о внедрении результатов на практике, об опубликованных работах, а также о структуре диссертации.

Первая глава диссертации под названием «**Методология решения систем нелинейных булевых уравнений**» состоит из четырех параграфов, в которых исследуются отдельные классы систем нелинейных булевых уравнений, заданных полиномами Жегалкина, разрабатывается методология их решения на основе разбиения их в подсистемы линейных, нелинейных второго порядка и выше второго порядка. Рассматривается исследование существующих методов решения систем нелинейных булевых уравнений и оценки их сложности.

В параграфе 1.1 предложено исследование существующих методов решения систем нелинейных булевых уравнений и оценки их эффективности и сложности. Решение систем нелинейных логических уравнений в обшем виде связано с необходимостью реализации сильно ветвящегося процесса поиска корней , обширном перебором промежуточных решений. Как правило , это настолько велик, что его не удается реализовать даже современных быстродействующих вычеслительных машин. Однако, учитывая особенности конкретных уравнений, процесс поиска корней часто удается существенно ускорить. Поэтому основной путь развития эффективных методов решения нелинейных логических уравнений — это классификация уравнений и разработка соответствующих методов для каждого класса.

Параграф 1.2 посвящен методологии и методическим аспектам решения несовместных систем нелинейных булевых уравнений на основе разбиения их на подсистемы.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ – исходный алфавит переменных. Рассмотрим систему логических уравнений $F(x) = \widetilde{\alpha}$:

$$\left.\begin{array}{l} f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1 \\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_m \end{array}\right\} \qquad (1)$$

Здесь f_i – булевы функции, реализованные формулами над системами (в дальнейшем будем называть их базисами)

$$B_1, B_2, B_3 \; va \; B_4 : B_1 = \{x_1 \,\&\, x_2, x_1 \vee x_2, \overline{x}, x_1 \sim x_2, x_1 \to x_2, x_1 \oplus x_2, x_1 / x_2\},$$

$$B_2 = \{x_1 \oplus x_2, x_1 \,\&\, x_2,\; 1, 0\},\; B_3 = \{x_1 \,\&\, x_2, x_1 \vee x_2, \overline{x}\},\; B_4 = \{x_1 \oplus x_2, 1, 0\},$$

$$\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in E_m^2 = \{0,1\}.$$

Таким образом в данной диссертации исследуется система булевых уравнений:

$$\{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1,\; f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_2, \ldots,\; f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_m\},$$

где каждая функция (высказывание) $f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), i = 1, 2, \ldots, m$ может быть реализована формулами над произвольной системой функции:

$$\widetilde{D} = \{\overline{x}, x_1 \& x_2, x_1 \vee x_2, x_1 \to x_2, x_1 \sim x_2, (x_1 \oplus x_2)\mathrm{mod}2, x_1/x_2, 1\},\; \alpha_i \in \{0,1\}.$$

Каждое высказывание $f_i(x_1, \ldots, x_n)$ системы с помощью логических преобразований приводится к виду полинома Жегалкина и разбивается на три вида систем логических уравнений:

1) линейные $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = \alpha, \left(a_i, \alpha \in \{0,1\}\right)$;

2) нелинейные уравнения второй степени

$$\sum_{ij=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \oplus \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = \alpha, \left(a_{ij}, b_i, \alpha \in \{0,1\}\right), i < j;$$

3) нелинейные уравнения выше второй степени

$$\sum \Omega \in \{\Omega\} a_\Omega x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k} = \alpha, \Omega = \{i_1, i_2 \ldots, i_k\},$$

где $\{\Omega\}$ – множество всех подмножеств Ω, $\Omega \in \{1, 2, \ldots n\}; (\alpha, a_\Omega) \in \{0,1\}$, в котором все виды систем в дальнейшем рассматривается в отдельности.

Очевидно, что вектор $\widetilde{\beta} \in E_n^2$ будет решением системы (1) в том и только в том случае, если он является одновременно решением трех видов систем.

В этом параграфе также даны критерии преобразований булевых формул из одного базиса на другой. Критерии доказаны в виде аналитических теорем.

В параграфе 1.3 предложено исследование методов поиска максимальных совместных подсистем систем нелинейных булевых уравнений на основе алгоритма поиска максимального верхнего нуля монотонных булевых функций**.**

Пусть дана система булевых уравнений:

$$\boldsymbol{M} = \{f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1, f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1,\ldots,f_m(x_1,x_2,\ldots,x_n)=1\} \qquad (2)$$

Определение-1. Весом $\mathrm{P_i}$ уравнения $f_i, i = 1, 2,...,\mathrm{m}$ назовем число всех $f_i \in M$ таких, что $f_i \cdot f_\mathrm{j} \neq 0$,$\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$.

Пусть $\alpha_{i_1},...,\alpha_{i_k}$ суть единичные координаты набора $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) \in \mathrm{E}_\mathrm{m}^2$.

Рассмотрим монотонную булеву функцию:

$$\mathrm{q}(\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{m}) : \mathrm{q}(\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{m}) = \begin{cases} 0, \text{ } \textit{если} \left\{ f_{i_1}=1,\ldots,f_{i_k}=1 \right\} \text{ } \textit{совместно}, \\ \quad 1 - \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

Для нахождения максимальной совместной подсистемы системы (1) применяем алгоритм A_M поиска максимального верхнего нуля (м.в.н.) функции $\mathrm{q}(\mathrm{y}_1, \ldots, \mathrm{y}_\mathrm{m})$. Причем поиск м.в.н. функции $q(\tilde{y})$ ведется в лексикографическом порядке наборов переменных $y_{i_1},\ldots,y_{i_m}$, для которых $P_{i_1} \geq P_{i_2} \leq \ldots \leq P_{i_m}$. Положим, что высказывания $f_i, i=1,2,...,m$ системы (2) заданы в базисе $\{\overline{x}, x_1 \,\&\, x_2, x_1 \vee x_2\}$. Подсистема системы (2) имеет вид:

$$\{U_{11} \vee U_{12} \vee \ldots \vee U_{1p_1} = 1, U_{21} \vee U_{22} \vee \ldots \vee U_{2p_2} = 1, \ldots, U_{t1} \vee U_{t2} \vee \ldots \vee U_{tp_t} = 1\}. \qquad (3)$$

Теорема-1. Система (3) совместна в том и только в том случае, если существует э.к. $U_{1j_1}, U_{2j_2},...,U_{tj_t}$, такие что

$$\mathop{\&}_{k=1}^{t} U_{kj_k} \neq 0. \qquad (4)$$

Определим условия совместности системы (3). Предложим одна из эффективных процедур проверки выполнения условия (4). Представим д.н.ф. $N_i,\ i=1,2,...,t$ системы (3) в ортогональной д.н.ф. $N_i^0 = K_{i1} \vee K_{i2} \vee \ldots \vee K_{it_i},\ i=1,2,...,t-1$. Индукцией по i, $i=1,2,...,t-1$ определяем совместность системы.

В параграфе 1.4 дано исследование монотонных функций k-значной логики в решении систем нелинейных булевых уравнений. Получена оценка нахождения числа $\psi(n)$ монотонных функций от n переменных по произвольному упорядочению:

Теорема-2. Для частично – упорядочнного множества из k элементов: $0 < 1, 0 < 2, \ldots, 0 < k-1$, имеет место

$$\psi(n) = 2^{\frac{1}{\sqrt{\pi(k-1)}}} \cdot \frac{k^{n+1}}{\sqrt{n}} \cdot (1+\varepsilon(n)).$$

Доказана теорема.

Теорема-3. Сокращенная д.н.ф. монотонной функции к-значной логики f от n переменных является единственной минимальной (кратчайщей) д.н.ф функции f.

В главе II предложены **«Методы решения систем нелинейных булевых уравнений первого и второго порядка».**

В параграфе 2.1. предлагается решения систем линейных логических уравнений методом исключения переменных. Пусть дана система линейных логических уравнений (л.л.у.):

$$\{f_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\ x_j \oplus \beta_1 = \alpha_1, f_2 = \sum_{j=1}^{n} a_{2j}\ x_j \oplus \beta_2 = \alpha_{2,......,} f_m = \sum_{j=1}^{n} a_{mj}\ x_j \oplus \beta_m = \alpha_m\ \}, \quad (5)$$

где α_j, β_j, $a_{ij} \in \{1.0\}$, i=1,…, m; j=1,…,n.

Здесь символ $\sum$ подразумевается кратным логическим сложением по модулю 2. Задачу удаления несовместных уравнений будем выполнять применением методов сложения по модулю 2 и последовательным исключением переменных.

Пусть система (5) совместна. Положим NN- количество решений системы (5) .

Теорема-4 . Имеет место равенство $NN=2^{n-m}$, где n-число переменных, m –количество уравнений.

Следствие 1. Любая произвольная система линейных логических уравнений имеет не более 2^{n-1} решений, где n- число переменных.

В параграфе 2.2. разрабатываются методы трансформаций булевых уравнений второго порядка для упрощения логических высказываний. Доказываются критерии преобразовании к полиному Жегалкина

Теорема-5. Преобразование $\{U_i\}_{/}^{m} \equiv \{U_j{*}\}_{\Sigma}^{m1}$ представляется единственным образом в виде разложения по mod2

$$\mathbf{\Lambda}_{i=1}^{m} U_i \oplus \sum_{i=3}^{m} (\mathbf{\Lambda}_{j=i}^{m} U_j) \oplus 1, \text{ где } \{U_i\}_0^m = U_1 \circ U_2 \circ \ldots \circ U_m, \quad (6)$$

Теорема-6. Преобразование $\left\{U_i\right\}_V^{m} \equiv \left\{U_j{*}\right\}_{\Sigma}^{m1}$ имеет вид

$$\left\{U_j{*}\right\}_{\Sigma}^{m1} = \sum(\boldsymbol{U}_{i_1}^{i_1} \,\&\, \boldsymbol{U}_{i_2}^{i_2} \,\&\ldots \boldsymbol{U}_{i_k}^{i_k}), \quad (7)$$

где

$$(\sigma_1 \vee \sigma_2 \vee \ldots \vee \sigma_m = 1), \{\sigma_{i_1}, \sigma_{i_2}, \ldots, \sigma_{i_k}\} \in \{\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_m\},$$
$$\sigma_{i_1} = \sigma_{i_2} = \ldots = \sigma_{i_k} = 1,\ i_k \in \left\{1, 2, \ldots, m\right\},\ k \le m.$$

Теорема-7. В базисе $D_2 = \{0,1,\ x_1 \,\&\ x_2,\ x_1 \oplus x_2\}$ последовательность операции импликации представляется единственным способом в виде полинома Жегалкина

$$\Rightarrow_{i=1}^{m} U_i \equiv \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-(\frac{t}{2}-1)} \sum_{j=2i}^{m-t+2} \sum_{k=j+1}^{m-t+3} .. \sum_{l=n+1}^{m} (U_{2i-1} U_j U_k \ldots U_l) \oplus$$

$$\oplus \sum_{i=1}^{\frac{m}{2}-\frac{(p-1)}{2}} \sum_{j=2i}^{m-p+2} \sum_{k=j+1}^{m-p+3} \ldots \sum_{l=n+1}^{m} (U_{2i-1} U_j U_k \ldots U_l) \oplus C,$$

где

$$t=\begin{cases}2,4,\ldots,\ m & \text{если } m \text{ четное,}\\ 1,3,\ldots,m & \text{в противном случае}\end{cases}$$

$$p=\begin{cases}1,3,\ldots,\ m-1 & \text{если } m \text{ четное,}\\ 2,4,\ldots,m-1 & \text{в противном случае}\end{cases}\qquad c=\begin{cases}1, & \text{если } m \text{ четное,}\\ 0 & \text{, в противном случае.}\end{cases}$$

и имеет место

$$K_{\Sigma}^{\rightarrow}(m)=\begin{cases}1+\frac{2}{3}(2^{m}-1), & \text{если m четное,}\\ \frac{1}{3}(2^{m+1}-1), & \text{впротивном случае,}\end{cases}$$

где p,t количество аргументов в с.к.

Теорема-8.Преобразование $\{U_i\}_{\sim}^{m} \equiv \{U_j *\}_{\Sigma}^{m1}$ представляется единственным образом в виде разложения по mod2

$$\approx_{i=1}^{m} A_i=\begin{cases}\neg\,(\sum_{i=1}^{m} U_i), & \text{если m четное,}\\ \sum_{i=1}^{m} U_i, & \text{в противном случае}\end{cases}$$ и

$$K_{\Sigma}^{\sim}(m)=\begin{cases}m+1 & \text{, если } m \text{ четное,}\\ m & \text{, в противном случае.}\end{cases}\qquad L_{\Sigma}^{\sim}(m)=m.$$

Теорема-9. Преобразование $\{U_i\}_{\&}^{m} \equiv \{U_j *\}_{\Sigma}^{m1}$ в аналитическом виде представляется единственным образом в виде разложения по mod2:

$$_{i=1}\&^{\mathbf{m}}(\neg\, U_i) = {}_{i=1}\&^{m} U_i \oplus \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=i+1\ldots}^{3}\ \sum_{k=l+1}^{m} U_i U_j \ldots U_k \oplus \ldots \oplus \sum_{i=1}^{m-1}\sum_{j=i+1}^{m} U_i U_j \oplus \sum_{i=1}^{m} U_i \oplus 1.$$

Теорема-10. Полином $\mathbf{P}(x_{i_1}, x_{i_2}, ..., x_{i_k})$ тождественно равен единице, если **P** можно записать в виде :

$$Uj_1(\sigma_{i_1} \oplus Uj_2(\overline{\sigma_{i_1}}, \sigma_{i_2}) \oplus Uj_3(\overline{\sigma_{i_1}}, \overline{\sigma_{i2}}, \sigma_{i_3}) \oplus ... \oplus Uj_k(\overline{\sigma_{i_1}}, ..., \overline{\sigma_{i_{k-1}}}, \sigma_{i_k}) \oplus Uj_{k+1}(\overline{\sigma_{i_1}}, ..., \overline{\sigma_{i_{k-1}}}, \overline{\sigma_{i_k}}), \quad (8)$$

где $Uj_i \in U_i, = 1, 2, ..., k+1.$

Следствие 2. $Uj_1 \oplus ... \oplus Uj_{i-1} \oplus Uj_{i+1} \oplus ... \oplus Uj_{k+1} \equiv Uj_i \oplus 1$, если U_i удовлетворяет условию формулы (8), где Uj_i с.к., $i = 1, 2, \ldots, k+1$.

В параграфе 2.3. разрабатывается оптимальный метод решения систем нелинейных уравнений второго порядка на основе трансформации полиномов. Пусть дана система нелинейных уравнений второй степени:

$$\left.\begin{array}{l}\sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{(1)}{}_{ij} x_i\ x_j\ \oplus \sum\limits_{i=1}^{n} b^{(1)}{}_{ij}\ x_i\ = \alpha_1\\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{(2)}{}_{ij} x_i\ x_j\ \oplus \sum\limits_{i=1}^{n} b^{(2)}{}_{ij}\ x_i\ = \alpha_2\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \sum\limits_{i,j=1}^{n} a^{(m)}{}_{ij} x_i\ x_j\ \oplus \sum\limits_{i=1}^{n} b^{(m)}{}_{ij}\ x_i\ = \alpha_m\end{array}\right\} \qquad (9)$$

где коэфициенты $\alpha_{\kappa},\ b^{(k)}{}_i,\ a^{(k)}{}_{ij} \in E^2{}_n = \{0,1\}$, $k = 1,\ldots,m$; $i, j = 1,\ldots,n$.

Причем $i \le j$ и имеет место $x_i \cdot x_i = x_i$.

Идея упрощения записи систем уравнений (9) заключается в группировке элементов x_i, x_j и выделений линейных форм вида $x_{i_1} \oplus ... \oplus x_{i_k}$, которые участвуют в различных уравнениях системы.

Обозначим через $Yi_1 \ldots i_k$ сумму $x_{i_1} \oplus ... \oplus x_{i_k} : Yi_1 \ldots, i_k = x_{i_1} \oplus ... \oplus x_{i_k}$, здесь $1 \le k \le n ; x_{i_j} \in X^n = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $1 \le j \le k$.

Нетрудно заметить, что в системе (9) имеется множество вариантов вынесения за скобки различных сумм $Yi_1 \ldots i_k$.

Пусть $\{Y\}$ – множество всех возможных группировок в системе (9).

Допустим, после некоторой группировки элементов высказываний системы (9) получено

$$\left\{ \sum_{i,j=1}^{t} a^{(1)}{}_{ij} z_i z_j = \alpha_1, \sum_{i,j=1}^{t} a^{(2)}{}_{ij} z_i z_j = \alpha_2, ..., \sum_{i,j=1}^{t} a^{(m)}{}_{ij} z_i z_j = \alpha_m \right\}, \tag{10}$$

здесь $i \le j$; $z_i, z_j \in \{Y\}$; t – мощность множества $\{Y\}$ использующихся в системе (10).

Число $\Psi = \sum_{Y \in \{Y\}} \varphi_Y |Y|$ назовем сложностью системы (10), где φ_Y – количество $Y, Y \in \{Y\}$ участвующих в (10) и $|Y|$ -число элементов в Y.

Задача группировки заключается в том, чтобы среди всех возможных систем (10) найти такую, которая дает максимальную φ_Y.

Каждое высказывания системы уравнений (9) можно задавать в отдельности как матрицу $\|a_{ij}\|_{nxn}$, *где* $a_{ij} = 1$, если в соответствующем уравнений системы (10) участвуют слагаемые $x_i x_j$, в противном случае $a_{ij}=0$.

Пусть $B = \|a_{ij}\|_{nxn}$ – матрица соответствия некоторого уравнения системы (9).

Теорема-11. Если $a_{ij}, i = i_1, \ldots, i_k; \ j = j_1, \ldots, j_t$ – однородно – единичная подматрица матрицы B, соответствующей высказыванию $f(x_1, \ldots, x_n)$ из системы (9), то $f(x_1, \ldots, x_n) = Y_{i1} \ldots_{ik} \cdot Y_{j1} \ldots_{jt} \oplus f^2(x_1, \ldots, x_n)$.

Следствие-2. Если

$$a_{ij}^{\tau_1} (i = i_1, \ldots, i_k; j = j_1, \ldots, j_t; \tau_1 = 1, \ldots, T_1),\ b_{ln}^{\tau_2} (l = l_1, \ldots, l_Q; n = n_1; \tau_2 = 1, \ldots, T_2),$$
$$a_{mr}^{\tau_3} (m = m_1; r = r_1; \tau_3 = 1, \ldots, T_3) \ -$$

все однородно-единичные подматрицы матрицы B, то

$$f = (Y_{i_1 \ldots i_k} \cdot Y_{j_1 \ldots j_t})^{\tau_1} \oplus (x_{n_1} Y_{l_1 \ldots l_q})^{\tau_2} \oplus (x_{m_1} \cdot x_{r_1})^{\tau_3},$$

где T_1, T_2, T_3 – число различных групп.

Положим $\{B\}$ – множество всех однородно-единичных подматриц матрицы B.

Доказана, что на основе следствия-2 построить и определить оценки сложности оптимальную группировку элементов высказываний системы (9).

Если L_J^2 и L_D^2 длины (количество э.к.) полинома Жегалкина второй степени и ее д.н.ф., соответственно, то известно, что

$$L_J^2 \le \mathrm{C}_n^2 + \mathrm{n},\ L_D^2 \le 2^{(C_n^2+n-1)}.$$

Если через $L_{J_y}^2$, $L_{D_y}^2$ обозначим длины полинома Жегалкина второй степени и ее д.н.ф. после работы алгоритма упрощения, то доказано, что имеет место $L_{J_y}^2 \le n,\ L_{D_y}^2 \le 2^{n-1}$.

Отсюда нетрудно заметить, что задача группирования элементов уменьшает максимальную длину полинома Жегалкина второй степени на C_n^2 и сокращает ее д.н.ф. в $2^{(C_n^2)}$ раза.

Пусть $\mathcal{R}(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x})) = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_{\mathrm{t}}$ - полином Жегалкина(высказывание) второй степени группировонного вида, где $U_i = U_i(\tilde{x}, Y(\tilde{x})),\ i = 1, 2, ..., t.$

Теорема-12. Д.н.ф., получающиеся из формулы R , содержит 2^{t-1} с.к. и если t-нечетное, то имеет место :

$$\textstyle\sum_{i=1}^{t} U_{\mathrm{i}} = \wedge_{i=1}^{t} U_{\mathrm{i}} \vee \vee_{j=1}^{t-1} \vee_{i=j+1}^{t} (R_{\mathrm{ji}} \overline{U_i U_j}) \vee \ldots \vee \vee_{j=1}^{t-k_1+1} \vee_{\tau=j+1}^{t-k_1+2} \ldots \vee_{(i=l+1)}^{t} (R_{\mathrm{j}\tau\ldots\mathrm{i}} \overline{U_j U_\tau ... U_i}), \quad (11)$$

в случае, когда t – четное:

$$\sum_{i=1}^{t} U_i = \vee_{i=1}^{t} R_{\mathrm{i}} \overline{U_i} \vee \vee_{i=1}^{t-2} \vee_{j=i+1}^{t-1} \vee_{l=j+1}^{t} (R_{\mathrm{ijl}} \overline{U_i U_j U_l} \vee \ldots \vee_{i=1}^{t-k_1+1} \vee_{j=i+1}^{t-k_1+2} \ldots \vee_{k=l+1}^{t} (R_{\mathrm{ij}\ldots\mathrm{k}} \overline{U_i U_j ... U_k}), \quad (12)$$

где k_1– количество с.к. с отрицанием, $\Re_{\mathrm{ij}\ldots l}$ – произведение с.к. $U_{\mathrm{k}}, \mathrm{k} = 1, 2, \ldots, \mathrm{t}$ без $U_i, U_{\mathrm{j}}, \ldots, U_l$.

На основе утверждений теоремы 12 для каждого уровнения системы (9) получим выражение вида $\mathcal{R}(\tilde{x},\ \mathrm{Y}(\tilde{x})) = \alpha : \mathcal{R}(\tilde{x},\ \mathrm{Y}(\tilde{x})) = \vee \mathrm{x}_{i_1}^{\sigma_1} ... \mathrm{x}_{i_k}^{\sigma_k} Y_{v_1 ... v_p}^{\sigma_{k+1}} ... Y_{w_1 ... W_r}^{\sigma_{k+l}}$ Будем называть его д.н.ф. специального типа, а каждое слогаемое –сложной конъюнкцией. Рассмотрим поиск корней системы нелинейных уравнений второй степени:

$$\{U_{11} \mathrm{V} U_{12} \mathrm{V} \ \ldots . \mathrm{V}\ U_{1n_1} = 1, U_{21} \mathrm{V} U_{22} \mathrm{V} \ \ldots . \mathrm{V} U_{2n_2} = 1, ..., U_{\mathrm{m}1} \mathrm{V}\ U_{\mathrm{m}2} \mathrm{V} \ \ldots . \mathrm{V} U_{mn_m} = 1\}, \ (13)$$

где сложные конъюнкции (с.к.) $U_{ij}, \mathrm{i} = 1, 2, \ldots, \mathrm{m}; \mathrm{j} = 1, 2, \ldots, \mathrm{n_i}$ имеет вид:

$$x_{i_1}^{\sigma_1} ... x_{i_k}^{\sigma_k} Y_{v_1 ... v_{t_1}}^{\sigma_{k+1}} ... Y_{w_1 ... W_{t_l}}^{\sigma_{k+l}}.$$

Легко увидеть, что если $\underset{m}{\overset{k=1}{\wedge}} U_{kj_k} \ne 0 (\mathrm{j_k} \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{n_k}\}, \mathrm{k} = \overline{1, n},$ то решение уравнения

$$\underset{m}{\overset{k=1}{\wedge}} U_{kj_k} = 1 \quad (14)$$

является решением системы (13). Очевидно, применяя преобразования:

$$x_i^{\sigma_i}\ x_i^{\sigma_i} = x_i^{\sigma_i}; Y_{v_1 ... v_t}^{\sigma_i} \cdot Y_{v_1 ... v_t}^{\sigma_i} = Y_{v_1 ... v_t}^{\sigma_i}; x_{i_1}^{\sigma_1} ... x_{i_l}^{\sigma_l} Y_{i_1 ... i_l}^{\sigma} = 0, \text{ при } \textstyle\sum_{i=1}^{l} \sigma_i = \bar{\sigma},$$

где символ $\sum$ означает сумму по модулю 2, уравнение (14) можно привести к виду: $x_{j_1}^1 ... x_{j_t}^t Y_{p_1 ... p_{k_1}}^{t+1} ... Y_{q_1 ... q_{k_l}}^{t+l} = 1.$

Причем это уравнение эквивалентно системе линейных уравнений:

$\{x_{j_1} = \delta_1, \ldots, x_{j_t} = \delta_t Y_{p_1 ... p_{k_1}} = \delta_{t+1}, ..., Y_{q_1 ... q_{k_l}} = \delta_{t+l}\}$, где $Y_{v_1 ... v_t} = x_{v_1} \oplus x_{v_2} \oplus ... \oplus x_{v_t}$.

Результатом работы алгоритма будет решением совместных систем линейных уравнений, которые удовлетворяет систему (9).

В параграфе 2.4. разработаны методы минимизации дизъюнктивных нормальных форм специального класса. Доказываются основные критерии упрощения д.н.ф. специального вида.

Пусть

$$\mathrm{U}(\overline{x}, \mathrm{Y}(\overline{x})) = x_{i_1}^{\sigma_1} ... x_{i_l}^{\sigma_l} Y_{V_1 ... V_p}^{\delta_1} ... Y_{W_1 ... W_r}^{\delta_q} \text{ и } \{x_{i_1} = \sigma_1, Y_{V_1 ... V_p} = \delta_{1,...,} x_{i_l} = \sigma_l, Y_{W_1 ... W_r} = \delta_q\} \qquad (15)$$

Нетрудно заметить, что система (15) несовместна тогда и только тогда, когда $x_{i_1}^{\sigma_1} ... x_{i_l}^{\sigma_l} Y_{V_1 ... V_p}^{\delta_1} ... Y_{W_1 ... W_r}^{\delta_q} = 0.$

Теорема-13. Сложные конъюнкции

$$Y_{i_1 ... i_k}^{\sigma_1} ... Y_{j_1 ... j_p}^{\sigma_j} \cdot Y_{1 ... q}^{\sigma_{j+1}}, Y_{i_1 ... i_k}^{\sigma_1} ... Y_{j_1 ... j_p}^{\sigma_j} Y_{V_1 ... V_l}^{\sigma}$$

тождественно равны, если выполняются следующие условия

а) $\sigma_1 \oplus \sigma_2 \oplus ... \oplus \sigma_j \oplus \sigma_{j+1} = \sigma,$

б) $\mathrm{Y}_{i_1 ... i_k} \oplus ... \oplus \mathrm{Y}_{j_1 ... j_p} \oplus \mathrm{Y}_{\tau_1 ... \tau_q} = \mathrm{Y}_{V_1 ... V_l}$.

Из утверждения теоремы вытекает справедливость следующих следствий:

Следствие 4. Если

$$\sigma_1 \oplus \sigma_2 \oplus \ldots \oplus \ \sigma_l = \overline{\sigma}, \ \textit{то} \ \ x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot ... \cdot x_{i_l}^{\sigma_l} \cdot \mathrm{Y}_{i_1 ... i_l}^{\sigma} \equiv 0.$$

Следствие 5. Если

$$\sigma_1 \oplus \sigma_2 \oplus \ldots \oplus \ \sigma_l = \sigma, \quad \textit{то} \ \ x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot ... \cdot \mathrm{Y}_{i_1 ... i_l}^{\sigma} \equiv x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot ... \cdot x_{i_l}^{\sigma_l}.$$

Следствие 6. Если

$$\sigma_1 \oplus \sigma_2 \oplus \ldots \oplus \ \sigma_l = \sigma, \quad \textit{то} \ \ x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot ... \cdot x_{i_l}^{\sigma_l} \cdot \mathrm{Y}_{i_1 ... i_{l+1}}^{\sigma} = x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot ... \cdot x_{i_l}^{\sigma_l} \cdot \overline{x_{i_{l+1}}}.$$

Следствие 7. Если

$$\sigma_1 \oplus \sigma_2 \oplus \ldots \oplus \ \sigma_l = \overline{\sigma}, \ \textit{то} \ \ x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot ... \cdot x_{i_l}^{\sigma_l} \cdot \mathrm{Y}_{i_1 ... i_{l+1}}^{\sigma} = x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot ... \cdot x_{i_l}^{\sigma_l} \cdot x_{l+1}.$$

Следствие 8. При $\sigma'' = \sigma_1 \oplus \sigma_2 \oplus \ldots \oplus \sigma_l \oplus \sigma'$ имеет место

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot ... \cdot x_{i_l}^{\sigma_l} \cdot \mathrm{Y}_{i_1 ... i_l i_{l+1} ... i_k}^{\sigma'} = x_{i_1}^{\sigma_1} \cdot x_{i_2}^{\sigma_2} \cdot ... \cdot x_{i_l}^{\sigma_l} \cdot \mathrm{Y}_{i_{l+1} ... i_k}^{\sigma}.$$

Следствие 9. Справыедливо

$$\mathrm{Y}_{i_1 ... i_k}^{\sigma_1} \cdot \mathrm{Y}_{i_1 ... i_k i_{k+1} ... i_m}^{\sigma_2} = \mathrm{Y}_{i_1 ... i_k}^{\sigma_1} \cdot \mathrm{Y}_{i_{k+1} ... i_m}^{\sigma_1 \oplus \sigma_2}.$$

Теорема -14. Пусть $U(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x}))$,$U_1(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x}))$, … ,$U_{\mathrm{m}}(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x}))$ – сложные конъюнкции и $U_i(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x})) \wedge U(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x})) \neq 0$.

Если каждую конъюнкцию $U_i(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x}))$ можно представить в форме $U_i(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x})) = D_i(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x})) \wedge C_i(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x}))$ с саблюдением следующих условий:

$a)\bigvee_{i=1}^{m} \mathrm{D}_{\mathrm{i}}(\tilde{\mathrm{x}}, \mathrm{Y}(\tilde{\mathrm{x}})) \equiv 1;$

$б)[U(\tilde{\mathrm{x}}, \mathrm{Y}(\tilde{\mathrm{x}})) \to \bigwedge_{i=1}^{m} \mathrm{C}_{\mathrm{i}}(\tilde{\mathrm{x}}, \mathrm{Y}(\tilde{\mathrm{x}}))] \equiv 1$, то $[\boldsymbol{U}(\tilde{\mathrm{x}}, \mathrm{Y}(\tilde{\mathrm{x}})) \to \bigvee_{i=1}^{m} \mathrm{U}_{\mathrm{i}}(\tilde{\mathrm{x}}, \mathrm{Y}(\tilde{\mathrm{x}}))] \equiv 1.$

Теорема -15. Если

$$\mathrm{Y}^{\sigma}_{i_1\ldots i_n} = \mathrm{Y}^{\sigma_1}_{j_1^1\ldots j_k^1} \oplus \ldots \oplus \mathrm{Y}^{\sigma_t}_{v_1^t\ldots v^t} \text{ и } \sigma \neq \overline{\sigma}1 \oplus \overline{\sigma}2 \oplus \ldots \oplus \overline{\sigma}\mathrm{t},$$

тогда на основе трансформации полиномов имеем:

$$[\mathrm{Y}^{\sigma}_{i_1\ldots i_n} \to (\mathrm{Y}^{\sigma_1}_{j_1^1\ldots j_k^1} \vee \ldots \vee \mathrm{Y}^{\sigma_t}_{v_1^t\ldots v^t})] \equiv 1.$$

Следствие 10. Если

$$[\boldsymbol{A}(\tilde{\mathrm{x}}, \mathrm{Y}(\tilde{\mathrm{x}})) \to \bigwedge_{i=1}^{t} \mathrm{A}_{\mathrm{i}}(\tilde{\mathrm{x}}, \mathrm{Y}(\tilde{\mathrm{x}}))] \equiv 1, \sigma \neq \overline{\sigma}1 \oplus \overline{\sigma}2 \oplus \ldots \oplus \overline{\sigma}\mathrm{t},\ \mathrm{Y}^{\sigma}_{i_1\ldots i_n} = \mathrm{Y}^{\sigma_1}_{j_1^1\ldots j_k^1} \oplus \ldots \oplus \mathrm{Y}^{\sigma_t}_{v_1^t\ldots v_\tau^t},$$

тогда

$$[\mathrm{A}(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x}))\mathrm{Y}^{\sigma}_{i_1\ldots i_n} \to (\mathrm{A}_1(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x}))\mathrm{Y}^{\sigma_1}_{j_1^1\ldots j_k^1} \vee \ldots \vee \mathrm{A}_{\mathrm{t}}(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x}))\mathrm{Y}^{\sigma_t}_{v_1^t\ldots v^t})] \equiv 1.$$

В параграфе 2.5 приведена оптимальный метод решение систем нелинейных булевых уравнений второго порядка на основе трансформации полиномов и приведена общая схема решения системы нелинейных булевых уравнений второго порядка: Система булевых уравнений$\to$ Группировка элементов высказываний$\to$Преобразование высказываний системы на специальные Д.Н.Ф.$\to$Умножение сложных конъюнкций$\to$ Минимизация специальных Д.Н.Ф. $\to$ Нахождение корней системы.

В главе III «**Методы решения систем нелинейных булевых уравнений выше второго порядка»** исследуется класс систем нелинейных булевых уравнений выше второй степени. В данной главе диссертации исследуются окрестности 1-го порядка дизъюнкций сложных коньюнкций логических высказываний систем нелинейных булевых уравнений заданных полиномами Жегалкина.

В параграфе 3.1 разрабатываются методы минимизации высказываний булевых уравнений выше второго порядка в классе дизъюнктивных форм. Доказываются критерии поглощения сложных конъюнкций окрестностью первого порядка**.**

Пусть формулы $U\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right), U_1\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right), \ldots, U_m\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right)$ – сложные конъюнкции, состоящие из логических произведений $x_{i_1}^{\sigma_1} \cdots x_{i_k}^{\sigma_k} Y_{v_1\cdots v_t}^{\sigma_{k+1}} \cdots Y_{w_1\cdots w_p}^{\sigma_{k+l}}$ линейных полиномов.

Теорема-16. Пусть $U\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right), U_1\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right), \ldots, U_m\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right)$ – сложные конъюнкции и $U_i\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) \wedge U\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) \neq 0$, i=1,2,…,m.

Если каждую конъюнкцию $U_i\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right)$ можно представить в форме $U_i\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) = D_i\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) \wedge C_i\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right)$ с саблюдением следующих условий, если

$$a)\bigvee_{i=1}^{m} D_i\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) = 1;\ b)\left[U\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) \to \bigwedge_{i=1}^{m} C_i\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right)\right] = 1,$$

то $\left[U\left(\tilde{x},Y\left(\tilde{x}\right)\right)\rightarrow \bigvee_{i=1}^{m} U_i\left(\tilde{x},Y\left(\tilde{x}\right)\right)\right]=1$.

Теорема-17. $\left[Y_{i_1\cdots i_n}^{\sigma}\rightarrow\left(Y_{j_1^1\cdots j_k^1}^{\sigma_1}\vee\ldots\vee Y_{v_1^t\cdots v_\tau^t}^{\sigma_t}\right)\right]=1,$ если

$$\sigma\neq\overline{\sigma_1}\oplus\overline{\sigma_2}\oplus\ldots\oplus\overline{\sigma}_t,\; Y_{i_1\cdots i_n}^{\sigma}=Y_{j_1^1\cdots j_k^1}^{\sigma_1}\oplus\ldots\oplus Y_{v_1^t\cdots v_\tau^t}^{\sigma_t}$$

Следствие-11.

$$\left[A\left(\tilde{x},Y\left(\tilde{x}\right)\right)Y_{i_1\cdots i_n}^{\sigma}\rightarrow\left(A_1\left(\tilde{x},Y\left(\tilde{x}\right)\right)Y_{j_1^1\cdots j_k^1}^{\sigma_1}\vee\ldots\vee A_t\left(\tilde{x},Y\left(\tilde{x}\right)\right)Y_{v_1^t\ldots v_\tau^t}^{\sigma_t}\right)\right]=1,$$

если$\left[A\left(\tilde{x},Y\left(\tilde{x}\right)\right)\rightarrow\bigwedge_{i=1}^{t}A_i\left(\tilde{x},Y\left(\tilde{x}\right)\right)\right]=1,\ \sigma\neq\overline{\sigma_1}\oplus\overline{\sigma_2}\oplus\ldots\oplus\overline{\sigma}_t,\ Y_{i_1\ldots i_n}^{\sigma}=Y_{j_1^1\cdots j_k^1}^{\sigma_1}\oplus\ldots\oplus Y_{v_1^t\cdots v_\tau^t}^{\sigma_t}$

Теорема -18. Пусть $U(\tilde{x},\ \mathrm{Y}(\tilde{x}))$,$U_i(\tilde{x},\ \mathrm{Y}(\tilde{x}))$ – сложные конъюнкции, которые представимы в виде $U=U^1\cdot U^2, U_i=U_i^1\cdot U_i^2, \mathrm{i}=1,2,\ldots,\mathrm{m}.$

Если а) $(U^1\rightarrow\wedge_{i=1}^{m}U_i^1)\equiv 1,$ б) $(U^2\rightarrow\vee_{i=1}^{m}U_i^2)\equiv 1,$ *то* $(U\rightarrow\vee_{i=1}^{m}U_i)\equiv 1.$

Алгоритм логического упрощения дизъюнкции сложных конъюнкций

Определение -2. Окрестностью $S_1(U,\Re)$ 1-го порядка сложной конъюнкции (с.к.) $U\left(\tilde{x},Y\left(\tilde{x}\right)\right)$в дизъюнкции $\Re\left(\tilde{x},Y\left(\tilde{x}\right)\right)$ сложных конъюнкций назовем совокупность с.к. U' в $\Re$ таких , что $U\cdot U'\neq 0$, т.е. $N_U\cap N_{U'}\neq\varnothing$.

Пусть $U\cdot U'=1$ – булево уравнение, которое тождественно системе:

$$\{U\left(\tilde{x},Y\left(\tilde{x}\right)\right)=1,\ U'\left(\tilde{x},Y\left(\tilde{x}\right)\right)=1\}. \tag{16}$$

Положим

$$\{U\left(\tilde{x},Y\left(\tilde{x}\right)\right)=x_{i_1}^{\sigma_1}\cdots x_{i_k}^{\sigma_k}Y_{v_1\ldots v_t}^{\sigma_{k+1}}\cdots Y_{w_1\ldots w_p}^{\sigma_{k+l}},\ U'\left(\tilde{x},Y\left(\tilde{x}\right)\right)=x_{j_1}^{\delta_1}\cdots x_{j_t}^{\delta_t}Y_{q_1\ldots q_l}^{\delta_{t+1}}\cdots Y_{p_1\ldots p_d}^{\delta_{t+l'}}\}.$$

Очевидно, что система (16) эквивалентна системе уравнений

$$\begin{cases}x_{i_1}=\sigma_1,x_{j_1}=\delta_1,\cdots,x_{i_k}=\sigma_k,x_{j_t}=\delta_t;\\ Y_{v_1\cdots v_t}=\sigma_{k+1},Y_{q_1\ldots q_l}=\delta_{t+1},\cdots,Y_{w_1\ldots w_p}=\sigma_{k+l},Y_{p_1\ldots p_d}=\delta_{t+l'}.\end{cases} \tag{17}$$

Нетрудно заметить, что , если система (17) совместна, то существует набор $\tilde{\alpha}$ такой, что $U(\tilde{\alpha})$=1, $U'(\tilde{\alpha})$ =1, т.е. $N_U\cap N_{U'}\neq\varnothing$. В противном случае $N_U\cap N_{U'}=\varnothing$.

Таким образом, проверка вхождения с.к. U в окрестность $S_1(U,\Re)$ первого порядка сводится к определению совместности системы (17). Если система (17) совместна, то $U\subseteq S_1(U,\Re)$, в противном случае $U\not\subset S_1(U,\Re)$.

Пусть $U\left(\tilde{x},Y\left(\tilde{x}\right)\right)=x_{i_1}^{\sigma_1}\cdots x_{i_k}^{\sigma_k}Y_{v_1\ldots v_{i_1}}^{\sigma_{k+1}}\cdots Y_{w_1\ldots w_{i_t}}^{\sigma_{k+t}}$. Число $r=k+i_1+\cdots+i_t$ назовем рангом с.к. U в $\Re$. Здесь $\theta_U^{\Pi}=\sum_{i=1}^{p}r_i-r,$ где $S_1(U,\Re)=\{U,U_1,\ldots,U_l\}$; r_i – ранг с.к. U_i . Разработан алгоритм логического упрощения д.н.ф.

$\Re\left(\tilde{x}, Y\left(\tilde{x}\right)\right) = U_1 \vee U_2 \vee \ldots \vee U_m$ специального вида с помощью метода окрестности первого порядка.

В параграфе 3.2. исследуются методы решения систем нелинейных булевых уравнений выше второго порядка и оценка их сложностей, описываются основные принципы решения систем логических уравнений и строятся алгоритмы получения решений максимальных совместных подсистем булевых уравнений.

Пусть система логических уравнении задана в базисе $D_2 = \{1, x_1 + x_2, x_1 \hat{} x_2\}$ в виде полинома Жегалкина:

$$\left\{f_1 = \textstyle\sum_{j=1}^{k_1} U_{1j} = \alpha_1, f_2 = \sum_{j=1}^{k_2} U_{2j} = \alpha_2, ..., f_m = \sum_{j=1}^{k_m} U_{mj} = \alpha_m\right\} \quad (18)$$

где U_{ij} - с.к; $\alpha_i \in \{0,1\}$; $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, k_i$.

Каждое высказывание уравнений системы (18) преобразуем в д.н.ф. с помощью формул расмотренной в первой главе(теорема 12) и следующих тождеств:

$$\neg(U_1 \hat{} U_2 \hat{} ... \hat{} U_e) = \bar{U}_1 \vee \bar{U}_2 \vee ... \vee \bar{U}_e, \ \neg(U_1 \vee U_2 \vee ... \vee U_e) = \bar{U}_1 \hat{} \bar{U}_2 \hat{} ... \hat{} \bar{U}_e,$$
$$U \hat{} (U_1 \vee U_2 \vee .. \vee U_e) = U_1 \hat{} U \vee ... \vee U_2 \hat{} U \vee ... \vee U_e \hat{} U.$$

Здесь каждая д.н.ф. упрощается поэтапно с помощью следующих логических операций:

$$\bar{U} \hat{} U = 0;\ 0 \hat{} U = 0;\ 0 \vee U = U;\ U \vee U = U;\ 1 \hat{} U = U;\ U \hat{} U = U;\ \bar{U} \vee U = 1;\ 1 \vee U = 1;$$
$$U \vee U \hat{} B = U;\ U \hat{} \bar{x} \vee U \hat{} x = U.$$

Нетрудно заметить, что в результате получим систему уравнений:

$$\{D_1 = U_{11} \text{v} \ldots \text{v}\, U_{1t_1} = 1, D_2 = U_{21} \text{v} \ldots \text{v}\, U_{2t_2} = 1, ..., D_m = U_{m1} \text{v} \ldots \text{v}\, U_{mt_m} = 1\} \quad (19)$$

где U_{ij} - с.к., $i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, t_i, D_i$ – сокращенная д.н.ф., реализующая f_i, $i = 1, \ldots, m$.

Для нахождения решений разработан метод умножение д.н.ф. системы (19) к одному эквивалентному уравнению $D_1 \ \& \ D_2 \ \& \ldots \& \ D_m = 1$, в котором левая часть представляется в виде д.н.ф.:

$$K_1 \text{v}\, K_2 \text{v} \ \ldots \ \text{v}\, K_t = 1 \ , \ где \ \ K_i - с.к. \ , \ \text{-}i = 1, \ldots, t \ .$$

Через $\chi\left(D_1 \& D_2\right)$ обозначим длину произведений(оценка сложности) $D_1 \& D_2$, в котором известно, $\chi\left(D_1 \& D_2\right) = m_1 \cdot m_2$.

Легко заметить, что если $U_i = U_j^1$, то имеет место

$$D1 \& D2 \ = U_i \vee (\mathbf{V}_{\tau=1, \tau \neq i}^{m_1} U_i)(\mathbf{V}_{t=1, t \neq j}^{m_2} U_t), \chi(D_1 \& D_2) \ = \ 1 + \ (m_1 - 1)(m_2 - 1).$$

Лемма-1. Если в д.н.ф. D_1 и D_2 имеет место

$$U_{i1} = \ Ax^{\sigma}, \ U^1_{j1} = \ Ax^{\neg\sigma}, \sigma \in \{0,1\}, \left(U_{i1} \to \ U^1_{jt}\right) \ \equiv \ 1, \ \left(U^1_{j1} \to \ U_{it}\right) \ \equiv \ 1,$$

то $U_{it} \hat{} U^1_{jt} \equiv U_{i1} \hat{} U^1_{j1} \equiv 0.$

Теорема-19. Если в д.н.ф. D_1 и D_2:

$$U_{i1} = Ax^{\sigma}, U^{I}{}_{j1} = Ax^{\bar{\sigma}}, x \in \{x_1,\ldots,x_n\}, \sigma \in \{0,1\}, \left(U_{i1} \to U^{I}{}_{jt1}\right) \equiv 1, \left(U^{1}{}_{j1} \to U_{i1}\right) \equiv 1.$$

$(U_{ikq} \to A) \equiv 1$, $(U^{1}{}_{jng} \to A) \equiv 1$, $q = 1,\ldots,\ell; \gamma = 1,\ldots,m$, то справедливо следующее:

$$D_1 \& D_2 = A \vee (V^{m_1}_{r=2} U_{i_r})(V^{m_2}_{r=2} U_{i_t}), \chi\left(D_1 \& D_2\right) = \left(m_1 - \ell - 1\right)\left(m_2 - m - 1\right),\ r \neq k_q,\ t \neq n_{\gamma}.$$

На основе рассмотренных утверждений и теоремы построены следующие алгоритмы A_1, A_2, A_3, A_4, в котором получены результаты:

-для алгоритма A_1:

$$D_1 \& D_2 = A_{i_1} \vee A_{i_2} \vee \ldots \vee A_{i_q} \vee (V^{m_1}_{\tau=q+g+1} U_{i_\tau})(V^{m_2}_{t=q+\gamma+1} U^1_{j_t}),\ \text{где}\ A_{i_k} \in (U_{i_k}, U^1_{j_k}), k = 1,\ldots, q\ ;$$

g и γ – число избыточных с.к. из д.н.ф. D_1 и D_2 и

$$\chi\left(D_1 \& D_2\right) = q + \left(m_1 - q - g\right)\left(m_2 - q - \gamma\right) - q = \left(m_1 - q - g\right)\left(m_2 - q - \gamma\right);$$

-для алгоритма A_2:

$$D_1 \& D_2 = A_{i_1} \vee \ldots \vee A_{i_q} \vee U_{i_{q+g+1}} \vee \ldots \vee U_{i_{q+g+l}} \vee (\mathbf{V}^{m_1}_{\tau=q+g+l+1} U_{i_\tau})(\mathbf{V}^{m_2}_{t=q++l+1} U^1_{j_t}),$$

$$\chi\left(D_1 \& D_2\right) = q + l + \left(m_1 - q - g - l\right)\left(m_2 - q - \gamma - l\right);$$

-для алгоритма A_3:

$$D_1 \& D_2 = Ai_1 v\ldots v\, Ai_q v\, Ui_{q+g+1} v\ldots v\, Ui_{q+g+l} v\, Ui_{q+g+l+1} v\ldots v\, Ui_{q+g+l+k} v\Big(\bigvee_{\tau=q+g+l+k+1}^{m_1} Ui_\tau\Big)\Big(\bigvee_{t=q+\gamma+l+1}^{m2} U^1 j_t\Big),$$

$$\chi\left(D_1 \& D_2\right) = q + l + k + \left[m1 - \left(q + g + l + k\right)\right]\left[m2 - \left(q + \gamma + l\right)\right].$$

-для алгоритма A_4:

$$D_1 \& D_2 = Ai_1 v\ldots v\, Ai_q v\, Ui_{q+g+1} v\ldots v\, Ui_{q+g+l} v\ \ Ui_{q+g+l+1} v\ldots v\, Ui_{q+g+l+k} v$$

$$v\, U^1 j_{q+\gamma+l+1} v\ \ldots v\ U^1 j_{q+\gamma+l+m} v\ \left(V^{m_1}_{\tau=q+g+l+k+1} Ui_\tau\right)\left(\mathbf{V}^{m_2}_{t=q++l+m+1} U^1 j_t\right),$$

$$\chi\left(D_1 \& D_2\right) = q + l + k + m + [m_1 - \left(q + g + l + k\right)][m_2 - (q + \gamma + l + m].$$

Пусть

$$D = Ai_1 v\ \ldots\ v\, Ai_q v\, Ui_{q+g+1} v\ \ldots\ v\, Ui_{q+g+l} v\, Ui_{q+g+l+1} v\ \ldots\ v\, Ui_{q+g+l+k} v\, Ui^1{}_{q+\gamma+l+1} v\ \ldots v\, Ui^1{}_{q+\gamma+l+m}$$

последний результат произведения полученных с помощью алгоритмов A_1, A_2, A_3, A_4.

Введем обозначение: $\neg$ P (U,G) и $\neg$S(U,G), соответственно, что с.к. U и G друг друга не поглощают и не склеивается.

Теорема-20. В д.н.ф D $\neg$ P (Ui, Uj) , $\neg$ S(Ui, Uj), где Ui, Uj - сложные конъюнкции из D, i$\neq$j.

Отметим, что в случае изменения порядка реализаций алгоритма A_1 с другими утверждения предыдущей теоремы могут быть неверными и, следовательно, реализация алгоритмов является оптимальным, тогда, когда алгоритм A_1 выполняется первым .

Нетрудно заметить, что для получения результата произведения $D_1 \& D_2$ состоится только умножить и сократить незначительное число с.к. д.н.ф. D_1 и D_2: $(V^{m_1}_{\tau = q+g+l+k+1} Ui_\tau), (V^{m_2}_{t = q+\gamma+l+m+1} U^l j_t)$, для которых справедлива оценка:

$$\chi_1(D_1 \& D_2) = [m_1 - (q+g+1+k)][m_2 - (q+\gamma+1+m)] \text{ и если } q+g+1+k = m_1 \text{ или}$$
$$q+\gamma+1+m = m_2, \text{ то } \chi_1(D_1 \& D_2) = 0 \text{ и } D_1 \& D_2 = D.$$

Продолжая этот алгоритм для всех высказываний (уравнений), в результате получим одну д.н.ф., которая является произведением всех высказываний системы (19).

Оценки сложности решения систем нелинейных булевых уравнений выше второго порядка

Пусть дана система (19). В системе рассмотрим произведения вида

$$U_{1i_1} \& U_{2i_2} \& \ldots \& U_{mi_m}, \text{ где } i_j \in \{1, 2, \ldots, t_j\}. \tag{20}$$

Число всех произведений вида (20) обозначим через Ψ.

Очевидно, что $\psi = \prod_{i=1}^{m} t_i$.

Пусть D_1 представлена в совершенной д.н.ф. Алгоритм A_1 решения системы (19) состоит в нахождении для каждой с.к.

$U_{1i}(\, i = 1, 2, \ldots, t_1)$ таких с.к. $U_{2i_2}, \ldots, U_{mi_m}$, что $(U_{1i} \rightarrow U_{ji_j}) \equiv 1, (\, j = 2, 3, \ldots, m\,)$. Решением системы (19) будет набор $\tilde{\alpha}$, где $U_{1i}(\tilde{\alpha}) = 1$. Нетрудно заметить, что для сложности ψ_{A_1} алгоритма А1 справедлива оценка $\psi_{A1} \le 2^n \cdot \sum_{i=2}^{m} t_i$.

Очевидно, что $\psi_{A1} \le \psi$, *если* $n < \sum_{i=1}^{m} \log_2 t_i - \log_2 (\sum_{i=2}^{m} t_i)$.

Пусть все высказывания системы записаны в виде произвольных д.н.ф.

Приведем алгоритм A_2. Рассмотрим систему (19).

Пусть $t_j = \min t_j,\ j = 1, 2, \ldots, m$. Для всех U д.н.ф. D_i ищем решения системы (19) следующем образом:

а) строим окрестности $S_1(U, D_j)$ первого порядка с.к. в д.н.ф. $D_j,\ j = 1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m$;

б) фиксируем совокупность всех вершин $\tilde{\alpha}$ интервала U, которые одновременно принадлежат множествам T_j окрестностей $S_1(U, D_j), j = 1, \ldots, i-1, i+1, \ldots, m$, и очевидно, является решениями системы (19).

Здесь $T_j = U_{\alpha \in Sl(U, Dj)} N\alpha$. Легко увидет, что для алгоритма справедлива оценка

$$\psi_{A2} \le t_j(\sum_{j=1, j \ne i}^{m} t_j + |\, N\alpha\,| \cdot \sum_{=1, j \ne i}^{m} \left| S_1(\, U, D_j) \right|), \tag{21}$$

где |M| - мощность множества M.

Исходя из анализа окрестности первого порядка и метрических характеристик д.н.ф для «почти всех функций» можно доказать, что в (21) второй член асимтотически меньше первого, и достаточно вычислять порядок первого члена.

В параграфе 3.3. дается решение систем нелинейных булевых уравнений на основе минимизации дизъюнкций сложных конъюнкций.

Постановка задачи. Здесь рассматриваем критерии аналитических поглощений одной сложной конъюнкции совокупностью сложных конъюнкций. Расмотрим множество с.к.:

$$\{U(\tilde{x}, Y(\tilde{x})), U_1(\tilde{x}, Y(\tilde{x})), \cdots, U_m(\tilde{x}, y(\tilde{x}))\}.$$

Пусть $M(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x})) = U_1(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x})) \vee \cdots \vee U_m(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x}))$ дизъюнкция сложных коньюнкций. Задача формулируется как поглощение сложной коньюнкции U дизъюнкцией M т.е. $[U \to M] \equiv 1$ или $[\mathrm{U} \to \bigvee_{i=1}^{m} U_i] \equiv 1$.

Критерии поглощения.

Теорема-21. Дизъюнкция

$$M(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x})) = U_1(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x})) \vee \cdots \vee U_m(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x}))$$

поглощает сложную конъюнкцию $U(\tilde{x}, Y(\tilde{x}))$ тогда и только тогда , когда система:

$$\{U(\tilde{x}, y(\tilde{x})) = 1,\ U_1(\tilde{x}, y(\tilde{x})) = 0, \ldots, U_m(\tilde{x}, y(\tilde{x})) = 0\} \qquad (22)$$

несовместна.

Теорема-22. Пусть

$$U_1(\tilde{x}, Y(\tilde{x})) = x_{\iota_1}^{\sigma_1} \cdots x_{\iota_k}^{\sigma_k}\, Y_{v_1^1 \cdots v_{\kappa_1}^1}^{\wp_1} \cdots Y_{v_1^t \cdots v_{k_t}^t}^{\wp_t} \cdots Y_{n_1^1 \cdots n_{m_1}^1}^{\wp_{t+q+1}} \cdots Y_{n_1^\tau \cdots n_{m_\tau}^t}^{\wp_{t+q+\tau}},$$

$$U_2(\tilde{x}, Y(\tilde{x})) = x_{j_1}^{\alpha_1} \cdots x_{j_c}^{\alpha_c} \cdot Y_{p_1^1 \cdots p_{z_1}^1}^{\alpha_{c+1}} \cdot Y_{p_1^2 \cdots p_{z_2}^2}^{\alpha_{c+2}} \cdots \cdot Y_{p_1^e \cdots p_{z_e}^e}^{\alpha_{c+e}}$$

сложные конъюнкции, состоящие из неортогональных выражений.

Если

$$(x_{i_1}^{\sigma_1} \cdots x_{i_k}^{\sigma_k} \to x_{j_1}^{\alpha_1} \cdots x_{j_c}^{\alpha_c}) \equiv 1,\ \{\sum_{i=1}^{t} \wp_i = \alpha_{c+1}, \sum_{i=1}^{t} Y_{v_1^i \cdots v_{k_i}^i} = Y_{p_1^1 \cdots p_{z_1}^1}, \qquad (23)$$

$$\sum_{i=1}^{q} \wp_{t+i} = \alpha_{c+2}, \sum_{i=1}^{q} Y_{w_1^i \cdots w_{e_i}^i} = Y_{p_1^2 \cdots p_{z_2}^2}, \ldots, \sum_{i=1}^{\tau} \wp_{t+q+i} = \alpha_{c+e}, \sum_{i=1}^{\tau} \gamma_{n_1^i \cdots n_{m_i}^i} = \gamma_{p_1^e \cdots p_{z_e}^e}\}$$

то $[U_1(\tilde{x}, y(\tilde{x})) \to U_2(\tilde{x}, y(\tilde{x}))] \equiv 1$, т.е. сложная конъюнкция U_1 поглощается сложной конъюнкцией U_2.

Здесь рассмотрен основные критерии упрощения дизъюнкций сложных коньюнкций и применяя равенства сложных конъюнкций нелинейных выражений второго порядка доказана обобщенная форма тождественности сложных конъюнкции для произвольного порядка нелинейных выражений.

Теорема-23. Сложные конъюнкции

$$Y_{i_{1 \ldots i_k}}^{\sigma_1} \ldots Y_{j_{1 \ldots j_p}}^{\sigma_j} \cdot Y_{1 \ldots q}^{\sigma_{j+1}},\ Y_{i_{1 \ldots i_k}}^{\sigma_1} \ldots Y_{j_{1 \ldots j_p}}^{\sigma_j} Y_{V_{1 \ldots V_l}}^{\sigma}. \qquad (24)$$

тождественно равны, если выполняются следующие условия:

$$a)\ \sigma_1 \oplus \sigma_2 \oplus \ldots \oplus \sigma_j \oplus \sigma_{j+1} = \sigma,\ б)\ \mathrm{Y}_{i_{1..}i_k} \oplus \ldots \oplus \mathrm{Y}_{j_{1\ldots}j_p} \oplus \mathrm{Y}_{\tau_{1\cdots}\tau_q} = \mathrm{Y}_{V_{1..}V_l}.$$

В параграфе 3.4 рассмотрен оптимальный метод решение систем нелинейных булевых уравнений на основе рангов сложных конъюнкций. Для системы нелинейных булевых уравнений, высказывания которых состоят из дизъюнкций сложных конъюнкций

$$\begin{cases} \mathrm{D}_1 = U_{11}(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x}))\ \mathrm{v} U_{12}(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x}))\ \mathrm{v}\ \ldots \mathrm{v}\ U_{1t_1}(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x})) = 1 \\ \mathrm{D}_2 = U_{21}(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x}))\ \mathrm{v} U_{22}(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x}))\ \mathrm{v}\ \ldots \mathrm{v}\ U_{2t_2}(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x})) = 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathrm{D}_m = U_{\mathrm{m}1}(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x}))\mathrm{v} U_{\mathrm{m}2}(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x}))\mathrm{v}\ \ldots \mathrm{v} U_{mt_m}(\tilde{x}, \mathrm{Y}(\tilde{x})) = 1 \end{cases} \tag{25}$$

где U_{ij}- с.к., $\mathrm{i} = 1,\ldots,\mathrm{m}; \mathrm{j} = 1,\ldots,\mathrm{t_i}, \mathrm{D_i}$ – сокращенная д.н.ф., реализующая $f_{\mathrm{i}},\ \mathrm{i} = 1,\ldots,\ \mathrm{m}\ и\ \mathrm{U_{ij}} = x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k} Y_{v_1\ldots w_1}^{\sigma_{k+1}} \ldots Y_{v_t\ldots w_t}^{\sigma_{k+t}}$, введена понятие окрестьность S(R,U) истенности конъюнкции U и произведение R таких, что $\mathrm{R} \cdot \mathrm{U} \neq 0,\ т.е. \mathrm{N_R} \cap \mathrm{N_U} \neq \varnothing,\ где\ \mathrm{R} = \mathrm{U_1} \cdot \mathrm{U_2} \cdot \ldots \cdot \mathrm{U_t}$ и U с.к. и в дальнейшем получен выражение:

$$\mathrm{R_t} = x_{j_1}^{\sigma_1} x_{j_2}^{\sigma_2} \ldots x_{j_l}^{\sigma_l} Y_{l_1\ldots m_1}^{\sigma_{l+1}} Y_{l_2\ldots m_2}^{\sigma_{l+2}} \ldots Y_{l_t\ldots m_t}^{\sigma_{l+t}}. \tag{26}$$

Здесь с удалением нулевых тождеств и с помощью компактных преобразований упрощаем полученное выражение.

В результате получен уравнение вида:

$$x_{t_1}^{\sigma''_1} x_{t_2}^{\sigma''_2} \ldots x_{t_k}^{\sigma''_k} Y_{p_1\ldots q_1}^{\sigma''_{m+1}} Y_{p_2\ldots q_2}^{\sigma''_{m+2}} \ldots Y_{p_t\ldots q_t}^{\sigma''_{m+t}} = 1 .$$

Проделывая упрощения $\mathrm{x}^\sigma \,\&\, \mathrm{x}^\sigma = \mathrm{x}^\sigma, Y^\sigma \,\&\, Y^\sigma = Y^\sigma$ и выбрасывая комбинации, в которых возникает ситуация $x \& \overline{x} = 0, Y^\sigma \& \overline{Y^\sigma} = 0$ получаем совокупность уравнений вида:

$$x_{i_1}^{\sigma_1} \,\&\, x_{i_2}^{\sigma_2} \,\&\ldots\&\, x_{i_k}^{\sigma_k} Y_{p_1\ldots q_1}^{\sigma_{k+1}} Y_{p_2\ldots q_2}^{\sigma_{k+2}} \ldots Y_{p_t\ldots q_t}^{\sigma_{k+t}} = 1$$

для каждого из которых выписываем решение $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mathrm{n}})$, где $\alpha_\gamma = \sigma_\gamma$, если $\gamma \in \{\mathrm{i_1},\ \mathrm{i_2}, \ldots,\ \mathrm{i_t}\}$.

Результатом работы алгоритма будет решение совместных систем линейных уравнений, которые удовлетворяют систему (25).

В главе IV **Решение систем нелинейных булевых уравнений второй степени специального класса** исследуются отдельные классы систем нелинейных булевых уравнений второй степени, заданных полиномами Жегалкина. Рассматриваются некоторые проблемы минимизации специальных дизъюнктивных нормальных форм, полученных от полинома Жегалкина второй степени специальных классов. Предлагается критерий поглощения сложных конъюнкций окрестностью первого порядка конъюнкций высказываний отдельного класса систем нелинейных булевых уравнений второй степени, заданных полиномами Жегалкина

Исследуется специальный класс систем нелинейных булевых уравнений второй степени:

$$\mathcal{R} = \{f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_1,\ f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_2, \ldots, f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \alpha_m\}$$

Причем высказывание $f\ (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из R имеет вид:

$$f = \sum_{\substack{i,j=k \\ i<j}}^{k+3} a_{ij}x_ix_j \oplus \sum_{\substack{i,j=e \\ i<j}}^{e+3} b_{ij}x_ix_j \oplus \sum_{\substack{i,j=p \\ i<j}}^{p+3} c_{ij}x_ix_j \oplus \sum_{\substack{i,j=q \\ i<j}}^{q+3} d_{ij}x_ix_j \oplus \sum_{i=t}^{t+3} x_i,$$

где $k+3<e,\ e+3<p,\ p+3<q,\ q+3<t,$

$$\sum_{i,j=k}^{k+3} a_{ij} = \sum_{i,j=e}^{e+3} b_{ij} = \sum_{i,j=p}^{p+3} c_{ij} = \sum_{i,j=q}^{q+3} d_{ij} = 4, \{a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}, e_i\} \in \{0,\ 1\}.$$

Здесь знаки $\oplus$, $\sum$ - подразу-мевается как сумма по mod 2.

В §4.1. исследуются вопросы компактного представления высказываний f с помощью группировки элементов, введением новых переменных, преобразование f в специальные д.н.ф. с помощью более оптимальным методом десятичного представления с.к. упрощение специальных д.н.ф. и основные особенности реализации формул для специального класса систем нелинейных булевых уравнений второй степени.

Здесь суммы вида $\sum_{i,j=v}^{v+3} q_{ij}x_ix_j$ u $\sum_{i=w}^{w+1} e_ix_i$ назовем группой элементов высказывания f. Кроме того , группы различных уравнений(высказываний) системы R попарно не совпадает.

Метод решения системы R состоит в компактном представлений f_i с помощью группировки элементов введением новых переменных, преобразованием последних в д.н.ф. и их упрощением. Поиск решений системы R осуществляется с помощью алгоритма решения системы линейных булевых уравнений.

Доказана, что в каждой высказывание $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из R в начальном этапе участвует 20 элементарных конъюнкции, а после группировки и введения новых переменных высказывания $F(\tilde{x}, Y(\tilde{x}))$ системы R* будут содержать не более 9 ти линейных конъюнкции. Из этих данных по

$U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_t = \vee_{\sigma 1 \oplus \sigma 2 \oplus \ldots \oplus \sigma t = 1} U_1^{\sigma_1} \& U_2^{\sigma_2} \& \ldots \& U_t^{\sigma_t}$ имеем $L_k(f) = 2^{20}, L_k(F) = 2^9$.

Отсюда видно, что разница сложности высказывании f и F сокращается 2^{11} раза, т.е. $L_k = \dfrac{L_k(f)}{L_k(F)} = \dfrac{2^{20}}{2^9} = 2^{11}$, где $L_k(Q)$ –число элементарных конъюнкций, входящих в Q д.н.ф. имеем

Это означает, что метод группировки элементов и введение новых переменных для уравнений второй степени специального класса 2^{11} раз уменьшает сложность высказываний булевых уравнений.

В §4.2 для решения этой системы выделяются подсистемы R* с помощью алгоритма окрестности первого порядка и приводятся к виду линейных логических уравнений

$$x_{j_1}^{\sigma'_1}\ x_{j_2}^{\sigma'_2}\ \ldots\ x_{j_k}^{\sigma'_l}\ Y_{l_i m_i}^{\sigma'_{l+i}} Y_{l_j m_j r_j}^{\sigma'_{l+j}} Y_{l_k m_k r_k s_k}^{\sigma'_{l+k}} = 1, l \le\ \mathrm{n}\ , \mathrm{i} \le 8, \mathrm{j} \le 16, \mathrm{k} \le 32,$$

и упрощением специальных д.н.ф. с помощью нулевых тождеств и сокращением применяя основные особенности реализации формул для специального класса систем нелинейных булевых уравнений второй степени получаем совокупность уравнений вида $x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \& \ldots \& x_{i_k}^{\sigma_k} = 1,$ для каждого из которых выписываем решение $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{\mathrm{n}}),$ где

$$\alpha_\gamma = \begin{cases} \sigma_\gamma\ , \textit{если}\ \gamma \in\ (\mathrm{i}_1,\ \mathrm{i}_2, \ldots,\ \mathrm{i}_\mathrm{k}\}, \\ \ \ *\ , \textit{в противном случае.} \end{cases}$$

В параграфе 4.3 дано описание основных подпрограмм, укрупненная блок-схема и инструкция программ для специальных систем булевых уравнений второй степени. В качестве контрольного примера реализован специальный класс систем нелинейных булевых уравнений второй степени с числом переменных, равным 100, и числом уравнений 50.

В главе V “**Программная реализация решений систем нелинейных булевых уравнений»** реализованы на основе разработанных моделей алгоритмов, изложенных в главах I-IV и служат для решения систем булевых уравнений, высказываниями которых являются формулы над произвольным базисом, полиномы Жегалкина, дизъюнктивные нормальные формы и линейные уравнения.

В параграфе 5.1 описывается программная реализация методов решения систем нелинейных булевых уравнений произвольного базиса. Дается описание и структура программы решения систем нелинейных логических уравнений **SISTEMA,** в котором изложены идентификаторы, используемые в программе, описание входных и выходных данных, состав и функция процедур, инструкция и подготовка к эксплуатации и другие необходимые информации для реализации программы. Расмотрен тестовый пример система логических уравнений в произвольном базисе:

$$\{\overline{x}, x_1 \& x_2\ , x_1 \vee x_2, x_1 \to x_2, x_1 \sim x_2, x_1 / x_2, x_1 \oplus x_2\}\,.$$

В параграфе 5.2 приводится описание и структура реализуемой программы **RSLLY (решение систем линейных логических уравнений),** блок-схема программы реализации методов решения систем линейных булевых уравнений, определение несовместных уравнений и исключение этих уравнении из системы, описание и описание принципа ее работы. Для наглядности расмотрен тестовый пример линейных логических уравнений и показан принцип работы нахождения корней системы.

В §5.3. приводится блок-схема программы реализации методов решения систем нелинейных булевых уравнений выше второго порядка, описание и структура реализуемой программы **GDNF** и описание принципа ее работы. Также предложен программа трансформации формул над произвольным базисом в д.н.ф. и описание, и структура реализуемой программы. Для наглядности рассмотрен тестовый пример.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящается разработке эффективных алгоритмов построения решения систем булевых уравнений, заданных в виде произвольного базиса, полиномов Жегалкина первой, второй, выше второй степени и дизъюнктивных нормальных форм и их машинной реализации. Для этой цели выполнены следующие работы:

1. Разработана методология решения систем булевых уравнений разбиением их на максимальные совместные подсистемы линейных, нелинейных уравнений второй степени и выше;

2. Разработан алгоритм поиска максимальных подсистем систем булевых уравнений на основе решения задачи расшифровки булевых функций, а также доказательства теорем о количестве монотонных функций и сложности алгоритма расшифровки.

3. Разработаны методы решения систем линейных и нелинейных уравнений второй степени методами трансформации и группирования высказываний и доказательства критерия поглощения сложных конъюнкций

4. Разработаны методы решения систем нелинейных булевых уравнений выше второй степени на основе трансформации и минимизации д.н.ф. сложных конъюнкций.

5. Разработаны методы решения систем нелинейных уравнений второй степени специального вида методами группирования высказываний и минимизации д.н.ф. сложных конъюнкций.

6. Разработан программный комплекс, реализующий задачи построения решения систем булевых уравнений заданных в произвольном базисе, полиномом Жегалкина и дизъюнктивных нормальных форм.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

BAIZHUMANOV ABDUSATTAR ABDUQODIROVICH

EFFICIENT METHODS FOR SOLVING SYSTEMS OF NONLINEAR BOOLEAN EQUATIONS AND ESTIMATING THEIR COMPLEXITY

01.01.03 – Computational mathematics and discrete mathematics
(Physical and mathematical sciences)

ABSTRACT OF THE DOCTORAL (DSc)
DISSERTATION OF PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent - 2025

The theme of doctoral (DSc) dissertationon physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher education, science and innovations of the Republic of Uzbekistan under number № B2024.3.DSc/FM275.

The dissertation has been prepared at the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://fti-kengash.uz/ and on the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific adviser:	**Kabulov Anvar Vasilovich** doctor of technical sciences, professor
Official opponents:	**Hayotov Abdullo Rakhmonovich** doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Kalimbetov Burkhan Teshebaevich doctor of physical and mathematical sciences, professor (Kazakhstan)
	Allakov Ismail. doctor of physical and mathematical sciences, professor
Leading organization:	**Turin Polytechnic university in Tashkent**

Defense will take place on «20» june 2025 at 14:00 at the meeting of Scientific council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 at the National University of Uzbekistan (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str. 4, Ph.: (99871) 227-12-24, fax: (99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

The dissertation is possible to review in Information-resource centre at the National University of Uzbekistan (registered № _____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar area, University str., 4. Ph.: (99871) 246-02-24).

Abstract of dissertation sent out on "5" june 2025.
(mailing report № 5 on "5" june 2025).

M. R. Aripov
Chairman of the Scientific Council for awarding scientific degrees, D.P.M.S., Professor

Z.R.Rakhmonov
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.P.M.S.

R.D.Aloev
Deputy Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.P.M.S., professor

INTRODUCTION (Abstract of the dissertation of doctor of science (DSc))

The aim of the study is the development of a methodology, methods and technology for solving systems of nonlinear logical equations and assessing their effectiveness based on decreasing the degree, grouping variables, transforming and minimizing formulas of nonlinear equations consisting of Zhegalkin polynomials.

The research obejective are systems of nonlinear Boolean equations and systems of special nonlinear Boolean equations of the second degree, Boolean statements defined in various bases, and their transformation.

The scientific novelty of the research is as follows:

a methodology for solving systems of Boolean equations by dividing them into maximal compatible subsystems of linear and nonlinear equations of degree two and higher has been developed;

methods for transforming and grouping statements, criteria for absorbing complex conjunctions, as well as their minimization for solving systems of linear and nonlinear equations of degree two and higher have been proven;

methods for grouping statements and minimizing disjunctive normal forms of complex conjunctions have been developed for solving systems of nonlinear equations of degree two of a special class, and an estimate of the complexity of the grouping method has been proven;

theorems on the optimal transformation of formulas from an arbitrary basis to a DNF and the Zhegalkin polynomial have been proven;

a theorem on the efficiency of the developed algorithms when using multiplication of complex DNFs has been proven, and an estimate of their complexity has been given;

estimates of the complexity of systems of nonlinear Boolean equations above the second order and criteria for absorbing complex conjunctions by a first-order neighborhood have been proven;

An algorithmic system and software package have been developed for the optimal solution of systems of arbitrary complex logical equations of heuristic algorithms when solving the issue of increasing the accuracy of effective methods to support the adoption of management and collegial diagnostic decisions.

Implementation of research results. Based on the scientific results obtained in the dissertation on methods for minimizing arguments of nonlinear logical equations:

developed effective optimal algorithms for finding solutions to systems of logical equations specified in the form of an arbitrary basis, Zhegalkin polynomials of the first, second and higher orders and disjunctive normal forms are used in the optimization (minimization) of logical statements, in the practical project OT-Atech-

2018-486 "Implementation of logical control systems and information protection based on programmable logical controllers and automated logical systems of automated design for their design", where methods for minimizing logical equations are used in the process of writing algorithms for microcontrollers (Certificate of the National University of Uzbekistan dated July 24, 2024 No. 04 / 11-2809) and the use of the scientific result made it possible to optimally implement and analyze encryption algorithms based on microcontrollers;

the developed effective methods of solution based on grouping and minimization of formulas for systems of second-order nonlinear equations of a special type were used in research work at the State Unitary Enterprise UNICON to assess the strength of symmetric encryption algorithms (certificate of the State Unitary Enterprise UNICON No. 6-2/1757 dated 09/05/2024) and as a result, based on the minimization of the model of algebraic cryptanalysis of symmetric encryption algorithms AES and Kuznechik when reaching the number of rounds 6, the number of arguments was reduced by three times, and the number of equations - by ten times;

the developed methods for solving systems of nonlinear logical equations of the second order using the methods of transformation, grouping and proof of the criterion for the absorption of complex conjunctions were used to assess the strength of the AES and Kuznechik symmetric encryption algorithms in the Information Resource Center of the Ministry of Internal Affairs of the Republic of Karakalpakstan (certificate of the Ministry of Internal Affairs of the Republic of Karakalpakstan dated August 30, 2024, No. 20/1310), and as a result, the algebraic model of cryptanalysis of the AES and Kuznechik symmetric encryption algorithms, based on minimizing the number of rounds, made it possible to reduce the number of arguments by three times, and the number of equations by ten million when reaching the number of rounds of 6.

Structure and scope of the dissertation. The content of the dissertation consists of an introduction, five chapters, conclusions, a list of references and applications. The volume of the dissertation is 160 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (I часть; part I)

1. Bayzhumanov, A. A. Optimal method for solving special classes of systems of nonlinear equations of the second degree // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science. 2023, 118(2), pp. 11-20. (№1, Web of Science IF=0.4).

2. Berdimurodov M.A., Baizhumanov A.A. Algorithms for minimizing functions of the algebra of logic in the class of disjunctive normal forms and estimating their complexity// 2022 International Conference on Information Science and Communications Technologies, ICISCT 2022, 2022. (№3, Scopus)

3. Kabulov A., Baizhumanov A., Berdimurodov M. On the minimization of k-valued logic functions in the class of disjunctive normal forms // Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, 2024, 121(1), pp. 37–45. (№1, Web of Science IF=0.4).

4. Kabulov A., Baizhumanov A., Saymanov I. Synthesis of Optimal Correction Functions in the Class of Disjunctive Normal Forms // Mathematics. 2024, 12, 2120 (№1, Web of Science IF=2.5).

5. Kabulov A., Baizhumanov A., Saymanov I., Berdimurodov M. Algorithms for Minimizing Disjunctions of Complex Conjunctions Based on First-Order Neighborhood Information for Solving Systems of Boolean Equations // 2022 International Conference of Science and Information Technology in Smart Administration, ICSINTESA 2022, 2022. (№3, Scopus)

6. Kabulov A., Baizhumanov A., Saymanov I., Berdimurodov M. Effective methods for solving systems of nonlinear equations of the algebra of logic based on disjunctions of complex conjunctions // 2022 International Conference of Science and Information Technology in Smart Administration, ICSINTESA 2022, 2022. (№3, Scopus)

7. Urunbaev E., Berdimurodov M.A., Baizhumanov A.A. Implementation of the algorithm for constructing a corrector of multivalued logic functions // 2022 International Conference on Information Science and Communications Technologies, ICISCT 2022, 2022. (№3, Scopus).

8. Байжуманов А., Бердимуродов М., Қудайбергенов А. Методи минимизации функций к-значной логики в классе дизъюнктивних нормальних форм// ҚарДУ хабарлари, Илмий-назарий услубий журнал, 2024, 3(2), стр. 115-123.

9. Байжуманов А.А. Проблемы минимизации специальных дизъюнктивных нормальных форм сложных конъюнкции высказываний систем нелинейных булевых уравнений // Научный Вестник СамГУ. – Самарканд, 2023. 1(137). -стр. 26-30. (01.00.00, №2).

10. Байжуманов А.А., Бердимуродов М.А. Метод решения систем нелинейных булевых уравнений на основе минимизации дизъюнкций сложных конъюнкций// Научный Вестник СамГУ, 2023, №5(141/1), стр. 64-70.

11. Байжуманов А.А., Бердимуродов М.А. Алгоритмы минимизации функций алгебры логики в классе дизъюнктивных нормальных форм и оценки их сложности // Научный вестник Наманганского Государственного университета. 2024, № 1., стр. 14-24. (01.00.00 №14)

12. Байжуманов А.А., Бердимуродов М.А. Критерий необходимости стойкости криптосистем в защите информаций// Научный вестник Наманганского Государственного университета. 2024, № 3., стр. 9-13. (01.00.00 №14) .

13. Байжуманов А.А., Бердимуродов М.А. Методы минимизации дизъюнкций сложных конъюнкций высказываний систем нелинейных булевых уравнений на основе информации об окрестности 1-го порядка, ҚарДУ Хабарлари, Илмий-назарий услубий журнал, 2023, 6/1(62), стр. 42-48. (01.00.00, №10)

14. БайжумановА.А. Некоторые критерии приведения логических формул к дизъюнктивной нормальной форме // Международный журнал теоретических и прикладных вопросов цифровых технологий. 2023, 1(3). стр. 25-33. (05.00.00, №3).

15. Урунбаев Э., Бабаджанов А.Ф., Байжуманов А.А. Алгебраические методы решения задач распознавания с непересекающимися классами // Научный Вестник СамГУ. 2022, 5(135). стр. 107-111. (01.00.00, №2).

II бўлим (ЧастьII; PartII)

16. Baizhumanov A.,Methods for solving systems of boolean equations // Eurasian Journal of Researches in Social and Economics (EJRSE) 2023, 10(1) pp. 87-100.

17. Bayzhumanov A.A., Utebaeva Sh., Kobeyeva Z. Using compleconjunctions in solving nonlinear boolean equations // Eurasian Journal of Researches in Social and Economics (EJRSE) 2023, 10(1) pp. 182-194.

18. Kabulov A., Baizhumanov A., Babadzhanov A. The problem on the completeness of classes of correcting functions// ABSTRACTS of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (TWMS Congress-2023), 20-23 сентября 2023, Туркестан, Казақстан.

19. Kabulov A.V., Baizhumanov A., M. BerdimurodovM. On the minimization of k-valued logic functions in the class of disjunctive normal forms// ABSTRACTS of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (TWMS Congress-2023),20-23 сентября 2023, Туркестан, Казақстан.

20. Байжуманов А.А. Дизъюнктивті қалыпты формаларды минимизациялау күрделігінің локал бағалары, «Рухани жаңғыру – қазақ өркениетінің жаңа дәуірі және жастар» атты республикалық VIII ғылыми-тәжірибелік конференция. І бөлім. Шымкент-2019.

21. Байжуманов А.А. Жегалкин полиномындағы арнайы логикалық формулаларды минимизациялаудың локал әдісі «Қазіргі заманғы саяси және мәдени кеңістіктегі өнер мен білім» атты халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференция. 2-том. Шымкент -2018.

22. Байжуманов А.А. Логикалық алгебра функцияларын тізбекті есептеу арқылы алынған минимал формулалар синтезі // Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті Хабаршы «Физика-математика ғылымдары» сериясы № 3(69), 2020 ж.

23. Байжуманов А.А. Эффективное использования линейных форм при решений систем логических уравнений второй степени // Proceedings of the international scientific conference «Science and innovation: news, problems and achievements» 30-31 May 2022, Түркистан.

24. Байжуманов А.А., Әбдіжаппар Н. Логикалық алгебра функцияларын тізбекті есептеу арқылы алынған минимал формулалар синтезі, «Рухани жаңғыру – қазақ өркениетінің жаңа дәуірі және жастар» атты студенттердің республикалық VIII ғылыми-тәжірибелік конференция. I бөлім. Шымкент-2019.

25. Байжуманов А.А., Бердимурадов М. Algorithms for minimizing functions of the algebra of logic in the class of disjunctive normal forms and estimating the ircomplexity // Международная конференция по применению, тенденциям и возможностьям информационных и коммуникационных технологий, Ташкентский Университет информационных технологий имени Мухаммад Ал Хорезми, 28-30 сентября 2022 г.

26. Байжуманов А.А., Найзабекова Г.С., «Дискреттік математикада формулаларды тиімді ауыстыру тәсілдері» // «Қазіргі заман жағдайындағы ғылым мен білім» тақырыбындағы Халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференциясының еңбектер жинағы, IVтом(Шымкент Университеті,2021).

27. Байжуманов А.А., Сульбаева Ж.М. «Кейбір к-мәнді логикалық функциялардың метрикалық қасиеттері» «Қазіргі заманғы ғылыммен білімнің инновациялық дамуы: өзекті мәселелер, жетістіктер мен перспективалары» атты халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференциясында (ҚР білім және ғылым министрлігі Алматы қаласының жас ғалымдар кеңесі, 11-қаңтар 2021 ж.).

28. Байжуманов А.А., Уласбеков А.Қ. Об одном эффективном представлении высказываний системы булевых уравнений второй степени «Рухани жаңғыру және ғылыммен білімнің Қазақстанның қарқынды дамуына қосар үлесі» атты жас ғалымдармен студенттердің республикалықғылыми практикалық конференциясы» Шымкент университеті. 2018 ж.

29. Байжуманов А.А., Урунбаев Э. Программно-инструментальная система организации обратной связи для онлайн-курсов по дискретной математики// Proceedings of the international scientific conference «Science and innovation: news, problems and achievements» 30-31 May 2022, Түркистан.

30. Байжуманов А.А.,Зайны.М.Б. «Дизьюнктивті қалыпты формаларды минимизациялау күрделілігінің локал бағалары» // «Қазіргі заман жағдайындағы ғылым мен білім» тақырыбындағы Халықаралықғылыми-

тәжірибелік конференциясының еңбектер жинағы, IV том (Шымкент Университеті, 2021 ж.)

31. Байжуманов А.А.,Көпбаева А.А. «К-мәнді логикалық функциялар үшін интервалдар өлшемін анықтау тәсілі» «Қазіргі заман жағдайындағы ғылым мен білім» тақырыбындағы Халықаралықғылыми-тәжірибелік конференциясының еңбектер жинағы, IV том (Шымкент Университеті, 2021 ж.).

32. Байжуманов А.А.,Логикалық - ықтималдық әдістерді кейбір құрылымдық күрделі жүйелерді зерттеуде қолдану // «Проблемы формирования межкультурной коммуникации студентов в эпоху глобализации». – Сборник статей участников международного круглого стола «Проблемы формирования межкультурной коммуникации студентов в эпоху глобализации» – Нур-Султан: Издательство «ТАУ», 2022. – 254 с.

33. Байжуманов А.А.,Рахымбай Ш.Ж. Некоторые свойства действительных R-функции// «Қазіргі заманғы ғылыммен білімнің инновациялық дамуы: өзекті мәселелер, жетістіктер мен перспективалары» атты халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференциясында (ҚР білім және ғылым министрлігі Алматы қаласының жас ғалымдар кеңесі, 11-қаңтар 2021 ж.).

34. Байжуманов А.А.,Тынысбек Т. «Дизъюнктивті қалыпты формадағы логикалық формуланы қысқартудың локаль әдісі» Қазақстан Республикасының тұңғыш Президенті Нурсултан Назарбаевтің «2019 жыл-Жастар жылы»жолдауына негізделген «Ғылымдағы жастар – болашақтың үміті» атты Республикалық ғылыми практикалық конференция. I бөлім. Шымкент-2019.

35. Байжуманов А.А.,Уалиханова А.Т. «Екінші дәрежелі логикалық теңдеулер жүйесін шешудің локал әдістері»// «Қазіргі заман жағдайындағы ғылым мен білім » тақырыбындағы Халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференциясының еңбектер жинағы,IV том (Шымкент Университеті,2021).

36. Байжуманов А.А.,Уалиханова А.Т. «Жалпыланған жұтылу критерий көмегімен күрделі конъюнкцияларды қысқарту» «Қазіргі заманғы ғылыммен білімнің инновациялық дамуы: өзекті мәселелер, жетістіктер мен перспективалары» атты халықаралық ғылыми-тәжірибелік конференциясында (ҚР білім және ғылым министрлігі Алматы қаласының жас ғалымдар кеңесі, 11-қаңтар 2021 ж.).

37. Байжуманов А.А.,Уласбеков А.Қ. Дербес түрдегі арнайы логикалық теңдеулер жүйесін шешу «Рухани жаңғыру және ғылыммен білімнің Қазақстанның қарқынды дамуына қосар үлесі» атты жас ғалымдармен студенттердің республикалық ғылыми практикалық конференциясы» Шымкент университеті. 2018 ж.

38. Байжуманов А.А.,Хасенова А. Монотонды к-мәнді логикалық функцияның ерекше қасиети. // Материалы международной научно-практической конференции «Наука и образование: новые подходы и актуальные исследования». Том III. -Шымкент: «Нұрлы Бейне», 2022. -293с.

39. Байжуманов А.А.,Эффективный аналитический метод полученияполинома Жегалкина// Тезисы международной научно-практической конференции «актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий» Том № 26 Нукус, Май 2-3, 2023.

40. Байжуманов А.А.«Логикалық - ықтималдық әдістерді кейбір құрылымдық күрделі жүйелерді зерттеуде қолдану»// Сборник статей участников международного круглого стола «Проблемы формирования международной коммуникации студентов в эпохе глобализации» проведенного кафедрой «Педагогика и психология» Университета Туран – Астана, 21 декабря 2021 г. Г. Нур-Султан.

41. Кабулов А.В., Байжуманов А.А., Бердимурадов М. Methods for minimizing disjunctions of systems of nonlinear boolean equations, based on information about the neighborhoodof the 1storder // Республиканская научно-техническая конференция «Современное состояние и перспективы развития цифровых технологий и искуственного интелекта» Самарканд, 26-27 октября 2022 г.

42. Кабулов А.В., Байжуманов А.А., Бердимурадов М. Solving systems of nonlinear boolean equations based on minimizing disjunctions of complex conjunctions // Республиканская научно-техническая конференция «Современное состояние и перспективы развития цифровых технологий и искуственного интелекта» Самарканд, 26-27 октября 2022 г.

43. Кабулов А.В.., Байжуманов А.А., Бердимурадов М. Problem of synthes is of minimal form sof logical functions // Республиканская научно-техническая конференция «Современное состояние и перспективы развития цифровых технологий и искуственного интелекта» Самарканд, 26-27 октября 2022 г.

44. Урунбаев Э., Байжуманов А.А., Бердимурадов М. Implementation of the algorithm for constructin ga corrector of ultivalued logic functions // Международная конференция по применению, тенденциям и возможностьям информационных и коммуникационных технологий, Ташкентский Университет информационных технологий имени Мухаммад Ал Хорезми, 28-30 сентября 2022 г.

45. Урунбаев Э., Байжуманов А.А., Бердимурадов М. On the minimization of k-valued logic functions in the class of disjunctive normal forms // Международная конференция по применению, тенденциям и возможностьям информационных и коммуникационных технологий, Ташкентский Университет информационных технологий имени Мухаммад Ал Хорезми, 28-30 сентября 2022 г.

Avtoreferat matni "O'zbekiston: til va madaniyat. Lingvistika" jurnalida tahrirdan o'tkazildi.

Bosishga ruxsat etildi: 20.05.2025-yil.
Bichimi 60x84 1/16, "Times New Roman"
garniturada raqamli bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog'i: 4. Adadi: 100. Buyurtma №: 196.

"TRAINMAX" MChJ bosmaxonasida chop etildi.
100194, Toshkent shahri, Yunusobod-11, 62-uy.