O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA`LIM VAZIRLIGI

NAVOIY DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI

E.A.Chuliyev, D.F.Alimova

MATEMATIKA:

kompleks sonlar

Akademik litseylar va kasb-hunar kollejlari o‘quvchilari uchun uslubiy qo‘llanma

NAVOIY - 2014

Ushbu uslubiy qo‘llanma akademik litseylar va kasb-hunar kollejlari o‘quvchilari uchun “Matematika” fani o‘quv dasturi asosida yozilgan. Unda kompleks sonlar, ular ustida amallar, kompleks sonning geometrik tasviri va trigonometrik shakli, trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlarni ko‘paytirish va bo‘lish, kompleks sondan ildiz chiqarish kabi nazariy ma`lumotlar, amaliy mashg‘ulotlar uchun mashqlar keltirilgan bo‘lib, qo‘llanmadan yuqorida qayd etilgan ta`lim muassasalari o‘quvchilari va o‘qituvchilari foydalanishlari mumkin.

Taqrizchilar:

A.A.Jalilov Navoiy DPI “Umumiy matematika” kafedrasi dotsenti, p.f.n.

Sh.Toshev Nurota tumanidagi 7-maktab-internat oliy toifali matematika fani o‘qituvchisi

Navoiy davlat pedagogika instituti Ilmiy Kengashi tomonidan nashrga tavsiya etilgan (2014 yil 31 yanvar 6 - sonli qarori)

Navoiy davlat pedagogika instituti “Umumiy matematika” kafedrasi
dotsenti, f.-m.f.n. E.A.Chuliyev hamda Nurota qishloq xo’jalik
kasb-hunar kolleji matematika fani o’qituvchisi D.F.Alimovalar-
ning “Matematika: kompleks sonlar” nomli uslubiy qo’llanmasiga

TAQRIZ

Ta`lim mazmuni va samaradorligini oshirishda fanlar bo’yicha darsliklar, o’quv qo’llanmalar, uslubiy qo’llanmalar hamda uslubiy ko’rsatmalar bilan ta’minlanishni yanada yaxshilash muhim ahamiyat kasb etadi. Shu sababli ushbu uslubiy qo’llanma akademik litseylar va kasb-hunar kollejlarida matematika fanini o’qitishning sifatini darajasini ko’tarish uchun xizmat qiladi.

Qo’llanmada bayon etilgan mavzular sodda ko’rinishda, mantiqiy ketma-ketlikda bayon etilgan. Kompleks son haqida ayrim tarixiy ma`lumotlar, ular ustida amallar, kompleks sonning geometrik tasviri va trigonometrik shakli, trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlarni ko’paytirish va bo’lish, kompleks sondan ildiz chiqarish kabi nazariy ma`lumotlar keltirilgan.

Har bir mavzu metodik jihatdan batafsil yechib ko’rsatilgan misollar bilan boyitilishdan tashqari o’quvchilar bilimini mustahkamlash maqsadida mustaqil yechish uchun misollar, o’z-o’zini nazorat qilish uchun esa nazariy savollar berilgan. Natijada ushbu uslubiy qo’llanmadan foydalanib, o’quvchi kompleks sonlar bo’limini mustaqil ravishda o’zlashtirishlari mumkin.

Uslunbiy qo’llanmani tayyorlashdan maqsad akademik litseylar va kasb-hunar kollejlari o’quvchilariga kompleks sonlar haqida batafsil ma`lumot berish hamda shu mavzularga doir turli xil masalalarni yechishda amaliy yordam ko’rsatishdir.

Shu sababli, ushbu uslubiy qo’llanma akademik litseylar va kasb-hunar kollejlarida o’qitiladigan matematika fanini o’qitishni samaradorligini oshirishga yordam beradi va uni chop etish uchun tavsiya etaman.

Nurota tumanidagi 1-ixtisoslashgan maktab
oliy toifali matematika fani o‘qituvchisi S.Ahrorova

Navoiy davlat pedagogika instituti “Umumiy matematika” kafedrasi dotsenti, f.-m.f.n. E.A.Chuliyev hamda Nurota qishloq xo’jalik kasb-hunar kolleji matematika fani o’qituvchisi D.F.Alimovalar-ning “Matematika: kompleks sonlar” nomli uslubiy qo’llanmasiga

T A Q R I Z

Barkamol avlodni bilimli qilib tarbiyalsh muhim vazifadir. O’qitish sifatini oshirish uchun fanlar bo’yicha darslik, o’quv va uslubiy qo’llanmalarni yaratish lozim. Kompleks sonlar mavzusiga bag’ishlangan ushbu qo’llanma shu maqsadga xizmat qiladi.

Qo’llanmada qaralgan mavzular va keltirilgan ma’lumotlar sodda ko’rinishda bayon etilgan bo’lib, kompleks sonlarga doir nazariy ma’lumotlar, amaliy mashg’ulotlar uchun mashqlar keltirilgan.

Mavzular mantiqiy ketma-ketlik saqlagan holda keltirilgan. Jumladan, kompleks son haqida boshlang’ch ma`lumotlar, ular ustida amallar, kompleks sonning geometrik tasviri va trigonometrik shakli, trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlarni ko’paytirish va bo’lish, kompleks sondan ildiz chiqarish va shu kabilar.

Har bir mavzu metodik jihatdan batafsil yechib ko’rsatilgan misollar bilan boyitilishdan tashqari o’quvchilar bilimini mustahkamlash maqsadida mustaqil yechish uchun misollar bilan ham ta`minlangan.

Uslunbiy qo’llanmada mavzularga doir nazariy ma`lumotlat, mustaqil yechish uchun amaliy mashqlar bir-biriga bog’liq holda berilgan.

Umuman olganda, dots. f.-m.f.n. E.A.Chuliyev va D.F.Alimovalarning “Matematika: kompleks sonlar” nomli uslubiy qo’llanmasi akademik litsey va kasb-hunar kollejlari o’quvchilari va o’qituvchilariga mo’ljallangan bo’lib, uslubiy qo’llanmalar uchun qo’yilgan talablarga javob beradi va uni chop etish uchun tavsiya etaman.

Navoiy DPI ”Umumiy matematika”
kafedrasi dotsenti: p.f.n. A.A.Jalilov

Kirish

O‘zbekiston Respublikasi “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” talablariga muvofiq ta`lim tizimini takomillastirish, uni mazmunan boyitish, ta`lim oluvchilarning chuqur bilim olishlariga erishish, ularning har tomonlama yetuk, barkamol shaxs bo‘lib voyaga yetishlarini ta`minlash lozim. Barkamol shaxsni tarbiyalash jamiyat oldida turgan eng muhim vazifadir [1, 2].

Ta`lim muassasalarida tahsil olayotgan yoshlar har bir fanni chuqur va puxta o‘zlashtirishlari uchun o‘quv adabiyotlariga katta ehtiyoj sezadi. Hozirgi paytda mutaxassislar tomonidan turli fanlar bo‘yicha ko‘plab darsliklar, o‘quv qo‘llanmalari yaratilgan. Berilgan mavzular bo‘yicha tayyorlangan uslubiy qo‘llanmalar ham o‘quvchilarga amaliy yordam beradi. Shu maqsadda akademik litseylar va kasb-hunar kollejlari matematika fani dasturi asosida tayyorlangan ushbu qo‘llanma ham shu ezgu maqsadni amalga oshirish uchun qo‘yilgan navbatdagi qadamdir. Qo‘llanma matematika fanidagi kompleks sonlar mavzusiga bag‘ishlangan bo‘lib, unda kompleks sonlarga oid ko‘plab nazariy ma`lumotlar, amaliy masalalar o‘z aksini topgan.

Agar son tushunchasining rivojlanib borishiga nazar tashlasak, uning boshi natural son bo‘lib, nol va manfiy butun sonlarning, undan so‘ng butunning ulushlari yordamida kasr sonlarning kiritilishi natijasida ratsional son tushunchasiga kelingan bo‘lsa, irratsional sonning kiritilishi uni haqiqiy son tushunchasigacha kengaytirdi. Bunga sonlar ustida bajariladigan amallarga to‘siq bo‘ladigan holatlarni bartaraf qilish maqsadida qabul qilingan yangi tushunchalar sabab bo‘ldi.

Agar, $x^2+1=0$ tenglamani qarasak, u haqiqiy sonlar to‘plamida yechimga ega emasligi ravshandir. Shu misolning o‘zi haqiqiy sonlar to‘plami hali mukammal emasligini, ya’ni uni yana kengaytirish kerak ekanligini anglatadi [3].

Bu yerda son tushunchasini haqiqiy sondan keyingi navbatdagi mukammallashtirish natijasi bo‘lgan kompleks sonlarni va ular ustidagi asosiy algebraik amallarga oid ma`lumotlarni keltiramiz.

Uslubiy qo‘llanmada kompleks sonlarga doir nazariy ma`lumotlar, misol, masalalar va ularning yechimlari, mustaqil yechish uchun amaliy mashqlar, o‘z-o‘zini nazorat qilishga oid savollar mantiqiy ketma-ketlikda bayon etilgan.

Qo‘llanmani tayyorlashdan asosiy maqsad akademik litseylar va kasb-hunar kollejlari o‘quvchilariga kompleks sonlar haqida batafsil ma`lumot berish hamda shu mavzularga doir turli xil masalalarni yechishda amaliy yordam ko‘rsatishdir.

1-§. Kompleks sonlar haqida boshlang‘ich ma`lumotlar

Haqiqiy sonlar ustida qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish va bo‘lish amallari bilan birgalikda darajaga ko‘tarish amali hamma vaqt bajariladi. Lekin ildiz chiqarish amali haqiqiy sonlar to‘plamida har doim bajarilavermaydi. Masalan, $\sqrt{-1}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-81}$ kabi ifodalar hech qanday haqiqiy sonlarga teng emas. Shu sababli, haqiqiy sonlar maydonida, birinchi qarashda juda sodda ko‘ringan $x^2 + 1 = 0$, $x^4 + 16 = 0$ va hakozo tenglamalar yechilmaydi. Shuning uchun haqiqiy sonlar to‘plamini shunday yangi sonlar to‘plami bilan kengaytirish zarurki, bu kengaytirilgan sonlar to‘plamida ildiz chiqarish amali doimo bajariladigan bo‘lsin. Bu masala XIX asrda uzil-kesil hal qilindi. Kengaytirilgan maydon qanday elementlarni o‘z ichiga olishini qarab chiqamiz [3].

Eng avval bu maydon hamma haqiqiy sonlarni o‘z ichiga olishi kerak. So‘ngra bu maydonda $x^2 = -1$ tenglama yechiladigan bo‘lishi kerak, chunki darajaga ko‘tarish amaliga teskari amal bu maydonda bajariladi. *Kvadrati -1 ga teng bo‘lgan sonni i harfi bilan belgilash va mavhum birlik deb atash qabul qilingan.* Shunday qilib, i sonning ta`rifiga ko‘ra:

$$i^2 = -1 .$$

Sonlarning yangi to‘plami maydon bo‘lishini talab qilamiz. Shuning uchun b haqiqiy son va i mavhum birlik bilan birgalikda ularning ko‘paytmasi bi ham shu maydonga tegishli bo‘lishi kerak. Xuddi shuning singari a haqiqiy son va bi ko‘paytma bilan birgalikda ularning yig‘indisi $a + bi$ ham yangi sonlar maydoniga tegishli bo‘lishi kerak.

<u>Ta`rif.</u> *Kompleks son deb*

$$z = a + bi \tag{1}$$

ko‘rinishdagi ifodaga aytiladi, bunda a va b – ixtiyoriy haqiqiy sonlar, i – mavhum birlik.

(1) da a kompleks sonning *haqiqiy qismi*, b mavhum qismining koeffisiyenti, bi esa *mavhum qismi* deyiladi. Kompleks sonning (1) ko‘rinishda berilishi uning algebraik formada berilishi deyiladi. Masalan, $2 + 3i$ kompleks son

uchun *2* soni haqiqiy qism, *3i* esa mavhum qism bo‘ladi; mavhum qismning koeffisiyenti *3* ga teng.

“*Kompleks*” so‘zi (lotincha *complexys*) “*murakkab*” degan ma`noni beradi, $a + bi$ ko‘rinishidagi sonlarga bu nom dastlab nemis matematigi Gauss (1777-1855) tomonidan berilgan. “*Mavhum*” (*imaginare*) nomi fransuz matematigi Dekart tomonidan 1637 yilda kiritilgan [3, 4, 5, 14].

<u>Ta`rif.</u> Ikkita* $z_1 = a_1 + b_1 i$ *va* $z_2 = a_2 + b_2 i$ *kompleks son agar* $a_1 = a_2$ *;* $b_1 = b_2$ *bo‘lsa, ya`ni haqiqiy qismi bilan mavhum qismlar o‘zaro teng bo‘lgandagina va faqat shu holdagina teng deyiladi.

Bilamizki, teng bo‘lmagan *haqiqiy* sonlar uchun “*katta*” va “*kichik*” munosabatlari aniqlangan. Masalan, $5 > 4$, $0 < 7$ va hokazo. Teng bo‘lmagan *kompleks* sonlar uchun bunday munosabatlarni aniqlab bo‘lmaydi. Masalan, ushbu ikki sondan qaysi biri katta ekanini aytib bo‘lmaydi: $2 + 3i$ yoki $5 - 7i$, $0 + 2i$ yoki $0 + 4i$ va hokazo.

Agar $z = a + bi$ da $a=0$ bo‘lsa, $z = bi$ – sof mavhum son; $b = 0$ bo‘lsa, $z = a$ haqiqiy son bo‘ladi. Demak, haqiqiy va sof mavhum sonlar kompleks sonlarning xususiy holi ekan. O‘z navbatida har qanday haqiqiy yoki sof mavhum sonni (1) ko‘rinishda yozish mumkin.

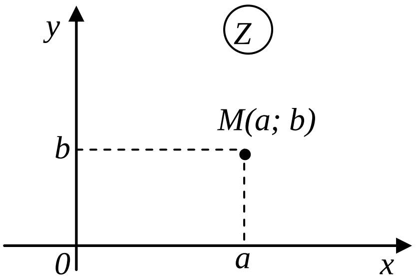
Masalan, $5 = 5 + 0i$; $0 = 0 + 0i$; $-3 = -3 + 0i$; $3i = 0 + 3i$.

2-§. Kompleks sonning geometrik tasviri va trigonometrik hamda ko‘rsatkichli shakllari

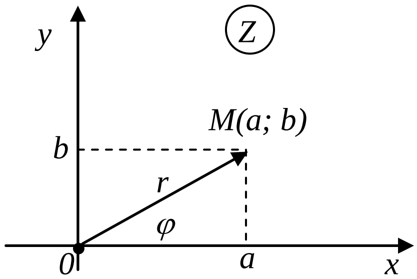
Kompleks sonning geometrik tasviri. Haqiqiy sonlarni to‘g‘ri chiziqning nuqtalari bilan tasvirlash mumkin bo‘lgani kabi, kompleks sonlarni tekislikning nuqtalari bilan geometrik usulda tasvirlash mumkin. Berilgan a va b sonlarga koordinatalar tekisligida birgina $M(a;b)$ nuqta va birgina $z=a+bi$ kompleks son mos keladi. Demak, $z=a+bi$ kompleks sonning geometrik tasviri uchun koordinatalari a va b bo‘lgan nuqtani ko‘rsatish mumkin va aksincha. Agar koordinatalar tekisligini olsak, undagi har bir $M(a; b)$ nuqtaning holatini ham uning absissasi a va ordinatasi b larning berilishi to‘liq aniqlaydi. Shu sababli, *z=a+bi* kompleks songa koordinatalar tekisligidagi *M(a; b)* nuqtani mos qo‘yish mumkin (*1-rasm*). Bu o‘rinda, o‘rnatilgan bunday moslik o‘zaro bir qiymatli ekanligini ham ta`kidlaymiz [3, 6, 12, 13, 15, 16].

Agar koordinatalar tekisligining nuqtalariga yuqoridagidek kompleks sonlar mos qo‘yilgan bo‘lsa, uni *kompleks tekislik* deb yuritiladi va odatda, uning o‘ng yuqori burchagiga doiracha ichiga *z* harfi yozib qo‘yiladi (*1-rasm*).

Bu kompleks sonning *geometrik tasviridir.* Shu bilan birga uning *geometrik tasviri sifatida, M(a; b) nuqtaning radius-vektorini* ham qabul qilish mumkin *(2-rasm).*



1-rasm

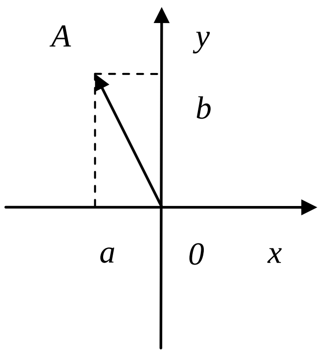


2-rasm

Shunday qilib, *barcha kompleks sonlar to‘plami bilan tekislikning barcha nuqtalari to‘plami o‘zaro bir qiymatli moslikda bo‘ladi.*

Koordinatalar boshidan chiqib, *A* nuqtada tugaydigan $\vec{OA}$ vektorni tekislikning har bir *A* nuqtasi bilan bog‘lash mumkin (*3-rasm*).

Shuning uchun kompleks sonlarni geometrik jihatdan boshqacha izohlash mumkin. Har bir *z=a+bi* kompleks sonni geometrik jihatdan koordinatalar boshidan chiqib *(a;b)* koordi-tali *A* nuqtada tugovchi $\vec{OA}$ vektor kabi tasvir-lash mumkin. Bunda $\vec{OA}$ vektorning koordinata-lari ham *A* nuqtaning koordinatalari kabi, ya`ni *(a;b)* bo‘ladi. Barcha kompleks sonlar bilan tekislikning koordinatalar boshidan chiquvchi barcha vektorlar orasidagi moslik ham o‘zaro bir qiymatli ekanini ko‘rsatish oson.



3-rasm

Kompleks sonlarning vektor bilan tasvirlanishidan foydalanib, ikki kompleks sonning yig‘indisi uchun qabul qilgan ta`rifni tushuntirish oson:

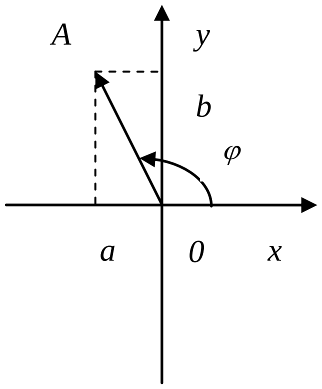
$$(a+bi) + (c+di) = (a+c) + (b+d)i.$$

Kompleks sonlarning trigonometrik shakli.

$z=a+bi$ kompleks songa koordinatalari $(a;b)$ bo‘lgan $\vec{OA}$ vektor mos kelsin (4-rasm). Bu vektor uzunligini r bilan, uning x o‘qi bilan hosil qiladigan burchagini φ bilan belgiaymiz. Sinus va kosinusning ta`rifiga ko‘ra:

$$\frac{a}{r} = \cos\varphi, \qquad \frac{b}{r} = \sin\varphi.$$

Shuning uchun $a = r\cos\varphi$, $b = r\sin\varphi$. Lekin bunday holda $z=a+bi$ kompleks sonni ushbu ko‘rinishda yozish mumkin:



4-rasm

$$z = a + bi = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (2)$$

Ma`lumki, har qanday vektor uzunligining kvadrati uning koordinatalari kvadratlarining yig‘indisiga teng. Shu sababli $r^2 = a^2 + b^2$, bundan $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, φ burchak esa quyidagicha topiladi:

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}. \qquad (3)$$

(2) ga kompleks sonning *trigonometrik shakli* deb ataladi. Ta’rif bo‘yicha kiritilgan z=$a+bi$ esa uning *algebraik shakli* deb yuritiladi. Agar Eyler formulasi deb ataluvchi $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$ ni hisobga olsak (2) ni $z=r\,e^{i\varphi}$ ko‘rinishda yozish mumkin. Bu *kompleks sonning ko‘rsatkichli shakli* deb ataladi.

r kompleks son z ning *moduli* $(|z|)$, φ esa *argumenti (argz)* deyiladi. Demak,

$$|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}, \qquad \arg z = \arg(a + bi) = arctg\,\frac{b}{a}. \qquad (4)$$

Bu yerda, har bir kompleks son o‘zining yagona moduliga ega ekanligini, ammo uning argumenti cheksiz ko‘p bo‘lishini aytamiz. Haqiqatdan ham agar *M* nuqtani koordinatalar boshi atrofida to‘liq aylantirsak, u yana o‘zining avvalgi holatiga qaytadi, demak, $\varphi+2\pi k,\ k\in Z,$ burchaklar ham z kompleks son argumenti bo‘lar ekan. Odatda, φ ni z ning bosh, $\varphi+2\pi k$ ni esa umumiy argumenti deyilib ($0\leq\varphi<2\pi$), ularni mos ravishda

$$\varphi = \arg\cdot z; \qquad \varphi + 2\pi k = \arg z,\ k\in Z$$

kabi belgilash qabul qilingan.

Nolga teng bo‘lgan kompleks sonning moduli nolga teng: $|0| = 0$. Nolning argumenti uchun har qanday φ burchakni qabul qilishi mumkin:
$0 = 0(\cos\varphi + i\sin\varphi)$. Shuning uchun nolning argumenti *aniqlanmagan.*

Agar $a > 0$ haqiqiy son bo‘lsa, ma`lumki uni $a = a + 0i$ ko‘rinishda yozish mumkin. U holda

$$r=\sqrt{a^2+0^2}=a\ ;\quad tg\ \varphi=\frac{0}{2}=0\ ;\quad \cos\ \varphi=\frac{a}{a}=1\ .$$

Demak, $\varphi = 0^\circ$ va $a = a(\cos\ 0^\circ + i\sin\ 0^\circ)$, yoki umumiy ko‘rinishda:

$$a = a(\cos\ 2\pi k + i\sin\ 2\pi k)\ . \qquad (5)$$

Agar $a < 0$ haqiqiy son bo‘lsa, $r=\sqrt{(-a)^2+0^2}=|a|\ ;\quad tg\ \varphi=0\ ;\quad \cos\ \varphi=\frac{a}{|a|}=-1$.

Demak, $\varphi=\pi$ va $a=|a|[\cos\ (2\pi k+\pi)+i\sin\ (2\pi k+\pi)]$. (6)

Kompleks sonlarni trigonometrik shaklda tasvirlashga doir bir necha misol qaraymiz.

1-misol. $z = 1 + i$ kompleks sonni trigonometrik shaklda yozing.

Yechish. Bu sonning r modulini va φ argumentini topamiz:

$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$.

Demak, $\sin\ \varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$; $\cos\ \varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$, bundan $\varphi=\frac{\pi}{4}+2n\pi$. Shunday qilib,

$$z=1+i=\sqrt{2}\left[\cos\ (\tfrac{\pi}{4}+2n\pi)+i\sin(\tfrac{\pi}{4}+2n\pi)\right],$$

bunda n – istalgan butun son. Odatda, kompleks son argumentning cheksiz ko‘p qiymatlari orasidan 0 bilan 2π orasida tanlab olinadi. Qaralayotgan misolda $\frac{\pi}{4}$ shunday qiymatdir. Shuning uchun $z=1+i=\sqrt{2}(\cos\ \frac{\pi}{4}+i\sin\ \frac{\pi}{4})$.

2-misol. $z=\sqrt{3}-i$ kompleks sonni trigonometrik shaklda yozing.

Yechish. $r=\sqrt{3+1}=2$; $\cos\ \varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sin\ \varphi=-\frac{1}{2}$.

Shuning uchun *2π* gacha karrali burchak aniqligida $\varphi = -\frac{11}{6}\pi$; demak,

$$z = \sqrt{3} - i = 2(\cos\frac{11}{6}\pi + i\sin\frac{11}{6}\pi) .$$

3-misol. $z = 3 + \sqrt{3}\, i$ sonni kompleks sonni trigonometrik shaklda yozing.

Yechish. $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $tg\,\varphi = \frac{b}{a}$ (7)

formulalarga asosan:

$r = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3^2})} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$; $tg\,\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ va $\cos\varphi = \frac{a}{r}$;

$\sin\varphi = \frac{b}{r}$ dan $\cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2} > 0$, $\sin\varphi = \frac{1}{2} > 0$.

Demak, φ burchak I chorakdagi burchak bo‘lib, $\varphi = 30^\circ$. Ya`ni,

$z = 3 + \sqrt{3}\, i = 2\sqrt{3}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$, yoki umumiy holda

$$z = 3 + \sqrt{3}\, i = 2\sqrt{3}[\cos(\frac{\pi}{6} + 2\pi k) + i\sin(\frac{\pi}{6} + 2\pi k)] .$$

4-misol. $z = 3$ va $z = -2$ sonlarni trigonometrik shaklda yozing.

Yechish. (5) va (6) formulalarga asosan,

$$3 = 3(\cos 2\pi k + i\sin 2\pi k),$$

$$-2 = 2[\cos(2\pi k + \pi) + i\sin(2\pi k + \pi)] .$$

5-misol. $z = 6(\cos 150^\circ + i\sin 150^\circ)$ sonini algebraik shaklda yozing.

Yechish. $\cos 150^\circ = \cos(180^\circ - 30^\circ) = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\sin 150^\circ = \sin(180^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$ bo‘lgani uchun

$$z = 6(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\cdot\frac{1}{2}) = -3\sqrt{3} + 3i .$$

6-misol. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ ni trigonometrik shaklda ifodalang.

Yechish. $r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1$ $tg\,\varphi = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\varphi = 60^0$ $\varphi = \frac{\pi}{3}$

$$z = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

3-§. Kompleks sonlar ustida amallar

Endi kompleks sonlar ustida asosiy to‘rt arifmetik amallarni ta’riflaymiz.

***1.** <u>Qo‘shish.</u>* <u>Ta`rif.</u> *Berilgan $z_1=a_1+b_1i$ va $z_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlarning z_1+z_2 yig‘indisi deb,*

$$z=z_1+z_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$$

ga aytiladi.

Bu ta’rifdan ko‘rinadiki, kompleks sonlarni qo‘shish uchun ularning haqiqiy qismlarini alohida va mavhum qismlarining koeffitsientlarini alohida qo‘shib, mos yig‘indilarni haqiqiy qism va mavhum qism koeffitsienti qilib yozish kifoyadir, ya’ni

$$(z_1+z_2)=(Rez_1+Rez_2)+(Imz_1+Imz_2)i. \qquad (8)$$

Qo‘shish amali uchun haqiqiy sonlarda bo‘lgan xossalar bu yerda ham saqlanib qoladi:

$$z_1+z_2=z_2+z_1,\ \ z+(-z)=0,\ \ z+0=z,\ \ (z_1+z_2)+z_3=z_1+(z_2+z_3).$$

Bulardan tashqari

$$z+\bar{z}=2\operatorname{Re} z,\ \ \bar{z}_1+\bar{z}_2=\overline{z_1+z_2}$$

ekanligini ko‘rish osondir.

1-misol. $(3+i)+(4+5i)=(3+4)+(1+5)i=7+6i$.

2-misol. $(-3+5i)+(2-7i)=(-3+2)+(5-7)i=-1-2i$.

3-misol. $(5+6i)+(7-6i)=(5+7)+(6-6)i=12+0i$.

4-misol. $(4+9i)+(-4+i)=(4-4)+(9+1)i=0+10i$.

5-misol. $(3-7i)+(-3+7i)=(3-3)+(-7+7)i=0+0i$.

Haqiqiy sonlar sohasida 0 soni bor, bu sonni boshqa istalgan haqiqiy songa qo‘shish bu sonni o‘zgartirmaydi:

$$a+0=a\ .$$

Kompleks sonlar sohasida $0+0i$ soni ham shunga o‘xshash rol o‘ynaydi. Haqiqatan, $a+bi$ kompleks son har qanday bo‘lganda ham

$$(a+bi)+(0+0i)=(a+0)+(0+b)i=a+bi\ .$$

$a+bi$ va $-a-bi$ kompleks sonlar *qarama-qarshi kompleks sonlar* deyiladi, ularning yig‘indisi nolga teng, ya`ni $(a+bi)+(-a-bi)=0$.

2. <u>Ayirish.</u> Bu amal qo‘shishga teskari amal sifatida ta’riflanadi.

<u>Ta`rif.</u> *Berilgan* z_1 *va* z_2 *kompleks sonlarning ayirmasi* z_1-z_2 *deb shunday z kompleks songa aytiladiki, bu sonning* z_2 *bilan yig‘indisi* z_1 *ni beradi, ya’ni*

$$z+z_2=z_1.$$

Bu ta’rif bo‘yicha

$$(z_1-z_2)=(Rez_1-Rez_2)+(Imz_1-Imz_2)i \qquad (9)$$

formulani olish qiyin emas.

Kompleks sonlarni ayirish ham haqiqiy sonlardagi xossalarga egadir:

$$z–z=0, \quad z_1–z_2=z_1+(-z_2).$$

Undan tashqari, $z-\bar{z}=(2\,\mathrm{Im}\,z)\cdot i,\ \ \bar{z}_1-\bar{z}_2=\overline{z_1-z_2}$ larni keltirib chiqarish mumkin.

O‘z-o‘zidan ma`lumki, kiritgan ta’rifimiz har bir kompleks sondan istalgan boshqa kompleks sonni ayirish mumkinligiga kafil bo‘lmaydi. Bunday ayirishning mumkinligi va yagonaligi quyidagi teoremadan aniqlanadi.

<u>Teorema.</u> *Ixtiyoriy ikki kompleks son* $z_1=a_1+b_1i$ *va* $z_2=a_2+b_2i$ *uchun* $z_3=z_1-z_2$ *ayirma mavjud va yagonadir.*

1-misol. $(5-2i)-(4+6i)=(5-4)+(-2-6)i=1-8i$.

2-misol. $(-3+4i)-(5+6i)=(-3-5)+(4-6)i=-8-2i$.

3-misol. $(2+i)-(9+i)=(2-9)+(1-1)i=-7+0i$.

4-misol. $(3+4i)-(3-i)=(3-3)+(4+1)i=0+5i$.

5-misol. $(7-i)-(7-i)=(7-7)+(-1+1)i=0+0i$.

3. <u>*Ko‘paytirish.*</u> $z_1=a_1+b_1i$ va $z_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlarni ko‘paytirish xuddi haqiqiy koeffisiyentli ikki hadlarni ko‘paytirishdek bajarilishini talab qilish tabiiydir, ya`ni:

$$z_1\cdot z_2=(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=a_1a_2+(a_1b_2+a_2b_1)i+b_1b_2i^2.$$

Ammo i sonning ta`rifiga ko‘ra $i^2=-1$.

Shuning uchun $b_1b_2i^2=-b_1b_2$, demak,

$$z_1\cdot z_2=(a_1+b_1i)\cdot(a_2+b_2i)=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i.$$

Bu formula ikki kompleks sonni ko‘paytirishning ta`rifi uchun asos qilib olinadi.

Ta`rif. *Berilgan* $z_1 = a_1 + b_1 i$ *va* $z_2 = a_2 + b_2 i$ *kompleks sonlarning ko'paytmasi*

$z_1 \cdot z_2$ *deb,*

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i \qquad (10)$$

bilan aniqlanuvchi kompleks songa aytiladi.

Bu amal ham haqiqiy sonlardagi xossalarini saqlab qoladi:

$$z_1 . z_2 = z_2 \cdot z_1; \quad z \,.\, 1 = z; \quad z \,.\, 0 = 0;$$

$$z_1 \,.\, (z_2 \,.\, z_3) = z_i \cdot (z_2 \cdot z_3);$$

$$z_1 \,.\, (z_2 \pm z_3) = z_1 z_2 \pm z_1 z_3.$$

Undan tashqari,

$$z \cdot \bar{z} = (\mathrm{Re}\ z)^2 + (\mathrm{Im}\ z)^2, \qquad \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = \overline{z_1 \cdot z_2}$$

lar to'g'riligiga ishonch hosil qilish osondir.

Eslatma. Agar kompleks sonlarni ikki had deb qabul qilib, ikki hadni ikki hadga ko'paytirish qoidasi bu yerda o'rinli deb qaralsa, $i^2=-1$ ekanligini eslagan holda (10) ko'paytirish formulasini olish mumkin. Shu sababli bu formula yoddan ko'tarilgan taqdirda mazkur eslatmadan foydalanish o'rinlidir.

Masalan, $z_1=1+i$ va $z_2=2-3i$ larni ko'paytiraylik:

$$z_1 \cdot z_2 = (1+i)(2-3i) = 2 - 3i + 2i - 3i^2 = 2 - i - 3\cdot(-1) = 5 - i\,.$$

1-misol. $(2 - i) \cdot (3+i) = 6+2i - 3i - i^2 = 7 - i$.

2-misol. $(-5 - 2i) \cdot (-4+5i) = 20 - 25i + 8i - 10i^2 = 30 - 17i$.

3-misol. $(2+3i) \cdot (6-5i) = 12 - 10i + 18i - 15i^2 = (12+15) + (18-10)i = =27+8i$.

4-misol. $(4+i) \cdot (4-i) = 16 - 4i + 4i - i^2 = (16+1) + (-4+4)i = 17 + 0i$.

5-misol. $(1+i^2) = (1+i) \cdot (1+i) = 1 + i + i + i^2 = (1-1)+2i = 0 + 2i$.

Ixtiyoriy $a + bi$ kompleks son uchun ushbu tenglik bajariladi:

$$(a + bi) \cdot (0 + 0i) = 0 + 0i\ .$$

4. *Bo'lish.* Bu amal ko'paytirishga teskari amal sifatida ta'riflanadi.

Ta`rif. *Berilgan* $z_1=a_1+b_1i$ *va* $z_2=a_2+b_2i$ *kompleks sonlarning bo'linmasi* $z_1 : z_2$ *yoki* $\frac{z_1}{z_2}$ *deb, shunday* z *kompleks songa aytiladiki, uning* z_2 *bilan ko'paytmasi* z_1 *ni beradi, ya'ni* $z \cdot z_2 = z_1$ *bo'ladi.*

Bu ta'rifdan foydalanib,

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + \frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}i \tag{11}$$

formulani chiqarish qiyin emas.

Agar kasrning surat va maxrajini bir xil kompleks songa (noldan farqli) ko'paytirish bu yerda ham o'rinli ekanligini e'tiborga olinsa, surat va maxrajni maxrajining qo'shmasiga ko'paytirish yo'li bilan bo'lish amalini, (11) formula yoddan ko'tarilgan taqdirda, bajarish mumkin. Masalan,

$$\frac{2-i}{3+4i} = \frac{(2-i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)} = \frac{6-8i-3i+4i^2}{3^2+4^2} = \frac{6-11i-4}{25} = \frac{2-11i}{25} = \frac{2}{25} - \frac{11}{25}i = 0{,}08 - 0{,}44i;$$

$$\frac{3+i}{2+3i} = \frac{(3+i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{6-9i+2i-3i^2}{4-9} = \frac{9-7i}{13} = \frac{9}{13} - \frac{7}{13}i.$$

Shuningdek, $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$ tenglik o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilish osondir.

Teorema. $\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2}$ *bo'linma* $z_1=a_1+b_1i$ *va* $z_2=a_2+b_2i$ *kompleks sonlar uchun, faqat* $a_2+b_2i \neq 0$ *bo'lgandagina mavjud va yagonadir*.

1 - misol. $\frac{3-2i}{3+4i} = \frac{(3-2i)\cdot(3-4i)}{(3-4i)(3+4i)} = \frac{9-18i+8i^2}{9-16i^2} = \frac{1-18i}{25} = \frac{1}{25} - \frac{18}{25}i$.

2 – misol. $\frac{9-7i}{2-3i} = \frac{(9-7i)\cdot(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{18+13i-21i^2}{4-9i^2} = \frac{39+13i}{13} = 3+i$.

2–misolni yuqorida berilgan teoremadan foydalanib yechaylik, ya`ni $\frac{9-7i}{2-3i} = x+yi$ bo'lsin. U holda $(x+yi)\cdot(2-3i) = 9-7i$ yoki

$$(2x+3y) + (2y-3x)i = 9-7i \quad .$$

Ikki kompleks sonning tengligiga ko‘ra,

$$\begin{cases} 2x + 3y = 9 \\ 2y - 3x = -7 \end{cases}.$$

Bu sistema tenglamalaridan birinchisi *3* ga, ikkinchisini *2* ga ko‘paytirib, hosil bo‘lgan tenglamalarni hadma-had qo‘shsak,

$13y = 13$ yoki $y = 1$.

y ning qiymatini tenglamalardan biriga qo‘yib $x = 3$ ni topamiz.

Kompleks sonning trigonometrik va ko‘rsatkichli shakllari ustida ko‘paytirish, bo‘lish va quyida ko‘riladigan darajaga ko‘tarish, ildiz chiqarish amallarini bajarish birmuncha yengil ko‘chadi.

4-§. Haqiqiy va sof mavhum sonlar. Qo‘shma kompleks sonlar

Tekislikning absissalar o‘qida yotgan barcha nuqtalarini ayrim-ayrim qaraymiz. Bu nuqtalar $(a, 0)$ koordinatalarga ega bo‘ladi va, demak, $a = 0i$ ko‘rinishdagi kompleks sonlarga mos keladi. $a_1 + 0i$ va $a_2 + 0i$ - ikkita shunday sonlar bo‘lsin. Quyidagi munosabatlarning o‘rinli ekanligiga ishonch hosil qilish oson:

$$(a_1 + 0i) + (a_2 + 0i) = (a_1 + a_2) + 0i\ ;$$

$$(a_1 + 0i) - (a_2 + 0i) = (a_1 - a_2) + 0i\ ;$$

$$(a_1 + 0i) \cdot (a_2 + 0i) = a_1 a_2 + 0i\ ;$$

$$\frac{a_1 + 0i}{a_2 + 0i} = \frac{a_1}{a_2} + 0i \qquad (a_2 \neq 0)\ .$$

Bu munosabatlar $a + 0i$ ko‘rinishdagi barcha kompleks sonlar, ya`ni mavhum qismlarining koeffisiyentlari nolga teng bo‘lgan sonlar o‘zlariga mos kelgan haqiqiy sonlar kabi bir-biri bilan qo‘shiladi, ayriladi, ko‘paytiriladi va bo‘linadi. Bu sonlarniong geometrik tasvirlari ham shularga mos keladigan haqiqiy sonlarning tasvirlari kabidir: bu sonlarning har biri ham, boshqa sonlar absissalar o‘qining nuqtalari bilan tasvirlanadi. Bu hol bizga $a + 0i$ kompleks son bilan *a* haqiqiy sonni farq qilmaslik imkonini beradi. Shu sababli bundan keyin biz $a + 0i$

o‘rniga to‘g‘ridan-to‘g‘ri a yozaveramiz, jumladan $0 + 0i = 0$. Shu sababga ko‘ra haqiqiy sonlarga yoki $a + 0i$ ko‘rinishdagi kompleks sonlarga mos keluvchi nuqtalar joylashgan absissalar o‘qi *haqiqiy o‘q* deb ataladi [7, 8, 9, 11, 12].

Haqiqiy sonlar barcha kompleks sonlar to‘plamiga qanday kirishi endi bizga ravshan.

Ordinatalar o‘qining nuqtalari $(0, b)$ koordinatalarga ega, shuning uchun ular $0 + bi$ ko‘rinishdagi sonlarga, ya`ni haqiqiy qismlari nolga teng bo‘lgan kompleks sonlarga mos keladi. Bu sonlar shu bilan xarakterlanadiki, ularning kvadratlari $(b \neq 0 \ \ dagina)$ doim manfiy bo‘ladi. Haqiqatan,

$$(0 + bi)^2 = (0 + bi)(0 + bi) = 0 + 0 \cdot bi + b \cdot 0i - b^2 = - b^2 + 0i = - b^2 \ .$$

Jumladan, $(0 + i)^2 = - 1$.

Hali matematikaga kompleks sonlar kiritilmagan vaqtlarda sonlarning kvadrati manfiy bo‘lishini tasavvur qilish qiyin edi. Shuning uchun $0 + bi$ ko‘rinishdagi kompleks sonlar *sof mavhum sonlar* nomini oldi. Bundan buyon bu sonlarni $0 + bi$ ko‘rinishida emas, to‘g‘ridan-to‘g‘ri bi ko‘rinishida yozaveramiz. Barcha sof mavhum sonlar joylashadigan ordinatalar o‘qi *mavhum o‘q* deb ataladi.

Qo‘shma kompleks sonlar. $a - bi$ kompleks son $a + bi$ kompleks songa qo‘shma deyiladi. Masalan, $2 - 3i$ soni $2 = 3i$ soniga qo‘shmadir. $5 + 4i$ soni $5\text{-}4i$ soniga qo‘shma, $- 6i$ soni $6i$ soniga qo‘shmadir va hokazo.

a - ixtiyoriy haqiqiy son bo‘lsin. U holda:

$$a = a + 0i = a - 0i \ .$$

Shuning uchun har qanday haqiqiy son o‘zining qo‘shmasiga tengdir.

Shunday qilib, *barcha kompleks sonlardan faqat haqiqiy sonlargina o‘zining qo‘shmasiga teng*.

O‘zaro qo‘shma ikki kompleks sonning ko‘paytmasi haqiqiy sondir. Ya`ni

$$(a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 \ .$$

Mavhum birlikning darajalari . Ta`rifga ko‘ra i sonning birinchi darajasi i sonning o‘zi, ikkinchi darajasi esa $- 1$:

$$i^1 = i \ , \quad i^2 = - 1.$$

i sonning yuqori darajalari quyidagicha topiladi:

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$; $\quad i^4 = i^3 \cdot i = -i^2 = 1$; $\quad i^5 = i^4 \cdot i = i$;

$i^6 = i^5 \cdot i = i^2 = -1$ va hokazo. Ravshanki, har qanday natural n da

$$i^{4n} = 1 ;\quad i^{4n+1} = i ;\quad i^{4n+2} = -1 ;\quad i^{4n+3} = -i \ .$$

Masalan,

$$i^{125} - i^{26} = i^{124+1} - i^{24+2} = i - i^2 = i + 1 \ .$$

$$i^{100} + i^{98} + i^{63} = i^{100} + i^{96+2} + i^{60+3} = 1 - 1 - i = -i \ .$$

5-§. Trigonometrik shaklda berilgan kompleks sonlarni ko‘paytirish va bo‘lish

Aytaylik, $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ va $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ kompleks sonlar berilgan bo‘lsin. U holda, ularning ko‘paytmasi

$$z_1 \cdot z_2=(r_1 \cdot r_2)((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2)+i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\cos\varphi_1))$$

bo‘lib, trigonometriyadagi qo‘shish teoremalariga asosan

$$z_1 \cdot z_2=(r_1 \cdot r_2)(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)) \tag{12}$$

formulaga ega bo‘lamiz. Bundan ko‘rinadiki, trigonometrik shakldagi kompleks sonlarni ko‘paytirish uchun modullarini ko‘paytirish argumentlarini esa qo‘shish kifoya ekan.

1-misol. $2(\cos 130^\circ + i\sin 130^\circ)\cdot 3(\cos 230^\circ + i\sin 230^\circ) = 6(\cos 360^\circ + {}$ $+ i\sin 360^\circ 0 = 6.$

2-misol. $5(\cos 47^\circ + i\sin 47^\circ)\cdot 4(\cos 13^\circ + i\sin 13^\circ) = 20(\cos 60^\circ + {}$ $+ i\sin 60^\circ) = 20\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 10 + 10\sqrt{3}\,i$.

3-misol. $2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 3\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 6\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}\right)\right) =$

$= 6\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 6\cdot(0+i) = 6i$.

Xuddi shunga o‘xshash, ularning bo‘linmasi uchun

$$\frac{z_1}{z_2} = \left(\frac{r_1}{r_2}\right)(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$$

formulani olish mumkin. Ya`ni, *ikki kompleks son bo‘linmasining moduli bo‘luvchi va bo‘linuvchi modullarining bo‘linmasiga teng; nolga teng bo‘lmagan* *ikki kompleks son bo'linmasining argumenti bo'linuvchi va bo'luvchi argumentlarining ayirmasiga teng.*

1-misol. $\dfrac{2(\cos 150 + i\sin 150)}{3(\cos 105 + i\sin 105)} = \dfrac{2}{3}(\cos 45 + i\sin 45) = \dfrac{2}{3}(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = \dfrac{\sqrt{2}}{3}(1+i)$.

2-misol. $\dfrac{\cos 70 + i\sin 70}{\cos 100 + i\sin 100} = \cos(-30) + i\sin(-30) = \cos 30 - i\sin 30 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

3-misol. $6\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) : 2\left(\cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3}\right) = 3\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right)\right) =$

$= 3\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right) = 3\cdot(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2})$.

6-§. Kompleks sonni darajaga ko'tarish

Berilgan z kompleks sonning natural ko'rsatkichli n–darajasi z^n deb,

$$z^1 = z$$

ga, $2 \le n \in N$ bo'lganda,

$$z^n = z^{n-1} \cdot z$$

ga aytiladi.

Aytaylik, $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ bo'lsin. U holda, (12) ga asosan

$$z^2=z\cdot z=(r\cdot r)(\cos(\varphi+\varphi)+i\sin(\varphi+\varphi))=r^2(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi),$$

$$z^3=z^2\cdot z=(r^2\cdot r)(\cos(2\varphi+\varphi)+i\sin(2\varphi+\varphi))=r^3(\cos 3\varphi+i\sin 3\varphi),$$

\- -

$$z^n = r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) \qquad (13)$$

ni olamiz. Bu kompleks sonni darajaga ko'tarish formulasidir $(n \in N)$.

Agar $|z|=r=1$ bo'lsa, (13) formuladan

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi+i\sin n\varphi \qquad (14)$$

ni olamiz. Bu formula fransuz matematigi Muavr nomi bilan *Muavr formulasi* deb yuritiladi.

Bu formulaning tatbiqlaridan biri sifatida $\cos n\varphi$ va $\sin n\varphi$ ni $\cos\varphi$ va $\sin\varphi$ lar orqali ifodalash formulalarini keltirish mumkin.

Haqiqatdan ham, (14) ning o‘ng tomonidagi ikki hadning n - darajasini Nyuton binomi formulasi bo‘yicha yoyib, i ning darajalari bo‘lgan

$$i^{4k-3}=i,\ i^{4k-2}=-1,\ i^{4k-1}=-i,\ i^{4k}=1,\ k\in N$$

larni hisobga olib, kompleks sonlarning tenglik shartidan foydalansak, talab qilingan formulalarga ega bo‘lamiz. Masalan, $n=4$ uchun

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^4 = \cos4\varphi + i\sin4\varphi\ ,$$

$$\cos^4\varphi+4\cos^3\varphi\cdot i\cdot\sin\varphi+6\cos^2\varphi\cdot i^2\cdot\sin^2\varphi+4\cos\varphi\cdot i^3\cdot\sin^3\varphi+i^4\cdot\sin^4\varphi=$$

$$=\cos4\varphi+i\sin4\varphi\,;$$

$$\cos^4\varphi+i(4\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi)-6\cos^2\varphi\cdot\sin^2\varphi-i(4\cos\varphi\cdot\sin^3\varphi)+\sin^4\varphi=$$

$$=\cos4\varphi+i\sin4\varphi\,;$$

$$(\cos^4\varphi-6\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\sin^4\varphi)+i(4\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi-4\cos\varphi\cdot\sin^3\varphi)=$$

$$=\cos4\varphi+i\sin4\varphi\,.$$

Oxirgidan,

$$\cos4\varphi=\cos^4\varphi-6\sin^2\varphi\cos^2\varphi+\sin^4\varphi\,,$$

$$\sin4\varphi=4(\cos^3\varphi\cdot\sin\varphi-\cos\varphi\cdot\sin^3\varphi)\,.$$

Bu yerda ham haqiqiy sonlar uchun darajaga ko‘tarish amalining xossalari saqlanib qoladi. Undan tashqari,

$$(\bar{z})^n = \overline{(z^n)}$$

ham o‘rinlidir.

1-misol. $z = 2(\cos25^\circ + i\sin25^\circ)$ kompleks sonni $n=4$ darajaga ko‘taring.

Yechish. (13) formulaga asosan:

$$z^4 = 2^4(\cos4\cdot25^\circ + i\sin4\cdot25^\circ) = 16(\cos100^\circ + i\sin100^\circ)\ ;$$

2-misol. $z=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$ kompleks sonni *15*-darajaga ko‘taring.

Yechish. Avval z kompleks sonni trigonometrik shaklga keltiramiz.

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}>0\ ,\qquad \sin\varphi=\frac{1}{2}>0$$

Bo‘lgani uchun burchak, φ – birinchi chorakda bo‘ladi,

$$r=\sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}=1\ ; \qquad tg\ \varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}\ ,$$

$$\varphi=30^\circ\ ,\ z=\cos 30^\circ+i\sin 30^\circ\ .$$

(13) formulaga va trigonometrik funksiyalarning keltirish formulalariga asosan:

$$z^{15}=\cos 15\cdot 30^\circ+i\sin 15\cdot 30^\circ=\cos 450^\circ+i\sin 450^\circ=\cos(360^\circ+90^\circ)+$$
$$+i\sin(360^\circ+90^\circ)=\cos 90^\circ+i\sin 90^\circ=0+i\cdot 1=i\ .$$

3-misol. $z=\sqrt{2}\,(-1+i)$ kompleks sonni 9-darajaga ko‘taring.

Yechish. z kompleks sonni trigonometrik shaklga keltiramiz.

$$r=\sqrt{(-\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2}=2$$

$\cos\varphi=-\frac{\sqrt{2}}{2}<0\ ,\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$ bo‘lgani uchun φ burchak ikkinchi chorakda bo‘ladi. $tg\,\varphi=-1\ ,\ \varphi=135^\circ\ ;$

$$z=2(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)\ ;$$

(13) va trigonometrik funksiyalarning keltirish formulalariga asosan:

$z^9=2^9(\cos 9\cdot 135^\circ+i\sin 9\cdot 135^\circ)=512(\cos 1215^\circ+i\sin 1215^\circ)=512\,[\cos(360^\circ\cdot 3+135^\circ)+i\sin(360^\circ\cdot 3+135^\circ)]=512(\cos 135^\circ+i\sin 135^\circ)$ $=512\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=256\sqrt{2}\,(-1+i)\ .$

7-§. Kompleks sondan ildiz chiqarish

z kompleks sonning *n*–darajali *(n*$\in$*N) ildizi* $\sqrt[n]{z}$ deb shunday θ kompleks songa aytiladiki, uning *n–darajasi z* ni beradi, ya’ni

$$\theta^n=z \qquad (15)$$

bo‘ladi.

Faraz qilaylik, $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ trigonometrik shaklda berilgan bo‘lsin.

$$\theta=\rho(\cos\psi+i\sin\psi)$$

bo‘lsin deylik. (15) va (14) larga asosan

$$\rho^n(\cos n\psi+i\sin n\psi)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$$

ni olamiz.

Endi, $z\neq 0$ bo‘lganda, oxirgidan

$$\rho^n=r,\ \ n\psi=\varphi+2k\pi,\ \ k\in Z$$

kelib chiqadi. Oxirgi olingan tenglamalar haqiqiy sohadagi tenglamalardir. Ulardan

$$\rho=\sqrt[n]{r},\quad \psi=\frac{\varphi+2k\pi}{n},\ k\in Z$$

larni, demak,

$$\sqrt[n]{z}=\theta_k=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),\quad k=0;1;...;\ n-1 \qquad (16)$$

formulani olamiz. Bu yerda *k* ning qolgan qiymatlarida sinus va kosinusning davriylik xossasi tufayli *k* ning yuqoridagi qiymatlarida olingan ildizlar takrorlanadi, ya’ni yangi ildiz qiymati kelib chiqmaydi. Demak, noldan farqli kompleks sonning *n*–darajali ildizi mavjud va u rosa *n* ta qiymatga ega bo‘lar ekan. Kezi kelganda θ ning natural ko‘rsatkichli ildizi θ ning o‘zi bo‘lib, faqat bitta qiymatga egaligini aytamiz.

1–misol. $\sqrt[3]{1}$ kompleks sohada hisoblansin.

Yechish. 1 ni trigonometrik shaklda yozamiz:

$$1=\cos 0+i\sin 0$$

Bundan $r=1$, $\varphi=0$ ni olamiz va ularni (16) ga qo‘yib,

$$\sqrt[3]{1}=\theta_k=\cos\frac{2k\pi}{3}+i\sin\frac{2k\pi}{3}\qquad k=0;1;2$$

ni olamiz.

$$k=0\Rightarrow\theta_0=\cos 0+i\sin 0=1,$$

$$k=1\Rightarrow\theta_1=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i,$$

$$k=2\Rightarrow\theta_2=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Demak, *1* ning kub ildizi kompleks sohada uchta qiymatga ega ekan, haqiqiy sohada esa faqat bitta *1* qiymatga egaligi bizga ma’lum.

2–misol. $\sqrt[4]{-1}$ ildiz kompleks sohada hisoblansin.

Yechish. Bu ildiz haqiqiy sohada mavjud emasligi ma’lum.

$$-1=\cos\pi+i\sin\pi,$$

$$r=1,\ \ \varphi=\pi.$$

Bularni (16) ga qo‘yamiz:

$$\sqrt[4]{-1}=\theta_k=\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4},\qquad k=0;1;2;3.$$

$$\theta_0=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i),$$

$$\theta_1=\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i),$$

$$\theta_2=\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}(-1-i),$$

$$\theta_3=\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i=\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i).$$

3–misol. $\sqrt{1+i}$ ni toping.

Yechish. $r=\sqrt{1+i}=\sqrt{2};\begin{cases}\sqrt{2}\cos\varphi=1,\\ \sqrt{2}\sin\varphi=1\end{cases}\Rightarrow\ \varphi=\frac{\pi}{4};$

$$1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

$$\sqrt{1+i}=\theta_k=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2}\right),\ k=0;1.$$

$$\theta_0=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}+i\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\approx 1{,}0987+0{,}4551\,i;$$

$$\theta_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{8}+i\sin\frac{9\pi}{8}\right)=\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\left(-\sqrt{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}-i\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}\right)\approx -1{,}0987-0{,}4551\,i.$$

4–misol. $\alpha=\sqrt[3]{1+i}$ ni toping.

Yechish. $\alpha=\sqrt[3]{1+i}=\sqrt[6]{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)}=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi/4+24\pi}{3}+i\sin\frac{\pi/4+24\pi}{3}\right)$

$$n=0\cdot\alpha_1=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi/4}{3}+i\sin\frac{\pi/4}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right);$$

$$n=1\cdot\alpha_2=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi/4+2\pi}{3}+i\sin\frac{\pi/4+2\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{12}+i\sin\frac{9\pi}{12}\right)=$$

$$=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right);$$

$$n=2\cdot\alpha_3=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi/4+4\pi}{3}+i\sin\frac{\pi/4+4\pi}{3}\right)=\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

Mustaqil yechish uchun misollar

1. Kompleks sonlarni qo‘shing:

(3+5i)+(2-7i)

$\left(\frac{2}{3}+1{,}6i\right)+\left(2\frac{1}{3}-0{,}4i\right)$

2. Kompleks sonlarni ayiring:

(4+3i)-(-5+6i)

$\left(4\frac{2}{3}+1\frac{3}{8}i\right)-\left(2\frac{1}{3}-1\frac{2}{8}i\right)$

3. Kompleks sonlarni ko‘paytiring:

(6+7i) · (2-11i)

$\left(2\frac{1}{3}+1{,}4i\right)\cdot\left(1{,}6-3\frac{1}{2}i\right)$

4. Bo‘lishni bajaring:

$\frac{3+4i}{5-7i}$; $\frac{0{,}2-1{,}4i}{0{,}4+3i}$

5. Amallarni bajaring:

a) agar $z_1=2+3i$; $z_2=1+i$; $z_3=-2+i$ bo‘lsa, $z=\frac{z_1+3z_2}{z_1z_2-z_3}$;

b) agar $z_1=8-2i$; $z_2=5+i$; $z_3=-1+i$ bo‘lsa, $z=\frac{z_1(z-z_3)}{z_3^3+z_1}$ ni hisoblang

c) i^{120}; i^{205} ni hisoblang .

6. Kompleks sonlarni qo‘shing:

(6+7 i)+(-2+3 i) ;

$(2\frac{1}{3}+1{,}8\,i)+(1\frac{2}{3}-0{,}8\,i)$.

7. Kompleks sonlarni ayiring:

(7 - 3 i) - (9+11i) ;

(4,8+1,5 i) - (0,8 - 0,5 i) .

8. Kompleks sonlarni ko‘paytiring:

(15+4 i)(2 - 3 i); (4,3 - 2,6)(0,2+1,4) .

9. Bo‘lishni bajaring:

$\frac{5+6i}{4-3i}$; $\frac{2{,}3i-1{,}4i}{2{,}4-1{,}6i}$.

10. Amallarni bajaring:

a) $z_1 = 2-3i;\quad z_2 = 4+3i;\quad z_3 = -3+i$ bo‘lsa, $z = \frac{z_1+3z_2}{z_2^2 - z_1\cdot z_2}$ ni hisoblang;

b) $z_1 = 6-3i;\quad z_2 = 1+2i;\quad z_3 = 1-i$ kompleks sonlar berilgan. $z = \frac{z_2(z_1-z_2)}{z_1^3+z_3}$ ni hisoblang;

c) i^{121}; i^{200} ni hisoblang .

11. Trigonometrik shaklda ifodalang:

a) $\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}$; *b) 1-i* ; *c)* $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; $d)\ -1-i\sqrt{3}$.

12. Amallarni bajaring:

a) $3\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; *b)* $8\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right):\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

c) $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{21}$; $d)\ \sqrt[4]{1+i\sqrt{3}}$.

13. Hisoblang: *a*) $(-\sqrt{3}+i)^6$; *b*) $\sqrt[5]{-1}$.

14. Trigonometrik shaklda ifodalang:

a) $-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$; *в)* $1-i\sqrt{3}$; *c)* $\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$;

15. Amallarni bajaring:

$$a)\quad 4\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\cdot 2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right);$$

$$b)\quad 6\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right):2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right);$$

$$c)\quad \left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)24;\quad d)\quad \sqrt[6]{1-i\sqrt{3}}.$$

16. Hisoblang: $a)\ (\sqrt{3}-i)^8$; $b)\ \sqrt[6]{i}$.

17. Kompleks sonlar ko'paytmasini toping:

a) (-1 - 2)(-2 + 2*i*); *b)* (2 + 3*i*)(3 + 2*i*).

18. Quyidagi kompleks sonlarni ko'paytiring:

a) (3,5 - *i*)(7 - 2*i*); *b)* (5 + *i*)(15 - 3*i*).

19. Kompleks sonlar ko'paytmasini toping:

a) (4 - *i*)(3 + 2*i*); *b)* (-7 + 2*i*)(1 - *i*).

20. Komplek sonlar ko'paytmasini toping:

a) $\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)$; *b)* $\left(1-\sqrt{2}i\right)\left(\sqrt{2}+3i\right)$;

v) $(a-bi)(a+bi)$; *g)* $(2a-i)(-a-bi)$;

d) $\left(\sqrt{3}+4i\right)\left(3-\sqrt{3}i\right)$; *j)* $\left(1-\sqrt{5}i\right)\left(2+\sqrt{3}i\right)$.

21. Kompleks sonlar nisbatini toping:

a) $\frac{2+i}{2-i}$; *b)* $\frac{0+4i}{1+i}$; *v)* $\frac{5+0i}{-4+3i}$.

22. Kompleks sonlarni bo'ling:

a) $\frac{4+6i}{1-i}$; *b)* $\frac{10-i}{1+i}$; *v)* $\frac{1-2i}{3+2i}$; g) $\frac{-2-3i}{1+2i}$.

23. Kompleks sonlarni bo'ling:

a) $\frac{2+i}{3-i}$; *b)* $\frac{6-i}{3+4i}$; *v)* $\frac{13+4i}{1+i}$; *g)* $\frac{3+4i}{7-2i}$.

24. Kompleks sonni trigonometrik shaklda yozing:

a) i ; *b)* $\frac{-1+i}{1+i}$; *c)* $\frac{1}{-2+i}-\frac{1}{2+i}$; *d)* $\frac{2+i}{1-i}\cdot\frac{2-i}{-1+i}$.

25. $\frac{8-5i}{3-2i}$ nisbatni toping.

26. $\frac{1+i}{2-i}$ nisbatni toping.

27. Kompleks sonlarning nisbatini toping: $\frac{-2-3i}{1-2i}$.

28. *1+i* kompleks sonni trigonometrik shaklda ifodalang.

29. $\sqrt{3}-i$ kompleks sonning trigonometrik shaklini aniqlang.

30. *1+0i* kompleks sonni trigonometrik shaklda ifodalang.

31. *-1+0i* kompleks sonni trigonometrik shaklda ifodalang.

32. 0+*i* kompleks sonni trigonometrik ko'rinishda yozing.

33. *1-i* kompleks sonni trigonometrik ko'rinishda yozing.

34. *3* kompleks sonning trigonometrik shaklini yozing.

35. *-5* kompleks sonni trigonometrik ko'rinishda yozing.

36. Quyidagi berilgan kompleks sonlarning modullari r va argumentlari φ larni toping hamda ularning trigonometrik shakllarini yozing:

a) *6-6i ;* *d)* *-2i ;*

b) *12i-5 ;* *e)* *3i-4 ;*

v) *5 ;* *j)* $\sqrt{3}+i;$

g) *3i ;* *z)* $2+2\sqrt{3}i.$

37. $1+\cos\alpha+i\sin\alpha$ kompleks sonning trigonometrik shaklini yozing.

38. Quyidagi $2\left(\cos 20^0 - i\sin 20^0\right)$ kompleks sonning trigonometrik ko'rinishini yozing.

38. $3\left(-\cos 15^0 - i\sin 15^0\right)$ kompleks sonni trigonometrik ko'rinishda ifodalang.

39. Quyidagi kompleks sonlarni trigonometrik shaklga keltiring.

1) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

2) $1+\cos\alpha+i\sin\alpha, (\alpha\in R)$;

3) $-1-i\sqrt{3}$;

4) $-2-5i$;

5) $-\sin\alpha+i(1+\cos\alpha), (\alpha\in R)$:

6) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

40. $(1+i)^{25}$ ni hisoblang .

41. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$ ni hisoblang .

42. $\sqrt[3]{i}$ ni hisoblang .

43. $\sqrt[6]{\frac{\sqrt{3}-i}{-1+i}}$ ni hisoblang .

44. Kompleks sonlarning ildizlarini topilsin.

1) $\sqrt[3]{1+i}$;

2) $\sqrt[n]{-1}$;

3) $\sqrt[8]{-i}$;

4) $\sqrt[6]{\frac{1-i}{\sqrt{3}+i}}$;

5) $\sqrt[4]{-2-2i\sqrt{3}}$;

6) $\sqrt[3]{\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}$.

45. Darajaga ko'taring: $(1+i)^{20}$, $(1-i)^{21}$.

46. Ildizdan chiqaring: $\sqrt{5+12i}$.

47. Berilgan z_1 va z_2 kompleks sonlarning yig'indisi va ko'paytmasini toping:

a) $z_1=5+4i$, $z_2=-2+3i$; *b)* $z_1=-8-7i$, $z_2=-3i$;

c) $z_1=5+\sqrt{3}i$, $z_2=5-\sqrt{3}i$.

48. z_2-z_1 ayirmani va $\frac{z_2}{z_1}$ bo'linmani toping:

a) $z_1=1+2i$, $z_2=5$; *b)* $z_1=-1+\sqrt{3}i$, $z_2=-\sqrt{2}+\sqrt{6}i$;

c) $z_1=a-\sqrt{b}i$, $z_2=a+\sqrt{b}i$.

49. Hisoblang:

a) $(4+i)(5+3i)-(3+i)(3-i)$; *b)* $\dfrac{(5+i)(7-6i)}{3+i}$; *c)* $\dfrac{(5+i)(3+5i)}{2i}$;

d) $\dfrac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$; *e)* $\dfrac{(2+i)(4+i)}{1+i}$; *f)* $\dfrac{(3-i)(1-4i)}{z-i}$; *g)* $(2+i)^3+(2-i)^3$;

h) $(3+i)^3-(3-i)^3$; *i)* $\dfrac{(1+i)^5}{(1-i)^3}$; *j)* $\left(-\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3$.

50. Kompleks sonning haqiqiy qismini toping:

a) $z=\dfrac{(1+2i)^3}{i}+i^{19}$; *b)* $z=\dfrac{5+2i}{2-5i}-\dfrac{3-4i}{4+3i}+\dfrac{1}{i}$.

51. Kompleks sonning mavhum qismini toping:

a) $z=(2-i)^3(2+11i)$; *b)* $z=\dfrac{2-3i}{1+4i}+i^6$.

<u>O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar</u>

1. Kompleks son deganda nimani tushunasiz?
2. Qo‘shma kompleks son deb qanday songa aytiladi ?
3. Kompleks sonning yig‘ndisi deb nimaga aytiladi?
4. Kompleks sonning ayirmasi deb nimaga aytiladi?
5. Kompleks sonning ko‘paytmasi deb nimaga aytiladi?
6. Kompleks sonning bo‘linmasi deb nimaga aytiladi?
7. Kompleks sonlar darajaga qanday ko‘tariladi ?
8. Kompleks sondan ildiz qanday chiqariladi?
9. Kompleks sonning geometrik tasviri qanday bo‘ladi ?
10. Kompleks sonning trigonometrik shakli qanday ko‘rinishda bo‘ladi ?

Foydalanilgan adabiyotlar

1. I.A.Karimov. Yuksak ma’naviyat – yengilmas kuch. –T.: “Ma’naviyat”, 2008. -176 b.
2. Неъматова Ш. Математика фанини ўкитишнинг назарий масалалари ва методикаси. –Т.: Тафаккур нашр., 2011 – 368 б.
3. М.Орифхонова ва бошқалар. Математика . –Т.: “Ўқитувчи”, 1974. – 408 б.
4. A.Abduxamidov va boshqalar. Algebra va matematik analiz asoslari (akademik litseylar uchun o‘quv qo‘llanma). I q. –T.: O‘qituvchi, 2007. -462 b.
5. A.Meliqulov va boshqalar. Matematika (kasb-hunar kollejlari uchun o‘quv qo‘llanma). I-II q. –T.: O‘qituvchi, 2003.
6. S.Alixonov. Matematika o‘qitish metodikasi. –T.: Cho‘lpon nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi, 2011. – 304 b.
7. Ёш математиклар қомусий луғати. –Т.: Қомуслар Бош таҳририяти, 1991. – 480 б.
8. Р.Иброҳимов. Математикадан масалалар тўплами. Т.: Ўқитувчи, 1995.-116 б.
9. F. Rajabov. Matematika : O‘quv qo‘llanma: T.: “O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti”, 2007.-280 b.
10. N.Xamedova, Z.Ibragimova, T.Tasetov. Matematika. –T.: “Turon -Iqbol” nashriyoti, 2007.-312 b.
11. М.Я. Выгодский. Элементлар математикадан справочник. Т.: Ўқитувчи, 1971.-444 б.
12. Е.С. Кочетков, Е.С.Кочеткова. Алгебра ва элементлар функциялар (2-қисм). Т.: Ўқитувчи, 1969.-300 б.
13. E.A.Chuliyev. Oliy matematika asoslari (algebra). Uslubiy qo‘llanma. Navoiy – 2011. – 35 b.
14. E.A.Chuliyev va boshqalar. Ayrim matematik terminlar, simvollar, belgilashlar va ularning paydo bo‘lish tarixi. Uslubiy qo‘llanma. Navoiy – 2013. – 36 b.

15. E.A.Chuliyev, D.R.Yuzboyeva. Matematika: to‘plamlar, haqiqiy sonlar. Uslubiy qo‘llanma. Navoiy, 2013, 36 b.
16. E.A.Chuliyev, Sh.S.Saksonova. Matematika: trigonometriya. Uslubiy qo‘llanma. Navoiy, 2013, 38 b.

MUNDARIJA