

**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

**V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI,
TOSHKENT DAVLAT TRANSPORT UNIVERSITETI**

DAVRONOV JAVLON RUSTAM O‘G‘LI

**YUQORI TARTIBLI DIFFERENSIAL OPERATORLARNING
FUNDAMENTAL YECHIMIGA ANIQ BO‘LGAN TAQRIBIY
INTEGRALLASHNING OPTIMAL ALGORITMLARI**

**01.01.03 – Hisoblash matematikasi va diskret matematika
(fizika-matematika fanlari)**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Toshkent – 2025

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации
доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-
mathematical sciences**

Davronov Javlon Rustam o'g'li

Yuqori tartibli differensial operatorlarning fundamental yechimiga aniq bo'lgan
taqribiy integrallashning optimal algoritmlari 3

Давронов Жавлон Рустам угли

Оптимальные алгоритмы приближенного интегрирования точных на
фундаментальных решений дифференциального оператора высокого порядка
..... 19

Davronov Javlon Rustam ugli

Optimal algorithms for approximate integration of exact fundamental solutions of
the high-order differential operator 37

E'lon qilingan ishlar ro'yxati

Список опубликованных работ
List of published works..... 40

**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIIY KENGASH**

**V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI,
TOSHKENT DAVLAT TRANSPORT UNIVERSITETI**

DAVRONOV JAVLON RUSTAM O‘G‘LI

**YUQORI TARTIBLI DIFFERENSIAL OPERATORLARNING
FUNDAMENTAL YECHIMIGA ANIQ BO‘LGAN TAQRIBIY
INTEGRALLASHNING OPTIMAL ALGORITMLARI**

**01.01.03 – Hisoblash matematikasi va diskret matematika
(fizika-matematika fanlari)**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Toshkent – 2025

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2025.1.PhD/FM1232 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutida va Toshkent davlat transport universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (резюме)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) va «Ziyonet» ta'lim axborot tarmog'ida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar: **Shadimetov Xolmatvay Maxkambayevich**
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Rasmiy opponentlar: **Hayotov Abdullo Raxmonovich**
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Xudoyberganov Mirzoali O'razaliyevich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Yetakchi tashkilot: **Buxoro davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi O'zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 raqamli Ilmiy kengashning «___»_____ 2025 yil soat___ dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 227-12-24, faks: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan O'zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (___ raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 246-02-24).

Dissertatsiya avtoreferati 2025 yil «___» _____ kuni tarqatildi.
(2025 yil «___» _____ dagi _____ raqamli reestr bayonnomasi).

M.M. Aripov

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., professor

Z.R. Raxmonov

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d., professor

R.D. Aloyev

Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash huzuridagi ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahon miqyosida olib borilayotgan zamonaviy ilmiy tadqiqotlar tobora ko‘proq murakkab matematik modellar va raqamli hisoblash usullariga asoslanmoqda. Xususan, geofizik hodisalarni modellashtirish, optik qurilmalar asosidagi jarayonlarni tahlil qilish elektr, magnit yoki issiqlik maydonlarini simulyatsiya qilish, yorug‘lik to‘lqinlarining taqsimotini aniqlash, iqtisodiy prognozlar tuzish kabi jarayonlar matematik-fizik tenglamalariga asoslanadi. Ko‘pincha, bu kabi tenglamalarning aniq yechimini topish murakkabligi sababli, ularni taqribiy yechish uchun kvadratur formulalar qurishga olib kelinadi. Shu jihatdan, yuqori tartibli differensial operatorlarning fundamental yechimiga aniq bo‘lgan taqribiy integrallashning optimal algoritmlarini tadqiq etish, Gilbert fazosida optimal kvadratur formulalar qurish, ularning xatoliklarini baholash va yaqinlashish tartibini aniqlash muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

Jahonda matematik modellashtirish va sonli hisoblash sohasidagi yuqori aniqlikka ega bo‘lgan kvadratur formulalarni qurish hamda ularning xossalarni tadqiq qilish kabi yo‘naltirilgan ilmiy-tadqiqot ishlari olib borilmoqda. Bu borada, qurilgan optimal kvadratur formulalar chegaraviy shartlarga ega bo‘lgan xususiy hosilali differensial tenglamalarni, integral tenglamalarni sonli-analitik yechishga, aniq integrallarni taqribiy hisoblashga, hamda funksiyalarning turli funksional fazolarida yaqinlashtirish kabi muhim masalalariga keng qo‘llaniladi. Shu sababli, yuqori tartibli differensial operatorlarning fundamental yechimlariga aniq bo‘lgan optimal kvadratur formulalar qurish hamda ularning xatoliklarini baholash va yaqinlashish tartibini aniqlashga alohida e‘tibor berilmoqda.

Respublikamizda fundamental fanlarning nazariy asoslarini tadqiq qilish va ularni hayotiy muhim sohalarda tadbiq qilinishi yuzasidan keng qamrovli chora-tadbirlar amalga oshirilib, muayyan natijalarga erishilmoqda. Xususan, sanoat jarayonlarini modellashtirish, geofizik hodisalarni tahlil qilishda qo‘llaniladigan sonli-analitik yechim usullarini ishlab chiqish bugungi kundagi eng muhim yo‘nalishlardan hisoblanadi. Shu kabi masalalar integral va differensial tenglamalarga tayangan holda ularni samarali yechish uchun zamonaviy optimal formulalar qurishga ehtiyoj ortib bormoqda. Ayniqsa, hisoblash matematikasining eng muhim yo‘nalishlaridan biri sifatida turli funksional fazolarda optimal kvadratur formulalarni qurish hamda ularning aniqlik darajasini oshirish bo‘yicha bir qator muhim ilmiy natijalarga erishildi. “Funksional analiz, differensial tenglamalar, matematik fizika, matematik modellashtirish, hisoblash matematikasi va diskret matematika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika”¹ kabi ustuvor yo‘nalishlar bo‘yicha muhim vazifalar belgilab berilgan. Ushbu vazifalarni amalga oshirishda, jumladan yuqori tartibli differensial operatorning fundamental yechimiga aniq bo‘lgan optimal kvadratur formulalar qurish va ularning xatoliklarini baholash muhim ahamiyat kasb etmoqda.

¹ O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 7 maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy- tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” gi PQ-4708-son qarori.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevral PF-4947-sonli “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi, 2022-yil 28-yanvar PF-60 sonli “2022-2026-yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi farmonlari, 2017-yil 17-fevral PQ-2789-sonli “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2017-yil 20-aprel PQ-2909-sonli “Oliy ta‘lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2018-yil 27-aprel PQ-3682-sonli “Innovatsion g‘oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2020-yil 7-may PQ-4708-sonli “Matematika sohasidagi ta‘lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishga ushbu dissertatsiya ishi muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Ko‘plab amaliy masalalar xususan, raqamli signalni qayta ishlash, ma‘lumotlar tahlili, biologik va texnologik tarmoqlar bilan bog‘liq masalalarning yechimi xususiy hosilali differensial tenglamalar yoki integral tenglamalar orqali ifodalanadi. Odatda bunday tenglamalarni sonli analitik yechish aniq integrallarni taqribiy hisoblashga olib kelinadi. Aniq integrallarni taqribiy hisoblash vositalaridan biri bu kvadratur formulalardir. Kvadratur formulalar algebraik, ehtimoliy-statistik, sonli-nazariy hamda funksional yondashuvlar asosida quriladi. Algebraik yondashuv asosida kvadratur formulalar qurish bilan V.I. Krilov, I.P. Misovskix, V.I. Lebedev, A. Sard, S. Maqsudov, A.X. Stroud, M.I. Levin, A.K. Ponomarenko, S.I. Konyayev, R. Cools, Y.G. Shi, M. Miodrag, S.B. Stoyanova kabi olimlar shug‘ullanishgan. Ehtimoliy-statistik yondashuvi Monte-Karlo metodiga asoslangan bo‘lib, ushbu yondashuv bilan N.S. Baxvalov, S.M. Ermakov, I.M. Sobol, G.A. Mixaylov, A.S. Rasulov, E. Novak va H. Wozniakovski, R.V. Xemming, A.I. Zadorin, Sh. Zang kabi olimlar shug‘ullanishgan. Sonli-nazariy yondashuv asosida kvadratur formulalar qurish G‘. Ismatullayev, M.I. Isroilov, N.N. Chensova, Ya.M. Jileykin, I.F. Shargin, V.I. Solodova ishlarida keltirilgan.

Aniq integrallarni taqribiy hisoblashda funksional analizga va differensial tenglamalar nazariyasiga asoslangan metodlaridan biri bu funksional yondashuvdir. Ushbu yondashuv asosida kvadratur va kubatur formulalar qurish S.M. Nikolskiy va S.L. Sobolev ishlarida batafsil ma‘lumotlar keltirilgan. Odatda funksional yondashuvda taqribiy integrallash uchun formulalarni optimallashtirish masalasi – bu berilgan funksiyalar fazosida xatolik funksionali normasining minimumini topishdan iborat. Xatolik funksionali normasi koeffitsiyentlar va tugun nuqtalar orqali minimum topiladi. Agarda biz har ikkisi bo‘yicha minimumini

topmoqchi bo'lsak, bunday turdagi masala Nikolskiy masalasi bo'lib, hosil qilingan formulaga eng yaxshi kvadratur formulalar deb ataymiz. Bu boradagi ilmiy izlanishlar S.M. Nikolskiy, N.P. Korneychuk, A.A. Jensikbayev, T.A. Shaydayeva, N.E. Lushpay, V.P. Motorniy kabi olimlarning ishlarida keltirilgan.

Tugun nuqtalar fiksirlanganda faqat koeffitsiyentlar bo'yicha minimumini topish masalasi Sard masalasi hisoblanib, hosil qilingan formulalar Sard ma'nosida optimal kvadratur formulalar deb ataladi. Ushbu ko'rinishdagi formulalar splaynlar, φ – funksiyalar hamda Sobolev metodlari asosida qurish mumkin. Turli fazolarda splayn funksiyalar metodi yordamida A. Sard, I. Schoenberg, L. Meyers, G. Koman, I. Catinas, S. Silliman, P. Kohler, A. Malyukov, I. Orlov kabi yetuk olimlar optimal kvadratur formulalar qurishgan. D. Ionescu, P. Blaga, A. Ghizzetti, G. Koman, A. Ossicini hamda F. Lanzara larning ishlarida φ – funksiyalar metodi yordamida Sobolevning $L_2^{(m)}$ fazosida optimal kvadratur formulalar qurilgan. Bugungi kunda zamonaviy usullardan biri hisoblangan Sobolev metodi asosida ham optimal kvadratur formulalar quriladi. Buning afzallik tomoni shundagi, ushbu usul yordamida kvadratur formulalar optimal koeffitsiyentlarining analitik ko'rinishlari olinadi. Undan tashqari qaralayotgan funksional fazolarda kvadratur formulalar xatoligining eng yuqori bahosi topiladi hamda yaqinlashish tartibi ham ko'rsatiladi. Shuni ta'klash joizki, ma'lum bir Gilbert va Banax fazolarida optimal kvadratur formulalar qurish S. Sobolev, Z. Jamalov, G'. Salixov, X. Shadimetov, A. Hayotov, F. Nuraliyev, S. A'zamov, D. Axmedov, A. Boltayev va boshqalarning ishlarida keltirilgan.

Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilayotgan oliy ta'lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari bilan bog'liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti O'zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti Hisoblash matematikasi laboratoriyasining "Gilbert fazolarida optimal kvadratur, interpolyatsion, ayirmali formulalar qurish va ularni integral tenglamalarni yechishga tatbiqlari" mavzusidagi kalendar reja doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi yuqori tartibli differensial operatorlarning fundamental yechimiga aniq bo'lgan taqribiy integrallashning optimal algoritmlarini qurish, ularga mos xatolik funksionali normasini hisoblash hamda integral tenglamalarni sonli yechishda optimal kvadratur formulalarni qo'llashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

Sobolevning $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida kvadratur formulaning ekstremal funksiyasi hamda xatolik funksionali normasining ko'rinishlarini topish;

Sobolevning $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida normaga minimum qiymat beruvchi koeffitsiyentlar uchun Vinner-Xopf tipidagi tenglamalar sistemasini olish;

m – juft bo'lganda $\left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 1 \right)$ differensial operatorning $D_m[\beta]$ diskret

analogini qurish;

Sobolevning $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida optimal kvadratur formulalar koeffitsiyentlarini topish;

Sobolevning $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida qurilgan optimal kvadratur formulalar xatoliklarining yaqinlashish tartibini baholash;

Tadqiqotning obykti. Gilbert fazosi, fundamental yechim, ekstremal funksiya, differensial operatorning diskret analogi, optimal kvadratur formulalar, xatolik funkcionallaridan iborat.

Tadqiqotning predmeti. Fundamental yechim, ekstremal funksiya, fundamental yechimga aniq bo'lgan optimal kvadratur formulalar, $\left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 1\right)$ differensial operatorning diskret analogi, $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosidagi funktsiyalardan iborat.

Tadqiqot usullari. Ilmiy tadqiqot ishida hisoblash matematikasi, funktsional analiz, ko'p o'zgaruvchili funktsiyalar nazariyasi, umumlashgan funktsiyalar, qoldiqlar nazaryasi hamda diskret argumentli funktsiyalar nazariyasi usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

Sobolevning $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida yuqori tartibli differensial operatorlarning fundamental yechimlariga aniq bo'lgan kvadratur formulaning ekstremal funktsiyasi yordamida xatolik funktsionali normasining ko'rinishi topilgan;

Sobolevning $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida normaga minimum qiymat beruvchi koeffitsiyentlar bo'yicha xususiy hosilalarini nolga tenglashtirib Vinner-Xopf tipidagi tenglamalar sistemasi olingan;

Sobolevning $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida Furrye almashtirishlari yordamida m – juft bo'lganda $\left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 1\right)$ differensial operatorning $D_m[\beta]$ diskret analogi qurilgan;

Sobolevning $L_2^{(1,0)}(0,1)$ va $L_2^{(2,0)}(0,1)$ fazolarida diskret operatorlar yordamida kvadratur formulalar optimal koeffitsiyentlarning ko'rinishlari topilgan;

Sobolevning $L_2^{(1,0)}(0,1)$ va $L_2^{(2,0)}(0,1)$ fazolarida optimal koeffitsiyentlaridan foydalanib kvadratur formula xatoligining yaqinlashish tartibi baholangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

qurilgan optimal kvadratur formula ikki o'lchovli ishonchlilik funktsiyasi va uning qorishmasi uchun qurilgan Arximed kopula baholarini olishda qo'llanilgan;

dissertatsiya natijalari gaz tarmoqlarini simulyatsiya qilishning samarali modellari uchun integral munosabatlarni taqribiy yechishda qo'llanilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi kvadratur formulalar nazaryasi, hisoblash matematikasi, funktsional analiz, diskret argumentli funktsiyalar va umumlashgan funktsiyalar nazaryalari metodlarini qo'llanilganligi, hamda matematik mulohazalarning qat'iyiligi bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati.

Tadqiqot ishining ilmiy ahamiyati Sobolevning $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida aniq integrallarni yetarli aniqlikda taqribiy hisoblash uchun optimal kvadratur formulalar qurilganligi va ularning xatoligi yuqoridan baholanganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati optimal kvadratur formulalar aniq integrallarni sonli taqribiy hisoblash usullari yordamida ikki o‘lchovli ishonchlilik funksiyasi va uning qorishmasi uchun qurilgan Arximed kopula baholarining tekis asosligining natijalarini isbotlashda qo‘llanilgani bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Sobolevning $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida yuqori tartibli differensial operatorlarning fundamental yechimiga aniq bo‘lgan taqribiy integrallashning optimal algoritmlarini qurish bo‘yicha olingan natijalar asosida:

Gilbert fazosida integrallarni taqribiy hisoblash uchun qurilgan optimal kvadratur formula 2022-2023 yillarda Toshkent axborot texnologiyalari universitetida bajarilgan IL-5321091543 “Gaz tarmoqlarining topologik modelini yaratish va simulyatsiya qilish” mavzusidagi innovatsion loyihani bajarishda, ya’ni loyihada gaz tarmoqlarining topologik modelini yaratishda va simulyatsiya qilishda foydalanilgan. (Toshkent axborot texnologiyalari universiteti, 2025-yil 22-apreldagi 1561/05-2 – sonli ma’lumotnomasi). Natijada gaz tarmoqlarini simulyatsiya qilishning samarali modellari uchun integral munosabatlarni taqribiy yechish imkonini bergan;

$L_2^{(2,0)}(0,1)$ fazosida qurilgan optimal kvadratur formula UZB-Ind-2021-97 raqamli “Applied statistical problems for dependent incomplete multidimensional data” mavzusidagi amaliy loyihasida ikki o‘lchovli ishonchlilik funksiyasi va uning qorishmasi uchun qurilgan Arximed kopula baholarini olishda qo‘llanilgan. (M.V. Lomonosov nomidagi Moskva davlat Universiteti Toshkent filiali, 2025 yil 24 apreldagi 01-01-70-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, ikki o‘lchovli ishonchlilik funksiyasi va uning qorishmasi uchun qurilgan Arximed kopula baholarining tekis asosligining natijalarini isbotlash imkon bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiya ishi natijalari 10 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan 8 ta xalqaro va 2 ta respublika miqyosidagi ilmiy-amaliy anjumanlarda muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinishi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 18 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 7 ta maqola, jumladan 2 tasi xorijiy va 5 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan, shuningdek elektron hisoblash mashinalari uchun dasturni rasmiy ro‘yxatdan o‘tkazish to‘g‘risidagi bitta guvohnoma olingan.

Dissertatsiyaning hajmi va tuzilishi. Dissertatsiya ishi kirish, uchta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxati va ilovalardan tashkil topgan. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 91 betni tashkil etadi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, muammoning o‘rganilganlik darajasi, mavzu bo‘yicha dunyo miqyosidagi ilmiy-tadqiqotlar sharhi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma‘lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning “**Aniq integrallarni taqribiy hisoblash masalasi**” deb nomlangan birinchi bobning birinchi paragrafida integrallarni taqribiy hisoblashning algebraik va variatsion yondashuvlari haqida ma‘lumotlar bayon etilgan. Birinchi bobning ikkinchi paragrafida esa $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida optimal kvadratur formulalar qurish masalasi qo‘yilgan. Ya‘ni, quyidagi ko‘rinishdagi kvadratur formulani qaraymiz

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \varphi[\beta], \quad (1)$$

bu yerda $[\beta] = h\beta$ tugun nuqtalar, $\beta = \overline{0, N}$, $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $C[\beta]$ lar (1)-formulaning koeffitsiyentlari. $\varphi(x)$ funksiyalar esa $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoning elementlari. Ya‘ni ushbu fazo elementlari $\varphi(x)$ funksiyalar $(m-1)$ - tartibli hosilasigacha absolyut uzluksiz, m - tartibli umumlashgan hosilasi kvadrati bilan integrallanuvchi, haqiqiy qiymatli funksiyalar bo‘lsin. Bu funksiyalar to‘plami vektor fazoni tashkil qiladi hamda quyidagi skalyar ko‘paytmaga nisbatan Gilbert fazosi $L_2^{(m,0)}(0,1)$ ni hosil qiladi.

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L_2^{(m,0)}} = \int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x) \psi^{(m)}(x) + \varphi(x) \psi(x) \right) dx. \quad (2)$$

Ushbu skalyar ko‘paytmaga mos norma quyidagicha

$$\|\varphi\|_{L_2^{(m,0)}} = \left\{ \int_0^1 \left[\left(\varphi^{(m)}(x) \right)^2 + \varphi^2(x) \right] dx \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (3)$$

aniqlanadi. Yuqoridagi (1)-formuladagi integral va kvadratur yig‘indi orasidagi ayirmaga (1)-kvadratur formulaning *xatoligi* deyiladi va u quyidagicha

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \varphi[\beta],$$

bo‘ladi. Yuqoridagi xatolikga mos xatolik funksionali esa quyidagicha

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \delta(x - h\beta), \quad (4)$$

bo‘ladi. Koshi-Shvars tengsizligiga ko‘ra quyidagi bahoga ega bo‘lamiz

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|\ell\|_{L_2^{(m,0)*}} \|\varphi\|_{L_2^{(m,0)}}.$$

Demak, $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoda (1)-kvadratur formulaning absolyut xatoligi $L_2^{(m,0)*}(0,1)$ qo'shma fazodagi ℓ xatolik funksionali normasi yordamida yuqoridan baholanadi. Bundan quyidagi masalaga ega bo'lamiz

1-masala. Ushbu (1)-kvadratur formulaning (4)-xatolik funksionali normasini ko'rinishini topish.

Yuqoridagi (4)-tenglikdan ko'rinib turibdiki xatolik funksionali normasi $C[\beta]$ koeffitsiyentlarga va $[\beta] = h\beta$ tugun nuqtalarga bog'liq. $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida optimal kvadratur formula qurishimiz uchun quyidagi masalani yechish kerak bo'ladi.

2-masala. Ushbu $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoda quyidagi

$$\|\ell\|_{L_2^{(m,0)*}} = \inf_{C[\beta]} \|\ell\|_{L_2^{(m,0)*}},$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $C[\beta]$ koeffitsiyentlarni topish.

Birinchi bobning uchinchi paragrafida biz (4)-xatolik funksionali normasini ko'rinishi topilgan va birinchi masala to'liq yechilgan. Xatolik funksionalining normasini hisoblash uchun quyidagi tenglikni qanoatlantiruvchi ψ_ℓ ekstremal funksiya tushunchasidan foydalanamiz

$$(\ell, \psi_\ell) = \|\ell\|_{L_2^{(m,0)*}} \|\psi_\ell\|_{L_2^{(m,0)}}. \quad (5)$$

Ushbu $L_2^{(m,0)}$ fazo Gilbert fazosi bo'lgani uchun chiziqli uzluksiz funksionalaning umumiy ko'rinishi haqidagi Riss teoremasidan $L_2^{(m,0)}$ fazosida quyidagi tenglikni qanoatlantiruvchi yagona ψ_ℓ funksiya mavjud

$$(\ell, \varphi) = \langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{L_2^{(m,0)}}, \quad (6)$$

va $\|\ell\| = \|\psi_\ell\|$, bunda $\langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{L_2^{(m,0)}}$ bu $L_2^{(m,0)}$ fazosidagi ψ_ℓ va φ funksiyalarning skalyar ko'paytmasi. Endi biz (6)-tenglamani yechish bilan shug'ullanamiz. Bu (6)-tenglamaning o'ng tomonini bo'laklab integrallash orqali quyidagiga ega bo'lamiz

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \psi_\ell \rangle_{L_2^{(m,0)}} &= \int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x) \psi_\ell^{(m)}(x) + \varphi(x) \psi_\ell(x) \right) dx = \\ &= \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \psi_\ell^{(m+k-1)}(x) \varphi^{(m-k)}(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 \left((-1)^m \psi_\ell^{(2m)}(x) + \psi_\ell(x) \right) \varphi(x) dx. \quad (7) \end{aligned}$$

Ushbu (7)-tenglikdan ko'rinib turibdiki m sonining toq yoki juft ekanligiga qarab, (7)- tenglik ikki xil ko'rinishga ega bo'ladi:

m – toq holatida

$$(\ell, \varphi) = - \int_0^1 \left(\psi_\ell^{(2m)}(x) - \psi_\ell(x) \right) \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \psi_\ell^{(m+k-1)(m+k-1)}(x) \varphi^{(m-k)}(x) \Big|_0^1, \quad (8)$$

m – juft holatida

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 (\psi_\ell^{(2m)}(x) + \psi_\ell(x)) \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \psi_\ell^{(m+k-1)}(x) \varphi^{(m-k)}(x) \Big|_0^1. \quad (9)$$

Dastlab m -toq bo'lgan holat uchun ekstremal funksiyani topamiz. Buning uchun berilgan chegaraviy shartlarda bir jinsli bo'lmagan oddiy differensial tenglamani yechamiz:

$$\psi_\ell^{(2m)}(x) - \psi_\ell(x) = -\ell(x), \quad (10)$$

$$\psi_\ell^{(m+k-1)}(x) \Big|_{x=0}^{x=1} = 0, \quad k = \overline{1, m}. \quad (11)$$

Quyidagi o'rinli.

1-teorema. Ushbu $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida (10)-differensial tenglamaga qo'yilgan (11)-chegaraviy shartlardagi yechimi

$$\psi_\ell(x) = -\ell(x) * G_m(x), \quad (12)$$

(1)-kvadratur formulaning ekstremal funksiyasi bo'ladi. Bu yerda

$$G_m(x) = \frac{\text{sign}(x)}{2m} \cdot \left[\text{sh}(x) + \sum_{k=1}^{m-1} e^{x \cos \frac{\pi k}{m}} \cdot \cos \left(x \cdot \sin \frac{\pi k}{m} + \frac{\pi k}{m} \right) \right]. \quad (13)$$

Endi, m -juft bo'lgan holat uchun ekstremal funksiyani topamiz. Buning uchun berilgan chegaraviy shartlarda bir jinsli bo'lmagan oddiy differensial tenglamani yechamiz. Ya'ni,

$$\psi_\ell^{(2m)}(x) + \psi_\ell(x) = \ell(x), \quad (14)$$

$$\psi_\ell^{(m+k-1)}(x) \Big|_{x=0}^{x=1} = 0, \quad k = \overline{1, m}. \quad (15)$$

Quyidagi o'rinli.

2-teorema. Ushbu $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida (14)-differensial tenglamaga qo'yilgan (15)-chegaraviy shartlardagi yechimi (m -juft)

$$\psi_\ell(x) = \ell(x) * G_m(x) \quad (16)$$

(1)-kvadratur formulaning ekstremal funksiyasi deyiladi.

Bu yerda $G_m(x)$ funksiya $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 1$ differensial operatorning fundamental yechimi.

Ya'ni,

$$G_m(x) = -\frac{\text{sign}(x)}{2m} \sum_{k=1}^m e^{x \cos \frac{(2k-1)\pi}{2m}} \cos \left(x \sin \frac{(2k-1)\pi}{2m} + \frac{(2k-1)\pi}{2m} \right). \quad (17)$$

Endi biz ixtiyoriy m uchun xatolik funksionali normasini ko'rinishini topamiz. Quyidagi teorema o'rinli.

3-teorema. Ushbu $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida (5)-xatolik funksionalining normasining kvadrati quyidagi ko'rinishda

$$\|\ell\|_{L_2^{(m,0)*}}^2 = (-1)^m \left(\int_0^1 \int_0^1 G_m(x-y) dx dy - 2 \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \int_0^1 G_m(x-h\beta) dx + \right.$$

$$+ \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C[\beta] C[\gamma] G_m(h\beta - h\gamma) \Big),$$

bo'ladi.

Bu yerda $G_m(x)$ funksiya m -toq bo'lgan holatda (13)-formuladan va m -juft bo'lganda esa (17)-formuladan foydalanib hisoblanadi.

Xatolik funksionalining normasi koeffitsiyentlarga bog'liq bo'lgani uchun biz xatolik funksionalining normasining kvadratini $\Psi(C[0], C[1], \dots, C[N])$ bilan belgilab olamiz va u quyidagi ko'rinishda bo'ladi,

$$\Psi(C[0], C[1], \dots, C[N]) = (-1)^m \cdot \left(\int_0^1 \int_0^1 G_m(x-y) dx dy - \right. \\ \left. - 2 \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \int_0^1 G_m(x-h\beta) dx + \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C[\beta] C[\gamma] G_m(h\beta - h\gamma) \right).$$

Endi xususiy hosilalarni olib nolga tenglashtirib quyidagi tenglamalar sistemasiga kelamiz.

$$\sum_{\gamma=0}^N C[\beta] G_m(h\beta - h\gamma) = \int_0^1 G_m(x - h\beta) dx, \quad \beta = \overline{0, N}. \quad (18)$$

Yuqoridagi (18)-tenglamalar sistemasida $N+1$ ta noma'lum va $N+1$ ta tenglamalar mavjud. Ushbu tenglamalar $C[\beta]$ koeffitsiyentlarining optimal qiymatini aniqlashga imkon beradi. Ushbu tenglamalar sistemasini yechish uchun biz Sobolev metodidan foydalanamiz. Buning uchun bizga $(2m)$ -tartibli differensial operatorning diskret analogi kerak bo'ladi. Keyingi bobda biz ushbu diskret operatorni qurish bilan shug'ullanamiz.

Dissertatsiyaning "**Yuqori tartibli differensial operatorning diskret analogi**" deb nomlangan ikkinchi bobi uchta paragrafdan iborat bo'lib birinchi paragrafida umumlashgan funksiyalar va Furye almashtirishlari va umumlashgan funksiyaning hosilalari kabi ma'lum ta'riflar keltirilgan. Ikkinchi paragrafida esa biz ushbu

$$D_m[\beta] * G_m[\beta] = \delta[\beta] \quad (19)$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $D_m[\beta]$ diskret operatorni qurish bilan shug'ullanamiz. Bu yerda $\delta[\beta]$ - diskret delta funksiya, $G_m[\beta]$ - funksiya $G_m(x)$ funksiyaning diskret ko'rinishi. m -toq bo'lgan holatda $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - 1$ differensial operatorning diskret analogi kerak bo'ladi. Ya'ni,

4-teorema. Ushbu $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - 1$ differensial operatorning (19)-tenglikni qanoatlantiruvchi diskret analogi quyidagi ko'rinishda:

$$D_m[\beta] = \frac{m}{K_t} \cdot \begin{cases} \sum_{n=1}^{m-1} A_{t,n} \cdot \tau_n^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 2, \\ 1 + \sum_{n=1}^{m-1} A_{t,n}, & |\beta| = 1, \\ M_{t,1} - \frac{K_{t,1}}{K_t} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{A_{t,n}}{\tau_n}, & \beta = 0, \end{cases}$$

bu yerda $K_t, K_{t,1}, M_{t,1}, A_k, \tau_k$ - ma'lum kattaliklar va $|\tau_k| < 1$.

m -juft bo'lgan holda esa $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 1$ differensial operatorning $D_m[\beta]$ diskret analogini quramiz. Differensial operatorning diskret analogini qurishdan avval ushbu yig'indini hisoblab olamiz

$$S = \sum_{\beta=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\beta - h\left(p + \frac{s_1 i}{2\pi}\right)\right) \left(\beta - h\left(p + \frac{s_2 i}{2\pi}\right)\right) \dots \left(\beta - h\left(p + \frac{s_{2m} i}{2\pi}\right)\right)}. \quad (20)$$

Bu yerda $s_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2m} + i \sin \frac{(2k-1)\pi}{2m}$, $k = 1, 2, \dots, 2m$, (20)-yig'indini hisoblashda biz o'zimizga qulaylik uchun lemma kiritib olamiz.

1-lemma. Ushbu (20)- belgilashdagi cheksiz qatorning yig'indisi quyidagi chekli yig'indiga teng

$$S = -\frac{h\lambda}{m} \cdot \left(-\frac{2\pi i}{h}\right)^{2m} \cdot \sum_{k=1}^{m/2} \frac{a_{1,k}\lambda^2 + a_{2,k}\lambda + a_{1,k}}{\lambda^4 + b_{1,k}\lambda^3 + b_{2,k}\lambda^2 + 1}, \quad (21)$$

bu yerda $a_{1,k}, a_{2,k}, b_{1,k}, b_{2,k}, \lambda$ - ma'lum kattaliklar.

5-teorema. Ushbu $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 1$ (m -juft) differensial operatorning (19)-tenglikni qanoatlantiruvchi $D_m[\beta]$ diskret analogi quyidagi ko'rinishda

$$D_m[\beta] = -\frac{m}{K_j} \cdot \begin{cases} M_{j,1} - K_{j,1} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_{j,k}}{\lambda_k}, & \beta = 0, \\ 1 + \sum_{k=1}^{m-1} A_{j,k}, & |\beta| = 1, \\ \sum_{k=1}^{m-1} A_{j,k} \cdot \lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 2, \end{cases} \quad (22)$$

bu yerda $K_j, K_{j,1}, M_{j,1}, A_{j,k}, \lambda_k$ - ma'lum kattaliklar va $|\lambda_k| < 1$.

Uchinchi paragrafida esa $\frac{d^2}{dx^2} - 1$, $\frac{d^4}{dx^4} + 1$ va $\frac{d^6}{dx^6} - 1$ differensial operatorlarning diskret analoglarining barcha xossalari isbotlangan. Ya'ni,

1-natija. Ushbu $\frac{d^2}{dx^2}-1$ differensial operatorning $D_1[\beta]$ diskret analogi quyidagi tengliklarni qanoatlantiradi:

$$1. D_1[\beta] * e^{[\beta]} = 0, \quad 2. D_1[\beta] * e^{-[\beta]} = 0.$$

Keyinchalik biz $m=2$ bo'lgan holat uchun $\frac{d^4}{dx^4}+1$ differensial operatorning $D_2[\beta]$ diskret analogi uchun muhim bo'lgan natijalarni keltiramiz.

2-natija Ushbu $\frac{d^4}{dx^4}+1$ differensial operatorning $D_2[\beta]$ diskret analogi quyidagi tengliklarni qanoatlantiradi

$$1. D_2[\beta] * \left(e^{\frac{\sqrt{2}[\beta]}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}[\beta]\right) \right) = 0, \quad 2. D_2[\beta] * \left(e^{\frac{\sqrt{2}[\beta]}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}[\beta]\right) \right) = 0,$$

$$3. D_2[\beta] * \left(e^{-\frac{\sqrt{2}[\beta]}{2}} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}[\beta]\right) \right) = 0, \quad 4. D_2[\beta] * \left(e^{-\frac{\sqrt{2}[\beta]}{2}} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}[\beta]\right) \right) = 0.$$

Endi esa biz $\frac{d^6}{dx^6}-1$ differensial operatorning $D_3[\beta]$ diskret analogi uchun quyidagi natijalarni olamiz.

3-natija. Ushbu $\frac{d^6}{dx^6}-1$ Differensial operatorning $D_3[\beta]$ diskret analogi quyidagi tengliklarni qanoatlantiradi

$$1. D_3[\beta] * e^{[\beta]} = 0, \quad 4. D_3[\beta] * e^{\frac{[\beta]}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta]\right) = 0,$$

$$2. D_3[\beta] * e^{-[\beta]} = 0, \quad 5. D_3[\beta] * e^{\frac{[\beta]}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta]\right) = 0,$$

$$3. D_3[\beta] * e^{\frac{[\beta]}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta]\right) = 0, \quad 6. D_3[\beta] * e^{\frac{[\beta]}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta]\right) = 0.$$

Dissertatsiyaning “**Normaga shartsiz minimum beruvchi optimal koeffitsiyentlar**” deb nomlangan uchinchi bobi to'rtta paragrafdan iborat bo'lib birinchi paragrafida $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida ixtiyoriy m uchun (1)-kvadratur formulaning optimal koeffitsiyentlarini topish uchun algoritmi berilgan. Ikkinchi paragrafida esa xususiy holatda $m=1$ va $m=2$ bo'lgan holatlari uchun optimal koeffitsiyentlarni ko'rinishi topilgan. Ya'ni,

6-teorema. Ushbu $L_2^{(1,0)}(0,1)$ fazoda (1)-kvadratur formulaning optimal koeffitsiyentlari

$$C[\beta] = \begin{cases} \frac{e^h - 1}{e^h + 1}, & \beta = 0, \\ \frac{2(e^h - 1)}{e^h + 1}, & 1 \leq \beta \leq N - 1, \\ \frac{e^h - 1}{e^h + 1}, & \beta = N, \end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

7-teorema. Ushbu $L_2^{(2,0)}(0,1)$ fazoda (1)-kvadratur formulaning optimal koeffitsiyentlari

$$C[\beta] = \begin{cases} a + Y_1 + m_1 + n_1 \lambda_1^N, & \beta = 0, \\ a + m_1 \lambda_1^\beta + n_1 \lambda_1^{N-\beta}, & 1 \leq \beta \leq N - 1, \\ a + Y_2 + m_1 \lambda_1^N + n_1, & \beta = N, \end{cases}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu yerda a, Y_1, Y_2, m_1, n_1 -lar ma’lum kattaliklar va $|\lambda_1| < 1$.

Uchinchi bobning uchinchi paragrafida $L_2^{(1,0)}(0,1)$ va $L_2^{(2,0)}(0,1)$ fazolarda qurilgan kvadratur formulaning xatolik funksionalining normasi hisoblangan. Ya’ni,

8-teorema. Ushbu $L_2^{(1,0)}(0,1)$ fazodagi (1)-ko‘rinishdagi kvadratur formulaning xatolik funksionali normasining kvadrati quyidagiga teng

$$\|\ell\|_{L_2^{(1,0)*}}^2 = 1 - \frac{2(e^h - 1)}{h(e^h + 1)}.$$

Endi biz $L_2^{(2,0)*}(0,1)$ fazoga tegishli bo‘lgan $\|\ell\|_{L_2^{(2,0)*}}^2$ ni hisoblaymiz.

9-teorema. Ushbu $L_2^{(2,0)}(0,1)$ fazodagi (1)-ko‘rinishdagi kvadratur formulaning xatolik funksionali normasining kvadrati quyidagiga teng

$$\|\ell\|_{L_2^{(2,0)*}}^2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\sin \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \\ - C[0] - C[N] - \frac{\sqrt{2}}{K} (N - 1)a - Q_1 - Q_2.$$

bu yerda a, Q_1, Q_2, K -lar ma’lum kattaliklar.

Uchinchi bobning to‘rtinchi paragrafida $L_2^{(1,0)}(0,1)$ va $L_2^{(2,0)}(0,1)$ fazolarda qurilgan optimal kvadratur formulalar bilan mos ravishda umumlashgan trapesiya va $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazosida qurilgan optimal kvadratur formula xatoliklari bir nechta funksiyalarda tekshirilib jadval ko‘rinishida keltirilgan.

Sobolev fazosida qurilgan optimal kvadratur formula va umumlashgan trapetsiya formulalarining absloyut xatolik qiymatlari solishtirilgan, buning uchun

$\varphi_1(x) = \frac{1}{x+1}$, $\varphi_2(x) = e^x \sin(x)$ va $\varphi_3(x) = \cos(e^x)$ funksiyalar olingan. 1-jadvalda optimal kvadratur formulaning absolyut xatoligi R_k $\left(R_k = \left| \int_0^1 \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \varphi(h\beta) \right| \right)$ va umumlashgan trapetsiya formulasining absolyut xatoligi R_t $\left(R_t = \left| \int_0^1 \varphi(x) dx - \frac{1}{N} \left(\varphi(0) + \varphi(1) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \varphi(hi) \right) \right| \right)$ bilan belgilangan

β	$\varphi_1(x)$		$\varphi_2(x)$		$\varphi_3(x)$	
N	R_k	R_t	R_k	R_t	R_k	R_t
10	$4.67 \cdot 10^{-5}$	$6.24 \cdot 10^{-4}$	$1.54 \cdot 10^{-3}$	$2.30 \cdot 10^{-3}$	$1.30 \cdot 10^{-4}$	$2.33 \cdot 10^{-4}$
100	$4.74 \cdot 10^{-7}$	$6.25 \cdot 10^{-6}$	$1.54 \cdot 10^{-5}$	$2.30 \cdot 10^{-5}$	$1.26 \cdot 10^{-6}$	$2.29 \cdot 10^{-6}$
1000	$4.70 \cdot 10^{-9}$	$6.25 \cdot 10^{-8}$	$1.54 \cdot 10^{-7}$	$2.30 \cdot 10^{-7}$	$1.26 \cdot 10^{-8}$	$2.30 \cdot 10^{-8}$

1-jadval

Yuqoridagi 1-jadvaldan ko‘rinib turibdiki optimal kvadratur formulaning absolyut xatoligi umumlashgan trapetsiya formulasining absolyut xatoligidan yaxshiroq natija berdi. Endi yaqinlashish tartibini ko‘rishimiz uchun $\|\ell\|_{L_2^{(1,0)*}}^2$ ni h bo‘yicha Teylor qatoriga yoyamiz va

$$\|\ell\|_{L_2^{(1,0)*}}^2 = \frac{1}{12} h^2 - \frac{1}{120} h^4 + O(h^5)$$

bundan ko‘rinadiki biz qurgan kvadratur formulamizning $m=1$ holi uchun yaqinlashish tartibi $O(h)$ ga teng ekan.

Endi esa $L_2^{(2,0)}(0,1)$ Sobolev fazosida qurilgan optimal kvadratur formula va $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazosida qurilgan optimal kvadratur formulalarining xatolik qiymatlarini ba‘zi funksiyalarda solishtiramiz. Biz ushbu

$$f_1(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) \sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right),$$

$$f_2(x) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right),$$

$$f_3(x) = \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

funksiyalarda yuqoridagi fazolarda qurilgan kvadratur formulalarni xatoliklarini 2-jadvalda tugun nuqtalar soni 10, 100 va 1000 bo‘lgan holatida keltiramiz. Ushbu

2-jadvalda R_L va R_W xatoliklar mos ravishda $L_2^{(2,0)}(0,1)$ va $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazolaridagi optimal kvadratur formulalarining absolyut xatoligi.

β	$f_1(x)$		$f_2(x)$		$f_3(x)$	
	R_L	R_W	R_L	R_W	R_L	R_W
10	$3.13 \cdot 10^{-45}$	$7.07 \cdot 10^{-4}$	$3.11 \cdot 10^{-4}$	$1.98 \cdot 10^{-3}$	$2.53 \cdot 10^{-4}$	$3.60 \cdot 10^{-4}$
100	$2.01 \cdot 10^{-41}$	$7.76 \cdot 10^{-6}$	$2.57 \cdot 10^{-7}$	$2.17 \cdot 10^{-5}$	$2.08 \cdot 10^{-7}$	$3.96 \cdot 10^{-6}$
1000	$2.58 \cdot 10^{-38}$	$7.83 \cdot 10^{-8}$	$2.53 \cdot 10^{-10}$	$2.19 \cdot 10^{-7}$	$2.05 \cdot 10^{-10}$	$4 \cdot 10^{-8}$

2-jadval

Yuqoridagi 2-jadvaldan ko‘rinib turibdiki $L_2^{(2,0)}(0,1)$ fazoda qurilgan optimal kvadratur formulaning absolyut xatoligi $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazoda qurilgan optimal kvadratur formulaning absolyut xatolidan yaxshiroq natija berdi.

XULOSA

Dissertatsiya ishi yuqori tartibli differensial operatorlarning fundamental yechimiga aniq bo‘lgan taqribiy integrallashning optimal algoritmlariga bag‘ishlangan.

Tadqiqot ishining asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

1. $L_2^{(m,0)}(0,1)$ gilbert fazosida kvadratur formulalarning ekstremal funksiyasi topilgan.

2. $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida kvadratur formulalarning xatolik funksionali normasining ko‘rinishi olingan.

3. $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida optimal kvadratur formulaning koeffitsiyentlari uchun Vinner-Xopf tipidagi tenglamalar sistemasini olingan.

4. $\left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 1\right)$ differensial operatorning $D_m[\beta]$ diskret analogi qurilgan va barcha xossalari isbotlangan.

5. $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida optimal kvadratur formulalar koeffitsiyentlari uchun ixtiyoriy m da algoritmi berilgan.

6. $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida $m=1$ va $m=2$ bo‘lgan hollarda optimal kvadratur formulaning xatolik funksionali normasi hisoblangan.

7. $L_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida optimal kvadratur formula xatoligining yuqori chegarasi topilgan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

**ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО,
ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТРАНСПОРТНЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

ДАВРОНОВ ЖАВЛОН РУСТАМ УГЛИ

**ОПТИМАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПРИБЛИЖЕННОГО
ИНТЕГРИРОВАНИЯ ТОЧНЫХ НА ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ
РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ВЫСОКОГО
ПОРЯДКА**

**01.01.03 – Вычислительная и дискретная математика
(физико-математические науки)**

**АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Ташкент – 2025

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за № B2025.1.PhD/FM1232.

Диссертация выполнена в институте математики имени В.И.Романовского АНРУз и в Ташкентском государственном транспортном университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) и на Информационно-образовательном портале «Ziynet» (www.ziynet.uz)

Научный руководитель:	Шадиметов Холматвай Махкамбаевич доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	Хаётов Абдулло Рахмонович доктор физико-математических наук, профессор Худойберганаов Мирзоали Уразалиевич доктор физико-математических наук, профессор
Ведущая организация:	Бухарский государственный университет

Защита диссертации состоится « ____ » _____ 2025 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за № _____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан « ____ » _____ 2025 года.
(протокол рассылки № _____ от « ____ » _____ 2025 года).

М.М. Арипов

Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор

З.Р. Рахмонов

Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор

Р.Д. Алоев

Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученой степени доктора наук, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Современные научные исследования, проводимых в мировом уровне, все чаще основываются на сложных математических моделях и численных методах расчетов. В частности, такие процессы, как моделирование геофизических явлений, анализ процессов с использованием оптических приборов, моделирование электрических, магнитных или тепловых полей, определение распределения световых волн и составление экономических прогнозов, опираются на математико-физических уравнений. Обычно, ввиду трудности нахождения точного решения таких уравнений, для их приближенного решения сводятся к построению квадратурных формул. В связи с этим актуальным является исследование оптимальных алгоритмов приближенного интегрирования, точных к фундаментальному решению дифференциальных операторов высших порядков, построение оптимальных квадратурных формул в гильбертовом пространстве, оценка их погрешностей и определение порядка аппроксимации.

В мировой практике ведутся научные исследования в области математического моделирования и численных вычислений, направленные на построение высокоточных квадратурных формул и изучение их свойств. В связи с этим построенные оптимальные квадратурные формулы широко используются при численно-аналитическом решении уравнений в частных производных с граничными условиями, интегральных уравнений, приближенном вычислении определенных интегралов и в таких важных вопросах, как аппроксимация функций в различных функциональных пространствах. Поэтому особое внимание уделяется построению точных оптимальных квадратурных формул для фундаментальных решений дифференциальных операторов высших порядков, оценке их погрешностей и определению порядка аппроксимации.

В нашей республике проводятся комплексные мероприятия по изучению теоретических основ фундаментальных наук и их применению в жизненно важных областях, и достигаются определённые результаты. В частности, одним из важнейших направлений сегодня является разработка численно-аналитических методов решения, используемых при моделировании промышленных процессов и анализе геофизических явлений. Растет потребность в современных оптимальных формулах для эффективного решения таких задач, опирающихся на интегральные и дифференциальные уравнения. В частности, как одно из важнейших направлений вычислительной математики, достигнут ряд важных научных результатов в построении оптимальных квадратурных формул в различных функциональных пространствах и оценке их точности. Поставлены важные задачи в таких приоритетных областях, как «функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, математическое моделирование, вычислительная математика и дискретная математика, теория вероятностей и

математическая статистика»². В реализации этих задач важное значение имеет построить оптимальную квадратурную формулу точных на фундаментальных решениях дифференциального оператора высшего порядка, и оценить их погрешности.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан УП-№ 4947 от 07 февраля 2017 года “О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан”, УП-№60 от 28 января 2022 года “О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы”, в постановлениях ПП-№ 2789 от 17 февраля 2017 года “О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности”, ПП – № 2909 от 20 апреля 2017 года “О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования”, ПП –№ 3682 от 27 апреля 2018 года “О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов”, ПП – № 4708 от 07 мая 2020 года “О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики”, а также в других нормативно–правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. “Математика, механика и информатика”.

Степень изученности проблемы. Многие практические задачи, особенно связанные с цифровой обработкой сигналов, анализом данных, а также биологическими и технологическими сетями, выражаются в терминах уравнений в частных производных или интегральных уравнений. Обычно численные аналитические решения таких уравнений приводят к приближенным вычислениям определенных интегралов. Одним из инструментов приближения определенных интегралов являются квадратурные формулы. Квадратурные формулы строятся на основе алгебраического, вероятностно-статистического, теоретико-числового и функционального подходов. Построением квадратурных формул на основе алгебраического подхода занимались такие ученые, как В.И.Крылов, И.П.Мисовских, В.И.Лебедев, А.Сард, С.Максудов, А.Х.Строуд, М.И.Левин, А.К.Пономаренко, С.И.Коняев, R.Cools, Y.G.Shi, М.Миодраг, С.Б.Стойнова. Вероятностно-статистический подход основан на методе Монте-Карло, и при этом подходе Н.С. Бахвалов, С.М. Ермаков, И.М.Соболь, Г.А.Михайлов, А.С.Расулов, E.Novak и H.Wozniakovski, P.B.Хемминг, А.И.Задорин, Ш.Занг ввели исследования. Построением квадратурных формул на основе численно-теоретического подхода занимались

² Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП-4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 07 мая 2020 года.

Г. Исматуллаев, М.И. Исроилов Н.Н. Ченсова, Я.М. Жилейкин, И.Ф. Шрыгин, В.И. Солдатова.

Одним из методов приближения определенных интегралов, основанным на функциональном анализе и теории дифференциальных уравнений, является функциональный подход. На основе этого подхода построение квадратурных и кубатурных формул было осуществлено С.М. Никольским и подробная информация представлена в трудах С.Л. Соболева. Обычно задача оптимизации формул приближенного интегрирования при функциональном подходе состоит в нахождении минимума нормы функционала погрешности в пространстве заданных функций. Минимизация нормы функционала погрешности осуществляется за счет коэффициентов и узлов. Если мы хотим минимизировать по обеим, то этот тип задачи называется задачей Никольского, а полученная формула называется наилучшей квадратурной формулой. Научные исследования по этой теме проводились в работах С.М. Никольского, Н.П. Корнейчука, А.А. Дженсикбаева, Т.А. Шайдаевой, Н.Е. Лушпайя и В.П. Моторного,

При фиксированных узлах задача нахождения минимума по коэффициентам считается задачей Сарда, а полученные формулы называются оптимальными квадратурными формулами в смысле Сарда. Формулы такого вида могут быть построены на основе сплайнов, φ -функций и методов Соболева. Используя метод сплайн-функций в различных пространствах, такие выдающиеся ученые, как А. Сард, И. Шёнберг, Л. Майерс, Г. Коман, I. Catinas, С. Силлиман, П. Кохлер, А. Малюков, И. Орлов построили оптимальные квадратурные формулы. В работах Д. Ионеску, П. Блага, А. Чизетти, Г. Коман, А. Оссосини и Ф. Ланазара с методом φ -функции построены оптимальные квадратурные формулы в пространстве Соболева $L_2^{(m)}$. На сегодняшний день оптимальные квадратурные формулы строятся на основе метода Соболева, которое считается одним из современных методов. Преимущество этого метода в том, что он дает аналитические выражения оптимальных коэффициентов квадратурных формул. Кроме того, найдётся максимальное значение погрешности квадратурных формул в рассматриваемых функциональных пространствах, а также показывается верхняя оценка аппроксимации. Стоит отметить, что построение оптимальных квадратурных формул в некоторых пространствах Гильберта и Банаха осуществлялось в трудах С.Соболева, З.Джамалова, Ф.Салихов, Х.Шадиметова, А.Хаётова, Ф.Нуралиева, С.Аъзамова, Д.Ахмедова, А.Болтаева и других.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполнена диссертация. Диссертационное исследование выполнено в рамках календарного плана лаборатории вычислительной математики Института математики им. В.И.Романовского Академия Наук Республики Узбекистан по теме “Построение оптимальных квадратурных, интерполяционных,

дифференциальных формул в Гильбертовых пространствах и их приложения к решению интегральных уравнений”.

Цель исследования заключается в построении оптимальных алгоритмов приближенного интегрирования, точных на фундаментальных решениях дифференциальных операторов высших порядков, вычислении нормы соответствующего им функционала погрешности и применении оптимальных квадратурных формул для численного решения интегральных уравнений.

Задачи исследования:

найти выражению экстремальной функции квадратурной формулы и нормы функционала погрешности в пространстве Соболева $L_2^{(m,0)}(0,1)$;

получить систему уравнений типа Винера-Хопфа для коэффициентов, дающих минимальное значение нормы в пространстве Соболева $L_2^{(m,0)}(0,1)$;

построить дискретный аналог $D_m[\beta]$ дифференциального оператора $\left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 1\right)$ для четного m ;

найти коэффициенты оптимальных квадратурных формул в пространстве Соболева $L_2^{(m,0)}(0,1)$;

определить порядки сходимости погрешностей оптимальных квадратурных формул, построенных в пространстве Соболева $L_2^{(m,0)}(0,1)$.

Объект исследования. Пространства Гильберта, фундаментальная решения, экстремал функция, дискретные аналоги дифференциальных операторов, оптимальные квадратурные формулы, функциональный погрешность.

Предмет исследования. Фундаментальная решения, экстремальные функции, оптимальные квадратурные формулы точных на фундаментальных решениях, дискретные аналоги дифференциальных операторов $\left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 1\right)$, функции из пространства $L_2^{(m,0)}(0,1)$.

Методы исследования. В научно-исследовательской работе использованы методы вычислительной математики, функционального анализа, теории многомерных функций, обобщенных функций, теория вычетов и теории функций с дискретными аргументами.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

найдена норма функционала погрешности квадратурной формулы, точных на фундаментальных решениях дифференциальных операторов высших порядков в пространстве Соболева $L_2^{(m,0)}(0,1)$ с использованием экстремальной функцией;

получена система уравнений типа Винера-Хопфа путем приравнивания к нулю частных производных коэффициентов, дающих минимальное значение нормы в пространстве Соболева $L_2^{(m,0)}(0,1)$;

построены дискретные аналоги $D_m[\beta]$ дифференциальных операторов $\left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 1\right)$ при четных m с использованием преобразование Фурье;

найлены выражения оптимальных коэффициентов квадратурных формул для случаев $m=1$ и $m=2$ пространстве Соболева $L_2^{(m,0)}(0,1)$ с использованием дискретных операторов;

определен порядки сходимости погрешностей оптимальных квадратурных формул, построенных в пространстве Соболева $L_2^{(m,0)}(0,1)$ с использованием оптимальных коэффициентов.

Практические результаты исследования следующее:

построенная оптимальная квадратурная формула была использована для получения оценок Архимедовой копулы для двумерной функции надежности и ее смеси;

результаты диссертации использованы для аппроксимации решения интегральных соотношений эффективных моделей моделирования газовых сетей.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов теории квадратурных формул, методов вычислительной математики, функционального анализа, теории функций дискретного аргумента и использование методов теории обобщенных функций, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость исследовательской работы объясняется тем, что построены оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления определенных интегралов в пространстве Соболева $L_2^{(m,0)}(0,1)$ с достаточной точностью, а также вычислением верхней оценки погрешностей.

Практическая значимость результатов исследования объясняется тем, что с помощью оптимальных квадратурных формул доказываются результаты равномерной справедливости оценок Архимедовой копулы, построенных для двумерной функции надежности и ее смеси с использованием методов численной аппроксимации определенных интегралов.

Внедрение результатов исследования. На основе новых научных результатов, полученных при построении оптимальных алгоритмов приближенного интегрирования, точных на фундаментальных решениях дифференциальных операторов высших порядков в пространстве Соболева $L_2^{(m,0)}(0,1)$:

построенная оптимальная квадратурная формула для приближенного вычисления интегралов в пространстве Гилберта была использована при реализации инновационного проекта ИЛ-5321091543 «Создание и моделирование топологической модели газовых сетей», осуществляемого в Ташкентском университете информационных технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий в 2022-2023 годах. (Ташкентский университет информационных

технологий имени Мухаммада ал-Хоразмий, справка 1561/05-2 от 22 апреля 2025 года). В результате удалось аппроксимировать решение интегральных уравнений для эффективных моделей моделирования газовых сетей;

построенная оптимальная квадратурная формула в пространстве $L_2^{(2,0)}(0,1)$ была использована для получения оценок Архимедовой копулы, построенных для двумерной функции надежности и ее смеси в практическом проекте UZB-Ind-2021-97 по теме «Прикладные статистические задачи для зависимых неполных многомерных данных». (Ташкентский филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, справка 01-01-70 от 24 апреля 2025 года). В результате удалось доказать результаты о равномерной справедливости оценок Архимедовой копулы, построенных для двумерной функции надежности и ее смеси.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационного исследования обсуждались на 10 научно-практических конференциях, в том числе, на 8 международных и 2 республиканской научно-практической конференции.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 18 научные работы, из них 7 входят в перечень научных изданий, предложенных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты докторских диссертаций, в том числе 2 опубликована в зарубежном журнале и 5 в республиканских изданиях, а также получено одно свидетельство об авторстве на компьютерную программу.

Объём и структура диссертации. Диссертация содержит 91 страниц и состоит из введения, трех глав, заключения и списка использованной литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и указана степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первом параграфе первой главы диссертации под названием **«Проблема приближенного вычисления определенных интегралов»** изложены сведения об алгебраических и вариационных подходах к приближенному вычислению интегралов. Во втором параграфе первой главы рассматривается задача построения оптимальных квадратурных формул в пространстве $L_2^{(m,0)}(0,1)$. То есть, мы рассматриваем квадратурную формулу в следующем виде:

$$\int_0^1 \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \varphi[\beta], \quad (1)$$

где $[\beta] = h\beta$ узлы, $\beta = \overline{0, N}$, $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $C[\beta]$ коэффициенты формулы

(1). $\varphi(x)$ функции является элементом пространства $L_2^{(m,0)}(0,1)$. То есть пусть элементы $\varphi(x)$ этого пространства будут действительными функциями, которые абсолютно непрерывны с точностью до производного порядка $(m-1)$ и интегрируются с квадратом обобщенной производной порядка m . Этот набор функций образует векторное пространство и образует гильбертово пространство $L_2^{(m,0)}(0,1)$ относительно следующего скалярного произведения.

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L_2^{(m,0)}} = \int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x) \psi^{(m)}(x) + \varphi(x) \psi(x) \right) dx. \quad (2)$$

Норма, соответствующая этому скалярному произведению, определяется как

$$\|\varphi\|_{L_2^{(m,0)}} = \left\{ \int_0^1 \left[\left(\varphi^{(m)}(x) \right)^2 + \varphi^2(x) \right] dx \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (3)$$

Разница между интегралом и квадратурной суммой в формуле (1) выше называется погрешностью квадратурной формулы (1) и определяется как

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \varphi[\beta].$$

Функционал погрешности, соответствующий указанной выше, равен

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \delta(x - h\beta). \quad (4)$$

Согласно неравенству Коши-Шварца имеем следующую оценку

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|\ell\|_{L_2^{(m,0)*}} \|\varphi\|_{L_2^{(m,0)}}.$$

Отсюда заключаем, что абсолютная погрешность квадратурной формулы (1) в пространстве $L_2^{(m,0)}(0,1)$ оценивается сверху с использованием нормы функционала погрешности ℓ в сопряженном пространстве $L_2^{(m,0)*}(0,1)$. Отсюда возникает следующая проблема:

Задача 1. Найти выражение для нормы функционала погрешности (4) этой квадратурной формулы (1).

Как видно из уравнения (4) выше, норма функционала погрешности зависит от коэффициентов $C[\beta]$ и узлов $[\beta] = h\beta$. Для построения

оптимальной квадратурной формулы в пространстве $L_2^{(m,0)}(0,1)$ нам необходимо решить следующую задачу.

Задача 2. Найти коэффициенты $C[\beta]$ удовлетворяющие равенству

$$\left\| \ell \right\|_{L_2^{(m,0)*}} = \inf_{C[\beta]} \left\| \ell \right\|_{L_2^{(m,0)*}}$$

в пространстве $L_2^{(m,0)}(0,1)$.

В третьем параграфе первой главы найдено выражение для нормы функционала погрешности (4) и первая задача полностью решена. Для вычисления нормы функционала погрешности воспользуемся понятием экстремальной функции ψ_ℓ , удовлетворяющей следующему равенству

$$(\ell, \psi_\ell) = \left\| \ell \right\|_{L_2^{(m,0)*}} \left\| \psi_\ell \right\|_{L_2^{(m,0)}}. \quad (5)$$

Так как пространство $L_2^{(m,0)}(0,1)$ является гильбертовым, то по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала существует единственная функция ψ_ℓ из пространства $L_2^{(m,0)}(0,1)$, для которой выполняется следующее равенство

$$(\ell, \varphi) = \langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{L_2^{(m,0)}} \quad (6)$$

и $\left\| \ell \right\| = \left\| \psi_\ell \right\|$, где $\langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{L_2^{(m,0)}}$ – скалярное произведение двух функций ψ_ℓ и φ из пространства $L_2^{(m,0)}(0,1)$. Займемся решением уравнения (6). Интегрируя правую часть уравнения (6) по частям, получаем

$$\begin{aligned} \langle \varphi, \psi_\ell \rangle_{L_2^{(m,0)}} &= \int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x) \psi_\ell^{(m)}(x) + \varphi(x) \psi_\ell(x) \right) dx = \\ &= \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \psi_\ell^{(m+k-1)}(x) \varphi^{(m-k)}(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 \left((-1)^m \psi_\ell^{(2m)}(x) + \psi_\ell(x) \right) \varphi(x) dx. \quad (7) \end{aligned}$$

Отсюда мы приходим к следующим двум случаям для нечетных и четных натуральных значений m , соответственно:

при m - нечетном

$$(\ell, \varphi) = - \int_0^1 \left(\psi_\ell^{(2m)}(x) - \psi_\ell(x) \right) \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \psi_\ell^{(m+k-1)(m+k-1)}(x) \varphi^{(m-k)}(x) \Big|_0^1, \quad (8)$$

и при m - четном

$$(\ell, \varphi) = \int_0^1 \left(\psi_\ell^{(2m)}(x) + \psi_\ell(x) \right) \varphi(x) dx + \sum_{k=1}^m (-1)^{k+1} \psi_\ell^{(m+k-1)}(x) \varphi^{(m-k)}(x) \Big|_0^1. \quad (9)$$

Сначала найдем экстремальную функцию для случая нечетных m . Для этого решим неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение при заданных краевых условиях:

$$\psi_\ell^{(2m)}(x) - \psi_\ell(x) = -\ell(x), \quad (10)$$

$$\psi_\ell^{(m+k-1)}(x) \Big|_{x=0}^{x=1} = 0, \quad k = \overline{1, m}. \quad (11)$$

Справедливо следующая

Теорема 1. Решение дифференциального уравнения (10) в пространстве $L_2^{(m,0)}(0,1)$ при краевых условиях (11)

$$\psi_\ell(x) = -\ell(x) * G_m(x) \quad (12)$$

является экстремальной функцией квадратурной формулы (1). Здесь,

$$G_m(x) = \frac{\text{sign}(x)}{2m} \cdot \left[sh(x) + \sum_{k=1}^{m-1} e^{x \cos \frac{\pi k}{m}} \cdot \cos \left(x \cdot \sin \frac{\pi k}{m} + \frac{\pi k}{m} \right) \right]. \quad (13)$$

Теперь найдем экстремальную функцию для случая четных m . Для этого решим неоднородное обыкновенное дифференциальное уравнение при заданных краевых условиях:

$$\psi_\ell^{(2m)}(x) + \psi_\ell(x) = \ell(x), \quad (14)$$

$$\psi_\ell^{(m+k-1)}(x) \Big|_{x=0}^{x=1} = 0, \quad k = \overline{1, m}. \quad (15)$$

Справедливо следующая

Теорема 2. Решение дифференциального уравнения (14) в пространстве $L_2^{(m,0)}(0,1)$ при краевых условиях (15)

$$\psi_\ell(x) = \ell(x) * G_m(x) \quad (16)$$

является экстремальной функцией квадратурной формулы (1). Здесь функция $G_m(x)$ является фундаментальным решением дифференциального оператора

$\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 1$. То есть,

$$G_m(x) = -\frac{\text{sign}(x)}{2m} \sum_{k=1}^m e^{x \cos \frac{(2k-1)\pi}{2m}} \cos \left(x \sin \frac{(2k-1)\pi}{2m} + \frac{(2k-1)\pi}{2m} \right). \quad (17)$$

Теперь найдем выражение для нормы функционала погрешности для произвольного m . Следующая теорема верна.

Теорема 3. Квадрат нормы функционала погрешности (5) в пространстве $L_2^{(m,0)}(0,1)$ определяется выражением

$$\|\ell\|_{L_2^{(m,0)*}}^2 = (-1)^m \left(\int_0^1 \int_0^1 G_m(x-y) dx dy - 2 \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \int_0^1 G_m(x-h\beta) dx + \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C[\beta] C[\gamma] G_m(h\beta-h\gamma) \right).$$

Здесь функция $G_m(x)$ вычисляется по формуле (13), когда m – нечетное, и по формуле (17), когда m – четное.

Поскольку норма функционала погрешности зависит от коэффициентов, то обозначим квадрат нормы функционала погрешности через $\Psi(C[0], C[1], \dots, C[N])$, который имеет следующий вид:

$$\Psi(C[0], C[1], \dots, C[N]) = (-1)^m \cdot \left(\int_0^1 \int_0^1 G_m(x-y) dx dy - 2 \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \int_0^1 G_m(x-h\beta) dx + \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N C[\beta] C[\gamma] G_m(h\beta-h\gamma) \right).$$

Теперь, взяв частные производные и приравняв их к нулю, приходим к следующей системе уравнений.

$$\sum_{\gamma=0}^N C[\beta] G_m(h\beta-h\gamma) = \int_0^1 G_m(x-h\beta) dx, \quad \beta = \overline{0, N}. \quad (18)$$

В системе уравнений (18) имеется $N+1$ неизвестных и $N+1$ уравнений. Эти уравнения позволяют определить оптимальное значение коэффициентов $C[\beta]$. Для решения этой системы уравнений воспользуемся методом Соболева. Для этого нам понадобится дискретный аналог дифференциального оператора порядка $(2m)$. В следующей главе мы займемся построением этого дискретного оператора.

Вторая глава диссертации под названием «**Дискретный аналог дифференциального оператора высшего порядка**» состоит из трех параграфов. В первом параграфе представлены некоторые определения, такие как обобщенные функции, преобразования Фурье и производные обобщенных функций. Во втором параграфе мы построим дискретный оператор $D_m[\beta]$, удовлетворяющий равенству

$$D_m[\beta] * G_m[\beta] = \delta[\beta]. \quad (19)$$

Здесь $\delta[\beta]$ – дискретная дельта функция, $G_m[\beta]$ – функция дискретного аргумента, соответствующая функции. Для случаев нечетных m , нам необходим дискретный аналог дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - 1$. То есть,

Теорема 4. Дискретный аналог $D_m[\beta]$ дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} - 1$, удовлетворяющий равенству (19) для нечетных натуральных m , имеет вид:

$$D_m[\beta] = \frac{m}{K_t} \cdot \begin{cases} \sum_{n=1}^{m-1} A_{t,n} \cdot \tau_n^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 2, \\ 1 + \sum_{n=1}^{m-1} A_{t,n}, & |\beta| = 1, \\ M_{t,1} - \frac{K_{t,1}}{K_t} + \sum_{n=1}^{m-1} \frac{A_{t,n}}{\tau_n}, & \beta = 0. \end{cases}$$

Здесь $K_t, K_{t,1}, M_{t,1}, A_k, \tau_k$ - известные величины и $|\tau_k| < 1$.

Если m - четно, то строим дискретный аналог $D_m[\beta]$ дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 1$. Прежде чем строить дискретный аналог дифференциального оператора, вычислим эту сумму

$$S = \sum_{\beta=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\beta - h\left(p + \frac{s_1 i}{2\pi}\right)\right) \left(\beta - h\left(p + \frac{s_2 i}{2\pi}\right)\right) \dots \left(\beta - h\left(p + \frac{s_{2m} i}{2\pi}\right)\right)}. \quad (20)$$

Здесь $s_k = \cos \frac{(2k-1)\pi}{2m} + i \sin \frac{(2k-1)\pi}{2m}$, $k = 1, 2, \dots, 2m$. При вычислении суммы (20) для удобства введем лемму.

Лемма 1. Сумма бесконечного ряда (20) равна следующей конечной сумме

$$S = -\frac{h\lambda}{m} \cdot \left(-\frac{2\pi i}{h}\right)^{2m} \cdot \sum_{k=1}^{m/2} \frac{a_{1,k}\lambda^2 + a_{2,k}\lambda + a_{1,k}}{\lambda^4 + b_{1,k}\lambda^3 + b_{2,k}\lambda^2 + 1}, \quad (21)$$

где $a_{1,k}, a_{2,k}, b_{1,k}, b_{2,k}, \lambda$ - известные величины.

Теорема 5. Дискретный аналог $D_m[\beta]$ дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 1$, удовлетворяющий равенству (19) для четных натуральных m , имеет вид:

$$D_m[\beta] = -\frac{m}{K_j} \cdot \begin{cases} M_{j,1} - K_{j,1} + \sum_{k=1}^{m-1} \frac{A_{j,k}}{\lambda_k}, & \beta = 0, \\ 1 + \sum_{k=1}^{m-1} A_{j,k}, & |\beta| = 1, \\ \sum_{k=1}^{m-1} A_{j,k} \cdot \lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta| \geq 2. \end{cases} \quad (22)$$

Здесь $K_j, K_{j,1}, M_{j,1}, A_{j,k}, \lambda_k$ - известные величины и $|\lambda_k| < 1$.

В третьем параграфе доказаны все свойства дискретного аналога дифференциального операторов $\frac{d^2}{dx^2} - 1$, $\frac{d^4}{dx^4} + 1$ и $\frac{d^6}{dx^6} - 1$. То есть,

Следствие 1. Дискретный аналог $D_1[\beta]$ дифференциального оператора $\frac{d^2}{dx^2} - 1$ удовлетворяет равенствам:

$$1. D_1[\beta] * e^{[\beta]} = 0, \quad 2. D_1[\beta] * e^{-[\beta]} = 0.$$

Далее, мы представляем важные результаты для дискретного аналога $D_2[\beta]$ дифференциального оператора $\frac{d^4}{dx^4} + 1$ для случая $m = 2$.

Следствие 2. Дискретный аналог $D_2[\beta]$ дифференциального оператора $\frac{d^4}{dx^4} + 1$ удовлетворяет равенствам:

$$1. D_2[\beta] * \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}[\beta]} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}[\beta]\right) \right) = 0, \quad 2. D_2[\beta] * \left(e^{\frac{\sqrt{2}}{2}[\beta]} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}[\beta]\right) \right) = 0,$$

$$3. D_2[\beta] * \left(e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}[\beta]} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}[\beta]\right) \right) = 0, \quad 4. D_2[\beta] * \left(e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}[\beta]} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}[\beta]\right) \right) = 0.$$

Теперь мы получаем следующие результаты для дискретного аналога $D_3[\beta]$ дифференциального оператора $\frac{d^6}{dx^6} - 1$.

Следствие 3. Дискретный аналог $D_3[\beta]$ дифференциального оператора $\frac{d^6}{dx^6} - 1$ удовлетворяет равенствам:

$$1. D_3[\beta] * e^{[\beta]} = 0, \quad 4. D_3[\beta] * e^{\frac{[\beta]}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta]\right) = 0,$$

$$\begin{aligned}
2. D_3[\beta] * e^{-[\beta]} &= 0, & 5. D_3[\beta] * e^{\frac{[\beta]}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta]\right) &= 0, \\
3. D_3[\beta] * e^{\frac{[\beta]}{2}} \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta]\right) &= 0, & 6. D_3[\beta] * e^{\frac{[\beta]}{2}} \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}[\beta]\right) &= 0.
\end{aligned}$$

Третья глава диссертации под названием «**Оптимальные коэффициенты, дающие безусловный минимум норме**» состоит из четырех параграфов. В первом параграфе приводится алгоритм нахождения оптимальных коэффициентов квадратурной формулы (1) для произвольного m в пространстве $L_2^{(m,0)}(0,1)$. Во втором абзаце найдены оптимальные коэффициенты для частных случаев $m=1$ и $m=2$. То есть,

Теорема 6. Оптимальные коэффициенты квадратурных формул вида (1) в пространстве $L_2^{(1,0)}(0,1)$ имеют следующий вид

$$C[\beta] = \begin{cases} \frac{e^h - 1}{e^h + 1}, & \beta = 0, \\ \frac{2(e^h - 1)}{e^h + 1}, & 1 \leq \beta \leq N - 1, \\ \frac{e^h - 1}{e^h + 1}, & \beta = N. \end{cases}$$

Теорема 7. Оптимальные коэффициенты квадратурных формул вида (1) в пространстве $L_2^{(2,0)}(0,1)$ имеют следующий вид

$$C[\beta] = \begin{cases} a + Y_1 + m_1 + n_1 \lambda_1^N, & \beta = 0, \\ a + m_1 \lambda_1^\beta + n_1 \lambda_1^{N-\beta}, & 1 \leq \beta \leq N - 1, \\ a + Y_2 + m_1 \lambda_1^N + n_1, & \beta = N. \end{cases}$$

Здесь a, Y_1, Y_2, m_1, n_1 - известны и $|\lambda_1| < 1$.

В третьем параграфе третьей главы вычислена норма функционала погрешности квадратурной формулы, построенной в пространствах $L_2^{(1,0)}(0,1)$ и $L_2^{(2,0)}(0,1)$. То есть,

Теорема 8. Квадрат нормы функционала погрешности квадратурной формулы вида (1) в пространстве $L_2^{(1,0)}(0,1)$ имеет вид

$$\|\ell\|_{L_2^{(1,0)}^*}^2 = 1 - \frac{2(e^h - 1)}{h(e^h + 1)}.$$

Теперь вычисляем $\|\ell\|_{L_2^{(2,0)*}}^2$, принадлежащий пространству $L_2^{(2,0)*}(0,1)$.

Теорема 9. Квадрат нормы функционала погрешности квадратурной формулы вида (1) в пространстве $L_2^{(2,0)}(0,1)$ имеет вид

$$\|\ell\|_{L_2^{(2,0)*}}^2 = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(\sin \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{\sqrt{2}}{2} + \cos \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{\sqrt{2}}{2} \right) - \\ - C[0] - C[N] - \frac{\sqrt{2}}{K} (N-1)a - Q_1 - Q_2.$$

Здесь a, Q_1, Q_2, K - известные величины.

В четвертом параграфе третьей главы погрешности оптимальных квадратурных формул, построенных в пространствах $L_2^{(1,0)}(0,1)$ и $L_2^{(2,0)}(0,1)$, а также обобщенных трапецидальных и оптимальных квадратурных формул, построенных в пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$, проверяются в нескольких функциях и сводятся в таблицу.

Сравнивались абсолютные значения погрешностей оптимальной квадратурной формулы и обобщенной формулы трапеций, построенных в пространстве Соболева, для которых были получены функции $\varphi_1(x) = \frac{1}{x+1}$, $\varphi_2(x) = e^x \sin(x)$ и $\varphi_3(x) = \cos(e^x)$. В таблице 1 абсолютная погрешность оптимальной квадратурной формулы обозначена как R_k $\left(R_k = \left| \int_0^1 \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N C[\beta] \varphi(h\beta) \right| \right)$, а абсолютная погрешность обобщенной формулы трапеций обозначена как R_t $\left(R_t = \left| \int_0^1 \varphi(x) dx - \frac{1}{N} \left(\varphi(0) + \varphi(1) + 2 \sum_{i=1}^{N-1} \varphi(hi) \right) \right| \right)$.

β	$\varphi_1(x)$		$\varphi_2(x)$		$\varphi_3(x)$	
N	R_k	R_t	R_k	R_t	R_k	R_t
10	$4.67 \cdot 10^{-5}$	$6.24 \cdot 10^{-4}$	$1.54 \cdot 10^{-3}$	$2.30 \cdot 10^{-3}$	$1.30 \cdot 10^{-4}$	$2.33 \cdot 10^{-4}$
100	$4.74 \cdot 10^{-7}$	$6.25 \cdot 10^{-6}$	$1.54 \cdot 10^{-5}$	$2.30 \cdot 10^{-5}$	$1.26 \cdot 10^{-6}$	$2.29 \cdot 10^{-6}$
1000	$4.70 \cdot 10^{-9}$	$6.25 \cdot 10^{-8}$	$1.54 \cdot 10^{-7}$	$2.30 \cdot 10^{-7}$	$1.26 \cdot 10^{-8}$	$2.30 \cdot 10^{-8}$

Таблица 1

Как видно из таблицы 1 выше, абсолютная погрешность оптимальной формулы квадратуры дала лучший результат, чем абсолютная погрешность обобщенной формулы трапеций. Теперь, чтобы увидеть порядок приближения, разложим $\|\ell\|_{L_2^{(1,0)*}}^2$ в ряд Тейлора относительно h и

$$\|\ell\|_{L_2^{(1,0)*}}^2 = \frac{1}{12}h^2 - \frac{1}{120}h^4 + O(h^5).$$

Отсюда видно, что порядок аппроксимации для случая $m=1$ построенной нами квадратурной формулы равен $O(h)$.

Теперь сравним значения погрешностей оптимальной квадратурной формулы, построенной в пространстве Соболева $L_2^{(2,0)}(0,1)$ и оптимальной квадратурной формулы, построенной в пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$, в некоторых функциях. Погрешности квадратурных формул, построенных в указанных пространствах в функциях

$$f_1(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) \sinh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) - \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right) \cosh\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right),$$

$$f_2(x) = e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right),$$

$$f_3(x) = \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)$$

приведем в таблице 2 для случая, когда число узлов равно 10, 100 и 1000. В этой таблице 2 погрешности R_L и R_W являются абсолютными погрешностями оптимальных квадратурных формул в пространствах $L_2^{(2,0)}(0,1)$ и $W_2^{(2,1)}(0,1)$ соответственно.

β	$f_1(x)$		$f_2(x)$		$f_3(x)$	
N	R_L	R_W	R_L	R_W	R_L	R_W
10	$3.13 \cdot 10^{-45}$	$7.07 \cdot 10^{-4}$	$3.11 \cdot 10^{-4}$	$1.98 \cdot 10^{-3}$	$2.53 \cdot 10^{-4}$	$3.60 \cdot 10^{-4}$
100	$2.01 \cdot 10^{-41}$	$7.76 \cdot 10^{-6}$	$2.57 \cdot 10^{-7}$	$2.17 \cdot 10^{-5}$	$2.08 \cdot 10^{-7}$	$3.96 \cdot 10^{-6}$
1000	$2.58 \cdot 10^{-38}$	$7.83 \cdot 10^{-8}$	$2.53 \cdot 10^{-10}$	$2.19 \cdot 10^{-7}$	$2.05 \cdot 10^{-10}$	$4 \cdot 10^{-8}$

Таблица 2.

Как видно из таблицы 2 выше, абсолютная погрешность оптимальной квадратурной формулы, построенной в пространстве $L_2^{(2,0)}(0,1)$, дала лучший результат, чем абсолютная погрешность оптимальной квадратурной формулы, построенной в пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена оптимальным алгоритмам приближенного интегрирования, точных на фундаментальных решениях дифференциальных операторов высших порядков.

Основные результаты исследования состоят в следующем:

1. Найдена экстремальная функция квадратурных формул в пространстве $L_2^{(m,0)}(0,1)$.
2. Получено выражение нормы функционала погрешности квадратурных формул в пространстве $L_2^{(m,0)}(0,1)$.
3. Получена система линейных уравнений типа Виннера-Хопфа для коэффициентов квадратурных формул в пространстве $L_2^{(m,0)}(0,1)$.
4. Построены дискретные аналоги $D_m[\beta]$ дифференциальных операторов и доказаны ряд их свойств.
5. Приведен алгоритм для произвольных коэффициентов оптимальных квадратурных формул в пространстве $L_2^{(m,0)}(0,1)$.
6. Вычислена норма функционала погрешности оптимальной квадратурной формулы в случае $m = 1$ и $m = 2$ в пространстве $L_2^{(m,0)}(0,1)$.
7. Найдена верхняя оценка погрешности оптимальной квадратурной формулы в пространстве $L_2^{(m,0)}(0,1)$.

**SCIENTIFIC COUNCIL DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
FOR THE AWARD OF ACADEMIC DEGREES AT THE
NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN**

**V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS,
TASHKENT STATE TRANSPORT UNIVERSITY**

DAVRONOV JAVLON RUSTAM UGLI

**OPTIMAL ALGORITHMS FOR APPROXIMATE INTEGRATION OF
EXACT ON FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF A HIGH-ORDER
DIFFERENTIAL OPERATOR**

01.01.03 – Computational and discrete mathematics

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF
PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

Tashkent – 2025

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number № B2025.1.PhD/FM1232.

The dissertation was completed at the V.I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan and at the Tashkent State Transport University.

Abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the website <http://ik-fizmat.nuu.uz/> and the «ZiyoNet» Information and educational portal <http://www.ziynet.uz/>.

Scientific supervisor:	Shadimetov Kholmat Makhkambaevich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, professor
Official opponents:	Hayotov Abdullo Rakhmonovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor Khudoyberganov Mirzoali Urazalievich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Leading organization:	Bukhara State University

Defense will take place « ____ » _____ 2025 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc/03/30/12/2019/FM.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered № ____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on « ____ » _____ 2025 year
(Mailing report № _____ on « ____ » _____ 2025 year)

M.M. Aripov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

Z.R. Rakhmonov
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

R.D. Alov
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

The purpose of the study is to construct optimal algorithms for approximate integration that are accurate on fundamental solutions of higher-order differential operators, calculate the norm of the corresponding error functional, and apply optimal quadrature formulas for the numerical solution of integral equations.

The object of the study consists of Hilbert spaces, fundamental solutions, extremal function, discrete analogues of differential operators, optimal quadrature formulas, functional error.

The scientific novelty of the research work is as follows:

the norm of the error functional of the quadrature formula, exact on fundamental solutions of differential operators of higher orders in the Sobolev space $L_2^{(m,0)}(0,1)$ using the extremal function was found;

a system of Wiener-Hopf type equations was obtained by equating to zero the partial derivatives of the coefficients that give the minimum value of the norm in the Sobolev space $L_2^{(m,0)}(0,1)$;

discrete analogs of $D_m[\beta]$ differential operators $\left(\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 1\right)$ for even m using the Fourier transform was constructed;

expressions for the coefficients of optimal quadrature formulas for cases $m = 1$ and $m = 2$ in the Sobolev space $L_2^{(m,0)}(0,1)$ using the discrete operators were found;

the orders of convergence of the errors of optimal quadrature formulas constructed in the Sobolev space $L_2^{(m,0)}(0,1)$ using optimal coefficients are determined.

Implementation of the research results. Based on new scientific results obtained in the construction of optimal algorithms for approximate integration, exact on fundamental solutions of differential operators of higher orders in Sobolev space $L_2^{(m,0)}(0,1)$:

the constructed optimal quadrature formula for the approximate calculation of integrals in the Gilbert space was used in the implementation of the innovative project IL-5321091543 "Creation and modeling of a topological model of gas networks", carried out at the Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi in 2022-2023. (Tashkent University of Information Technologies named after Muhammad al-Khwarizmi, certificate 1561 / 05-2 dated April 22, 2025). As a result, it was possible to approximate the solution of integral equations for effective models of gas network modeling;

the constructed optimal quadrature formula in the space $L_2^{(2,0)}(0,1)$ was used to obtain estimates of the Archimedean copula constructed for the two-dimensional reliability function and its mixture in the practical project UZB-Ind-2021-97 on the topic "Applied statistical problems for dependent incomplete multivariate data". (Tashkent branch of the Moscow State University named after M.V. Lomonosov, certificate 01-01-70 dated April 24, 2025). As a result, it was possible to prove the

results on the uniform validity of the Archimedean copula estimates constructed for the two-dimensional reliability function and its mixture.

Approbation of the research results. The main results of the dissertation were discussed at 8 international and 2 national scientific and practical conferences.

Publication of the research results. On the topic of the dissertation, 18 scientific papers were published, of which 7 articles were published in journals that are included in the list of scientific publications proposed by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for the defense of dissertations for the degree of Doctor of Philosophy (PhD), including 2 articles published in foreign journals, 5 in national scientific publications. In addition, one certificate of official registration of a program for computing systems was received.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, a list of references and applications. The volume of the dissertation is 91 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo'lim (I часть; Part I)

1. Boltayev A.K. Davronov J.R. $L_2^{(1,0)}(0,1)$ Sobolev fazosida Sard ma'nosida optimal kvadratur formula koeffitsiyentlari. // Matematika instituti byulleteni 2021, -№ 5, -pp. 40-49. (01.00.00; №17)

2. Boltaev A.K. Davronov J.R. A discrete analogue of the operator $\frac{d^4}{dx^4} + 1$ and its properties. // Bulletin of the Institute of Mathematics 2022, -№ 3, pp.41-49. (01.00.00; №17)

3. Давронов Ж.Р. Об одной дискретной системе типа Винера-Хопфа. // Проблемы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, 2022, -№ 5/1(44). -С. 84-92. (01.00.00; №9)

4. Shadimetov Kh.M., Davronov J.R. On an optimal quadrature formula in the sense of sard in the sobolev space $L_2^{(2,0)}(0,1)$. // Uzbek Mathematical Journal 2023, -Vol. 67, -Issue 1, -pp.120-128 (01.00.00; №6)

5. Давронов Ж.Р. Дискретный аналог дифференциального оператора восьмого порядка. // Проблемы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, 2023. -№ 2/1(48). -С. 100-108. (01.00.00; №9)

6. Shadimetov Kh.M. Davronov J.R. Construction of the optimal quadrature formula in $L_2^{(2,0)}(0,1)$ space by Sobolev's method. // AIP Conference Proceedings, 2024, 3004, 060019. <https://doi.org/10.1063/5.0199831> (**Scopus IF:=0.4**)

7. Shadimetov Kh.M. Davronov J.R. The discrete analogue of high-order differential operator and its application to finding coefficient of optimal quadrature formulas. // Journal of Inequalities and Applications, 2024, 2024:46, <https://doi.org/10.1186/s13660-024-03111-7> (**Scopus, IF:=1.5**)

II bo'lim (II часть; Part II)

8. Давронов Ж.Р. О решении первой половины основной задачи теории квадратурных формул в пространстве Соболева // Тезисы Международной научно-практической конференции “современные проблемы прикладной математики и Информационных технологий” 15 апреля, Бухара, -2021, -С. 208.

9. Shadimetov X.M., Davronov J.R. $\frac{d^4}{dx^4} + 1$ Differensial operatorning $D_2[\beta]$ diskret analogi // “Дифференциальные уравнения и родственные проблемы анализа”. международная научная конференция. Бухара. 4-5 ноября. 2021. –С. 306-307

10. Davronov J.R. Properties of the discrete analogue to the differential operator// The international scientific conference “Modern problems of the applied mathematics and information technology – Al-Khorezmiy 2021”, Fergana, November 15–17, 2021, p. 264

11. Davronov J.R. Optimal kvadratur formulaning ekstremal funksiyasi// “Zamonaviy matematikaning nazariy asoslari va amaliy masalalari” Respublika ilmiy-amaliy anjumani materiallari to’plami II, Andijon, 2022-yil, 28-mart, b. 177-179.

12. Davronov J.R. $L_2^{(2,0)}(0,1)$ fazosida Sard ma’nosida optimal kvadratur formulaning koeffitsiyentlari// Amaliy matematika va axborot texnologiyalarining zamonaviy muammolari xalqaro ilmiy-amaliy Anjuman materiallari, Buxoro, 2022-yil, 11-12-may, b. 273-274.

13. Болтаев А.К., Давронов Ж.Р. Система для нахождения оптимальных коэффициентов квадратурных формул в пространстве Соболева. Uzbekistan-Malaysia international conference «Computational models and technologies», Tashkent, September 16-17, 2022, p.52

14. Давронов Ж.Р., Аликулов А.Б. Элемент Рисса одной квадратурной формулы в смысле Сарда// “Актуальные вопросы алгебры и анализа”, Республиканская научно-практическая конференция, Термиз, 18-19 ноября, 2021, -С. 268-270.

15. Davronov J.R. $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}} + 1$ differensial operatorning $D_m[\beta]$ diskret analogi// “Matematik modellashtirish va axborot texnologiyalarining dolzarb masalalari” xalqaro ilmiy-amaliy anjuman tezislari to’plami. Nukus, 2023-yil, 2-3 may, b. 49-50.

16. Davronov J.R. Properties of the some discrete analogue// Abstracts of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (TWMS Congress-2023), Turkestan, September 20-23, 2023, pp. 414.

17. Davronov J.R. Yuqori tartibli differensial operatorning diskret analogi// Differensial tenglamalarning zamonaviy muammolari va ularning tadbirlari mavzusidagi xalqaro ilmiy konferensiyaning tezislari to’plami 2-qism, Toshkent, 2023-yil, 23-25-noyabr, b.135-136.

18. Shadimetov X.M., Boltayev A.K., Davronov J.R. Optimal kvadratur formulaning xatolik funksionali normasiga shartsiz minimum beruvchi koeffitsiyentlarni topish algoritmi// O‘zbekiston Respublikasi Adliya Vazirligi huzuridagi Intelektual mulk agentligi, № DGU 46017, 19.12.2024

Avtoreferat «Public Publish Printing» tahririyatida tahrirdan o‘tkazildi.

2770248



Bosishga ruxsat etildi: 15.07.2025-yil
Bichimi 60x84 $\frac{1}{16}$, “Times New Roman”
garniturada raqamli bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog‘i 5,0. Adadi: 100. Buyurtma: №54.

«Public Publish Printing» MChJ
bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent, M. Ulug‘bek tum., Moylisoy, 22.