

**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI
ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI
ILMIY KENGASH**

QORAQALPOQ DAVLAT UNIVERSITETI

TLEUOV KUATBAY ORAZBAYEVICH

**PSEVDOPARABOLIK TENGLAMALAR UCHUN YUQORI ANIQLIKDAGI
AYIRMALI SXEMALAR**

01.01.03-Hisoblash matematikasi va diskret matematika

**Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Toshkent – 2025

**Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по
физико-математическим наукам**

**Content of dissertation abstract of the doctor of philosophy (PhD) on
physical and mathematical sciences**

Tleuov Kvatbay Orazbayevich

Pseudoparabolic tenglamalar uchun yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalar 3

Тлеуов Куатбай Оразбаевич

Разностные схемы повышенной точности для псевдопараболических
уравнений 23

Tleuov Kvatbay Orazbayevich

High-order accuracy difference schemes for pseudoparabolic equations..... 43

E‘lon qilingan ishlar ro‘yxati

Список опубликованных работ

List of published works 47

**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI
ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI
ILMIY KENGASH**

QORAQALPOQ DAVLAT UNIVERSITETI

TLEUOV KUATBAY ORAZBAYEVICH

**PSEVDOPARABOLIK TENGLAMALAR UCHUN YUQORI ANIQLIKDAGI
AYIRMALI SXEMALAR**

01.01.03-Hisoblash matematikasi va diskret matematika

**Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Toshkent – 2025

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2025.1.PHD/FM1233 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Berdaq nomidagi Qoraqalpoq davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (ik-fizmat.nuu.uz) va "Ziyonet" Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:

Utebaev Dauletbay

fizika-matematika fanlari doktori, professor

Rasmiy opponentlar:

Normurodov Chori Begaliyevich

fizika-matematika fanlari doktori, professor

Xudoyberganov Mirzoali O'razaliyevich

fizika-matematika fanlari doktori, professor

Yetakchi tashkilot:

Jahon iqtisodiyoti va diplomatiya universiteti

Dissertatsiya himoyasi O'zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 raqamli Ilmiy kengashning 2025-yil "21" avgust soat 14⁰⁰ da majlisida bo'lib o'tadi (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 227-12-24, faks: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

133 Dissertatsiya bilan O'zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.: (99871) 246-02-24).

Dissertatsiya avtoreferati 2025-yil "08" avgust kuni tarqatildi.

(2025-yil "28" may da 3-raqamli reestr bayonnomasi)

M.M. Aripov

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi,
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Z.R. Raxmonov

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy
kotibi, fizika-matematika fanlari doktori,
professor

R.D. Aloyev

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash
qoshidagi ilmiy seminar raisi fizika-
matematika fanlari doktori, professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahonda olib borilayotgan ko‘plab ilmiy va amaliy tadqiqotlar tutash muhitlar mexanikasining nostatsionar jarayonlarning matematik modellari uchun aniqligi yuqori bo‘lgan sonli usullarni yaratishga bag‘ishlangan. Bunda, to‘lqin tenglamalari uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalar, gaz va suyuqliklar mexanikasi, biologik va astrofizikadagi jarayonlarning psevdoparabolik tenglamalar bilan ifodalanuvchi matematik modellari uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni yechishga alohida e‘tibor berilmoqda. Silliqlik va nosilliqlik yechimlar sinflarida Aller va Aller-Lykov tenglamalari uchun yuqori aniqlikdagi ko‘p parametrlilik ayirmali sxemalarni yaratish hisoblash matematikasi va matematik modellashtirish sohalarining tadqiqot obyekti hisoblanadi. Shu sababli, sohalarida dastlabki differensial masala yechimining silliqlikiga tabiiy talablarda yuqori aniqlikdagi tejamkor ayirmali sxemalarini qurish muhim vazifalardan biri bo‘lib qolmoqda.

Jahonda amaliy matematika sohasidagi tadqiqotlarning eng muhim vazifalaridan biri matematik fizikaning chiziqli va nochiziqli tenglamalarini, asosan analitik yechimini topish murakkab bo‘lgan Sobolev tipidagi tenglamalarini, shu jumladan, psevdoparabolik tenglamalarini yechish uchun yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalarni qurish ilmiy-tadqiqot ishlari olib borilmoqda. Shu munosabat bilan Sobolev tipidagi psevdoparabolik tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni sonli yechishning yuqori aniqlikdagi usullarini ishlab chiqish zarur. Shu bois, Sobolev tipidagi psevdoparabolik tenglamalar uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarni yechishga yo‘naltirilgan yuqori aniqlikdagi ko‘p parametrlilik turg‘un sonli usullarni ishlab chiqish zamonaviy matematik fizika va hisoblash usullari sohasidagi dolzarb va maqsadli ilmiy tadqiqot yo‘nalishlaridan biri hisoblanadi.

Respublikamizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tadbiqiga ega bo‘lgan fizika, mexanika, ekologiya va energetika sohalaridagi amaliy masalalarning matematik modellariga sonli usullarini ishlab chiqish yuzasidan keng qamrovli chora-tadbirlar amalga oshirilib, muayyan natijalarga erishilmoqda. So‘nggi yillarda aniqligi yuqori turg‘un va tejamkor ayirmali sxemalarni ishlab chiqish, Sobolev tipidagi yuqori tartibli vaqt xosilasiga nisbatan yechilmagan nostatsionar tenglamalar uchun yuqori aniqlikdagi ayirmali qurish bo‘yicha sezilarli natijalarga erishildi. “Funksional analiz, algebra, differensial tenglamalar, matematik fizika, matematik modellashtirish, hisoblash matematikasi va diskret matematika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika” ustuvor yo‘nalishlari bo‘yicha jahon standartlari darajasida ilmiy natijalarga erishish O‘zR FA V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatining asosiy vazifalaridan biri hisoblanadi¹. Qarorni amalga oshirish uchun matematik fizikaning nostatsionar tenglamalari uchun yuqori aniqlikdagi sonli usullarni qurish va tadqiq qilish muhim ahamiyat kasb etmoqda.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 28-yanvardagi PF-60-son “2022–2026-yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida” gi Farmoni, 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi

¹ O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-son Qarori.

ta'lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi Qarori, 2019-yil 8-oktabrdagi PF-5847-son "O'zbekiston Respublikasi oliy ta'lim tizimini 2030-yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to'g'risida"gi Farmoni, 2019-yil 27-apreldagi PQ-3682-son "Innovatsion g'oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi Qarori va 2021-yil 1-apreldagi PF-6198-son "Ilmiy va innovatsion faoliyatni rivojlantirish bo'yicha davlat boshqaruvi tizimini takomillashtirish to'g'risida"gi Farmoni hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya ishi muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga bog'liqligi. Ushbu tadqiqot O'zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalar rivojlanishning IV. "Matematika, mexanika va informatika" ustuvor yo'nalishiga mos keladi.

Muammoning o'rganilganlik darajasi. Ma'lumki, matematik fizika masalalarini yechishning sonli usullarini ishlab chiqishga A.N. Tixonov, A.A. Samarskiy, G.I. Marchuk, N.N. Yanenko, S.K. Godunov, R. Richtmayer, O.A. Ladyzhenskaya, V.L. Makarov, A.V. Gulin, M.N. Moskalkov, P.N. Vabishchevich, P.P. Matus, M.M. Aripov, R.D. Alov, J. Fromm, E. Tarkel, V. Wendroff va boshqada ko'plab olimlarning tadqiqotlari fundamental hissa qo'shdi. Parabolik va psevdoparabolik tenglamalar uchun boshlang'ich chegaraviy masalalarni yechishning sonli usullari alohida e'tiborga loyiqdir. Bunday masalalar uchun analitik va sonli tadqiqotlar P.Ya. Polubarina-Kochina, E.S. Dzektsler, S.A. Gabov, A.G. Sveshnikov, A.B. Alshin, M.O. Korpusov, Yu.D. Pletner, N.N. Kalitkin, A.M. Naxushev, A. Ashyralyyev, Ch. Ashyralyev, E.A. Alshina, A.A. Zamishlyeva, B.V. Rogov, M.X. Beshtokov, Z.Ya. Naxusheva, M.A. Kerefov, A.I. Kojanov, S.X. Gekkieva, B.S. Ablabekov va boshqalar tomonidan amalga oshirilgan. Shu kabi masalalarni yechishning yuqori aniqlikdagi sonli usullarini qurish va tadqiq qilish M.M. Moskalkov, P.N. Vabishchevich, P.P. Matus, E.A. Alshina, A.A. Zamishlyeva, M.M. Aripov, D. Utebaev va boshqalarning ishlarida amalga oshirilgan. Matematik fizikaning nosilliq yechimlarga ega nostatsionar tenglamalari uchun yuqori aniqlikdagi sonli usullar A.A. Samarskiy, G.I. Marchuk, V.L. Makarov, V.V. Shaydurova, V.I. Agoshkov, M.M. Moskalkov, M.M. Aripov, D. Utebaevlarning ilmiy ishlarida qurilgan va tadqiq qilingan. Ularning ishlarida, asosan, chekli ayirmalar va chekli elementlar usullariga asoslangan yuqori approksimatsiyaga ega ayirmali sxemalarning aniqlik baholari olingan. Shuningdek, bunday tadqiqotlar Sh.E. Mekaladze, D. Duglas, A.A. Samarskiy, D. Brembl, I.V. Fryazinov, P.P. Matus, B.D. Utebaev, V.T.K. Tuyen, T. Vanglarning ilmiy ishlarida o'rganilgan, bu yerda parabolik va giperbolik tipdagi chiziqli va kvazichiziqli tenglamalar uchun yuqori aniqlikdagi kompakt, monoton ayirmali sxemalar ishlab chiqilgan. Shuningdek, N.N. Kalitkin, A.B. Alshin, E.A. Alshinalarning ilmiy ishlarida Sobolev tipidagi nostatsionar tenglamalar uchun kvazitengo'lchovli to'rlarda ikkinchi tartibli aniqlikga ega ayirmali sxemalar qaralgan. Xuddi shunday tadqiqotlar K. Aziz, A. Sellari, V.H. Hundsdorfer, J.C. Verver ishlarida ham olib borilgan.

Parabolik va psevdoparabolik tenglamalarni fazo bo'yicha chekli ayirmalar usuli yoki chekli elementlar usuli asosida approksimatsiyalashda (to'g'riklar usuli) katta o'lchovli birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi olinadi. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalar M.M. Moskalkov, P.N. Vabishchevich, M.M. Aripov, D. Utebyevlarning ilmiy ishlarida o'rganilgan.

Respublikamizda chiziqli va nochiziqli xususiy hosilali differensial tenglamalarning sonli usullarini qurish va tadqiq qilish bilan M.M. Aripov, B. Xujayorov, R.D. Aloyev, X. Shadmetov, Ch.B. Normurodov, A.R. Xayotov, A.S. Matyoqubov, Z.R. Rahmonov, Sh.A. Sa'dullaeva va boshqalar shug'ullanadi. Xususan, M.M. Aripov, Z.R. Rahmonov, Sh.A. Sa'dullaevalarning ilmiy ishlari nochiziqli parabolik tipdagi xususiy hosilali differensial tenglamalarni matematik modellashtirish va sonli yechishga bag'ishlangan. R.D. Aloyev, A.S. Matyoqubovlarning ishlari birinchi tartibli giperbolik tipdagi tenglamalar sistemalarini yechishning sonli usullariga bag'ishlangan. B. Xujayorov, X. Shadmetov, Ch.B. Normurodov, A.R. Xayotovlarning ilmiy ishlari esa matematik fizikaning turli masalalarini yechishning sonli usullariga bag'ishlangan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta'lim muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog'liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Berdaq nomidagi Qoraqalpoq davlat universitetining "Amaliy matematikaning chiziqli va nochiziqli nostatsionar tenglamalarini yechishning sonli usullari" ilmiy-tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi silliq va nosilliq yechimlar sinflarida Aller va Aller-Lykov tenglamalari uchun yuqori aniqlikdagi ko'p parametrli ayirmali sxemalarni qurish, shuningdek, ularning turg'unlik shartlarini, yaqinlashish va aniqlik baholarini olishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

issiqlik va namlikni ko'chirish tenglamasi uchun silliq yechimlar sinfida chekli ayirmalar usuli asosida yuqori aniqlikka ega oshkor va oshkormas ayirmali sxemalarini ishlab chiqish;

silliq va nosilliq yechimlar sinflarida Aller va Aller-Lykov tenglamalari uchun yuqori aniqlikdagi oshkor va oshkormas ayirmali sxemalarni ishlab chiqish;

umumlashgan yechimlarga ega ko'p o'lchovli psevdoparabolik tenglama uchun ko'p parametrli ayirmali sxemalarini qurish va tadqiq qilish;

Aller va Aller-Lykov tenglamalari uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalar yechimlarining silliqligiga minimal talablarda yaqinlashish va aniqlik aprior baholarini olish.

Tadqiqotning obykti Aller va Aller-Lykov tenglamalari uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalar.

Tadqiqotning predmeti Aller va Aller-Lykov tenglamalari uchun boshlang'ich-chegaraviy masalalarga yuqori tartibli aniqlikdagi sonli usullarni ishlab chiqish.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiya ishida algebra, funksional analiz, differensial tenglamalar nazariyasi, hisoblash matematikasi, sonli modellashtirish, shuningdek, algoritmlash texnologiyasi usullaridan foydalanildi.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

issiqlik va namlik ko‘chish tenglamasi uchun silliq yechimlar sinfida yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalar qurilgan, approksimatsiya xatoligi, turg‘unlik shartlari va aniqlik baholari olingan;

silliq va nosilliq yechimlar sinflarida Aller tenglamasi uchun chekli ayirmalar va chekli elementlar usullarining yuqori aniqlikdagi ko‘p parametrlil ayirmali sxemalari ishlab chiqilgan;

zaif metrikada bir va ko‘p o‘lchovli Aller-Lykov tenglamasi uchun ko‘p parametrlil ayirmali sxemalar qurilgan hamda turg‘unlik shartlari olingan va yaqinlashish tezligi baholangan;

Aller va Aller-Lykov tenglamalari uchun qo‘yilgan boshlang‘ich-chegaraviy masalalarning analitik yechimi silliqlikiga minimal talablarda ayirmali sxemalar orqali olingan sonli yechim va analitik yechim o‘rtasidagi aniqlik baholari keltirilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

chekli ayirmalar va chekli elementlar usullari asosida silliq va nosilliq yechimlar sinflarida psevdoparabolik tenglamalarni sonli yechish uchun yangi oshkor va oshkormas ayirmali sxemalar qurilgan;

Aller va Aller-Lykov tenglamalari uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalarga yuqori aniqlikdagi algoritmlar qurilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Dissertatsiyada olingan tasdiqlarning ishonchliligi funksional analiz va sonli usullar nazariyasining usullaridan foydalanib qat‘iy isbotlangan teoremlar bilan izohlanadi, shuningdek, hisoblash eksperimenti asosida nazariy xulosalarni tasdiqlash bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati.

Dissertatsiyada olingan natijalarning ilmiy ahamiyati shundan iboratki, aniqlik darajasi yuqori bo‘lgan yangi oshkor va oshkormas ayirmali sxemalar filtratsiya nazariyasi, yarimo‘tkazgichlar fizikasining amaliy masalalarini sonli yechish va ayirmali sxemalar nazariyasini rivojlantirishda qo‘llanilishi mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati shundan iboratki, yangi oshkor va oshkormas ayirmali sxemalar, shuningdek, chekli ayirmalar va chekli elementlar usullari asosida qurilgan algoritmlar va dasturlardan turli xil xususiy hosilali psevdoparabolik tenglamalarni sonli yechish uchun foydalanish mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Bir o‘lchovli va ko‘p o‘lchovli psevdoparabolik tenglamalar uchun yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalarni qurish bo‘yicha olingan natijalar quyidagi sohalarda qo‘llanilgan:

Aller va Aller-Lykov psevdoparabolik tenglamalar uchun qurilgan chekli ayirmalar usulining yuqori aniqlikdagi oshkor va oshkormas ayirmali sxemalari asosida filtratsiya masalalarini taqribiy yechish uchun yaratilgan optimal ayirmalar usuli va bu usulning approksimatsiya xatoligi, turg‘unligi va aniqligi bo‘yicha olingan natijalardan Ф3-201905171 “G‘ovak muhitlarda suyuqlik va gazlarni anomal filtrlash jarayonini tadqiq etish uchun gidrodinamik modellar va samarali algoritmlar” mavzusidagi amaliy loyihada ixtiyoriy filtratsiya sohasida g‘ovak muhitdagi neft va gaz filtratsiya masalasini hal qilishning parallel hisoblash algoritmini yaratishda foydalanilgan (O‘zR FA V.I. Romanovskiy nomidagi matematika institutining 2025-

yil 17-fevraldagi 2/95-sonli ma'lumotnomasi). Ilmiy natijalarning tadqiq etilishi gaz va neft konlarini o'zlashtirishning ko'rsatkichlarini aniqlash bo'yicha hisoblash natijalarini vizuallashtirish uchun dasturiy modular ishlab chiqish imkonini bergan.

Pseudoparabolik tenglamalar uchun qurilgan chekli ayirmalar usulining yuqori aniqlikdagi oshkor va oshkormas ayirmali sxemalari Qoraqalpog'iston Respublikasi Ekologiya, atrof-muhitni muhofaza qilish va iqlim o'zgarishi vazirligi huzuridagi ilmiy laboratoriyada Orol dengizi mintaqasining tabiiy muhiti uchun yuzaga kelishi mumkin bo'lgan salbiy oqibatlarni bashorat qilish, baholash to'g'risida ma'lumot olish va Orol mintaqasida atrof-muhit va suv resurslarining sifatini yaxshilash bo'yicha xulosalar qabul qilishda foydalanilgan (Qoraqalpog'iston Respublikasi Ekologiya, atrof-muhitni muhofaza qilish va iqlim o'zgarishi vazirligining 2025-yil 6-fevraldagi 02/18-436-sonli ma'lumotnomasi). Olingan ilmiy natijalarning qo'llanilishi Orol mintaqasining ekotizimlarini baholash va dasturiy ta'minot tizimini yaratish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Dissertatsiya ishi natijalari 7 ta ilmiy-amaliy konferensiyalarda, jumladan, 5 ta xalqaro va 2 ta respublika miqyosida o'tkazilgan ilmiy-amaliy anjumanlarda muhokamadan o'tgan.

Tadqiqot natijalarining e'lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo'yicha jami 16 ta ilmiy ishlar chop etilgan, shulardan 9 tasi O'zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasi ro'yxatiga kiritilgan ilmiy nashrlarda, shu jumladan, 3 tasi xorijiy ilmiy jurnallarda chop etilgan. Bundan tashqari, kompyuter dasturlari uchun 2 ta mualliflik guvohnomasi olingan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish, uch bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati va ilovalardan iborat. Dissertatsiya hajmi 104 bet.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Dissertatsiyaning **kirish qismida** dissertatsiya mavzusining dolzarbligi asoslangan, tadqiqotning O'zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalar rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga mosligi ko'rsatilgan, dissertatsiya mavzusi bo'yicha xorijiy ilmiy tadqiqotlar sharhi va masalaning o'rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi va vazifalari shakllantirilgan, tadqiqot obyekti va predmeti aniqlangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo'yicha ma'lumotlar berilgan.

Dissertatsiyaning "**Issiqlik va namlikni ko'chirish tenglamasi uchun ayirmali sxemalar**" deb nomlangan **birinchi bobida** ba'zi yordamchi materiallar keltirilgan, keyingi tadqiqotlar uchun zarur bo'lgan materiallar berilgan. Chekli ayirmalar usuli asosida umumlashgan Aller tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalani yechishning yuqori aniqlikdagi sonli usuli ishlab chiqilgan va tadqiq qilingan. Qurilgan ayirmali sxemaning turg'unligi va yaqinlashishi isbotlangan va ular asosida aniqlik baholari olingan. Hisoblash eksperimenti yordamida sxemalar sinovdan o'tkazilgan va ularning qiyosiy tahlili amalga oshirilgan. Shuningdek, ko'p o'lchovli pseudoparabolik tenglama uchun birinchi chegaraviy masalani yechish uchun yuqori aniqlikdagi sonli usul ishlab chiqilgan va tadqiq qilingan. Ayirmali sxemalarning turg'unlik nazariyasi

natijalari asosida aprior baholar olingan va ular asosida qurilgan algoritmlarning ikkala o'zgaruvchi bo'yicha to'rtinchi tartibli tezlik bilan yaqinlashishi isbotlangan. Hisoblash eksperimenti asosida nazariy ma'lumotlarni tasdiqlovchi test hisoblari olib borilgan.

Birinchi paragrafda ba'zi yordamchi materiallar keltirilgan.

Ikkinchi paragrafda $\bar{Q}_T = \{(x,t), 0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T\}$ yopiq fazo-vaqt sohasida bir o'lchovli Aller tenglamasi uchun quyidagi boshlang'ich-chegaraviy masala qaralgan:

$$\theta \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \mu \frac{\partial}{\partial t}(Lu) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad (1)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega}, \quad (2)$$

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \in (0,T]. \quad (3)$$

Bu yerda $Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $Q_T = \bar{Q}_T \cap \Gamma$, θ, μ - doimiylar.

(1) tenglama dastlab fazoviy o'zgaruvchilar bo'yicha approksimatsiyalangan, natijada birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun quyidagi Koshi masalasi olingan:

$$\bar{D} \frac{du_h}{dt} + \bar{A}u_h = \bar{f}_h, \quad t \in (0,T], \quad (4)$$

$$u_h(0) = u_{h,0}, \quad x_i \in \bar{\omega}_h, \quad (5)$$

bu yerda $\bar{D} = \theta E - \mu \bar{\Lambda}$, $\bar{A} = -\bar{\Lambda}$ ayirmali operatorlar $\theta E + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ va $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ differensial operatorlarni fazo bo'yicha tortinchi tartib bilan approksimatsiyalaydi.

So'ngra (4), (5) Koshi masalasi quyidagi ayirmali sxema bilan approksimatsiyalanadi:

$$\bar{D}_t y_i + \bar{A}y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \varphi, \quad y^0 = u_0, \quad y^1 = u_1, \quad (6)$$

$$\bar{D}u_1 = \bar{\Lambda}u_0 + f(x,0),$$

$$y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y + \sigma_2 \check{y} = y + \tau(\sigma_1 - \sigma_2)y_i + \frac{\tau^2}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)y_{\bar{i}t}.$$

Ayirmali sxemalarning turg'unlik nazariyasi natijalari asosida (6) ayirmali sxema yechimining aprior bahosi olindi va ular asosida quyidagi natija isbotlandi.

1-teorema. Faraz qilaylik, $\sigma_1 + \sigma_2 > 0.5$, $\sigma_1 \geq \sigma_2$ shartlar bajarilsin. U holda (6) ayirmali sxemaning yechimi (1)–(3) differensial masalaning silliq yechimiga yaqinlashadi va

$$\|y(t) - u(t)\|_A \leq M(\tau^2 + h^4), \quad y(t), u(t) \in H_h$$

aniqlik bahosi o'rinli bo'ladi.

Bu yerda H_h, H uzluksiz funksiyalar fazosiga mos diskret funksiyalar fazosi.

Paragraf oxirida test hisoblari natijalari keltirilgan.

Uchinchi paragraf quyidagi ko‘p o‘lchovli boshlang‘ich-chegaraviy masala uchun yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalarni qurish va tadqiq qilishga bag‘ishlangan.

$$\frac{\partial}{\partial t}(Lu - \theta u) + \mu^2 Lu + \lambda u = -g(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (7)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma, \quad (8)$$

$$u|_{x \in \Gamma = \partial\bar{\Omega}} = \mu(t), \quad t \in (0, T], \quad (9)$$

bu yerda $Lu = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}$, $\theta, \mu, \lambda - const$.

(7)–(9) masala uchun quyidagi ayirmali sxemalar qurilgan va tadqiq qilingan:

1.1⁰-sxema - fazo bo‘yicha to‘rtinchi tartibli ayirmali approksimatsiyaga

$$\bar{D} \frac{du_h}{dt} + \bar{A}u_h = \bar{g}_h, \quad t \in (0, T], \quad u_h(0) = u_{h,0}, \quad (10)$$

$$\bar{D} = \bar{\Lambda} + \theta E, \quad \bar{A} = \mu^2 \bar{\Lambda} + \lambda E, \quad \bar{D} \in H_h, \quad \bar{A} \in H_h, \quad \bar{g}_h = g + \sum_{m=1}^3 \frac{h_m^2}{12} \Lambda_m g$$

va vaqt bo‘yicha ikkinchi tartibli approksimatsiyaga ega sxema:

$$\bar{D}y_t + \bar{A}y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \varphi, \quad y^0 = u_0, \quad y^1 = u_1, \quad (11)$$

bu yerda $y_t = (y^{n+1} - y^{n-1}) / (2\tau)$, $y^n = y(t_n)$, $u_1 = (E - \tau \bar{D}^{-1} \bar{A})u_0 + \tau \bar{D}^{-1} g(x, 0)$, φ to‘rli funksiyaga g ni approksimatsiyalaydi;

1.2⁰-sxema - fazo va vaqt bo‘yicha to‘rtinchi tartibli approksimatsiyaga ega sxema:

$$\bar{D}y_t - \frac{\tau^2}{12} \bar{A}\dot{y}_t + \bar{A}y^{(0.5)} = \varphi_1, \quad \gamma \bar{D}\dot{y}_t + \alpha \bar{A}y_t - \beta \bar{A}\dot{y}^{(0.5)} = \varphi_2, \quad (12)$$

$$y^0 = u_0, \quad \dot{y}^0 = \bar{D}^{-1}(f^0 - \bar{A}u_0), \quad (13)$$

bu yerda $\varphi_1 = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{g}(t) dt$, $\varphi_2 = \frac{1}{\gamma\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{g}(t)(s_1 \mathcal{G}_2^{(1)} + s_2 \mathcal{G}_2^{(2)}) dt$, $s_1 = 15\gamma - 35\alpha / 3$,

$s_2 = 140\gamma - 350\alpha / 3$, $\mathcal{G}_1^{(1)} = 1/2$, $\mathcal{G}_2^{(3)} = \tau\xi(1-\xi)(\xi - 1/2)$, $\xi = \tau^{-1}(t - t_n)$.

Quyidagi teoremlar isbotlangan.

2-teorema. Faraz qilaylik, $\sigma_1 + \sigma_2 > 0.5$, $\sigma_1 \geq \sigma_2$ shartlar bajarilsin. U holda (11) sxemaning yechimi $y^n \in H_h$ (7)–(9) dastlabki masalaning silliq yechimiga yaqinlashadi, ya’ni

$$\|y(x_i, t_n) - u(x_i, t_n)\|_1 \leq M(|h|^4 + \tau^2), \quad (x_i, t_n) \in \bar{\omega}_{\tau h} = \bar{\omega}_\tau \times \bar{\omega}_{h_\alpha}, \quad \bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{0\}$$

aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi.

3-teorema. Faraz qilaylik, $\gamma = \alpha + \beta$, $\alpha, \beta, \gamma = O(\tau^2)$ approksimatsiya shartlari bajarilsin. U holda $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ shartlar bajarilganda (12), (13) sxemaning yechimi (7)–(9) masalaning yetarlicha silliq yechimiga yaqinlashadi, ya’ni

$$\|z(t)\|_1 + \|\dot{z}(t)\|_1 \leq M(|h|^4 + \tau^4), \quad z, \dot{z} \in H_h$$

aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi. Bu yerda β erkin parametr, $z = y - u$, $\dot{z} = \dot{y} - \dot{u}$ sxema xatoliklari.

(11) va (12), (13) ayirmali sxemalarni realizatsiyalash algoritmlari keltirilgan. Olingan sonli natijalar test misolida nazariy ma’lumotlarga mos keladi.

Dissertatsiyaning “**Aller tenglamasi uchun yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalar**” deb nomlangan **ikkinchi bobida** silliq va nosilliq yechimli (adabiyotlarda Barenblatt-Jeltov-Kochina tenglamasi) Sobolev tipidagi bitta psevdoparabolik tenglama (Aller tenglamasi) uchun yuqori aniqlikdagi chegaraviy masalalarning ayirmali sxemalarini qurish va tadqiq qilish masalalari ko‘rib chiqilgan. Boshlang‘ich-chegaraviy masala dastlab fazoviy o‘zgaruvchilar bo‘yicha chekli ayirmalar usuli bilan approksimatsiyalangan va keyinchalik olingan katta o‘lchamli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun fazo bo‘yicha to‘rtinchi tartibli va vaqt bo‘yicha ikkinchi tartibli aniqlikdagi chekli ayirmalar usullari qo‘llanilgan. Shuningdek, vaqt bo‘yicha to‘rtinchi tartibli aniqlikdagi chekli elementlar usulining sxemalari ko‘rib chiqilgan. Qurilgan ayirmali sxemalarning turg‘unligi, yaqinlashishi va aniqligi haqidagi teoremlar olingan.

Birinchi paragrafda quyidagi ikki o‘lchovli masala qaralgan:

$$\begin{aligned} (\lambda - \Delta) \frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha^2 \Delta u + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x, t) &= 0, \quad (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T]. \end{aligned} \quad (14)$$

Bu yerda $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ ikki o‘lchovli Laplas operatori, λ, α - musbat doimiylar,

$Q_T = \Omega \times [0, T]$, $\Omega = \{x: 0 < x_k < l_k, k = 1, 2\}$ C^∞ sinfining $\partial\Omega$ chegarasi bilan chegaralangan soha.

Keltirilgan tenglama yoriq-g‘ovak muhitda suyuqlik filtratsiyasini modellashtiradi. Faraz qilamiz, $\lambda \notin \{\lambda_k\}$, bu yerda $\{\lambda_k\}$ Ω sohada Laplas tenglamasi uchun bir jinsli Dirixle masalasining xos qiymatlari to‘plami.

Ushbu paragrafda qurilgan sxemalar keyingi natijalar uchun qo‘shimcha bo‘lib, bu yerda fazo va vaqt bo‘yicha (14) masalani approksimatsiyalovchi yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalar uchun turg‘unlik va aniqlik haqidagi teoremlar isbotlangan.

Ikkinchi paragrafda nosilliq yechimli Allerning namlik ko‘chishi tenglamasi uchun chegaraviy masalalarni yechishning sonli algoritmlari ko‘rib chiqilgan. Chekli elementlar usulining ayirmali sxemalari qurilgan va tadqiq qilingan. Qurilgan ayirmali sxema boshqa sxemalarga nisbatan ma’lum afzalliklarga ega. Masalan, yuqori tartibli

aniqlikdagi sxema, yechimning o'zidan tashqari bir vaqtning o'zida uning hosilasi (tezligi) ham xuddi shu aniqlikda topiladi. Aniqlik bahosini olish uchun aprior baholarni olishning maxsus usuli qo'llanilgan.

Quyidagi ko'rinishda yozilgan Aller tenglamasini ko'rib chiqamiz:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_1 u + \sigma \frac{\partial}{\partial t}(L_2 u) + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T = \{x \in \Omega, 0 < t \leq T\}. \quad (15)$$

Bu yerda $L_m u = \sum_{q=1}^p \frac{\partial}{\partial x_q} \left(k_q^m(x) \frac{\partial u}{\partial x_q} \right) - q^m(x)u$, $0 < k_0 \leq k_q^m(x) \leq k_1$, $q^m(x) \geq 0$, $m = 1, 2$,

$x \in \Omega \subset R^p$, $p = 1, 2, \dots$, σ , k_0 , k_1 musbat doimiylar.

(15) tenglama uchun boshlang'ich

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega \quad (16)$$

va chegaraviy shartlar sifatida, masalan, birinchi chegaraviy shartni olamiz:

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma = \partial \bar{\Omega}, \quad t \in [0, T]. \quad (17)$$

(15)–(17) masala uchun umumlashgan masalani qo'yamiz. (15)–(17) masalaning umumlashgan yechimi deb har bir $t \in [0, T]$ uchun $H = W_2^1(\Omega)$ ga tegishli bo'lgan, $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(Q_T)$ hosilasiga ega barcha $(0, T)$ va $\forall \mathcal{G}(x) \in H$ uchun quyidagi

$$\left(\frac{du(t)}{dt}, \mathcal{G} \right) + \sigma a_1 \left(\frac{du(t)}{dt}, \mathcal{G} \right) + a_2(u(t), \mathcal{G}) = (f(t), \mathcal{G}), \quad \forall \mathcal{G}(x) \in H, \quad u(0) = u_0 \quad (18)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi $u(x, t)$ funksiyaga aytamiz. Bu yerga

$$a_m(u(t), \mathcal{G}) = -(L_m u, \mathcal{G}) = \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^p \left(k^m(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_\alpha} + q^m(x)u\mathcal{G} \right) dx, \quad m = 1, 2.$$

Bichiziqli $a_m(u, \mathcal{G})$ shakl uchun $a_m(\mathcal{G}, \mathcal{G}) \geq k \|\mathcal{G}\|_1^2$, $\forall \mathcal{G} \in H$, $k > 0$ baho o'rinli. U holda, $\|\cdot\|$ $L_2(\Omega)$ ning normasi. Shuni ta'kidlash kerakki, L_1, L_2 operatorlarning o'lchamlari har xil bo'lishi mumkin, ya'ni $p_1 \neq p_2$ va L_1 – kuchli elliptik hamda L_2 x_α o'zgaruvchilarga nisbatan barcha ikkinchi hosilalarni o'z ichiga olmaydigan aynigan operator bo'lishi mumkin.

(18) masalaga $u_h(t)$ taqribiy yechim koeffisientlari uchun birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi (Koshi masalasi) mos keladi:

$$D \frac{du_h(t)}{dt} + Au_h(t) = f_h(t), \quad u_h(0) = u_{0,h}. \quad (19)$$

Bu yerda $u_h(t)$ vaqtning istalgan momenti uchun H_h chekli o'lchamli fazoning elementi; D va A operatorlari H_h dan H_h ga harakatlanadi; $D = M + \sigma G_1$, $A = G_2$;

$M = \left((\varphi_i, \varphi_j) \right)_{i,j=1}^N$ H_h qism fazo koordinata sistemasining massa matritsasi;
 $G_m = \left(a_m(\varphi_i, \varphi_j) \right)_{i,j=1}^N$ H_h fazosining $L_m u$, $m=1,2$ operatorlariga javob beruvchi qattqlik matritsasi.

(19) masalani vaqt bo'yicha to'rtinchi tartibli aniqlikdagi chekli elementlar usulining uch parametrli ayirmali sxemasi bilan approksimatsiyalaymiz:

$$Dy_t - \frac{\tau^2}{12} A \ddot{y}_t + Ay^{(0.5)} = \varphi_1, \quad \gamma D \dot{y}_t + \alpha Ay_t - \beta A \dot{y}^{(0.5)} = \varphi_2, \quad y^0 = u_0, \quad \dot{y}^0 = u_1, \quad (20)$$

bu yerda φ_1 , φ_2 (12), (13) ga asosan aniqlandi.

Quyidagi asosiy teorema isbotlangan.

4-teorema. Faraz qilaylik, $A^* = A > 0$, $D^* = D > 0$ va (20) sxemaning approksimatsiya $\alpha + \beta = \gamma$, $\alpha, \beta, \gamma = O(\tau^2)$ va turg'unlik $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ shartlari bajarilgan va

$$u(x,t), \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \in L_2 \left\{ [0,T]; W_2^{k+1}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \right\}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t) \in L_2 \left\{ [0,T]; W_2^2(\Omega) \right\}$$

bo'lsin. U holda (15)–(17) masalaning yechimini approksimatsiyalovchi (20) sxemaning yechimi uchun quyidagi aniqlik bahosi o'rinli bo'ladi:

$$\begin{aligned} & \|u(x,t) - y(x,t)\|_0 + \sigma \|u(x,t) - y(x,t)\|_1 + \sqrt{\int_0^t \|u(x,t') - y(x,t')\|_1^2 dt'} \leq \\ & \leq M \left\{ \tau^3 \sqrt{(1+\sigma) \int_0^t \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t') \right\|_2^2 dt'} + \right. \\ & \left. + h^k \left(\sqrt{(1+\sigma) \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t') \right\|_{k+1}^2 dt'} + \sqrt{\int_0^t \|u(x,t')\|_{k+1}^2 dt'} \right) \right\}, \\ & \forall t \in [0,T], \quad M = M(k_0, k_1, T). \end{aligned}$$

Uchinchi paragraf vaqt bo'yicha aniqlikni oshirishga bag'ishlangan. 4-teoremanni umumlashtiruvchi quyidagi natija olindi.

5-teorema. Faraz qilaylik, 4-teorema shartlari bajarilgan va

$$u(x,t) \in L_2 \left\{ [0,T]; W_2^{k+1}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \right\}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t) \in L_2 \left\{ [0,T]; W_2^2(\Omega) \right\},$$

bo'lsin. U holda (15)–(17) masalaning shunday yechimini approksimatsiyalovchi (20) sxemaning yechimi uchun quyidagi

$$\begin{aligned} & \sqrt{\int_0^t \|u(x,t') - y(x,t')\|_0^2 dt'} + \sigma \sqrt{\int_0^t \|u(x,t') - y(x,t')\|_1^2 dt'} + \left\| \int_0^t [u(x,t') - y(x,t')] dt' \right\|_1 \leq \\ & \leq M \left\{ \tau^4 \left(\|u(x,0)\|_0 + \sigma \|u(x,0)\|_1 + \sqrt{(1+\sigma) \int_0^t \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t') \right\|_2^2 dt'} \right) + \right. \\ & \left. + h^k \left(\|u(x,0)\|_k + \sigma \|u(x,0)\|_{k+1} + \sqrt{(1+\sigma) \int_0^t \|u(x,t')\|_{k+1}^2 dt'} \right) \right\} \end{aligned}$$

aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi.

Dissertatsiyaning “**Aller-Lykov tenglamasi uchun yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalar**” deb nomlangan **uchinchi bobida** chekli ayirmalar usuli asosida umumlashgan Aller-Lykov tenglamasi uchun birinchi chegaraviy masalani yechishning yuqori aniqlikdagi sonli usuli ishlab chiqilgan va tadqiq qilingan. Qurilgan ayirmali sxemalarning turg‘unligi va yaqinlashishi isbotlangan va ular asosida aniqlik baholari olingan. Differensial masalalar yechimlarining kuchsiz silliqligida sxemalarning aniqlik baholari olingan. Shuningdek, ayirmali sxemalarning turli kombinatsiyalari ko‘rib chiqilgan.

Qurilgan usullarning turg‘unligi va yaqinlashishi isbotlangan va ular asosida aniqlik baholari olingan. Vaqt bo‘yicha chekli elementlar usulining uch parametrlri ayirmali sxemasini realizatsiyalashning bitta algoritmi ishlab chiqilgan. Hisoblash eksperimenti asosida sxemalar sinovdan o‘tkazilgan va ularning qiyosiy tahlili amalga oshirilgan.

Birinchi paragrafda Yopiq $\bar{Q}_T = \{(x,t), 0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T\}$ sohada Aller-Lykovning quyidagi namlik ko‘chishi tenglamasini

$$\theta \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + \mu \frac{\partial}{\partial t}(Lu) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad (21)$$

chegaraviy va boshlang‘ich

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \in (0,T], \quad (22)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (23)$$

shartlar bilan ko‘rib chiqamiz. Bu yerda $Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $Q_T = \bar{Q}_T \cap \Gamma$, θ, ρ, μ - musbat doimiylar.

Ushbu (21)–(23) turdagi masala filtratsiya, namlik ko‘chishi, issiqlik o‘tkazuvchanlik, matematik biologiya, boshqarish masalalari va boshqa jarayonlarni matematik modellashtirishda yuzaga keladi.

(21) tenglama dastlab fazoviy o‘zgaruvchilar bo‘yicha approksimatsiyalangan, natijada ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi uchun quyidagi Koshi masalasi olingan:

$$D \frac{d^2 u_h(t)}{dt^2} + B \frac{du_h(t)}{dt} + Au_h(t) = f_h(t), \quad (24)$$

$$u_h(0) = u_{0,h}, \quad \frac{\partial u_h}{\partial t}(0) = u_{1,h}. \quad (25)$$

Bu yerda $D = \rho E$, $B = \theta E - \mu \Lambda$, $A = -\Lambda$, $\Lambda y = y_{\bar{x}x}$, bunda $y_{\bar{x}x} = (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) / h^2$, y to'rtli funksiya $x_i = ih$ tugunda u ni approksimatsiya qiladi, $u_{0,h} = P_h u_0(x)$, $u_{1,h} = P_h u_1(x)$ boshlang'ich shartlarning interpolyatsiyasi, P_h proyeksiyalash operatori, $P_h: H_h \rightarrow H_h$ va $f_h(t) = P_h f(x,t)$. Bu yerda $u_h \in H_h$. Chegaraviy shartlar aniq approksimatsiyalanadi.

B va A ayirmali operatorlar ikkinchi tartibli approksimatsiya xatoligiga ega va ular mos ravishda $\theta E + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ va $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ differensial operatorlarni approksimatsiyalaydi.

So'ngra (24), (25) masala uchun quyidagi ayirmali sxema qurildi:

$$\tilde{D}y_{\bar{t}} + \tilde{B}y_{\bar{t}} + \tilde{A}y = \tilde{\varphi}, \quad y^n \in H_h, \quad (26)$$

$$y^0 = u_{0,h}, \quad \frac{y^1 - y^0}{\tau} = u_{1,h}(x_i) + 0.5u_{0,\bar{x}x,h}(x_i), \quad x_i \in \omega_h, \quad (27)$$

bu yerda $\tilde{D} = \theta E - \mu \Lambda + \theta \frac{h^2}{12} \Lambda$, $\tilde{B} = \rho \left(E + \frac{h^2}{12} \Lambda \right)$, $\tilde{A} = -\Lambda$, $\tilde{\varphi} = f + \frac{h^2}{12} \Lambda f$.

(26), (27) sxema xatoligi $\psi = O(\tau^2 + h^4)$.

Uch qatlamli ayirmali sxemalarning turg'unlik nazariyasi ma'lumotlaridan foydalanib olingan aprior baholar asosida quyidagi teorema isbotlandi.

6-teorema. Faraz qilaylik, $\tau^2 + \frac{4}{3}\theta h^2 < 4\mu$ shart bajarilsa, (26), (27) sxemaning yechimi (21)–(23) differensial masala yechimiga yaqinlashadi va vaqt bo'yicha ikkinchi tartibli aniqlikka, fazo bo'yicha to'rtinchi tartibli aniqlikka ega bo'ladi, ya'ni

$$\|y(x_i, t_n) - u(x_i, t_n)\| \leq M (\tau^2 + h^4), \quad (x_i, t_n) \in \bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau$$

aniqlik bahosi o'rinli bo'ladi.

Ikkinchi paragrafda nosilliq yechimlar sinfida Aller-Lykov tenglamasi uchun boshlang'ich-chegaraviy masala qaralgan. Qurilgan taqribiy algoritmlarning yaqinlashishi va aniqligi haqidagi teoremlar olingan. Quyidagi masalani qaraymiz:

$$\theta \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + \sigma \frac{\partial}{\partial t}(Lu) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = \{x \in \Omega, 0 < t \leq T\}, \quad (28)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \bar{\Omega} = \Omega + \Gamma, \quad (29)$$

$$u(x,t) = \mu(t), \quad x \in \Gamma = \partial \bar{\Omega}, \quad t \in (0, T]. \quad (30)$$

Bu yerda
$$Lu = \sum_{m=1}^3 k_m \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}, \quad x \in \Omega, \quad Q_T = \{(x, t) : x \in \Omega, t \in (0, T)\},$$

$\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) : 0 < x_m < l_m, m = 1, 2, 3\}$, $\theta, \rho, \sigma, k_m$ - musbat doimiylar.

(28)–(30) masalaning umumlashgan yechimi deb, har bir $t \in [0, T]$ uchun $H = W_2^1(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$ ga tegishli va $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L_2(Q_T)$ hosilasiga ega bo‘lgan, $(0, T)$ ning deyarli hammasida quyidagi tenglamani qanoatlantiradigan $u(x, t)$ funksiyasiga aytamiz:

$$\left(\rho \frac{d^2 u(t)}{dt^2}, \mathcal{G} \right) + a_2 \left(\frac{du(t)}{dt}, \mathcal{G} \right) + a_1(u(t), \mathcal{G}) = (f(t), \mathcal{G}), \quad \forall \mathcal{G}(x) \in H, \quad (31)$$

$$u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = u_1. \quad (32)$$

Bu yerda

$$a_1(u(t), \mathcal{G}) = -(Lu, \mathcal{G}) = \int_{\Omega} \sum_{m=1}^3 \left(k_m \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_m} \right) dx,$$

$$a_2(u(t), \mathcal{G}) = (u - L_2 u, \mathcal{G}) = \int_{\Omega} \sum_{m=1}^3 \left(\sigma k_m \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_m} + \theta u \mathcal{G} \right) dx,$$

$$u = u(t) \in H, \quad \forall t \in [0, T].$$

$a_m(u, \mathcal{G})$ shakllarni chekli ayirmalar usuli bilan approksimatsiya qilib, (31), (32) dan quyidagi masalaga kelamiz:

$$D \frac{d^2 u_h(t)}{dt^2} + B \frac{du_h(t)}{dt} + Au_h(t) = f_h(t), \quad u_h(0) = u_{0,h}, \quad \frac{du_h}{dt}(0) = u_{1,h}. \quad (33)$$

Bu yerda

$$D = \rho E, \quad B = \sigma(k_1 \Lambda_1 + k_2 \Lambda_2 + k_3 \Lambda_3) + \theta E, \quad A = k_1 \Lambda_1 + k_2 \Lambda_2 + k_3 \Lambda_3,$$

$$\Lambda_m y = -y_{x_m \bar{x}_m}, \quad m = 1, 2, 3, \quad u_{h,0} = P_h u_0(x), \quad P_h : H \rightarrow H_h \text{ va } f_h(t) = P_h f(x, t).$$

Chegaraviy shartlarni aniq approksimatsiya qilamiz. B va A operatorlar differensial operatorlarni ikkinchi tartibli xatolik bilan approksimatsiyalaydi. Agar differensial masalaning yechimi barcha o‘zgaruvchilar bo‘yicha zaruriy silliqlikga ega bo‘lsa, u holda yuqori tartibli approksimatsiyaga ega ayirmali operatorlarni qurish mumkin. D , B va A operatorlarni quyidagi ko‘rinishda tanlaymiz:

$$D = \rho E - \sum_{m=1}^3 \frac{h_m^2}{12k_m} A_m, \quad B = \theta E - \sigma \sum_{m=1}^3 \frac{h_m^2}{12k_m} A_m, \quad A = \sum_{m=1}^3 A_m - \sum_{\substack{m,n=1 \\ m \neq n}}^3 \frac{h_m^2}{12k_m} A_m A_n, \quad (34)$$

bu yerda $A_m y = -\Lambda_m y$. Demak, (34) dagi D, B, A ayirmali operatorlar differensial operatorlarni to'rtinchi tartibli xatolik bilan approksimatsiyalaydi, ya'ni $O(|h|^4)$, $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}$.

So'ngra (33) masala quyidagi ko'p parametrli ayirmali sxema bilan approksimatsiyalanadi:

$$D_\gamma \dot{y}_t + B y_t + A y^{(0.5)} = \varphi_1, \quad D_\alpha y_t - \frac{\tau^2}{12} B \dot{y}_t - D_\beta \dot{y}^{(0.5)} = \varphi_2, \quad y^0 = u_0, \quad \dot{y}^0 = u_1, \quad (35)$$

bu yerda

$$y = y^n = y(t_n), \quad \hat{y} = y^{n+1}, \quad \dot{y} = \dot{y}^n = dy(t_n) / dt, \quad n = 0, 1, \dots, \quad y^n, \dot{y}^n \in H_h,$$

$$D_\lambda = D - \lambda \tau^2 A, \quad \lambda = \alpha, \beta, \gamma, \quad \varphi_k = \int_0^1 f(t_n + \tau \xi) \mathcal{G}_k(\xi) d\xi, \quad k = 1, 2, \quad \xi = (t - t_n) / \tau,$$

$$\mathcal{G}_1(\xi) = p_1 \mathcal{G}_1^{(1)}(\xi) + p_2 \mathcal{G}_1^{(2)}(\xi), \quad \mathcal{G}_1^{(1)}(\xi) = 1, \quad \mathcal{G}_1^{(2)}(\xi) = \xi^2 - \xi, \quad p_1 = 6 - 60\gamma,$$

$$p_2 = 30 - 360\gamma, \quad \mathcal{G}_2(\xi) = s_1 \mathcal{G}_2^{(1)}(\xi) + s_2 \mathcal{G}_2^{(2)}(\xi), \quad \mathcal{G}_2^{(1)}(\xi) = \tau(\xi - 1/2),$$

$$\mathcal{G}_2^{(2)}(\xi) = \tau(\xi^3 - 3\xi^2/2 + \xi/2), \quad s_1 = 180\beta - 40\alpha, \quad s_2 = 1680\beta - 280\alpha,$$

H_h barcha $t_n \in \bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots; \tau > 0\}$ uchun chekli o'lchamli fazo.

Agar α, β, γ parametrlari

$$\alpha + \gamma = \beta + 1/6 \quad (36)$$

shartni qanoatlantirsa, u holda (33) sxema vaqt bo'yicha to'rtinchi tartibli approksimatsiyaga ega bo'ladi.

Quyidagi asosiy teorema isbotlandi.

7-teorema. Faraz qilaylik, (36) approksimatsiya va

$$D_\omega = D - \omega \tau^2 A \geq \delta D, \quad 0 < \delta < 1, \quad \omega = \max[\alpha, \beta, \gamma, 1/4] \quad (37)$$

turg'unlik shartlari bajarilsin. U holda (35) sxemaning yechimlari $y_n, \dot{y}_n \in H_h$ (34) operatorlari bilan (28)–(30) masalaning $u(x, t)$ silliq yechimiga yaqinlashadi, ya'ni quyidagi aniqlik baholari o'rinli bo'ladi:

$$\|y(x, t) - u(x, t)\|_A \leq M(|h|^4 + \tau^4),$$

$$\|\dot{y}(x, t) - \dot{u}(x, t)\|_D \leq M(|h|^4 + \tau^4), \quad \forall (x, t) \in \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau.$$

Uchinchi paragrafda kuchsiz metrikada ko'p o'lchovli namlik ko'chishi tenglamasi vaqt va fazoviy o'zgaruvchilar chekli elementlar usuli bilan approksimatsiyalangan. Fazoviy o'zgaruvchilarni approksimatsiyalashda uchinchi tartibli kubik B splaynlar ko'rinishidagi bazis funksiyalardan foydalanildi.

Ushbu paragrafning asosiy natijasi quyidagicha:

8-teorema. Faraz qilaylik, (35) sxemaning approksimatsiya (36), turg'unlik (37) shartlari bajarilgan va

$$u(x,t) \in L_2 \left\{ [0,T]; W_2^{k+1}(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega) \right\}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t) \in L_2 \left\{ [0,T]; W_2^2(\Omega) \right\}$$

bo'lsin. U holda (28)–(30) masalaning yechimini approksimatsiyalovchi (35) sxemaning yechimi uchun quyidagi

$$\begin{aligned} & \sqrt{\rho \|u(x,t') - y(x,t')\|_0^2} + \sqrt{\int_0^t \|u(x,t') - y(x,t')\|_1^2 dt'} + \left\| \int_0^t [u(x,t') - y(x,t')] dt' \right\| \leq \\ & \leq M \left\{ \tau^4 \left(\rho \|u(x,0)\|_0 + \|u(x,0)\|_1 + \sqrt{2 \int_0^t \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t') \right\|_2^2 dt'} \right) + \right. \\ & \left. + h^k \left(\rho \|u(x,0)\|_k + \|u(x,0)\|_{k+1} + \sqrt{2 \int_0^t \|u(x,t')\|_{k+1}^2 dt'} \right) \right\} \end{aligned}$$

aniqlik bahosi o'rinli bo'ladi.

To'rtinchi paragrafda umumlashgan Aller-Lykov tenglamasi uchun quyidagi boshlang'ich-chegaraviy masala qaralgan:

$$\theta \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L_1 u + \sigma \frac{\partial}{\partial t} (L_2 u) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = \{x \in \Omega, 0 < t \leq T\}, \quad (38)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \bar{\Omega} = \Omega + \Gamma, \quad (39)$$

$$u(x,t) = \mu(t), \quad x \in \Gamma = \partial \bar{\Omega}, \quad t \in (0, T]. \quad (40)$$

Bu yerda $L_m u = \sum_{\alpha=1}^{p_m} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha^m(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right)$, $x \in \Omega$, $p_m = 1, 2, \dots$, $0 < k_{0q} \leq k_\alpha^q(x) \leq k_{1q}$,

$m = 1, 2$, $Q_T = \{(x,t) : x \in \Omega, t \in (0, T)\}$, $\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) : 0 < x_k < l_k, k = 1, 2, 3\}$,

$q = 1, 2$, $\theta, \rho, \sigma, k_{01}, k_{02}, k_{11}, k_{12}$ - musbat doimiylar. Avvalgidek,

L_1, L_2 operatorlarning o'lchamlari har xil bo'lishi mumkin, ya'ni $p_1 \neq p_2$, masalan,

L_1 - kuchli elliptik, L_2 - x_m o'zgaruvchilar bo'yicha barcha ikkinchi hosilalarni o'z ichiga olmaydigan aynigan operator bo'lishi mumkin.

(38), (39) masalaning fazoviy o'zgaruvchilari ikki usulda approksimatsiyalandi: chekli ayirmalar va chekli elementlar usullari.

Birinchi usul (38) tenglamani fazoviy o'zgaruvchilar bo'yicha chekli ayirmalar usuli bilan approksimatsiyalashga mos keladi, natijada $u_h(t)$ funksiyaga nisbatan quyidagi ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$D \frac{d^2 u_h(t)}{dt^2} + B \frac{du_h(t)}{dt} + A u_h(t) = f_h(t), \quad u_h(0) = u_{0,h}, \quad \frac{du_h}{dt}(x,0) = u_{1,h}, \quad (41)$$

bu yerda

$$D = \rho E, \quad B = \sigma(k_1\Lambda_1 + k_2\Lambda_2 + k_3\Lambda_3) + \theta E, \quad A = k_1\Lambda_1 + k_2\Lambda_2 + k_3\Lambda_3, \quad (42)$$

$\Lambda_m y = -y_{x_m \bar{x}_m}$, $m=1,2,3$, y qayd qilingan $x = (i_1 h_1, i_2 h_2, i_3 h_3)$ tugundagi funksiya qiymati, B va A ayirmali operatorlari L_2 va L_1 differensial operatorlarni ikkinchi tartibli xatolik bilan approksimatsiyalaydi.

Ikkinchi usul (38) tenglamaning fazoviy o'zgaruvchilarini chekli elementlar usuli bilan approksimatsiyalashga mos keladi. Faraz qilaylik, $H_h \subset H$ $\mathcal{G}_h = \sum_{m=1}^M a_m \Phi_m(x)$ ko'rinishidagi elementlar to'plami bo'lsin. Bu yerda $\{\Phi_m = \Phi_m(x)\}_{m=1}^M$ har bir chekli elementda p darajali ko'phad bo'lgan bo'lak-polinomial funksiyalardan iborat bazis. Uchinchi darajali ko'phadlarga asoslangan bazisga misol keltiramiz. Buning uchun Ω sohani $N_1 \times N_2 \times N_3$ parallelepipedlarga bo'lamiz:

$$\Omega_{ijk} = \{(i-h)h_1 \leq x_1 \leq ih_1, (j-1)h_2 \leq x_2 \leq jh_2, (k-1)h_3 \leq x_3 \leq kh_3\},$$

$$i = \overline{1, N_1}, \quad j = \overline{1, N_2}, \quad k = \overline{1, N_3}, \quad h_m = l_m / N_m, \quad m = 1, 2, 3.$$

Quyidagi bazis funksiyalar sistemasini tanlaymiz:

$$\varphi_{ijk}(x_1, x_2, x_3) = \varphi_i(x_1)\varphi_j(x_2)\varphi_k(x_3), \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}, \quad k = \overline{1, N_3 - 1},$$

bu yerda $\varphi_l(x)$ B_3 splaynga asoslangan bazis funksiya. Bu vaziyatda $p = 3$. U holda taqribiy yechim quyidagi bikubik splayn ko'rinishida ifodalanadi:

$$\mathcal{G}_h(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{k=1}^N a_k(t)\varphi_k(x_1, x_2, x_3), \quad (43)$$

bu yerda $\varphi_k(x_1, x_2, x_3) = \varphi_i(x_1)\varphi_j(x_2)\varphi_k(x_3)$, $i = \overline{1, N_1 - 1}$, $j = \overline{1, N_2 - 1}$, $k = \overline{1, N_3 - 1}$, $N = (N_1 - 1)(N_2 - 1)(N_3 - 1)$.

B , A operatorlarga mos keladigan qattqlik matritsalarini quyidagicha hisoblanadi:

$$B = \{a_2(\varphi_l, \varphi_m)\}_{l,m=1}^M, \quad A = \{a_1(\varphi_l, \varphi_m)\}_{l,m=1}^M,$$

$$a_1(u(t), \mathcal{G}) = -(L_1 u, \mathcal{G}) = \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{p_1} \left(k_{\alpha}^1(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_{\alpha}} \right) dx,$$

$$a_2(u(t), \mathcal{G}) = (u - L_2 u, \mathcal{G}) = \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{p_2} \left(\sigma k_{\alpha}^2(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_{\alpha}} + \theta u \mathcal{G} \right) dx$$

Fazoviy o'zgaruvchilar bo'yicha har bir chekli elementda uchinchi darajadan past bo'lmagan ko'phadni tanlashda fazoviy qadamlar bo'yicha uchinchi tartibli aniqlikga ega bo'lamiz.

Ikkala usulda ham $D^* = D > 0$, $B^* = B > 0$, $A^* = A > 0$. (41) masalani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$D\ddot{u} + B\dot{u} + Au = f, \quad u(0) = u_0, \quad \dot{u}(0) = u_1, \quad (44)$$

bu yerda $\dot{u} = du / dt$.

Vaqt o'zgaruvchisini diskretlash uchun ham chekli ayirmalar va chekli elementlar usullaridan foydalanamiz.

Birinchi usul. $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 1, 2, \dots, \tau > 0\}$ to'rdagi (44) masalani quyidagi ayirmali sxema bilan approksimatsiya qilamiz:

$$Dy_{\bar{n}} + By_{\bar{i}} + Ay = \varphi, \quad y^0 = u_{0,h}, \quad \dot{y}^0 = u_{1,h}, \quad y^n \in H_h, \quad (45)$$

bu yerda D , B va A lar (42) ga ko'ra aniqlangan. (45) sxemaning approksimatsiya xatosi

$$\psi = O(\tau^2 + |h|^2), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2.$$

Ikkinchi usul. (44) masalani (35) chekli elementlar usuli yordamida diskretizatsiyalaymiz. U mos ravishda, $\frac{du_h}{dt}(t_n + \tau)$, $\frac{du_h}{dt}(t_n)$, $u_h(t_n + \tau)$, $u_h(t_n)$ qiymatlarini approksimatsiyalovchi \dot{y}^{n+1} , \dot{y}^n , y^{n+1} , y^n larni bog'laydi.

Vaqt va fazoviy o'zgaruvchilar bo'yicha approksimatsiyalarni birlashtirib, (38)–(40) masalani yechishning quyidagi to'rtta usulini ko'rib chiqamiz:

- **3.1⁰-sxema** - fazo bo'yicha ikkinchi tartibli aniqlikga ega (42) va vaqt bo'yicha ikkinchi tartibli aniqlikga ega (45) ayirmali sxemalar;
- **3.2⁰-sxema** - fazo bo'yicha bikubik elementlardan iborat chekli elementlar usuli (43) va vaqt bo'yicha ikkinchi tartibli aniqlikga ega (45) ayirmali sxema;
- **3.3⁰-sxema** - fazo bo'yicha ikkinchi tartibli aniqlikga ega (42) va vaqt bo'yicha to'rtinchi tartibli aniqlikga ega (35) chekli elementlar usuli;
- **3.4⁰-sxema** - fazo bo'yicha bikubik elementlardan iborat (43) chekli elementlar usuli va vaqt bo'yicha to'rtinchi tartibli aniqlikka ega (35) chekli elementlar usuli sxemasi.

Quyidagi teoremlar isbotlangan.

9-teorema. Quyidagi

$$\tau^2 \leq \frac{\rho}{(1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^3 h_i^{-2}} \quad (46)$$

shart bajarilganda 3.1⁰-sxemaning yechimi (38)–(40) masalaning yetarlicha silliq yechimiga yaqinlashadi va

$$\|y(t) - u(t)\|_A + \|\dot{y}(t) - \dot{u}(t)\|_D \leq M(\tau^2 + |h|^2)$$

aniqlik bahosi o'rinli bo'ladi. Bu yerda $\|\mathcal{G}\|_D = \sqrt{(D\mathcal{G}, \mathcal{G})} = \|\mathcal{G}\|_{W_2^1(\omega_h)}$,

$\|\mathcal{G}\|_A = \sqrt{(A\mathcal{G}, \mathcal{G})} = \|\mathcal{G}_{x_i}\|_{L_2(\omega_h)}$ H_h to'r funksiyalar fazosidagi normalar.

10-teorema. (46) shart bajarilganda 3.2⁰-sxemaning yechimi (38)–(40) masalaning yetarlicha silliq yechimiga yaqinlashadi va

$$\|y(t) - u(t)\|_A + \|\dot{y}(t) - \dot{u}(t)\|_D \leq M(\tau^2 + |h|^3)$$

aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi.

11-teorema. Quyidagi

$$\tau^2 \leq \frac{\rho(1+\delta)}{\omega} \max \left(\sum_{\alpha=1}^{p_m} \frac{1}{k_\alpha^q} \right), \quad q=1,2 \quad (47)$$

shart bajarilganda 3.3⁰-sxemaning yechimi (38)–(40) masalaning yetarlicha silliq yechimiga yaqinlashadi va

$$\|y(t) - u(t)\|_1 \leq M \left(\tau^4 + |h|^2 \right)$$

aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi.

12-teorema. (47) shart bajarilsa, 3.4⁰-sxemaning yechimi (38)–(40) masalaning yetarlicha silliq yechimiga yaqinlashadi va

$$\|y(t) - u(t)\|_1 + \|\dot{y}(t) - \dot{u}(t)\|_1 \leq M \left(\tau^4 + |h|^3 \right)$$

aniqlik bahosi o‘rinli bo‘ladi.

XULOSA

Dissertatsiya ishi psevdoparabolik tenglamalar uchun yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalarni qurish va tadqiq qilishga bag‘ishlangan.

Ushbu “Psevdoparabolik tenglamalar uchun yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalar” mavzusidagi dissertatsiya ishi bo‘yicha olib borilgan tadqiqot natijalarining asosiy xulosalari quyidagilardan iborat:

1. Issiqlik va namlikni ko‘chirish tenglamasi uchun silliq yechimlar sinfida chekli ayirmalar usuli asosida yuqori aniqlikga ega oshkor va oshkormas ayirmali sxemalar qurildi va tadqiq qilindi;

2. Silliq va nosilliq yechimlar sinflarida Aller va Aller-Lykov tenglamalari uchun yuqori aniqlikdagi oshkor va oshkormas ayirmali sxemalar qurildi;

3. Umumlashgan yechimlarga ega ko‘p o‘lchovli psevdoparabolik tenglama uchun yangi ayirmali sxemalar qurildi va tadqiq qilindi;

4. Aller va Aller-Lykov tenglamalari uchun boshlang‘ich-chegaraviy masalalar yechimlarining silliqligiga minimal talablarda yaqinlashish va aniqlik aprior baholari olindi;

5. Psevdoparabolik tenglamalar uchun ba‘zi boshlang‘ich-chegaraviy masalalar test misolida taqqoslandi.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

КАРАКАЛПАКСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТЛЕУОВ КУАТ ОРАЗБАЕВИЧ

**РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ПОВЫШЕННОЙ ТОЧНОСТИ ДЛЯ
ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ**

01.01.03-Вычислительная математика и дискретная математика

**АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD)
по физико-математическим наукам**

Ташкент – 2025

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за B2025.1.PhD/FM1233.

Диссертация выполнена в Каракалпакском государственном университете имени Бердаха.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (ik-fizmat.nuu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziynet» по адресу (www.ziynet.uz).

Научный руководитель:

Утебаев Даулетбай

доктор физико-математических наук,
профессор

Официальные оппоненты:

Нормуродов Чори Бегалиевич

доктор физико-математических наук,
профессор

Худойбергганов Мирзоали Ўразалиевич

доктор физико-математических наук,
профессор

Ведущая организация:

Университет мировой экономики и
дипломатии

Защита диссертации состоится «21» август 2025 года в 14⁰⁰ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №133). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «8» август 2025 года.

(протокол рассылки № 3 от «28» май 2025 года)

М.М. Арипов

Председатель Научного совета по
присуждению научных степеней, д.ф.-
м.н. профессор

З.Р. Рахмонов

Ученый секретарь Научного совета по
присуждению научных степеней, д.ф.-
м.н. профессор

Р.Д. Алоев

Председатель научного семинара при
Научном совете по присуждению научных
степеней, д.ф.-м.н., профессор



ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие научные и практические исследования, проводимые в мировом масштабе, посвящены созданию высокоточных численных методов для математических моделей нестационарных процессов механики сплошных сред. Особенно оно проявляется при решении неклассических уравнений Соболевского типа – уравнений псевдопараболического типа, т.е. уравнений неразрешенных относительно старшей производной по времени. Поэтому решение начально-краевых задач для таких уравнений особенно актуально в таких областях, как теория фильтрации, физики полупроводников, биологии, экологии, гидрологии и т.п. Здесь главной задачей является разработка высокоточных эффективных численных методов решения исходной дифференциальной задачи. Особую роль здесь играет исследование численных методов повышенной точности для данных уравнений при естественных требованиях гладкости их решения.

В настоящее время одной из важнейших задач исследований в мире является построение высокоточных разностных схем для решения линейных и нелинейных уравнений математической физики, в том числе уравнений типа Соболева, в том числе псевдопараболических уравнений, аналитическое решение которых сложно найти. В связи с этим необходимо разработать высокоточные методы численного решения начально-краевых задач для псевдопараболических уравнений типа Соболева. Поэтому разработка многопараметрических устойчивых и высокоточных численных методов решения начально-краевых задач для псевдопараболических уравнений типа Соболева является целевым научным исследованием.

В нашей республике большое внимание уделяется таким актуальным направлениям, как разработка численных методов математических моделей прикладных задач в области физики, механики, экологии и энергетики, которые имеют научное и практическое применение в фундаментальных науках. В последнее время в этих направлениях достигнуты значительные результаты в разработке высокоточных устойчивых и экономичных разностных схем. Достижение научных результатов на уровне мировых стандартов по приоритетным направлениям "Функциональный анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, математическая физика, математическое моделирование, вычислительная и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика" является одной из основных задач Института математики имени В.И. Романовского АН РУз¹. Для обеспечения выполнения постановления важно разработать и исследовать высокоточные численные методы для нестационарных уравнений математической физики.

Данная диссертационная работа в определенной степени служит выполнению задач, предусмотренных в Указах и Постановлениях Президента Республики Узбекистан №УП-60 от 28 января 2022 года «О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы», № ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», № УП-5847 от 8 октября 2019 года «Об утверждении Концепции развития системы высшего образования Республики Узбекистан до 2030 года», № ПП-3682 от 27 апреля 2019 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию

¹ Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП–4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 7 мая 2020 года.

системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов» и № УП-6198 от 1 апреля 2021 года «О совершенствовании системы государственного управления в сфере развития научной и инновационной деятельности», а также в других нормативно-правовых актах, принятых в данной сфере.

Соответствие исследований приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Как известно, фундаментальный вклад в развитие численных методов решения задач математической физики внесли исследования А.Н. Тихонова, А.А. Самарского, Г.И. Марчука, Н.Н. Яненко, С.К. Годунова, Р. Рихтмайера, О.А. Ладыженской, В.Л. Макарова, А.В. Гулина, М.Н. Москалькова, П.Н. Вабищевича, П.П. Матуса, М.М. Арипова, Р.Д. Алоева, Дж. Фромма, Е. Таркела, В. Вендроффа и многих др. Особого внимания заслуживают численные методы решения начально-краевых задач для параболических и псевдопараболических уравнений. Для таких задач аналитические и численные методы исследовались П.Я. Полубарина-Кочиной, Е.С. Дзекцером, С.А. Габовым, А.Г. Свешниковым, А.Б. Альшином, М.О. Корпусовым, Ю.Д. Плетнером, Н.Н. Калиткиным, А.М. Нахушевым, А. Ашуралиевым, Ч. Ашуралиевым, Е.А. Альшиной, А.А. Замышляевой, Б.В. Роговым, М.Х. Бештоковым, З.Я. Нахушевой, М.А. Керефовым, А.И. Кожановым, С.Х. Геккиевой, Б.С. Аблабековым и др. Численными методами повышенной точности для решения аналогичных задач занимались М.М. Москальков, П.Н. Вабищевич, П.П. Матус, Е.А. Альшина, А.А. Замышляева, М.М. Арипов, Д. Утебаев и другие. Численные методы повышенной точности для нестационарных уравнений математической физики с негладкими решениями построены и исследованы в работах А.А. Самарского, Г.И. Марчука, В.Л. Макарова, В.В. Шайдурова, В.И. Агошкова, М.М. Москалькова, М.М. Арипова, Д. Утебаева. В их работах, в основном, получены оценки точности разностных схем повышенной аппроксимации на основе метода конечных разностей и метода конечных элементов. А также, такие исследования проводились в работах Ш.Е. Мекаладзе, Д. Дугласа, А.А. Самарского, Д. Брембла, И.В. Фрязинова, П.П. Матуса, Б.Д. Утебаева, V.T.K. Tuuyen, T. Wang, где разработаны компактные, монотонные разностные схемы повышенной точности для линейных и квазилинейных уравнений параболического и гиперболического типов. А также отметим работы Н.Н. Калиткина, А.Б. Альшина, Е.А. Альшиной, где нестационарные уравнения Соболевского типа решаются методом второго порядка точности на квазиравномерных сетках. Похожие исследования проводились в работах K. Aziz, A. Sellari, W.H. Hundsdorfer, J.C. Verwer J, где построены и исследованы разностные схемы для уравнений конвекции-диффузии.

При пространственной аппроксимации параболических и псевдопараболических уравнений методом конечных разностей или методом конечных элементов (метод прямых) получается система обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка большой размерности. Разностные схемы повышенной точности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка исследовались в работах М.М. Москалькова, П.Н. Вабищевича, М.М. Арипова, Д. Утебаева.

В нашей республике по построению и исследованию численных методов для линейных и нелинейных уравнений в частных производных занимаются М.М. Арипов, Б. Хужаеров, Р.Д. Алоев, Х. Шадметов, Ч.Б. Нормуродов, А.Р. Хаатов, А.С. Матякубов, З.Р. Рахмонов, Ш.А. Садуллаева и многие другие. В частности, работы М.М. Арипова, З.Р. Рахмонова, Ш.А. Садуллаевой посвящены математическому моделированию и численному решению нелинейных уравнений в частных производных параболического типа. Работы Р.Д. Алоева, А.С. Матякубова посвящены численным методам решения систем гиперболических уравнений первого порядка. Разным аспектам численных методов решения различных задач прикладной математики посвящены научные работы Б. Хужаерова, Х. Шадметова, Ч.Б. Нормуродова, А.Р. Хаатова.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполнена диссертация.

Диссертационное исследование выполнено в рамках плана научно-исследовательской работы Каракалпакского государственного университета по теме «Численные методы решения линейных и нелинейных нестационарных задач прикладной математики».

Целью исследования является построение устойчивых и экономичных разностных схем повышенной точности для уравнений Аллера и Аллера-Лыкова в классах гладких и негладких решений, а также получение оценок их устойчивости, сходимости и точности.

Задачи исследования:

разработка явных и неявных разностных схем метода конечных разностей повышенной точности для уравнения тепловлагодпереноса в классах гладких решений;

разработка явных и неявных разностных схем повышенной точности для уравнений Аллера и Аллера-Лыкова в классах гладких и негладких решений;

построение и исследование разностных схем для многомерных псевдопараболических уравнений с обобщенными решениями;

получение априорных оценок сходимости и точности при минимальных требованиях к гладкости решения начально-краевых задач для уравнений Аллера и Аллера-Лыкова.

Объект исследования. Объектом исследования является начально-краевые задачи для уравнений Аллера и Аллера-Лыкова.

Предмет исследования. Предметом исследования является разработка численных методов высокого порядка точности для уравнений Аллера и Аллера-Лыкова.

Методы исследований. В диссертации использованы методы алгебры, функционального анализа, теории дифференциальных уравнений, вычислительной математики, численного моделирования, а также технологии алгоритмизации.

Научная новизна исследования состоит в следующем:

построены многопараметрические высокоточные разностные схемы в классе гладких решений для уравнения тепловлагодпереноса, получены погрешности аппроксимации, условия устойчивости и оценки точности;

разработаны многопараметрические высокоточные разностные схемы метода конечных разностей и метода конечных элементов для уравнения Аллера в классах гладких и негладких решений;

построены многопараметрические разностные схемы для одномерного и многомерного уравнения Аллера-Лыкова в слабой метрике, получены условия устойчивости и оценки скорости сходимости;

приведены оценки точности между численным решением, полученным с помощью разностных схем и аналитическим решением, при минимальных требованиях к гладкости аналитического решения начально-краевых задач для уравнений Аллера и Аллера-Лыкова.

Практические результаты исследования следующие:

на основе метода конечных разностей и метода конечных элементов построены новые явные и неявные разностные схемы повышенной аппроксимации для численного решения псевдопараболических уравнений в классах гладких и негладких решений;

построены алгоритмы высокого порядка точности для начально-краевых задач для многомерных псевдопараболических уравнений – уравнений Аллера и Аллера-Лыкова.

Достоверность результатов исследования. Достоверность полученных в диссертации утверждений объясняется строго доказанными теоремами с использованием методов функционального анализа и теории численных методов, а также подтверждением теоретических выводов на основе вычислительного эксперимента.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость полученных в диссертации результатов объясняется тем, что новые явные и неявные разностные схемы повышенного порядка точности, могут быть использованы для численного решения прикладных задач теории фильтрации, физики полупроводников и развивать теорию разностных схем.

Практическая значимость результатов исследования объясняется тем, что новые явные и неявные разностные схемы, а также алгоритмы и программы, построенные на основе метода конечных разностей и конечных элементов, могут быть использованы для численного решения начально-краевых задач для различных уравнений в частных производных псевдопараболического типа.

Внедрение результатов исследования. Полученные результаты по построению разностных схем повышенной точности для одномерных и многомерных псевдопараболических уравнений внедрены в практику в следующих направлениях:

Результаты, полученные по методу оптимальных разностных схем для приближенного решения задач фильтрации на основе явной и неявной разностных схем высокой точности метода конечных разностей, построенных для псевдопараболических уравнений Аллера и Аллера-Лыкова, а также по погрешности аппроксимации, устойчивости и точности этого метода, были использованы при создании параллельного вычислительного алгоритма для решения задач фильтрации нефти и газа в пористой среде в области произвольной фильтрации в прикладном проекте ФЗ-201905171 "Гидродинамические модели и эффективные алгоритмы для исследования процесса аномальной фильтрации жидкостей и газов в пористых средах" (Справка Института математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан № 2/95 от 17 февраля 2025 г.). Исследование научных результатов позволило разработать программные модули для визуализации

результатов расчетов по определению показателей разработки газовых и нефтяных месторождений.

Явные и неявные разностные схемы для псевдопараболических уравнений были использованы в научной лаборатории при Министерстве Экологии, охраны окружающей среды и изменения климата Республики Каракалпакстан для получения информации о прогнозировании и оценке возможных негативных последствий для природной среды региона Аральского моря и для принятия выводов по улучшению качества окружающей среды и водных ресурсов в регионе Аральского моря (Справка Министерства Экологии, охраны окружающей среды и изменения климата Республики Каракалпакстан № 02/18-436 от 6 февраля 2025 г.). Применение полученных научных результатов позволило оценить экосистемы Аральского региона и создать систему программного обеспечения.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационной работы докладывалась на 7 научно-практических конференциях, в том числе на 5 международных и 2 республиканских.

Публикация результатов исследования. По теме диссертации опубликованы 16 научных работ, из них 9 в научных изданиях, входящих в перечень Высшей аттестационной комиссии Республики Узбекистан для публикации результатов докторских диссертаций, в том числе 3 опубликованы в зарубежных научных журналах. Кроме того, получено 2 авторское свидетельство на программы для ЭВМ.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Объем диссертации составляет 104 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и указана степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе «Разностные схемы для уравнения теплового переноса» даны некоторые вспомогательные материалы, приведены необходимые для дальнейшего исследования результаты. На основе метода конечных разностей разработан и исследован численный метод повышенной точности решения первой краевой задачи для обобщенного уравнения Аллера. Доказаны устойчивость и сходимость построенной разностной схемы и на их основе получены оценки точности. С помощью вычислительного эксперимента проведено тестирование схем, а также их сравнительный анализ. Разработан и исследован численный метод повышенной точности для решения первой краевой задачи для многомерного псевдопараболического уравнения. На основе результатов теории устойчивости разностных схем получены априорные оценки

и на их основе доказаны сходимость построенных алгоритмов со скоростью четвертого порядка по обеим переменным.

В первом параграфе приведены некоторые вспомогательные материалы.

Во втором параграфе в замкнутой пространственно-временной области $\bar{Q}_T = \{(x,t), 0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T\}$ рассматривается одномерное уравнение Аллера

$$\theta \frac{\partial u}{\partial t} = Lu + \mu \frac{\partial}{\partial t}(Lu) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T \quad (1)$$

с начальным

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega} \quad (2)$$

и краевыми условиями

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \in (0,T]. \quad (3)$$

Здесь $Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $Q_T = \bar{Q}_T \cap \Gamma$, θ, μ - положительные постоянные.

Уравнение (1) аппроксимируется сначала по пространственным переменным, в результате чего получается следующая задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка

$$\bar{D} \frac{du_h}{dt} + \bar{A}u_h = \bar{f}_h, \quad t \in (0,T], \quad (4)$$

$$u_h(0) = u_{h,0}, \quad x_i \in \bar{\omega}_h, \quad (5)$$

где $\bar{D} = \theta E - \mu \bar{\Lambda}$, $\bar{A} = -\bar{\Lambda}$ разностные операторы, которые аппроксимируют дифференциальные операторы $\theta E + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ соответственно с четвертым порядком по пространственной переменной.

Далее задача Коши (4), (5) аппроксимируется разностной схемой

$$\bar{D}y_t + \bar{A}y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \varphi, \quad y^0 = u_0, \quad y^1 = u_1, \quad (6)$$

где

$$\bar{D}u_1 = \bar{\Lambda}u_0 + f(x,0),$$

$$y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \sigma_1 \hat{y} + (1 - \sigma_1 - \sigma_2)y + \sigma_2 \check{y} = y + \tau(\sigma_1 - \sigma_2)y_t + \frac{\tau^2}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)y_{\bar{t}t}.$$

На основе результатов теории устойчивости разностных схем получена априорная оценка решения разностных схем (6) и на их основе доказан следующий результат.

Теорема 1. Пусть выполнены условия $\sigma_1 + \sigma_2 > 0.5$, $\sigma_1 \geq \sigma_2$. Тогда решение разностной схемы (6) сходится к гладкому решению исходной задачи (1)–(3) и имеет место оценка точности

$$\|y(t) - u(t)\|_A \leq M(\tau^2 + h^4), \quad y(t), u(t) \in H_h.$$

Здесь H_h - пространство дискретных функции, соответствующий пространству непрерывных функции H .

Также приведены результаты тестовых расчетов.

Третий параграф посвящен построению и исследованию разностных схем повышенной точности для следующей многомерной начально-краевой задачи

$$\frac{\partial}{\partial t}(Lu - \theta u) + \mu^2 Lu + \lambda u = -g(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \quad (7)$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \quad x \in \bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma, \quad (8)$$

$$u|_{x \in \Gamma = \partial\bar{\Omega}} = \mu(t), \quad t \in (0, T], \quad (9)$$

где $Lu = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial^2 u}{\partial t_m^2}$, $\theta, \mu, \lambda - const$.

Для задачи (7)–(9) построены и исследованы следующие разностные схемы:

1.1⁰-схема-разностная аппроксимация четвертого порядка по пространству

$$\bar{D} \frac{du_h}{dt} + \bar{A}u_h = \bar{g}_h, \quad t \in (0, T], \quad u_h(0) = u_{h,0}, \quad (10)$$

где $\bar{D} = \bar{\Lambda} + \theta E$, $\bar{A} = \mu^2 \bar{\Lambda} + \lambda E$, $\bar{D} \in H_h$, $\bar{A} \in H_h$, $\bar{g}_h = g + \sum_{m=1}^3 \frac{h_m^2}{12} \Lambda_m g$ и второго порядка по времени

$$\bar{D}y_t + \bar{A}y^{(\sigma_1, \sigma_2)} = \varphi, \quad y^0 = u_0, \quad y^1 = u_1, \quad (11)$$

где $y_t = \frac{y^{n+1} - y^{n-1}}{2\tau}$, $y^n = y(t_n)$, $u_1 = (E - \tau \bar{D}^{-1} \bar{A})u_0 + \tau \bar{D}^{-1} g(x, 0)$, сеточная функция φ аппроксимирует g ;

1.2⁰-схема разностная аппроксимация четвертого порядка по пространству (10) и схема четвертого порядка по времени

$$\bar{D}y_t - \frac{\tau^2}{12} \bar{A}\dot{y}_t + \bar{A}y^{(0.5)} = \varphi_1, \quad \gamma \bar{D}\dot{y}_t + \alpha \bar{A}y_t - \beta \bar{A}\dot{y}^{(0.5)} = \varphi_2, \quad (12)$$

$$y^0 = u_0, \quad \dot{y}^0 = \bar{D}^{-1}(f^0 - \bar{A}u_0), \quad (13)$$

где $\varphi_1 = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{g}(t) dt$, $\varphi_2 = \frac{1}{\gamma\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \bar{g}(t)(s_1 \mathcal{G}_2^{(1)} + s_2 \mathcal{G}_2^{(2)}) dt$, $s_1 = 15\gamma - 35\alpha / 3$,

$s_2 = 140\gamma - 350\alpha / 3$, $\mathcal{G}_1^{(1)} = 1/2$, $\mathcal{G}_2^{(3)} = \tau\xi(1-\xi)(\xi - 1/2)$, $\xi = \tau^{-1}(t - t_n)$.

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. Пусть выполнены условия $\sigma_1 + \sigma_2 > 0.5$, $\sigma_1 \geq \sigma_2$. Тогда решение разностной схемы (11) $y^n \in H_h$ сходится к гладкому решению исходной задачи (7)–(9), т.е. имеет место оценка

$$\|y(x_i, t_n) - u(x_i, t_n)\|_1 \leq M(|h|^4 + \tau^2), (x_i, t_n) \in \bar{\omega}_{\tau h} = \bar{\omega}_\tau \times \bar{\omega}_{h_\alpha}, \bar{\omega}_\tau = \omega_\tau \cup \{0\}.$$

Теорема 3. Пусть выполнено условие аппроксимации $\gamma = \alpha + \beta$, $\alpha, \beta, \gamma = O(\tau^2)$. Тогда при выполнении условий $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ решение разностной схемы (12), (13) сходится к достаточно гладкому решению исходной задачи (7)–(9), т.е. $\|z(t)\|_1 + \|\dot{z}(t)\|_1 \leq M(|h|^4 + \tau^4)$, $z, \dot{z} \in H_h$. Здесь β -свободный параметр, $z = y - u$, $\dot{z} = \dot{y} - \dot{u}$ - ошибки схемы.

Далее приведены алгоритмы реализации разностных схем (11), и (12), (13). Полученные численные результаты на тестовом примере, которые согласуются с теоретическими выводами.

Во второй главе диссертации «Разностные схемы повышенной точности для уравнения Аллера» рассматриваются вопросы построения и исследования разностных схем повышенной точности краевых задач для одного псевдопараболического уравнения Соболевского типа (уравнение Аллера) с гладкими и негладкими решениями (в литературе уравнение Баренблатта-Желтова-Кочиной). Начально-краевая задача сначала аппроксимируется по пространственным переменным методом конечных разностей и далее для полученной системы обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности применяется метод конечных разностей четвертого порядка точности по пространству и второго порядка по времени. А также рассматриваются схемы метода конечных элементов четвертого порядка точности по времени. Получены теоремы об устойчивости, сходимости и точности построенных разностных схем.

В первом параграфе рассматривается следующая двумерная задача:

$$\begin{aligned} (\lambda - \Delta) \frac{\partial u}{\partial t} &= \alpha^2 \Delta u + f(x, t), (x, t) \in Q_T, \\ u(x, 0) &= u_0(x), x \in \Omega, \\ u(x, t) &= 0, (x, t) \in \partial\Omega \times [0, T], \end{aligned} \tag{14}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ - двумерный оператор Лапласа, λ, α - положительные постоянные, $Q_T = \Omega \times [0, T]$, $\Omega = \{x: 0 < x_k < l_k, k = 1, 2\}$ - ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞ .

Приведенное уравнение моделирует фильтрацию жидкости в трещиновато-пористой среде. В дальнейшем предположим, что $\lambda \notin \{\lambda_k\}$, где $\{\lambda_k\}$ - множество собственных значений однородной задачи Дирихле для уравнения Лапласа в области Ω .

Также в этом параграфе доказываются теоремы об устойчивости и точности для разностных схем повышенного порядка точности по пространству и времени, аппроксимирующих задачу (14) и построенные алгоритмы служат дополнением к последующим результатам.

Во **втором параграфе** рассматриваются численные алгоритмы решения краевых задач для уравнения влагопереноса Аллера с негладкими решениями. Построены и исследованы разностные схемы метода конечных элементов. Построенные разностные схема имеют определенные преимущества перед другими схемами. Например, схема высокого порядка точности (выше двух): кроме самого решения, одновременно находится и её производная (скорость) с той же точностью. Для получения оценки точности используется специальная методика получения априорных оценок.

Рассмотрим уравнение Аллера

$$\frac{\partial u}{\partial t} = L_1 u + \sigma \frac{\partial}{\partial t} (L_2 u) + f(x, t), \quad (x, t) \in Q_T = \{x \in \Omega, 0 < t \leq T\}. \quad (15)$$

Здесь

$$L_m u = \sum_{q=1}^p \frac{\partial}{\partial x_q} \left(k_q^m(x) \frac{\partial u}{\partial x_q} \right) - q^m(x) u, \quad 0 < k_0 \leq k_q^m(x) \leq k_1, \quad q^m(x) \geq 0,$$

$m = 1, 2$, $x \in \Omega \subset R^p$, $p = 1, 2, \dots$, σ , k_0 , k_1 - положительные постоянные.

Для уравнения (15) ставится начальное условие

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \Omega. \quad (16)$$

В качестве краевых условий берем краевую задачу

$$u(x, t) = 0, \quad x \in \Gamma = \partial \bar{\Omega}, \quad t \in [0, T]. \quad (17)$$

Сформулируем обобщенную постановку задачи (15)–(17). Назовем обобщенным решением задачи (15)–(17) функцию $u(x, t)$, которая при каждом $t \in [0, T]$ принадлежит $H = \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, обладает производной $\frac{\partial u}{\partial t} \in L_2(Q_T)$ и почти всюду на $(0, T)$ удовлетворяет соотношению

$$\left(\frac{du(t)}{dt}, \mathcal{G} \right) + \sigma a_1 \left(\frac{du(t)}{dt}, \mathcal{G} \right) + a_2(u(t), \mathcal{G}) = (f(t), \mathcal{G}), \quad \forall \mathcal{G}(x) \in H, \quad u(0) = u_0. \quad (18)$$

Здесь $a_m(u(t), \mathcal{G}) = -(L_m u, \mathcal{G}) = \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^p \left(k^m(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_\alpha} + q^m(x) u \mathcal{G} \right) dx$, $m = 1, 2$.

Для билинейной формы $a_m(u, \mathcal{G})$ имеет место оценка $a_m(\mathcal{G}, \mathcal{G}) \geq k \|\mathcal{G}\|_1^2$, $\forall \mathcal{G} \in H$, $k > 0$. Тогда, $\|\cdot\|$ - норма из $L_2(\Omega)$. Размерность операторов L_1, L_2 могут быть различными $p_1 \neq p_2$, т.е. L_1 - сильно

эллиптический, а L_2 может быть вырожденным оператором, содержащим не все вторые производные по переменным x_α .

Задаче (18) соответствует задача Коши по времени для системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка для коэффициентов приближенного решения $u_h(t)$:

$$D \frac{du_h(t)}{dt} + Au_h(t) = f_h(t), \quad u_h(0) = u_{0,h}. \quad (19)$$

Здесь $u_h(t)$ элемент конечномерного пространства H_h для любого момента времени t ; операторы D, A действуют из H_h в H_h : $D = M + \sigma G_1, A = G_2$; $M = ((\varphi_i, \varphi_j))_{i,j=1}^N$ - матрица массы координатной системы подпространства H_h ; $G_m = (a_m(\varphi_i, \varphi_j))_{i,j=1}^N$ - матрица жесткости, отвечающая оператору $L_m u$ в H_h , $m = 1, 2$.

Аппроксимируем задачу (19) трехпараметрической разностной схемой метода конечных элементов четвертого порядка точности по времени:

$$Dy_t - \frac{\tau^2}{12} Ay_t + Ay^{(0.5)} = \varphi_1, \quad \gamma Dy_t + \alpha Ay_t - \beta Ay^{(0.5)} = \varphi_2, \quad y^0 = u_0, \quad \dot{y}^0 = u_1, \quad (20)$$

где φ_1, φ_2 определены согласно (12), (13).

Доказана следующая основная теорема.

Теорема 4. Пусть $A^* = A > 0, D^* = D > 0$ и выполнены условия аппроксимации $\alpha + \beta = \gamma, \alpha, \beta, \gamma = O(\tau^2)$ и устойчивости $\alpha > 0, \gamma > 0$ схемы (20). Тогда для ее решения, аппроксимирующего решения задачи (15)–(17) такого, что

$$u(x, t), \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) \in L_2 \left\{ [0, T]; W_2^{k+1}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \right\}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x, t) \in L_2 \left\{ [0, T]; W_2^2(\Omega) \right\},$$

верна оценка точности

$$\begin{aligned} & \|u(x, t) - y(x, t)\|_0 + \sigma \|u(x, t) - y(x, t)\|_1 + \sqrt{\int_0^t \|u(x, t') - y(x, t')\|_1^2 dt'} \leq \\ & \leq M \left\{ \tau^3 \sqrt{(1 + \sigma) \int_0^t \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x, t') \right\|_2^2 dt'} + \right. \\ & \left. + h^k \left(\sqrt{(1 + \sigma) \int_0^t \left\| \frac{\partial u}{\partial t}(x, t') \right\|_{k+1}^2 dt'} + \sqrt{\int_0^t \|u(x, t')\|_{k+1}^2 dt'} \right) \right\}, \\ & \forall t \in [0, T], \quad M = M(k_0, k_1, T). \end{aligned}$$

Третий параграф посвящен повышению точности по времени. Получен следующий результат, обобщающий теорему 4.

Теорема 5. Пусть выполнены условия теоремы 4. Тогда для решения схемы (20), аппроксимирующий решение задачи (15)–(17) такого, что

$$u(x,t) \in L_2 \left\{ [0,T]; W_2^{k+1}(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega) \right\}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t) \in L_2 \left\{ [0,T]; W_2^2(\Omega) \right\},$$

верна оценка точности

$$\begin{aligned} & \sqrt{\int_0^t \|u(x,t') - y(x,t')\|_0^2 dt'} + \sigma \sqrt{\int_0^t \|u(x,t') - y(x,t')\|_1^2 dt'} + \left\| \int_0^t [u(x,t') - y(x,t')] dt' \right\|_1 \leq \\ & \leq M \left\{ \tau^4 \left(\|u(x,0)\|_0 + \sigma \|u(x,0)\|_1 + \sqrt{(1+\sigma) \int_0^t \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t') \right\|_2^2 dt'} \right) + \right. \\ & \left. + h^k \left(\|u(x,0)\|_k + \sigma \|u(x,0)\|_{k+1} + \sqrt{(1+\sigma) \int_0^t \|u(x,t')\|_{k+1}^2 dt'} \right) \right\}. \end{aligned}$$

В третьей главе диссертации «Разностные схемы повышенной точности для уравнения Аллера-Лыкова» на основе метода конечных разностей разработан и исследован численный метод высокой степени точности решения первой краевой задачи для обобщенного уравнения Аллера-Лыкова. Доказаны устойчивость и сходимости построенных разностных схем и на их основе получены оценки точности. Получены оценки точности схемы при слабых предположениях о гладкости решений дифференциальных задач. А также рассмотрены различные комбинации разностных схем. Доказаны устойчивость и сходимости построенных методов и на их основе получены оценки точности. Разработан один алгоритм реализации трехпараметрической разностной схемы метода конечных элементов по времени. С помощью вычислительного эксперимента проведено тестирование схем, а также их сравнительный анализ.

В первом параграфе рассмотрена следующая задача. В замкнутой области $\bar{Q}_T = \{(x,t), 0 \leq x \leq l, 0 < t \leq T\}$ рассмотрим уравнение влагопереноса Аллера-Лыкова

$$\theta \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + \mu \frac{\partial}{\partial t}(Lu) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \quad (21)$$

с краевыми

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(l,t) = \mu_2(t), \quad t \in (0,T], \quad (22)$$

и начальными условиями

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \bar{\Omega}. \quad (23)$$

Здесь $Lu = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $Q_T = \bar{Q}_T \cap \Gamma$, θ, ρ, μ - положительные постоянные.

Задача типа (21)–(23) возникает при математическом моделировании процессов фильтрации, влагопереноса, теплопроводности, математической биологии, задачи управления и т.д.

Уравнение (21) аппроксимируется сначала по пространственным переменным, в результате чего получается следующая задача Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

$$D \frac{d^2 u_h(t)}{dt^2} + B \frac{du_h(t)}{dt} + Au_h(t) = f_h(t), \quad (24)$$

$$u_h(0) = u_{0,h}, \quad \frac{\partial u_h}{\partial t}(0) = u_{1,h}, \quad (25)$$

где $D = \rho E$, $B = \theta E - \mu \Lambda$, $A = -\Lambda$, $\Lambda y = y_{\bar{x}\bar{x}}$, $y_{\bar{x}\bar{x}} = (y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}) / h^2$, y аппроксимирует u в фиксированном узле $x_i = ih$, $u_{0,h} = P_h u_0(x)$, $u_{1,h} = P_h u_1(x)$ – интерполянты начальных условия, P_h – оператор проектирования, $P_h: H_h \rightarrow H_h$ и $f_h(t) = P_h f(x, t)$, $u_h \in H_h$. Краевые условия аппроксимируются точно.

Разностные операторы B и A аппроксимируют дифференциальные операторы $\theta E + \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ соответственно со вторым порядком погрешности аппроксимации.

Далее, для задачи (24), (25) построена разностная схема

$$\tilde{D}y_{\bar{t}} + \tilde{B}y_{\bar{t}} + \tilde{A}y = \tilde{\varphi}, \quad y^n \in H_h, \quad (26)$$

$$y^0 = u_{0,h}, \quad \frac{y^1 - y^0}{\tau} = u_{1,h}(x_i) + 0.5u_{0,\bar{x},h}(x_i), \quad x_i \in \omega_h, \quad (27)$$

где $\tilde{D} = \theta E - \mu \Lambda + \theta \frac{h^2}{12} \Lambda$, $\tilde{B} = \rho \left(E + \frac{h^2}{12} \Lambda \right)$, $\tilde{A} = -\Lambda$, $\tilde{\varphi} = f + \frac{h^2}{12} \Lambda f$.

Погрешность схемы (26), (27) $\psi = O(\tau^2 + h^4)$.

На основе априорных оценок, полученных для трехслойных разностных схем теории устойчивости, доказана следующая теорема.

Теорема 6. При выполнении условия $\tau^2 + \frac{4}{3}\theta h^2 < 4\mu$ решение схемы (26), (27) сходится к решению исходной задачи (21)–(23) и имеет второй порядок точности по времени и четвертый по пространству, т.е. справедливо оценка точности

$$\|y(x_i, t_n) - u(x_i, t_n)\| \leq M(\tau^2 + h^4), \quad (x_i, t_n) \in \bar{\omega} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau.$$

Во **втором параграфе** рассматривается начально-краевая задача для уравнения Аллера-Лыкова в классе негладких решений. Получены теоремы о сходимости и точности построенных приближенных алгоритмов. Рассмотрим следующую задачу:

$$\theta \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu + \sigma \frac{\partial}{\partial t}(Lu) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = \{x \in \Omega, 0 < t \leq T\}, \quad (28)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \bar{\Omega} = \Omega + \Gamma, \quad (29)$$

$$u(x,t) = \mu(t), \quad x \in \Gamma = \partial\bar{\Omega}, \quad t \in (0,T]. \quad (30)$$

Здесь
$$Lu = \sum_{m=1}^3 k_m \frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}, \quad x \in \Omega, \quad Q_T = \{(x,t): x \in \Omega, t \in (0,T]\},$$

$\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3): 0 < x_m < l_m, m = 1, 2, 3\}$, $\theta, \rho, \sigma, k_m$ - положительные постоянные.

Обобщенным решением задачи (28)–(30) назовем функцию $u(x,t)$, которая при каждом $t \in [0, T]$ принадлежит $H = W_2^1(\Omega) \cap \overset{\circ}{W}_2^1(\Omega)$, обладает производной $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \in L_2(Q_T)$ и почти всюду на $(0, T)$ удовлетворяет соотношению

$$\left(\rho \frac{d^2 u(t)}{dt^2}, \mathcal{G} \right) + a_2 \left(\frac{du(t)}{dt}, \mathcal{G} \right) + a_1(u(t), \mathcal{G}) = (f(t), \mathcal{G}), \quad \forall \mathcal{G}(x) \in H, \quad (31)$$

$$u(0) = u_0, \quad \frac{du}{dt}(0) = u_1, \quad (32)$$

где

$$a_1(u(t), \mathcal{G}) = -(Lu, \mathcal{G}) = \int_{\Omega} \sum_{m=1}^3 \left(k_m \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_m} \right) dx,$$

$$a_2(u(t), \mathcal{G}) = (u - L_2 u, \mathcal{G}) = \int_{\Omega} \sum_{m=1}^3 \left(\sigma k_m \frac{\partial u}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_m} + \theta u \mathcal{G} \right) dx.$$

Функция $u = u(t) \in H$, $\forall t \in [0, T]$.

Аппроксимируя $a_m(u, \mathcal{G})$ методом конечных разностей из (31), (32) приходим к задаче

$$D \frac{d^2 u_h(t)}{dt^2} + B \frac{du_h(t)}{dt} + A u_h(t) = f_h(t), \quad u_h(0) = u_{0,h}, \quad \frac{du_h}{dt}(0) = u_{1,h}. \quad (33)$$

Здесь

$$D = \rho E, \quad B = \sigma(k_1 \Lambda_1 + k_2 \Lambda_2 + k_3 \Lambda_3) + \theta E, \quad A = k_1 \Lambda_1 + k_2 \Lambda_2 + k_3 \Lambda_3,$$

$$\Lambda_m y = -y_{x_m \bar{x}_m}, \quad m = 1, 2, 3, \quad u_{h,0} = P_h u_0(x), \quad P_h : H \rightarrow H_h, \quad f_h(t) = P_h f(x, t).$$

Краевые условия аппроксимируем точно. Операторы B и A приближают дифференциальные операторы со вторым порядком погрешности аппроксимации. Если решение исходной дифференциальной задачи имеет

необходимую гладкость по всем переменным, то можно построить разностные операторы повышенного порядка аппроксимации. Получение разностных операторов с более высоким порядком аппроксимации может достигаться различными путями. Например, операторы D , B и A выберем в виде

$$D = \rho E - \sum_{m=1}^3 \frac{h_m^2}{12k_m} A_m, \quad B = \theta E - \sigma \sum_{m=1}^3 \frac{h_m^2}{12k_m} A_m, \quad A = \sum_{m=1}^3 A_m - \sum_{\substack{m,n=1 \\ m \neq n}}^3 \frac{h_m^2}{12k_m} A_m A_n, \quad (34)$$

где $A_m y = -\Lambda_m y$. Следовательно, разностные операторы D, B, A в (34) приближают дифференциальные операторы с четвертым порядком погрешности аппроксимации, т.е. $O(|h|^4)$, $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2 + h_3^2}$.

Далее задача (33) аппроксимируется следующей многопараметрической разностной схемой

$$D_\gamma \dot{y}_t + B y_t + A y^{(0.5)} = \varphi_1, \quad D_\alpha y_t - \frac{\tau^2}{12} B \dot{y}_t - D_\beta \dot{y}^{(0.5)} = \varphi_2, \quad y^0 = u_0, \quad \dot{y}^0 = u_1, \quad (35)$$

где $y = y^n = y(t_n)$, $\hat{y} = y^{n+1}$, $\dot{y} = \dot{y}^n = dy(t_n) / dt$, $n = 0, 1, \dots$, $y^n, \dot{y}^n \in H_h$,

$$D_\lambda = D - \lambda \tau^2 A, \quad \lambda = \alpha, \beta, \gamma, \quad \varphi_k = \int_0^1 f(t_n + \tau \xi) \mathcal{G}_k(\xi) d\xi, \quad k = 1, 2, \quad \xi = (t - t_n) / \tau,$$

$$\mathcal{G}_1(\xi) = p_1 \mathcal{G}_1^{(1)}(\xi) + p_2 \mathcal{G}_1^{(2)}(\xi), \quad \mathcal{G}_1^{(1)}(\xi) = 1, \quad \mathcal{G}_1^{(2)}(\xi) = \xi^2 - \xi, \quad p_1 = 6 - 60\gamma,$$

$$p_2 = 30 - 360\gamma, \quad \mathcal{G}_2(\xi) = s_1 \mathcal{G}_2^{(1)}(\xi) + s_2 \mathcal{G}_2^{(2)}(\xi), \quad \mathcal{G}_2^{(1)}(\xi) = \tau(\xi - 1/2),$$

$$\mathcal{G}_2^{(2)}(\xi) = \tau(\xi^3 - 3\xi^2/2 + \xi/2), \quad s_1 = 180\beta - 40\alpha, \quad s_2 = 1680\beta - 280\alpha.$$

H_h - конечномерное пространство для всех $t_n \in \bar{\omega}_\tau = \{t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots; \tau > 0\}$.

Если параметры α, β, γ удовлетворяют условию

$$\alpha + \gamma = \beta + 1/6, \quad (36)$$

то схема (33) имеет четвертый порядок погрешности аппроксимации по времени.

Доказана следующая основная теорема.

Теорема 7. Пусть выполнены условия аппроксимации (36) и устойчивости

$$D_\omega = D - \omega \tau^2 A \geq \delta D, \quad 0 < \delta < 1, \quad \omega = \max[\alpha, \beta, \gamma, 1/4]. \quad (37)$$

Тогда решения $y_n, \dot{y}_n \in H_h$ схемы (35) с операторами (34) сходятся к гладкому решению $u(x, t)$ задачи (28)–(30), т.е. имеют место оценки точности

$$\|y(x, t) - u(x, t)\|_A \leq M(|h|^4 + \tau^4),$$

$$\|\dot{y}(x, t) - \dot{u}(x, t)\|_D \leq M(|h|^4 + \tau^4), \quad \forall (x, t) \in \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau.$$

В третьем параграфе аналогичные результаты получены для многомерного уравнения влагопереноса в слабой метрике. При этом, временная

и пространственные переменные аппроксимируются методом конечных элементов. При аппроксимации пространственных переменных используются базисные функции в виде кубических В-сплайнов третьей степени.

Основной теоремой данного параграфа является следующая

Теорема 8. Пусть выполнены условия аппроксимации (36) и устойчивости (37) схемы (35). Тогда для ее решения, аппроксимирующего решение задачи (28)–(30) такого, что

$$u(x,t) \in L_2 \left\{ [0,T]; W_2^{k+1}(\Omega) \cap \dot{W}_2^1(\Omega) \right\}, \quad \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t) \in L_2 \left\{ [0,T]; W_2^2(\Omega) \right\},$$

верна оценка точности

$$\begin{aligned} & \sqrt{\rho \|u(x,t') - y(x,t')\|_0^2} + \sqrt{\int_0^t \|u(x,t') - y(x,t')\|_1^2 dt'} + \left\| \int_0^t [u(x,t') - y(x,t')] dt' \right\|_1 \leq \\ & \leq M \left\{ \tau^4 \left(\rho \|u(x,0)\|_0 + \|u(x,0)\|_1 + \sqrt{2 \int_0^t \left\| \frac{\partial^4 u}{\partial t^4}(x,t') \right\|_2^2 dt'} \right) + \right. \\ & \left. + h^k \left(\rho \|u(x,0)\|_k + \|u(x,0)\|_{k+1} + \sqrt{2 \int_0^t \|u(x,t')\|_{k+1}^2 dt'} \right) \right\}. \end{aligned}$$

В четвертом параграфе рассмотрена следующая начально-краевая задача для обобщенного уравнения Аллера-Лыкова

$$\theta \frac{\partial u}{\partial t} + \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = L_1 u + \sigma \frac{\partial}{\partial t}(L_2 u) + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T = \{x \in \Omega, 0 < t \leq T\}, \quad (38)$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = u_1(x), \quad x \in \bar{\Omega} = \Omega + \Gamma, \quad (39)$$

$$u(x,t) = \mu(t), \quad x \in \Gamma = \partial \bar{\Omega}, \quad t \in (0, T]. \quad (40)$$

$$\text{Здесь} \quad L_m u = \sum_{\alpha=1}^{p_m} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(k_\alpha^m(x) \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \right), \quad x \in \Omega, \quad p_m = 1, 2, \dots, \quad 0 < k_{0q} \leq k_\alpha^q(x) \leq k_{1q},$$

$m = 1, 2$, $Q_T = \{(x,t) : x \in \Omega, t \in (0, T)\}$, $\Omega = \{x = (x_1, x_2, x_3) : 0 < x_k < l_k, k = 1, 2, 3\}$, $q = 1, 2$, $\theta, \rho, \sigma, k_{01}, k_{02}, k_{11}, k_{12}$ – положительные постоянные. Размерность операторов L_1, L_2 могут быть различными $p_1 \neq p_2$, т.е. L_1 – сильно эллиптический, а L_2 может быть вырожденным оператором, содержащим не все вторые производные по переменным x_α .

Пространственные переменные задачи (38), (39) аппроксимируются двумя способами: методом конечных разностей и методом конечных элементов.

Первый способ соответствует аппроксимации уравнения (38) по пространственным переменным методом конечных разностей в результате чего

получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка для функции $u_h(t)$:

$$D \frac{d^2 u_h(t)}{dt^2} + B \frac{du_h(t)}{dt} + Au_h(t) = f_h(t), \quad u_h(0) = u_{0,h}, \quad \frac{du_h}{dt}(x,0) = u_{1,h}, \quad (41)$$

где

$$D = \rho E, \quad B = \sigma(k_1 \Lambda_1 + k_2 \Lambda_2 + k_3 \Lambda_3) + \theta E, \quad A = k_1 \Lambda_1 + k_2 \Lambda_2 + k_3 \Lambda_3, \quad (42)$$

$\Lambda_m y = -y_{x_m \bar{x}_m}$, $m=1,2,3$, y -значение функции в фиксированном узле $x = (i_1 h_1, i_2 h_2, i_3 h_3)$. Разностные операторы B и A приближают дифференциальные операторы L_2 и L_1 со вторым порядком погрешности аппроксимации.

Второй способ соответствует аппроксимации уравнения (38) по пространственным переменным методом конечных элементов. Пусть $H_h \subset H$ множество элементов вида $\mathcal{G}_h = \sum_{m=1}^M a_m \Phi_m(x)$. Здесь $\{\Phi_m = \Phi_m(x)\}_{m=1}^M$ -базис из кусочно-полиномиальных функций, являющихся многочленом степени p на каждом конечном элементе. Для этого введем разбиение области Ω на $N_1 \times N_2 \times N_3$ параллелепипедов:

$$\Omega_{ijk} = \{(i-h)h_1 \leq x_1 \leq ih_1, (j-1)h_2 \leq x_2 \leq jh_2, (k-1)h_3 \leq x_3 \leq kh_3\},$$

$$i = \overline{1, N_1}, \quad j = \overline{1, N_2}, \quad k = \overline{1, N_3}, \quad h_m = l_m / N_m, \quad m = 1, 2, 3.$$

Выберем следующую систему базисных функции:

$$\varphi_{ijk}(x_1, x_2, x_3) = \varphi_i(x_1) \varphi_j(x_2) \varphi_k(x_3), \quad i = \overline{1, N_1 - 1}, \quad j = \overline{1, N_2 - 1}, \quad k = \overline{1, N_3 - 1},$$

где $\varphi_l(x)$ - базисная функция, построенная на основе B_3 -сплайна. В этом случае $p = 3$. Тогда приближенное решение представимо в виде бикубического сплайна

$$\mathcal{G}_h(x_1, x_2, x_3, t) = \sum_{k=1}^N a_k(t) \varphi_k(x_1, x_2, x_3), \quad (43)$$

где $\varphi_{ijk}(x_1, x_2, x_3) = \varphi_i(x_1) \varphi_j(x_2) \varphi_k(x_3)$, $i = \overline{1, N_1 - 1}$, $j = \overline{1, N_2 - 1}$, $k = \overline{1, N_3 - 1}$, а $N = (N_1 - 1)(N_2 - 1)(N_3 - 1)$.

Матрицы жесткости, соответствующие операторам B, A вычисляются следующим образом: $B = \{a_2(\varphi_l, \varphi_m)\}_{l,m=1}^M$, $A = \{a_1(\varphi_l, \varphi_m)\}_{l,m=1}^M$, где

$$a_1(u(t), \mathcal{G}) = -(L_1 u, \mathcal{G}) = \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{p_1} \left(k_{\alpha}^1(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_{\alpha}} \right) dx,$$

$$a_2(u(t), \mathcal{G}) = (u - L_2 u, \mathcal{G}) = \int_{\Omega} \sum_{\alpha=1}^{p_2} \left(\sigma k_{\alpha}^2(x) \frac{\partial u}{\partial x_{\alpha}} \cdot \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x_{\alpha}} + \theta u \mathcal{G} \right) dx.$$

При выборе многочлена степени не ниже третьей на каждом конечном элементе по пространственным переменным имеем третий порядок точности по пространственным шагам.

В обоих способах $D^* = D > 0$, $B^* = B > 0$, $A^* = A > 0$. Для простоты обозначений в (41) вместе u_h используем $u \in H_h$, т.е. задачу (41) записываем в виде

$$D\ddot{u} + B\dot{u} + Au = f, \quad u(0) = u_0, \dot{u}(0) = u_1, \quad (44)$$

где $\dot{u} = du / dt$.

Для дискретизации временной переменной также используются два метода: метод конечных разностей и метод конечных элементов.

Первый способ. На сетке $\omega_\tau = \{t_n = n\tau, n = 1, 2, \dots, \tau > 0\}$ аппроксимируем задачу (44) следующей разностной схемой:

$$Dy_{\bar{u}} + By_{\bar{u}} + Ay = \varphi, \quad y^0 = u_{0,h}, \dot{y}^0 = u_{1,h}, \quad y^n \in H_h, \quad (45)$$

где D , B и A определены согласно (42). Погрешность аппроксимации схемы (45)

$$\psi = O(\tau^2 + |h|^2), \quad |h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2.$$

Второй способ состоит в дискретизации задачи (44) методом конечных элементов (35), связывающий значения \dot{y}^{n+1} , \dot{y}^n , y^{n+1} , y^n , аппроксимирующих, соответственно $\frac{du_h}{dt}(t_n + \tau)$, $\frac{du_h}{dt}(t_n)$, $u_h(t_n + \tau)$, $u_h(t_n)$.

Комбинируя аппроксимации по времени и по пространственным переменным, рассмотрим четыре метода решения задачи (38)–(40):

•**3.1⁰-схема**-разностная аппроксимация второго порядка точности по пространству (42) и по времени (45);

•**3.2⁰-схема**-аппроксимация методом конечных элементов с бикубическими элементами по пространству (43) и по времени (45);

•**3.3⁰-схема**-разностная аппроксимация второго порядка точности по пространству (42) и схема методом конечных элементов по времени (35);

•**3.4⁰-схема**-аппроксимация методом конечных элементов с бикубическими элементами по пространству (43) и схема методом конечных элементов по времени (35).

Доказаны следующие теоремы.

Теорема 9. При выполнении условия

$$\tau^2 \leq \frac{\rho}{(1 + \varepsilon) \sum_{i=1}^3 h_i^{-2}} \quad (46)$$

решение схемы 3.1⁰ сходится к достаточно гладкому решению задачи (38)–(40) и имеет место оценка точности $\|y(t) - u(t)\|_A + \|\dot{y}(t) - \dot{u}(t)\|_D \leq M(\tau^2 + |h|^2)$, где

$\|\mathcal{G}\|_D = \sqrt{(D\mathcal{G}, \mathcal{G})} = \|\mathcal{G}\|_{W_2^1(\omega_h)}$, $\|\mathcal{G}\|_A = \sqrt{(A\mathcal{G}, \mathcal{G})} = \|\mathcal{G}_{x_1}\|_{L_2(\omega_h)}$ - нормы в пространстве сеточных функций H_h , $|h|^2 = h_1^2 + h_2^2 + h_3^2$.

Теорема 10. При выполнении условия (46) решение схемы 3.2⁰ сходится к достаточно гладкому решению задачи (38)–(40) и имеет место оценка точности

$$\|y(t) - u(t)\|_A + \|\dot{y}(t) - \dot{u}(t)\|_D \leq M(\tau^2 + |h|^3).$$

Теорема 11. При выполнении условия

$$\tau^2 \leq \frac{\rho(1+\delta)}{\omega} \max\left(\sum_{\alpha=1}^{p_m} \frac{1}{k_\alpha^q}\right), \quad q = 1, 2 \quad (47)$$

решение схемы 3.3⁰ сходится к достаточно гладкому решению задачи (38)–(40) и имеет место оценка точности $\|y(t) - u(t)\|_1 \leq M(\tau^4 + |h|^2)$.

Теорема 12. При выполнении условия (47) решение схемы 3.4⁰ сходится к достаточно гладкому решению задачи (38)–(40) и имеет место оценка точности $\|y(t) - u(t)\|_1 + \|\dot{y}(t) - \dot{u}(t)\|_1 \leq M(\tau^4 + |h|^3)$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена построению и исследованию разностных схем высокого порядка точности для псевдопараболических уравнений.

Основные выводы результатов исследования, проведенного по диссертационной работе "Разностные схемы повышенной точности для псевдопараболических уравнений," заключаются в следующем:

1. Построены и исследованы явные и неявные разностные схемы повышенной точности на основе метода конечных разностей в классе гладких решений для уравнения теплового переноса;

2. Построены явные и неявные разностные схемы повышенного порядка точности для уравнений Аллера и Аллера-Лыкова в классах гладких и негладких решений;

3. Построены и исследованы новые разностные схемы для многомерного псевдопараболического уравнения с обобщенными решениями;

4. Получены априорные оценки сходимости и точности при минимальных требованиях к гладкости решения начально-краевых задач для уравнений Аллера и Аллера-Лыкова;

5. Некоторые начально-краевые задачи для псевдопараболических уравнений сравнивались на тестовых примерах.

**SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN**

KARAKALPAK STATE UNIVERSITY

TLEUOV KUATBAY ORAZBAYEVICH

**HIGH-ORDER ACCURACY DIFFERENCE SCHEMES FOR
PSEUDOPARABOLIC EQUATIONS**

01.01.03 – Computational and discrete mathematics

ABSTRACT
of dissertation of the doctor of philosophy (PhD)
on physical and mathematical sciences

Tashkent – 2025

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number B2025.1.PhD/FM1233.

The dissertation was completed at Karakalpak State University named after Berdakh.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (resume)) on the website (ik-fizmat.nuu.uz) and the "ZiyoNet" Information and educational portal (www.zivonet.uz).

Scientific supervisor:

Utebaev Dauletbay
Doctor of Physical and Mathematical
Sciences, professor

Official opponents:

Normurodov Chori Begaliyevich
Doctor of Physical and Mathematical
Sciences, professor

Xudoyberganov Mirzoali Orazalievich
Doctor of Physical and Mathematical
Sciences, professor

Leading organization:

The University of World Economy and
Diplomacy

Defense will take place "21" *august* 2025 at 14⁰⁰ at the meeting of Scientific Council number DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 at National University of Uzbekistan (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 227-12-24, fax: (99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (registered №133) (Address: University str. 4, Almazar area, Tashkent, 100174, Uzbekistan, Phone: (99871) 227-12-24).

Abstract of dissertation sent out on "8" *august* 2025.

(Mailing report № 3 on "28" *may* 2025)

M.M. Aripov

Chairman of Scientific Council on award of
scientific degrees, d.f.-m.s., professor

Z.R. Rakhmonov

Scientific secretary of Scientific Council on
award of scientific degrees, d.f.-m.s.,
professor

R.D. Aloyev

Chairman of Scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific
degrees, d.f.-m.s., professor



INTRODUCTION (abstract of the PhD dissertation)

The aim of the research work is to construct explicit and implicit difference schemes of increased accuracy for the pseudoparabolic Aller and Aller-Lykov equations in the classes of smooth and non-smooth solutions, as well as to obtain their stability conditions, convergence and accuracy estimates.

The object of the research work. The object of the research is the initial-boundary value problems for the Aller and Aller-Lykov equations.

The scientific novelty of the research work is as follows:

- multiparametric high-precision difference schemes were constructed in the class of smooth solutions for the heat and moisture transfer equation, approximation errors, stability conditions, and accuracy estimates were obtained;

- multiparametric high-precision difference schemes of the finite difference method and the finite element method for the Aller equation in the classes of smooth and non-smooth solutions were developed;

- multiparametric difference schemes for the one-dimensional and multidimensional Aller-Lykov equation in weak metrics were constructed, stability conditions and convergence rate estimates were obtained;

- the estimates of the accuracy of the difference schemes with minimal requirements for the analytical solution and smoothness of the initial-boundary value problems for the Aller and Aller-Lykov equations are given.

Implementation of the research results. The obtained results on constructing high-order difference schemes for one-dimensional and multidimensional pseudoparabolic equations have been implemented in practice in the following areas:

The results obtained on the method of optimal difference schemes for the approximate solution of filtration problems based on the explicit and implicit high-precision difference schemes of the finite-difference method constructed for the pseudo-parabolic Aller and Aller-Lykov equations, as well as on the approximation error, stability and accuracy of this method, were used in the creation of a parallel computational algorithm for solving the problem of oil and gas filtration in a porous medium in the field of arbitrary filtration in the applied project F3-201905171 "Hydrodynamic models and effective algorithms for investigating the process of anomalous filtration of liquids and gases in porous media" (Certificate of the Institute of Mathematics named after V.I. Romanovsky of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan No. 2/95 dated February 17, 2025). The study of scientific results made it possible to develop software modules for visualizing the results of calculations to determine the development indicators of gas and oil fields.

Explicit and implicit difference schemes for pseudo-parabolic equations were used in the scientific laboratory of the Ministry of Ecology, Environmental Protection and Climate Change of the Republic of Karakalpakstan to obtain information on forecasting and assessing possible negative consequences for the natural environment of the Aral Sea region and to make conclusions on improving the quality of environmental and water resources in the Aral Sea region (Certificate of the Ministry of Ecology, Environmental Protection and Climate Change of the Republic of Karakalpakstan No. 02/18-436 dated February 6, 2025). The application of the

obtained scientific results made it possible to assess the ecosystems of the Aral Sea region and create a software system.

The volume and structure of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, a list of references, and appendices. The volume of the dissertation is 104 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo'lim (I часть; part I)

1. Utebaev D., Utepbergenova G.X., Tleuov K.O. Estimates for the convergence of high-accuracy difference schemes for the Aller's equation // Science and Education in Karakalpakstan, 2020, № 3-4(15). – P. 89-97. (01.00.00; № 11).
2. Utebaev D., Utepbergenova G.X., Tleuov K.O. On convergence of schemes of finite element method of high accuracy for the equation of heat and moisture transfer // Bulletin of Karaganda University, 2021, № 2(102). – P. 29-43. (№ 1, Web of Science, Q2, IF=0.6).
3. Utebaev D., Utepbergenova G.Kh., Tleuov K.O. On Convergence of Difference Schemes for Generalized Equation of Moisture Transferv in a Weak Metric // Bulletin of the Institute of Mathematics, 2021, Vol. 4, № 6. – P. 31-41. (01.00.00). (O'zbekiston Respublikasi OAK Rayosatining 2019 yil 28 martdagi 263/7.1-son qarori).
4. Utebaev D., Utepbergenova G., Tleuov K. Comparison of Some Numerical Methods for Solving Boundary-Value Problems for a Generalized Equation of Moisture Transfer // AIP Conference Proceedings, 2022, Vol. 2636. – P. 040009-1-6. (№ 1, Scopus, IF=0.6).
5. Utebaev D., Tleuov K.O., Khaibullaeva F.Kh. Compact Difference Shemes for the Aller-Lykov Moisture Transfer Equation // Science and Education in Karakalpakstan, 2022 y, № 4/2 (29). – P. 19-23. (01.00.00; № 11).
6. Utebaev D., Tleuov K.O., Nawbetullaev J.I. Difference Schemes of Higher Accuracy for a Pseudo-Parabolic Equation // Science and Education in Karakalpakstan, 2023 y, № 1/2 (31). – P. 10-16. (01.00.00; № 11).
7. Utebaev B.D., Tleuov K.O. Numerical Solution of a Heat and Moisture Transfer Equation // Science and Education in Karakalpakstan, 2023 y, № 2/2 (33). – P. 4-9. (01.00.00; № 11).
8. Utebaev D., Utebaev B.D., Tleuov K.O. Compact Difference Schemes for Moisture Transfer Equation // AIP Conference Proceedings, 2024, Vol. 3147. – P. 030005-1-8. (№ 1, Scopus, IF=0.6).
9. Tleuov K.O. Numerical Modeling of Heat and Moisture Transfer Equations by High-Accuracy Difference Schemes // Science and Education in Karakalpakstan, 2025 y, № 1/2(47). – P. 77-82. (01.00.00; № 11).

II bo‘lim (II часть; part II)

10. Утебаев Д., Тлеуов К.О. Методы повышенной точности для решения эволюционных уравнений физики полупроводников // Сборник материалов 1-Международной научной конференции «Научные основы использования информационных технологий нового уровня и современные проблемы автоматизации», 25-26 апрель 2022 г. – Ташкент. – С. 287-289.

11. Утебаев Д., Тлеуов К.О., Хайбуллаева Ф.Х. Компактные разностные схемы для уравнения влагопереноса // Тезисы международной научно-практической конференции «Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий», 2-3 мая 2023 г. Том № 2. – Нукус. – С. 312-314.

12. Utebaev D., Tleuov K.O. Numerical Solution to a Heat and Moisture Equation // Сборник материалов 2-Международной научной конференции «Научные основы использования информационных технологий нового уровня и современные проблемы автоматизации», 19-20 май 2023 г. – Ташкент. – С. 287-292.

13. Utebaev D., Tleuov K.O. Разностные схемы повышенной точности для параболического уравнения с дробной производной // VII Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики», 2023 г. – Нальчик, Россия, – С. 277-278.

14. Тлеуов К.О. Компактные разностные схемы для решения многомерного уравнения влагопереноса // Материалы Республиканской научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, математического моделирования и информатики», 2024 г. – Нукус: КГУ. – С. 409-411.

15. Утебаев Д., Тлеуов К.О. Разностные схемы повышенной точности для задач плановой фильтрации жидкости в многоплановых системах // Материалы международной научно-практической конференции «Современные проблемы математики и ее преподавания», 21-22 июнь 2024 г. – Худжанд, Таджикистан. – С. 326-328.

16. Тлеуов К.О. Схемы повышенной точности для решения многомерного уравнения Аллера-Лыкова // Материалы Республиканской научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики, математического моделирования и информатики», 2024 г. – Нукус: КГУ. – С. 407-409.

17. Tleuov K.O., Utebaev D. “Aller tenglamasini yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalar bilan sonli yechish uchun dastur”. Guvohnoma № DGU 49588, 02.04.2025.

18. Tleuov K.O., Utebaev D., Djumabayev K.N. “Aller-Lykov tenglamasini yuqori aniqlikdagi ayirmali sxemalar bilan sonli yechish uchun dastur”. Guvohnoma № DGU 51087, 08.05.2025.

Avtoreferat “O‘zbekiston: til va madaniyat: Lingvistika” jurnalida tahrirdan o‘tkazildi.

Bosishga ruxsat etildi: 17.07.2025-yil.
Bichimi 60x84, “Times New Roman”
garniturada raqamli bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 3. Adadi: 100. Buyurtma №: 202.

“TRAINMAX” MChJ bosmaxonasida chop etildi.
100194, Toshkent shahri, Yunusobod-11, 62-uy.