

**FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

NAMANGAN DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

XAMITOV AZIZBEK AXMADJON O‘G‘LI

**UCH O‘LCHOVLI FAZODA UCHINCHI TARTIBLI KARRALI
XARAKTERISTIKALI TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY
MASALALAR**

01.01.02 - Differensial tenglamalar va matematik fizika

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD)
dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi**

**Оглавления автореферата диссертации
доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Content of dissertation abstract of doctor of Philosophy (PhD)
on physical-mathematical sciences**

Xamitov Azizbek Axmadjon o'g'li

Uch o'lchovli fazoda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglama uchun chegaraviy masalalar3

Хамитов Азизбек Ахмаджон угли

Краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве.....21

Khamitov Azizbek Akhmadzhon ugli

Boundary value problems for a third-order equation with multiple characteristics in three-dimensional space39

E'lon qilingan ishlar ro'yxati

Список опубликованных работ

List of published works.....43

**FARG‘ONA DAVLAT UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

NAMANGAN DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

XAMITOV AZIZBEK AXMADJON O‘G‘LI

**UCH O‘LCHOVLI FAZODA UCHINCHI TARTIBLI KARRALI
XARAKTERISTIKALI TENGLAMA UCHUN CHEGARAVIY
MASALALAR**

01.01.02 - Differensial tenglamalar va matematik fizika

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Farg‘ona - 2025

Fizika – matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida № B2024.3.PhD/FM1144 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Namangan davlat texnika universitetida bajarilgan.
Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyme)). Ilmiy kengash veb-sahifasida (www.fdu.uz) va «Ziyonet» Axborot ta'lim portalida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:

Apakov Yusupjon Pulatovich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Rasmiy opponentlar:

Sitnik Sergey Mixaylovich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Ibaydullayev To'lanboy Tursunboyevich
fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

Yetakchi tashkilot:

Urganch davlat universiteti

Dissertatsiya himoyasi Farg'ona davlat universiteti huzuridagi PhD03/30.12.2019.FM.05.04 raqamli Ilmiy kengashning 2025 yil «8» 09 soat 10:00dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 150100, Farg'ona shahar, Murabbiylar ko'chasi, 19-uy. Tel.: (+99873) 244-22-94. e-mail: fardu_info@umail.uz)

Dissertatsiya bilan Farg'ona davlat universitetining Axborot – resurs markazida tanishish mumkin (562 raqam bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 150100, Farg'ona shahar, Murabbiylar ko'chasi, 19-uy. Tel.: (+99873) 244-44-94. e-mail: fardu_info@umail.uz)

Dissertatsiya avtoreferati 2025 «25» 08 kuni tarqatildi.
(2025 yil «25» 08 dagi 9 raqamli reestr bayonnomasi).



Sh.T. Karimov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash raisi o'rinbosari, f.-m.f.d., dotsent

I.U. Xaydarov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.n., dotsent

K.S. Gaziyeu
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash qoshidagi ilmiy seminar raisi o'rinbosari, f.-m.f.n., dotsent

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiya annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahonda miqyosida olib borilayotgan ko‘plab amaliy masalalarni tatqiq etish differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni hal qilishga olib kelinadi. Xususan, chiziqli bo‘lmagan akustika va kosmik plazmaning gidrodinamika nazariyalari, g‘ovakli muhitlarda suyuqliklarni filtrlash masalalari, axonlarda signallar tarqalishi, yadro reaktorlaridagi issiqlik tarqalishi va boshqa ko‘plab amaliy masalalar ko‘pincha uch o‘lchovli fazoda chegaralangan va yarim chegaralangan sohalarda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarga keltiriladi. Bundan ko‘rinadiki, uch o‘lchovli fazoda chegaralangan va yarim chegaralangan sohalarda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali differensial tenglama uchun chegaraviy masalalarni yechish yuqoridagi amaliy masalalarni tahlillari va xususiyatlari to‘g‘risida to‘liq tasavvurni ta‘minlagan holda xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasining dolzarb yo‘nalishlaridan biri sifatida muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

Jahonda yuqori tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni qo‘yish va ularning yechish usullarini ishlab chiqishga yo‘naltirilgan ilmiy tadqiqot ishlari olib borilmoqda. Bunda xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasi bo‘yicha olib borilayotgan tadqiqotlarni shartli ravishda ikki yo‘nalishga bo‘lish mumkin. Bulardan birinchisi chegaraviy masalalar yechimlarining yagonaligi haqidagi teoremlarni isbotlash bo‘lsa, ikkinchisi esa ko‘rib chiqilayotgan chegaraviy masalalarning xos qiymatlari va xos funksiyalarini aniqlash va ular asosida chegaraviy masalalar yechimlarining mavjudligi haqidagi teoremlarni isbotlashdir. Bu yo‘nalishlardagi ilmiy izlanishlar hozirda jadal davom etmoqda va rivojlanmoqda. Shu munosabat bilan, uch o‘lchovli fazoda chegaralangan va yarim chegaralangan sohalarda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni o‘rganish maqsadli ilmiy tadqiqot hisoblanadi.

Respublikamizda fundamental, amaliy va innovatsion g‘oyalarga asoslangan tadqiqotlar yuzasidan keng qamrovli chora-tadbirlar amalga oshirilib, muayyan natijalarga erishilmoqda. Jumladan, matematika fanlarining ustuvor yo‘nalishlari, xususan, differensial tenglamalar va matematik fizika, dinamik sistemalar va optimal boshqaruv, amaliy matematika va matematik modellashtirish, matematik analiz va funksiyalar nazariyasi, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, algebra va geometriya bo‘yicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish matematiklarning asosiy vazifalari va faoliyati sifatida belgilangan¹. Ushbu vazifalarni amalga oshirishda, xususan ilm-fanning turdosh sohalarida qo‘llash maqsadida, uch o‘lchovli fazoda chegaralangan va yarim chegaralangan sohalarda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni tadqiq qilish muhim ahamiyatga ega.

¹ O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017-yil 18-maydagi “O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy-tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish chora-tadbirlari to‘g‘risida” gi 292-son qarori.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 20-apreldagi PQ-2909-son “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2018-yil 27-apreldagi PQ-3682-son “Innovatsion g‘oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2022-yil 28-yanvardagi PF-60-son “2022–2026-yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi farmon va qarorlar hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa me‘yoriy-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur dissertatsiya respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Masalaning o‘rganilganlik darajasi. Ma’lumki, uch o‘lchovli fazoda chegaralangan va yarim chegaralangan sohalarda uchinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun yangi chegaraviy masalalarni qo‘yish va o‘rganish muayyan qiyinchiliklarni tug‘diradi. Bugungi kunga qadar ikki o‘lchovli fazolarda ikkinchi, uchinchi va yuqori tartibli tenglamalar uchun chegaraviy masalalarga bag‘ishlangan ko‘plab tadqiqotlar amalga oshirilgan. Jumladan, O.S. Rijovning ishida gazning issiqlik o‘tkazuvchanligi va qovushqoqlik xossalarini hisobga olib Navye-Stoks sistemasidan uchinchi tartibli karrali xarakteristikali vaqt bo‘yicha ikkinchi tartibli hosilani o‘z ichiga olgan quyidagi tenglama hosil qilingan

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{v}{y}u_y = u_x u_{xx}, \quad v = \text{const.}$$

Bu tenglama $v=1$ bo‘lganda koordinata o‘qlariga simmetrik oqimni, $v=0$ bo‘lganda esa koordinata o‘qlari joylashgan tekislikka tekis parallel oqimni ifodalaydi, keyinchalik bu oqim V.N. Diesperov tomonidan o‘rganilgan.

Uchinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglamalar bo‘yicha dastlabki natijalarni H.Block va E.Del Vecchio ishlarida olingan. L.Catabriga esa $D_x^{2n+1}u - D_y^2u = 0$ tenglama uchun ikki karrali xosmas integrallar orqali ifodalangan fundamental yechim qurgan, potensial xususiyatlarini o‘rgangan va chegaraviy masala yechgan. Ushbu nazariyaning rivojiga V.I.Jegalov, V.F.Volkodavov, V.V.Azovskiy, K.B.Sabitov, S.M.Sitnik, A.N.Mironov, Zh.A.Balkizov, G.A.Lukina, A.Ashuraliyev, A.I.Kojanov, Y.A.Utkina va boshqa olimlar ham sezilarli hissa qo‘shishgan.

Respublikamizda ushbu turdagi differensial tenglamalar bo‘yicha natijalar T.D.Djurayev, S.Abdinazarov, Yu.P.Apakov, Z.A.Sobirov, A.R.Xoshimov, B.Yu.Irgashev va boshqalar tomonidan o‘rganilgan bo‘lib, ular ikki o‘lchovli fazoda

uchinchi tartibli tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni o'rganish. Shuningdek, A.K.Urinov, Sh.T.Karimov va K.T.Karimovning ishlarida singulyar koeffitsientli ikki va ko'p o'lchovli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar o'rganilgan.

Ko'plab matematiklarning olgan natijalariga qaramay, uchinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar uchun uch o'lchovli fazoda chegaraviy masalalar nazariyasini yanada rivojlantirish talab etiladi. Shu sababli, bunday tenglamalarni chegaralangan va yarim chegaralangan sohalarda o'rganish nazariyani rivojlantirishda muayyan ahamiyatga ega.

Dissertatsiya tadqiqotning dissertatsiya bajarilgan oliy ta'lim yoki ilmiy-tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog'liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Namangan davlat texnika universitetining ilmiy tadqiqot ishlari rejasiga muvofiq "Differensial tenglamalarning klassik va noklassik masalalari va ularning tadbirlari" dasturi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi uch o'lchovli fazoda chegaralangan va yarim chegaralangan sohalarda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni qo'yish va tadqiq etishdir.

Tadqiqotning vazifalari quyidagilardan iborat:

chegaralangan sohalarda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglama uchun chegaraviy masalalar yechimlarining mavjudligi va yagonaligi isbotlash;

yarim chegaralangan sohalarda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglama uchun korrekt chegaraviy masalalarni qo'yish va o'rganish;

uchinchi tartibli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaga qo'yilgan aralash shartli chegaraviy masala uchun Grin funksiyasini qurish, uning strukturasi hamda asosiy xossalarni aniqlash;

uchinchi tartibli karrali xarakteristikali bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama uchun qo'yilgan aralash shartli chegaraviy masalalar korrektiligini isbotlash.

Tadqiqotning obyekti uch o'lchovli fazoda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglamalardan iborat.

Tadqiqotning predmeti chegaralangan va yarim chegaralangan sohalarda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglamalar uchun chegaraviy masalalarni o'rganishdan iborat.

Tadqiqotning usullari. Dissertatsiya ishida matematik va funksional tahlil usullari, differensial tenglamalar, matematik fizika, chiziqli algebra, qatorlar nazariyasi, shuningdek, yechimlarni qurish usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

chegaralangan sohada uchinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglama uchun chegaraviy masalalar yechimlarining mavjudligi va yagonaligi Furye va energiya integrallari usullari yordamida isbotlangan;

yarim chegaralangan sohalarda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglama uchun chegaraviy masalalarning bir qiymatli yechilishi o'zgaruvchilarni ajratish hamda energiya integrallari usullaridan foydalanib isbotlangan;

Furye usuli yordamida hosil qilingan uchinchi tartibli bir jinsli bo‘lmagan oddiy differensial tenglamaga qo‘yilgan aralash shartli chegaraviy masala uchun Grin funksiyasi qurilib, uning strukturasi hamda asosiy xossalari aniqlangan;

uchinchi tartibli karrali xarakteristikali bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglama uchun aralash shartli chegaraviy masalalar korrektiligi Furye, Grin funksiyalar va energiya integrallari usullaridan foydalanib isbotlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari analitik yechimlardan fizik jarayonlarning sifat xususiyatlarini o‘rganishda, shuningdek ularni sonli hisoblarda qo‘llash imkoniyatidan iborat.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi matematik va funksional analiz, differensial tenglamalar va matematik fizika usullarining qat’iy qo‘llanishi, chegaraviy masalalarning yechimlarini oshkor ko‘rinishda qurishda Grin funksiyalari nazariyasidan foydalanish, shuningdek, teoremlar isbotlarining to‘liqligi va qat’iyligi bilan tasdiqlanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati ularning ikki, uch va ko‘p o‘lchovli fazolarda yuqori tartibli xususiy hosilali differensial tenglamalar nazariyasini yanada rivojlantirishda qo‘llanilishidadir. Amaliy ahamiyati esa olingan natijalarni fizik jarayonlarni o‘rganishda va uch o‘lchovli fazoda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglamalar bilan tavsiflangan fanning turli sohalarida qo‘llash imkoniyati bilan bog‘lanadi.

Tadqiqot natijalarini joriy etish. Uch o‘lchovli fazoda chegaralangan va yarim chegaralangan sohalarda xususiy hosilali uchinchi tartibli karrali xarakteristikali differensial tenglamalar uchun chegaraviy masalalar bo‘yicha olingan ilmiy natijalar asosida:

uch o‘lchovli fazoda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali bir jinsli bo‘lmagan tenglama uchun chegaraviy masalalarning yechimlarini Grin funksiyasi yordamida qurishning yangi usullari bo‘yicha olingan natijalar NIOKTR 122041800029-5 raqamli “Asosiy va aralash tipdagi tenglamalar uchun chegaraviy va boshqaruv masalalari va ularni taqsimlangan parametrlarga ega sistemalarni o‘rganishda qo‘llanilishi” nomli xorijiy loyiha bo‘yicha ilmiy tadqiqot ishlarida foydalanilgan (Rossiya Fanlar Akademiyasining Kabardin-Balkar ilmiy markazi Amaliy matematika va avtomatlashtirish institutining 2025-yil 15-apreldagi № 01-13/47-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, yuqori tartibli bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar uchun yangi chegaraviy masalalarni yechish imkonini bergan;

uch o‘lchovli fazoda chegaralangan va yarim chegaralangan sohalarda xususiy hosilali uchinchi tartibli karrali xarakteristikali differensial tenglamalar uchun yangi chegaraviy masalalarning yechimini qurish usullari bo‘yicha olingan natijalar 374874-2022 raqamli “Fazali o‘tish masalalari va kritik hodisalari. Tenglamalarning matematik jihatlari, tezkor o‘tishlar va asimptotika” nomli xorijiy loyiha bo‘yicha ilmiy tadqiqot ishlarida foydalanilgan (Qirg‘iziston Respublikasi O‘sh Davlat universitetining 2025-yil 17- apreldagi №652-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, uch o‘lchovli fazoda chegaralangan va yarim chegaralangan sohalarda uchinchi tartibli

tenglamalar uchun yangi chegaraviy masalalarning oshkor ko‘rinishdagi yechimlarini qurish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarini aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 13 ta xalqaro va 2 ta respublika miqyosidagi ilmiy-amaliy anjumanlarda taqdim etilgan va muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e‘lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha 23 ta ilmiy ishlar chop etilgan bo‘lib, shu jumladan, 7 ta ilmiy maqola O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda, jumladan 3 tasi xorijiy va 4 tasi respublika jurnallarida chop etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan iborat. Dissertatsiyaning hajmi 91 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi va muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, ob‘yekt va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ilmiy ishlar, dissertatsiya hajmi va tuzilishi bo‘yicha ma‘lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning “**Uch o‘lchovli fazoda chegaralangan sohalarda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglama uchun chegaraviy masalalarni o‘rganish**” deb nomlangan **birinchi bobi** uch o‘lchovli fazoda chegaralangan sohalarda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglama uchun korrekt qo‘yilgan chegaraviy masalalarga bag‘ishlangan, qo‘yilgan masalalar yechimlarining yagonaligi energiya integrallari usulida, mavjudligi esa Furrye usulida isbotlangan.

$D = \{(x, y, z) : x \in (0, p), y \in (0, q), z \in (0, r)\}$ sohada uchinchi tartibli

$$L[u] \equiv u_{xxx} - u_{yy} - u_{zz} = 0, \quad (1)$$

tenglamani qaraymiz, bu yerda $p, q, r \in R^+$, $R^+ = \{p, q, r \in R, p > 0, q > 0, r > 0\}$.

Birinchi bobning birinchi paragrafida chegaraviy masalalar qo‘yilgan va masalalar yechimlarining yagonaligi isbotlangan.

A_1 **masala.** D sohada

$$u(x, y, z) \in C_{x,y,z}^{3,2,2}(D) \cap C_{x,y,z}^{2,1,1}(\bar{D}) \quad (2)$$

sinfga tegishli, (1) tenglamani hamda quyidagi

$$\begin{aligned} u(x, 0, z) = u(x, q, z) = 0, \\ u(x, y, 0) = u(x, y, r) = 0, \end{aligned} \quad x \in [0, p], y \in [0, q], z \in [0, r], \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u(0, y, z) = \psi_1(y, z), u(p, y, z) = \psi_2(y, z), \\ u_x(p, y, z) = \psi_3(y, z), \quad y \in [0, q], z \in [0, r], \end{aligned} \quad (4)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechim topilsin, bu yerda $\psi_i(y, z), i = \overline{1, 3}$ - lar \overline{D} sohada berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

1-teorema. Agar A_1 masalaning yechimi mavjud bo'lsa, u yagonadir.

A_2 **masala.** D sohada (2) sinfga tegishli, (1) tenglamani hamda (4) va quyidagi

$$\begin{aligned} u_y(x, 0, z) = u_y(x, q, z) = 0, \\ u_z(x, y, 0) = u_z(x, y, r) = 0, \quad x \in [0, p], y \in [0, q], z \in [0, r], \end{aligned} \quad (5)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechim topilsin.

2-teorema. Agar A_2 masalaning yechimi mavjud bo'lsa, u yagonadir.

A_3 **masala.** D sohada (2) sinfga tegishli, (1) tenglamani hamda (4) va quyidagi

$$\begin{cases} \alpha u(x, 0, z) + \beta u_y(x, 0, z) = 0, \\ \gamma u(x, q, z) + \delta u_y(x, q, z) = 0, \\ u(x, y, 0) = u(x, y, r) = 0, \end{cases} \quad x \in [0, p], y \in [0, q], z \in [0, r], \quad (6)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechim topilsin, bu yerda $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R \setminus \{0\}$.

3-teorema. Agar A_3 masalaning yechimi mavjud bo'lib, $\alpha\beta < 0$ va $\gamma\delta > 0$ shartlar bajarilganda yechim yagonadir.

A_4 **masala.** D sohada (2) sinfga tegishli, (1) tenglamani hamda (4) va quyidagi

$$\begin{cases} \alpha u(x, y, 0) + \beta u_z(x, y, 0) = 0, \\ \gamma u(x, y, r) + \delta u_z(x, y, r) = 0, \\ u(x, 0, z) = u(x, q, z) = 0, \end{cases} \quad x \in [0, p], y \in [0, q], z \in [0, r], \quad (7)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechim topilsin, bu yerda $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R \setminus \{0\}$.

4-teorema. Agar A_4 masalaning yechimi mavjud bo'lib, $\alpha\beta < 0$ va $\gamma\delta > 0$ shartlar bajarilganda yechim yagonadir.

Qo'yilgan masalalar yechimlarining yagonalik teoremlari energiya integrallari usuli yordamida isbotlangan.

Birinchi bobning ikkinchi paragrafida D sohada (1) tenglama uchun A_1 masala yechimining mavjudligi isbotlangan va yechim cheksiz qator ko'rinishida qurilgan.

5-teorema. Agar $\psi_i(y, z), i = \overline{1, 3}$ funksiyalar uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

1) $\psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{3,3}(\overline{\Pi}), i = \overline{1, 3}$, bu yerda $\overline{\Pi} = \{(y, z) : y \in [0, q], z \in [0, r]\}$;

$$2) \begin{cases} \psi_i(0, z) = \psi_i(q, z) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_i(0, z)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi_i(q, z)}{\partial y^2} = 0, \\ \psi_i(y, 0) = \psi_i(y, r) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_i(y, 0)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi_i(y, r)}{\partial z^2} = 0, \end{cases} \quad i = \overline{1, 3},$$

u holda A_1 masalaning yechimi ko'rsatilgan funksiyalar sinfida mavjud.

5-teoremaning isboti Furye usuli bilan amalga oshirilgan va A_1 masalaning yechimi quyidagi ko'rinishda topilgan:

$$u(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{qr}} \sum_{n,m=1}^{+\infty} \left[C_{1n,m} e^{-k_{n,m}x} + e^{\frac{1}{2}k_{n,m}x} \left(C_{2n,m} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}x + C_{3n,m} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}x \right) \right] \times \\ \times \sin \frac{n\pi y}{q} \sin \frac{m\pi z}{r},$$

bu yerda

$$C_{1n,m} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \psi_{1n,m} k_{n,m} e^{k_{n,m}p} - \psi_{2n,m} \delta k_{n,m} e^{\frac{1}{2}k_{n,m}p} + \psi_{3n,m} \beta e^{\frac{1}{2}k_{n,m}p} \right], \\ C_{2n,m} = \frac{1}{\Delta} \left[-k_{n,m} (\beta + \delta) \psi_{1n,m} e^{\frac{1}{2}k_{n,m}p} + \psi_{2n,m} \delta k_{n,m} e^{\frac{1}{2}k_{n,m}p} - \psi_{3n,m} \beta e^{\frac{1}{2}k_{n,m}p} \right], \\ C_{3n,m} = \frac{1}{\Delta} \left[k_{n,m} (\alpha + \gamma) \psi_{1n,m} e^{\frac{1}{2}k_{n,m}p} - \psi_{2n,m} k_{n,m} \left(e^{-k_{n,m}p} + \gamma e^{\frac{1}{2}k_{n,m}p} \right) + \right. \\ \left. + \psi_{3n,m} \left(\alpha e^{\frac{1}{2}k_{n,m}p} - e^{-k_{n,m}p} \right) \right], \\ \Delta = \sqrt{3} k_{n,m} e^{k_{n,m}p} \left(\frac{1}{2} - e^{\frac{3}{2}k_{n,m}p} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}p + \frac{\pi}{6} \right) \right), \\ \alpha = \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}p, \quad \beta = \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}p, \quad \gamma = \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}p + \frac{\pi}{3} \right), \\ \delta = \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}p + \frac{\pi}{3} \right), \quad k_{n,m} = \sqrt[3]{\left(\frac{n^2}{q^2} + \frac{m^2}{r^2} \right) \pi^2}, \\ \psi_{in,m} = \frac{2}{\sqrt{qr}} \int_0^q \int_0^r \psi_i(y, z) \sin \frac{n\pi y}{q} \sin \frac{m\pi z}{r} dy dz, \quad i = \overline{1,3}, \quad n, m \in N.$$

Shuni ta'kidlash kerakki, Δ kichik mahraj bo'lmasligi, uning noldan farqli ($\Delta \neq 0$), hamda $\min|\Delta| > 0$ ekani isbotlangan.

Birinchi bobning uchinchi paragrafida A_2 , A_3 va A_4 masalalarning yechimlari qurilgan. Quyidagi teoremlar isbotlangan:

6-teorema. Agar $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1,3}$ funksiyalar uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

1) $\psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{3,3}(\overline{\Pi})$, $i = \overline{1,3}$, bu yerda $\overline{\Pi} = \{(y, z) : y \in [0, q], z \in [0, r]\}$;

$$2) \begin{cases} \frac{\partial \psi_i(0, z)}{\partial y} = \frac{\partial \psi_i(q, z)}{\partial y} = 0, & \frac{\partial^4 \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z} = \frac{\partial^4 \psi_i(y, r)}{\partial y^3 \partial z} = 0, \\ \frac{\partial \psi_i(y, 0)}{\partial z} = \frac{\partial \psi_i(y, r)}{\partial z} = 0, & \frac{\partial^4 \psi_i(0, z)}{\partial y \partial z^3} = \frac{\partial^4 \psi_i(q, z)}{\partial y \partial z^3} = 0, \end{cases} \quad i = \overline{1, 3},$$

u holda A_2 masalaning yechimi ko‘rsatilgan funksiyalar sinfida mavjud.

7-teorema. Agar $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1, 3}$ funksiyalar uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

1) $\psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{4,3}(\overline{\Pi})$, $i = \overline{1, 3}$, bu yerda $\overline{\Pi} = \{(y, z) : y \in [0, q], z \in [0, r]\}$;

$$2) \begin{cases} \alpha \frac{\partial^j \psi_i(0, z)}{\partial y^j} + \beta \frac{\partial^{j+1} \psi_i(0, z)}{\partial y^{j+1}} = 0, & \gamma \frac{\partial^j \psi_i(q, z)}{\partial y^j} + \delta \frac{\partial^{j+1} \psi_i(q, z)}{\partial y^{j+1}} = 0, \quad j = 0, 2, \\ \frac{\partial^4 \psi_i(y, r)}{\partial y^4} = \frac{\partial^4 \psi_i(y, 0)}{\partial y^4} = 0, & \frac{\partial^6 \psi_i(y, r)}{\partial y^4 \partial z^2} = \frac{\partial^6 \psi_i(y, 0)}{\partial y^4 \partial z^2} = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \end{cases}$$

u holda A_3 masalaning yechimi ko‘rsatilgan funksiyalar sinfida mavjud.

8-teorema. Agar $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1, 3}$ funksiyalar uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

1) $\psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{3,4}(\overline{\Pi})$, $i = \overline{1, 3}$, bu yerda $\overline{\Pi} = \{(y, z) : y \in [0, q], z \in [0, r]\}$;

$$2) \begin{cases} \psi_i(0, z) = \psi_i(q, z) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_i(0, z)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi_i(q, z)}{\partial y^2} = 0, \\ \alpha \frac{\partial^{3+j} \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z^j} + \beta \frac{\partial^{4+j} \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z^{j+1}} = 0, & j = 0, 2, \quad i = \overline{1, 3}, \\ \gamma \frac{\partial^{3+j} \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z^j} + \delta \frac{\partial^{4+j} \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z^{j+1}} = 0, \end{cases}$$

u holda A_4 masalaning yechimi ko‘rsatilgan funksiyalar sinfida mavjud.

Dissertatsiyaning “**Uch o‘lchovli fazoda yarim chegaralangan sohalarda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglama uchun chegaraviy masalalar**” deb nomlangan **ikkinchi bobida** $D^+ = \{(x, y, z) : x \in (0, +\infty), y \in (0, q), z \in (0, r)\}$ va $D^- = \{(x, y, z) : x \in (-\infty, 0), y \in (0, q), z \in (0, r)\}$, bu yerda $q, r \in R^+$, sohalarda (1) tenglama uchun chegaraviy masalalar o‘rganilgan.

Ikkinchi bobning birinchi paragrafida birinchi chegaraviy masala qo‘yilgan, yechimning yagonaligi va mavjudligi isbotlangan.

B_1 masala. D^+ sohada

$$C_{x,y,z}^{3,2,2}(D^+) \cap C_{x,y,z}^{2,1,1}(D^+ \cup \Gamma_1), \quad (8)$$

sinfga tegishli, (1) tenglamani hamda quyidagi $x \in [0, +\infty)$ da (3) va

$$u(0, y, z) = \psi_1(y, z), \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y, z) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_x(x, y, z) = 0, \quad y \in [0, q], z \in [0, r],$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi, hamda $x \rightarrow +\infty$ da y va z o'zgaruvchilari bo'yicha birinchi tartibli hosilasi, x ga nisbatan tekis va x o'zgaruvchiga nisbatan ikkinchi tartibli hosilalari chegaralangan va $u_y, u_z \in L_2(D^+)$ regulyar yechim topilsin, bu yerda $\Gamma_1 = \partial D^+ - D^+$ sohaning chegarasi, $\psi_1(y, z)$ berilgan yetarlicha silliq funksiya, u uchun

$$\begin{cases} \psi_1(0, z) = \psi_1(q, z) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_1(0, z)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi_1(q, z)}{\partial y^2} = 0, \\ \psi_1(y, 0) = \psi_1(y, r) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_1(y, 0)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi_1(y, r)}{\partial z^2} = 0, \end{cases} \quad (10)$$

shart o'rinli.

B_2 masala. D^- sohada

$$C_{x,y,z}^{3,2,2}(D^-) \cap C_{x,y,z}^{2,1,1}(D^- \cup \Gamma_2), \quad (11)$$

sinfga tegishli, (1) tenglamani hamda quyidagi $x \in (-\infty, 0]$ da (3) va

$$\begin{aligned} u(0, y, z) &= \psi_2(y, z), & u_x(0, y, z) &= \psi_3(y, z), \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, y, z) &= 0, & y \in [0, q], z \in [0, r], \end{aligned} \quad (12)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi, hamda $x \rightarrow -\infty$ da y va z o'zgaruvchilari bo'yicha birinchi tartibli hosilasi, x ga nisbatan tekis va x o'zgaruvchiga nisbatan birinchi va ikkinchi tartibli hosilalari chegaralangan va $u_y, u_z \in L_2(D^-)$ regulyar yechim topilsin, bu yerda $\Gamma_2 = \partial D^- - D^-$ sohaning chegarasi, $\psi_i(y, z), i = 2, 3$ -lar berilgan yetarlicha silliq funksiyalar, u uchun

$$\begin{cases} \psi_i(0, z) = \psi_i(q, z) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_i(0, z)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi_i(q, z)}{\partial y^2} = 0, \\ \psi_i(y, 0) = \psi_i(y, r) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_i(y, 0)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi_i(y, r)}{\partial z^2} = 0, \end{cases} \quad i = 2, 3, \quad (13)$$

shart o'rinli.

9-teorema. Agar B_1 va B_2 masalalarning yechimlari mavjud bo'lsa, u holda har bir yechim yagona.

9-teorema energiya integrallari usuli bilan isbotlangan. Bu usulni yarim chegaralangan sohalarda qo'llash uchun avvalo $x = d > 0$ ($x = c < 0$) chiziqlar bilan chegaralangan sohani ko'rib chiqiladi, so'ngra $d \in \mathbb{R}^+ + \Gamma$ ($c \in \mathbb{R}^- - \Gamma$) (1) tenglama uchun qo'yilgan boshlang'ich masala yechimining yagonaligi isbotlanadi.

10-teorema. Agar $\psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{3,3}(\bar{\Pi}), i = \overline{1,3}$, bu yerda $\bar{\Pi} = \{(y, z) : y \in [0, q], z \in [0, r]\}$ funksiyalar sinfga tegishli bo'lib, (10) va (13) shartlar mos ravishda bajarilsa, u holda B_1 va B_2 masalalarning yechimi mavjud bo'ladi.

10-teorema Furrye usuli bilan isbotlangan va yechim oshkor cheksiz qator ko'inishda qurilgan. Berilgan sohalarda yechimni va (1) tenglamaga kiruvchi xususiy hosilalarini absolyut va tekis yaqinlashishi ko'rsatilgan.

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida ikkinchi chegaraviy masala qo'yilgan, yechimning yagonaligi va mavjudligi isbotlangan.

B_3 masala. D^+ sohada (8) sinfga tegishli, (1) tenglamani hamda quyidagi $x \in [0, +\infty)$ da (5) va (9) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi, hamda $x \rightarrow +\infty$ da x o'zgaruvchi bo'yicha ikkinchi tartibli hosilasi, y va z o'zgaruvchilariga nisbatan tekis chegaralangan va $u_y, u_z \in L_2(D^+)$ regulyar yechim topilsin, bu yerda $\psi_1(y, z)$ berilgan yetarlicha silliq funksiya, u uchun

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1(0, z)}{\partial y} = \frac{\partial \psi_1(q, z)}{\partial y} = 0, & \frac{\partial^4 \psi_1(y, 0)}{\partial y^3 \partial z} = \frac{\partial^4 \psi_1(y, r)}{\partial y^3 \partial z} = 0, \\ \frac{\partial \psi_1(y, 0)}{\partial z} = \frac{\partial \psi_1(y, r)}{\partial z} = 0, & \frac{\partial^4 \psi_1(0, z)}{\partial z^3 \partial y} = \frac{\partial^4 \psi_1(q, z)}{\partial z^3 \partial y} = 0, \end{cases} \quad (14)$$

shart o'rinli.

B_4 masala. D^- sohada (11) sinfga tegishli, (1) tenglamani hamda quyidagi $x \in (-\infty, 0]$ da (5) va (12) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi, hamda $x \rightarrow -\infty$ da x o'zgaruvchi bo'yicha birinchi va ikkinchi tartibli hosilasi, y va z o'zgaruvchilariga nisbatan tekis chegaralangan va $u_y, u_z \in L_2(D^-)$ regulyar yechim topilsin, bu yerda $\psi_i(y, z), i = 2, 3$ -lar berilgan yetarlicha silliq funksiyalar, u uchun

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_i(0, z)}{\partial y} = \frac{\partial \psi_i(q, z)}{\partial y} = 0, & \frac{\partial^4 \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z} = \frac{\partial^4 \psi_i(y, r)}{\partial y^3 \partial z} = 0, \\ \frac{\partial \psi_i(y, 0)}{\partial z} = \frac{\partial \psi_i(y, r)}{\partial z} = 0, & \frac{\partial^4 \psi_i(0, z)}{\partial z^3 \partial y} = \frac{\partial^4 \psi_i(q, z)}{\partial z^3 \partial y} = 0, \end{cases} \quad i = 2, 3, \quad (15)$$

shart o'rinli.

11-teorema. Agar B_3 va B_4 masalalarning yechimlari mavjud bo'lsa, u holda har bir yechim yagona.

11- teoremaning isboti 9-teorema kabi isbotlangan.

12-teorema. Agar $\psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{3,3}(\bar{\Pi}), i = \overline{1, 3}$, bu yerda $\bar{\Pi} = \{(y, z) : y \in [0, q], z \in [0, r]\}$ funksiyalar sinfga tegishli bo'lib, (14) va (15) shartlar mos ravishda bajarilsa, u holda B_3 va B_4 masalalarning yechimi mavjud bo'ladi.

12-teorema Furrye usuli bilan isbotlangan, hamda yechim $n = m = 0$ va $n^2 + m^2 \neq 0$ hollarida cheksiz qator ko'inishida topilgan. Har bir holda topilgan cheksiz qator ko'inishidagi yechim va uning (1) tenglamaga kiruvchi xususiy hosilalari berilgan sohada absolyut va tekis yaqinlashishi ko'rsatilgan.

Ikkinchi bobning uchinchi paragrafida uchinchi chegaraviy masala qo'yilgan, yechimning yagonaligi va mavjudligi isbotlangan.

B_5 masala. D^+ sohada (8) sinfga tegishli, (1) tenglamani hamda quyidagi $x \in [0, +\infty)$ da (6) va (9) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi, hamda $x \rightarrow +\infty$ da x o'zgaruvchi bo'yicha ikkinchi tartibli hosilasi, y va z o'zgaruvchilariga nisbatan tekis chegaralangan va $u_y, u_z \in L_2(D^+)$ regulyar yechim topilsin, bu yerda $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R \setminus \{0\}$, $\psi_1(y, z)$ berilgan yetarlicha silliq funksiya, u uchun

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial^j \psi_1(0, z)}{\partial y^j} + \beta \frac{\partial^{j+1} \psi_1(0, z)}{\partial y^{j+1}} = 0, & \gamma \frac{\partial^j \psi_1(q, z)}{\partial y^j} + \delta \frac{\partial^{j+1} \psi_1(q, z)}{\partial y^{j+1}} = 0, \\ \frac{\partial^4 \psi_1(y, r)}{\partial y^4} = \frac{\partial^4 \psi_1(y, 0)}{\partial y^4} = 0, & \frac{\partial^6 \psi_1(y, r)}{\partial y^4 \partial z^2} = \frac{\partial^6 \psi_1(y, 0)}{\partial y^4 \partial z^2} = 0, \end{cases} \quad j = 0, 2, \quad (16)$$

shart o'rinli.

B_6 masala. D^- sohada (11) sinfga tegishli, (1) tenglamani hamda quyidagi $x \in (-\infty, 0]$ da (6) va (12) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi, hamda $x \rightarrow -\infty$ da x o'zgaruvchi bo'yicha birinchi va ikkinchi tartibli hosilasi, y va z o'zgaruvchilariga nisbatan tekis chegaralangan va $u_y, u_z \in L_2(D^-)$ regulyar yechim topilsin, bu yerda $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R \setminus \{0\}$, $\psi_i(y, z)$, $i = 2, 3$ -lar berilgan yetarlicha silliq funksiyalar, u uchun

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial^j \psi_i(0, z)}{\partial y^j} + \beta \frac{\partial^{j+1} \psi_i(0, z)}{\partial y^{j+1}} = 0, & \gamma \frac{\partial^j \psi_i(q, z)}{\partial y^j} + \delta \frac{\partial^{j+1} \psi_i(q, z)}{\partial y^{j+1}} = 0, & j = 0, 2, \\ \frac{\partial^4 \psi_i(y, 0)}{\partial y^4} = \frac{\partial^4 \psi_i(y, r)}{\partial y^4} = 0, & \frac{\partial^6 \psi_i(y, 0)}{\partial y^4 \partial z^2} = \frac{\partial^6 \psi_i(y, r)}{\partial y^4 \partial z^2} = 0, & i = 2, 3, \end{cases} \quad (17)$$

shart o'rinli.

13-teorema. Agar B_5 va B_6 masalalarning yechimlari mavjud bo'lib, hamda $\alpha\beta < 0$, $\gamma\delta > 0$ shartlar bajarilsa, bu yechimlar yagona.

13-teorema energiya integrallari usulida isbotlangan, hamda B_5 va B_6 masalalarning yechimlari yagona ekanligini ta'minlovchi α , β , γ va δ koeffisientlar uchun yetarlicha shartlar topilgan.

14-teorema. Agar $\psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{4,3}(\bar{\Pi})$, $i = \overline{1, 3}$, bu yerda $\bar{\Pi} = \{(y, z) : y \in [0, q], z \in [0, r]\}$ funksiyalar sinfga tegishli bo'lib, (16) va (17) shartlar mos ravishda bajarilsa, u holda B_5 va B_6 masalalarning yechimi mavjud bo'ladi.

14-teorema 10-teoremaning isboti bilan o'xshash usulda isbotlanadi, ammo xos qiymatlar, xos funksiyalar va chegaraviy funksiyalari $\psi_i(x, y)$, $i = \overline{1, 3}$ sinfi bilan farq qiladi, va bu funksiyalar berilgan sohalarda topilgan cheksiz qatorlar ko'rinishidagi yechimning tekis yaqinlashishini ta'minlaydi.

Dissertatsiyaning “Uch o‘lchovli fazoda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali bir jinsli bo‘lmagan tenglama uchun chegaraviy masalalar” deb nomlangan uchinchi bobida uch o‘lchovli fazoda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali bir jinsli bo‘lmagan tenglama uchun chegaraviy masalalar qo‘yilgan. Qo‘yilgan chegaraviy masalalar yechimlarining yagonaligi energiya integrallari usulida, mavjudligi Furiye usuli va Grin funksiyasini qurish usulida isbotlangan.

Ushbu bobda $D = \{(x, y, z) : x \in (0, p), y \in (0, q), z \in (0, r)\}$ sohada quyidagi

$$L[u] \equiv u_{xxx} - u_{yy} - u_{zz} = f(x, y, z), \quad (18)$$

uchinchi tartibli bir jinsli bo‘lmagan tenglamani qaraymiz, bu yerda $p, q, r \in R^+$, $f(x, y, z)$ berilgan \bar{D} sohada yetarlicha silliq funksiya.

Uchinchi bobning birinchi paragrafida chegaraviy masalalar qo‘yilgan va ularning yagona yechimga ega ekanligi isbotlangan.

E_1 masala. D sohada (2) sinfga tegishli, (18) tenglamani hamda quyidagi (3) va

$$\begin{cases} au(0, y, z) + bu_{xx}(0, y, z) = \psi_1(y, z), \\ cu(p, y, z) + du_{xx}(p, y, z) = \psi_2(y, z), & y \in [0, q], \quad z \in [0, r], \\ u_x(p, y, z) = \psi_3(y, z), \end{cases} \quad (19)$$

chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechim topilsin, bu yerda $a, b, c, d \in R \setminus \{0\}$, $\psi_i(y, z), i = \overline{1, 3}$ - lar \bar{D} sohada berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

15-teorema. Agar E_1 masala yechimga ega bo‘lsa hamda $ab > 0$, $cd < 0$ shartlar bajarilsa, bu yechim yagona.

E_2 masala. D sohada (2) sinfga tegishli, (18) tenglamani hamda (5) va (19) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechim topilsin, bu yerda $a, b, c, d \in R \setminus \{0\}$, $\psi_i(y, z), i = \overline{1, 3}$ - lar \bar{D} sohada berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

16-teorema. Agar E_2 masala yechimga ega bo‘lsa hamda $ab > 0$, $cd < 0$ shartlar bajarilsa, bu yechim yagona.

E_3 masala. D sohada (2) sinfga tegishli, (18) tenglamani hamda quyidagi (6) va (19) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechim topilsin, bu yerda $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in R \setminus \{0\}$, $\psi_i(y, z), i = \overline{1, 3}$ - lar \bar{D} sohada berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

17-teorema. Agar E_3 masala yechimga ega bo‘lsa hamda $ab > 0$, $cd < 0$, $\alpha\beta < 0$, $\gamma\delta > 0$ shartlar bajarilsa, bu yechim yagona.

E_4 masala. D sohada (2) sinfga tegishli, (18) tenglamani hamda (7) va (19) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechim topilsin, bu yerda $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in R \setminus \{0\}$, $\psi_i(y, z), i = \overline{1, 3}$ - lar \bar{D} sohada berilgan yetarlicha silliq funksiyalar.

18-teorema. Agar E_4 masala yechimga ega bo'lsa hamda $ab > 0$, $cd < 0$, $\alpha\beta < 0$, $\gamma\delta > 0$ shartlar bajarilsa, bu yechim yagona.

Qo'yilgan chegaraviy masalalar yechimlarining yagonalik teoremlari energiya integrallari usuli yordamida isbotlangan.

Uchinchi bobning ikkinchi paragrafida E_1 masala yechimining mavjudligi ko'rsatilgan.

19-teorema. Agar $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1,3}$ va $f(x, y, z)$ funksiyalar uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

$$1) \psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{3,3}(\overline{\Pi}), \quad i = \overline{1,3}, \quad \text{bu yerda } \overline{\Pi} = \{(y, z): y \in [0, q], z \in [0, r]\};$$

$$2) f(x, y, z) \in C_{x,y,z}^{1,2,2}(\overline{D});$$

$$3) \begin{cases} \psi_i(0, z) = \psi_i(q, z) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_i(0, z)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi_i(q, z)}{\partial y^2} = 0, \\ \psi_i(y, 0) = \psi_i(y, r) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_i(y, 0)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi_i(y, r)}{\partial z^2} = 0, \quad i = \overline{1,3}, \\ f(x, 0, z) = f(x, q, z) = 0, & f(x, y, 0) = f(x, y, r) = 0, \end{cases}$$

u holda E_1 masalaning yechimi ko'rsatilgan funksiyalar sinfida mavjud.

19-teoremaning isboti Furye usulida amalga oshirilgan, hamda E_1 masala yechimi qurilgan Grin funksiyasi yordamida quyidagi

$$u(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{qr}} \sum_{n,m=1}^{+\infty} \left(\rho_{n,m}(x) + \lambda_{n,m} \int_0^p G_{n,m}(x, \xi) g_{n,m}(\xi) d\xi \right) \sin \frac{n\pi y}{q} \sin \frac{m\pi z}{r}, \quad (20)$$

ko'rinishda topilgan, bu yerda

$$\rho_{n,m}(x) = \frac{1}{ap^2 + 2b} \left((x-p)^2 \psi_{1n,m} + \frac{2apx - ax^2 + 2b}{c} \psi_{2n,m} + (x-p)(apx + 2b) \psi_{3n,m} \right),$$

$$g_{n,m}(x) = \frac{f_{n,m}(x)}{\lambda_{n,m}} - \rho_{n,m}(x), \quad f_{n,m}(x) = \frac{2}{\sqrt{qr}} \int_0^q \int_0^r f(x, y, z) \sin \frac{n\pi y}{q} \sin \frac{m\pi z}{r} dydz,$$

$$\psi_{in,m} = \frac{2}{\sqrt{qr}} \int_0^q \int_0^r \psi_i(y, z) \sin \frac{n\pi y}{q} \sin \frac{m\pi z}{r} dydz, \quad i = \overline{1,3}, \quad \lambda_{n,m} = \left(\frac{\pi n}{q} \right)^2 + \left(\frac{\pi m}{r} \right)^2,$$

$G_{n,m}(x, \xi)$ esa

$$\begin{cases} U_{n,m}'''(x) + \lambda_{n,m} U_{n,m}(x) = 0, \\ aU_{n,m}(0) + bU_{n,m}''(0) = 0, \\ cU_{n,m}(p) + dU_{n,m}''(p) = 0, \\ U_{n,m}'(p) = 0, \end{cases}$$

masalaning Grin funksiyasi va u quyidagi ko'rinishga ega:

$$G_{n,m}(x, \xi) = \begin{cases} G_{1n,m}(x, \xi), & 0 \leq x < \xi, \\ G_{2n,m}(x, \xi), & \xi < x \leq p, \end{cases} \quad (21)$$

bu yerda

$$\begin{aligned} G_{1n,m}(x, \xi) = & \frac{2}{3k_{n,m}^2 \Delta} \left[e^{-k_{n,m} \left(\frac{1}{2} \xi + x \right)} \left(\left(\frac{ad}{k_{n,m}^2} - \frac{ac}{k_{n,m}^4} \right) \sin \left(\beta_{n,m} \xi + \frac{\pi}{6} \right) + \left(\frac{bc}{k_{n,m}^2} - bd \right) \cos \beta_{n,m} \xi \right) - \right. \\ & - e^{k_{n,m} \left(\frac{\xi}{2} - \frac{3}{2} p - x \right)} \left(\left(\frac{bc}{k_{n,m}^2} - \frac{ad}{k_{n,m}^2} \right) \cos \beta_{n,m} p - \frac{ac}{k_{n,m}^4} \sin \left(\beta_{n,m} p + \frac{\pi}{6} \right) + bd \cos \left(\beta_{n,m} p + \frac{\pi}{3} \right) \right) + \\ & + e^{\frac{1}{2} k_{n,m} (x - \xi)} \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} + b \right) \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} - d \right) \sin \left((\xi - x) \beta_{n,m} + \frac{\pi}{6} \right) - \\ & - e^{k_{n,m} \left(\frac{\xi}{2} - \frac{3}{2} p + \frac{1}{2} x \right)} \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} + b \right) \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} \sin \left((p - x) \beta_{n,m} + \frac{\pi}{6} \right) + d \cos (p - x) \beta_{n,m} \right) + \\ & + e^{-\frac{1}{2} k_{n,m} (\xi + 3p - x)} \left(\left(\frac{a}{k_{n,m}^2} \sin \left(\beta_{n,m} \xi + \frac{\pi}{6} \right) - b \cos \beta_{n,m} \xi \right) \left(\frac{2c}{k_{n,m}^2} \sin \left((p - x) \beta_{n,m} + \frac{\pi}{6} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2d \cos (p - x) \beta_{n,m} \right) + \left(\left(\frac{2bc}{k_{n,m}^2} - \frac{2ad}{k_{n,m}^2} \right) \cos \beta_{n,m} p + 2bd \cos \left(\beta_{n,m} p + \frac{\pi}{3} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2ac}{k_{n,m}^4} \sin \left(\beta_{n,m} p + \frac{\pi}{6} \right) \right) \sin \left((\xi - x) \beta_{n,m} + \frac{\pi}{6} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{2n,m}(x, \xi) = & \frac{1}{3k_{n,m}^2 \Delta} \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} + b - 2e^{-\frac{3}{2} k_{n,m} \xi} \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} \sin \left(\beta_{n,m} \xi + \frac{\pi}{6} \right) - b \cos \beta_{n,m} \xi \right) \right) \\ & \left[e^{k_{n,m} (\xi - x)} \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} - d \right) - 2e^{k_{n,m} \left(\frac{\xi}{2} - \frac{3}{2} p + \frac{1}{2} x \right)} \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} \sin \left((p - x) \beta_{n,m} + \frac{\pi}{6} \right) + d \cos (p - x) \beta_{n,m} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(n, m) = & \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} + b \right) \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} - d \right) + e^{-\frac{3}{2} k_{n,m} p} \left\{ \left(\frac{2bc}{k_{n,m}^2} - \frac{2ad}{k_{n,m}^2} - \frac{ac}{k_{n,m}^4} + bd \right) \cos \beta_{n,m} p - \right. \\ & \left. - \sqrt{3} \left(\frac{ac}{k_{n,m}^4} + bd \right) \sin \beta_{n,m} p \right\}. \end{aligned}$$

Dissertatsiya ishida (20) qator va (18) tenglamaga kiruvchi xususiy hosilalari \bar{D} sohada absolyut va tekis yaqinlashishi ko'rsatilgan. Tekis yaqinlashishga tekshirishda kichik maxraj noldan farqli ekanligi isbotlangan.

Uchinchi bobning uchinchi paragrafida E_2 , E_3 va E_4 masalalarning yechimlari qurilgan. Quyidagi teoremlar isbotlangan:

20-teorema. Agar $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1,3}$ va $f(x, y, z)$ funksiyalar uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

$$1) \psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{3,3}(\overline{\Pi}), \quad i = \overline{1,3}, \quad \text{bu yerda } \overline{\Pi} = \{(y, z) : y \in [0, q], z \in [0, r]\};$$

$$2) f(x, y, z) \in C_{x,y,z}^{1,2,2}(\overline{D});$$

$$3) \begin{cases} \frac{\partial \psi_i(0, z)}{\partial y} = \frac{\partial \psi_i(q, z)}{\partial y} = 0, & \frac{\partial^4 \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z} = \frac{\partial^4 \psi_i(y, r)}{\partial y^3 \partial z} = 0, \\ \frac{\partial \psi_i(y, 0)}{\partial z} = \frac{\partial \psi_i(y, r)}{\partial z} = 0, & \frac{\partial^4 \psi_i(0, z)}{\partial y \partial z^3} = \frac{\partial^4 \psi_i(q, z)}{\partial y \partial z^3} = 0, \quad i = \overline{1,3}, \\ \frac{\partial f(x, 0, z)}{\partial y} = \frac{\partial f(x, q, z)}{\partial y}, & \frac{\partial f(x, y, 0)}{\partial z} = \frac{\partial f(x, y, r)}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

u holda E_2 masalaning yechimi ko'rsatilgan funksiyalar sinfida mavjud.

21-teorema. Agar $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1,3}$ va $f(x, y, z)$ funksiyalar uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

$$1) \psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{4,3}(\overline{\Pi}), \quad i = \overline{1,3}, \quad \text{bu yerda } \overline{\Pi} = \{(y, z) : y \in [0, q], z \in [0, r]\};$$

$$2) f(x, y, z) \in C_{x,y,z}^{1,2,2}(\overline{D});$$

$$3) \begin{cases} \alpha \frac{\partial^j \psi_i(0, z)}{\partial y^j} + \beta \frac{\partial^{j+1} \psi_i(0, z)}{\partial y^{j+1}} = 0, & \gamma \frac{\partial^j \psi_i(q, z)}{\partial y^j} + \delta \frac{\partial^{j+1} \psi_i(q, z)}{\partial y^{j+1}} = 0, \quad j = 0, 2, \\ \frac{\partial^4 \psi_i(y, r)}{\partial y^4} = \frac{\partial^4 \psi_i(y, 0)}{\partial y^4} = 0, & \frac{\partial^6 \psi_i(y, r)}{\partial y^4 \partial z^2} = \frac{\partial^6 \psi_i(y, 0)}{\partial y^4 \partial z^2} = 0, \quad i = \overline{1,3}, \\ \alpha f(x, 0, z) + \beta \frac{\partial f(x, 0, z)}{\partial y} = 0, & \gamma f(x, q, z) + \delta \frac{\partial f(x, q, z)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 f(x, y, 0)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(x, y, r)}{\partial y^2} = 0, \end{cases}$$

u holda E_3 masalaning yechimi ko'rsatilgan funksiyalar sinfida mavjud.

22-teorema. Agar $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1,3}$ va $f(x, y, z)$ funksiyalar uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

$$1) \psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{3,4}(\overline{\Pi}), \quad i = \overline{1,3}, \quad \text{bu yerda } \overline{\Pi} = \{(y, z) : y \in [0, q], z \in [0, r]\};$$

$$2) f(x, y, z) \in C_{x,y,z}^{1,2,2}(\overline{D});$$

$$3) \left\{ \begin{array}{l} \psi_i(0, z) = \psi_i(q, z) = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi_i(0, z)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi_i(q, z)}{\partial y^2} = 0, \\ \alpha \frac{\partial^{3+j} \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z^j} + \beta \frac{\partial^{4+j} \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z^{j+1}} = 0, \quad \gamma \frac{\partial^{3+j} \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z^j} + \delta \frac{\partial^{4+j} \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z^{j+1}} = 0, \\ f(x, 0, z) = f(x, q, z) = 0, \quad \alpha \frac{\partial^2 f(x, y, 0)}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial^3 f(x, y, 0)}{\partial y^2 \partial z} = 0, \\ \gamma \frac{\partial^2 f(x, y, r)}{\partial y^2} + \delta \frac{\partial^3 f(x, y, r)}{\partial y^2 \partial z} = 0, \quad j = 0, 2, \quad i = \overline{1, 3}, \end{array} \right.$$

u holda E_4 masalaning yechimi ko'rsatilgan funksiyalar sinfida mavjud.

Qo'yilgan masalalar yechimlarining mavjudlik teoremlari Furye usuli bilan isbotlangan, hamda yechimlar oshkor ko'rinishda qurilgan Grin funksiyasi yordamida topilgan.

XULOSA

Dissertatsiya ishi uch o'lchovli fazoda chegaralangan va yarim chegaralangan sohalarda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglama uchun yangi chegaraviy masalalarni o'rganishga bag'ishlangan. Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagicha ifodalanadi:

1. Chegaralangan sohada uchinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglama uchun chegaraviy masalalar yechimlarining mavjudligi va yagonaligi Furye va energiya integrallari usullari yordamida isbotlangan.

2. Yarim chegaralangan sohalarda uchinchi tartibli karrali xarakteristikali tenglama uchun chegaraviy masalalarning bir qiymatli yechilishi o'zgaruvchilarni ajratish hamda energiya integrallari usullaridan foydalanib isbotlangan.

3. Furye usuli yordamida hosil qilingan uchinchi tartibli bir jinsli bo'lmagan oddiy differensial tenglamaga qo'yilgan aralash shartli chegaraviy masala uchun Grin funksiyasi qurilib, uning strukturasi hamda asosiy xossalari aniqlangan.

4. Uchinchi tartibli karrali xarakteristikali bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama uchun aralash shartli chegaraviy masalalar korrektiligi Furye, Grin funksiyalar va energiya integrallari usullaridan foydalanib isbotlangan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 ПО
ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЁНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ФЕРГАНСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

**НАМАНГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ**

ХАМИТОВ АЗИЗБЕК АХМАДЖОН УГЛИ

**КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С
КРАТНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ В ТРЕХМЕРНОМ
ПРОСТРАНСТВЕ**

01.01.02 – Дифференциальные уравнения и математическая физика

**АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философских наук (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Тема диссертации доктора философии (Doctor of Philosophy) по физико – математическим наукам зарегистрирована в Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за № B2024.3.PhD/FM1144.

Диссертация выполнена в Наманганском государственном техническом университете. Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб - странице Научного совета (www.fdu.uz) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz).

Научный руководитель: Апаков Юсупжон Пулатович
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты: Ситник Сергей Михайлович
доктор физико-математических наук, профессор
Ибайдуллаев Туланбой Турсунбоевич
кандидат физико-математических наук, доцент

Ведущая организация: Ургенчский государственный университет

Защита диссертации состоится «6» 03 2025 года в 10:00 часов на заседании Научного совета PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 при Ферганском государственном университете. (Адрес: 150100, город Фергана, улица Мураббийлар, дом 19. Тел.: (+99873) 244-22-94. e-mail: fardu_info@umail.uz)

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Ферганского государственного университета (зарегистрирована за № 562). (Адрес: 150100, г. Фергана, ул. Мураббийлар, дом 19). Тел.: (+99873)244-44-94.

Автореферат диссертации разослан «25» 08 2025 году.
(протокол рассылки № 3 от «25» 08 2025 года).



Ш.Т. Каримов
Заместитель председателя научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., доцент

И.У. Хайдаров
Ученый секретарь научного совета по присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н., доцент

К.С. Газиев
Заместитель председателя научного семинара при научном совете по присуждению ученых степеней, к.ф.-м.н., доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Многие практические исследования, проводимые в мировом масштабе, приводят к решению краевых задач для дифференциальных уравнений. В частности, нелинейные теории акустики и гидродинамики космической плазмы, задачи фильтрации жидкости в пористых средах, распространения сигналов в аксонах, тепловыделения в ядерных реакторах и многие другие практические задачи часто сводятся к краевым задачам для дифференциальных уравнений третьего порядка в ограниченных и полуограниченных областях трёхмерного пространства. Отсюда видно, что решение краевых задач для дифференциальных уравнений третьего порядка в ограниченных и полуограниченных областях трёхмерного пространства имеет большое значение как одно из актуальных направлений теории уравнений в частных производных, дающее полную картину анализа и свойств указанных вышеупомянутых практических задач.

В мире ведутся научно-исследовательские работы, направленные на постановку и исследование краевых задач для дифференциальных уравнений с частными производными высокого порядка, а также к разработке методов их решения. Наряду с этим исследования по теории уравнений с частными производными можно условно разделить на два направления. Первое из них заключается в доказательстве теорем о единственности решений краевых задач, а второе — нахождении собственных значений и собственных функций рассматриваемых краевых задач и на их основе — в доказательстве теорем о существовании решений краевых задач. Научные исследования по этим направлениям в настоящее время продолжают и развиваются. В связи с этим изучение краевых задач для дифференциальных уравнений третьего порядка с кратными характеристиками в ограниченных и полуограниченных областях трёхмерного пространства является целенаправленным научным исследованием.

В нашей республике реализуются комплексные мероприятия по научным исследованиям на основе фундаментальных, прикладных и инновационных идей и достигаются конкретные результаты. В частности, основными задачами и направлениями деятельности математиков определено проведение научных исследований на уровне международных стандартов по приоритетным направлениям математических наук, в частности, дифференциальным уравнениям и математической физике, динамическим системам и оптимальному управлению, прикладной математике и математическому моделированию, математическому анализу и теории функций, теории вероятностей и математической статистике, алгебре и геометрии¹. При реализации этих задач, в частности, в целях применения в смежных областях науки, важным является исследование краевых задач для

¹ Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан от 18 мая 2017 года № 292 «О мерах по организации деятельности вновь созданных научно-исследовательских учреждений Академии наук Республики Узбекистан».

дифференциальных уравнений третьего порядка с кратными характеристиками в ограниченных и полуограниченных областях трехмерного пространства. Проблема исследования данной диссертационной работы соответствуют задачам, обозначенным в Постановлениях Президента Республики Узбекистан ПП-2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», ПП-3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», ПП-4387 от 9 июля 2019 года «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан», ПП-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», УП-60 от 28 января 2022 года «О Стратегии развития Нового Узбекистана на 2022 - 2026 годы», а также в других нормативно-правовых актах, касающихся фундаментальной науки.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Известно, что постановка и исследование новых краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка в ограниченных и полуограниченных областях трехмерного пространства представляют определённые сложности. К настоящему времени проведено множество исследований, посвящённых краевым задачам для уравнений второго, третьего и более высоких порядков в двухмерных пространствах. В частности, в работе О.С. Рыжова с учётом свойств вязкости и теплопроводности газа из системы Навье–Стокса было получено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{v}{y}u_y = u_x u_{xx}, \quad v = \text{const.}$$

Это уравнение при $v=1$ описывает осесимметричный поток, а при $v=0$ плоско-параллельный поток, который исследован в работе В.Н.Диесперова.

Первые результаты по уравнениям третьего порядка с кратными характеристиками получили Н.Block и E. Del Vecchio. L.Catabriga для уравнения $D_x^{2n+1}u - D_y^2u = 0$ построил фундаментальное решение в виде двойного несобственного интеграла, изучил свойства потенциала и решил краевые задачи. Существенный вклад в развитие данной теории внесли также В.И.Жегалов, В.Ф.Волкодав, В.В.Азовский, К.Б.Сабитов, С.М.Ситник, А.Н.Миронов, Ж.А.Балкизов, Г.А.Лукина, А.Ашуралиев, А.И.Кожанов, Е.А.Уткина и другие.

В нашей Республике значимые результаты по исследованиям дифференциальных уравнений рассматриваемого вида изложены в работах

Т.Д.Джураева, С.Абдиназарова, Ю.П.Апакова, З.А.Собирова, А.Р.Хошимова, Б.Ю.Иргашева и других, где рассмотрены краевые задачи для уравнений третьего порядка в двухмерных пространствах. Также отметим работы А. К. Уринова, Ш. Т. Каримова и К. Т. Каримова, в которых изучаются краевые задачи для уравнений с сингулярными коэффициентами в двумерных и многомерных пространствах.

Несмотря на значительное количество результатов, полученных математиками по данной тематике, теория краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка в трехмерном пространстве требует дальнейшей разработки. Поэтому рассмотрение краевых задач в ограниченных и полуограниченных областях для таких уравнений является так же важным элементом построения теории и представляет определенный интерес.

Связь темы диссертации с научно – исследовательскими работами высшего учебного заведения, в котором выполнена диссертация.

Диссертационная работа выполнена в соответствии с плановой темой научно-исследовательских работ по теме «Классические и неклассические задачи дифференциальных уравнений и их применения» Наманганского государственного технического университета.

Целью исследования являются постановка и исследование краевых задач для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками в ограниченных и полуограниченных областях трехмерного пространства.

Задачи исследования, решаемые в данной работе, следующие:

доказательство существования и единственности решений краевых задач для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками в ограниченной области;

постановка и исследование корректных краевых задач для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками в полуограниченных областях;

построение функции Грина краевой задачи со смешанными условиями для неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка, определение структуры и основных их свойств;

доказательство корректности краевых задач со смешанными условиями для неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка с кратными характеристиками.

Объектом исследования являются уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве.

Предметом исследования являются краевые задачи для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками в ограниченных и полуограниченных областях.

Методы исследования. В диссертации используются методы математического и функционального анализа, дифференциальных уравнений, математической физики, линейной алгебры, теории рядов, а также методы построения решений.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

с использованием методов Фурье и интегралов энергии доказаны существование и единственность решений краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в ограниченной области;

с помощью метода разделения переменных и метода интегралов энергии доказаны однозначная разрешимость краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в полуограниченных областях;

построена функция Грина краевой задачи со смешанными условиями для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка на основе полученной с методом Фурье, определены ее структура и основные свойства;

с использованием метода Фурье, метода функций Грина и интегралов энергии доказана корректность краевых задач со смешанными условиями для неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка с кратными характеристиками.

Практические результаты исследования заключаются в возможности применения аналитических решений для изучения качественных характеристик физических процессов, а также их использования в численных расчетах.

Достоверность результатов исследования подтверждается строгим применением методов математического и функционального анализа, математической физики и дифференциальных уравнений, использованием теории функций Грина для построения явных решений краевых задач, а также полнотой и строгостью доказательств теорем.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования состоит в их применимости для дальнейшего развития теории уравнений в частных производных высокого порядка в двумерных, трехмерных и многомерных пространствах. Практическая значимость обусловлена возможностью использования полученных результатов при изучении физических процессов и в различных других областях науки, описываемых уравнениями третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных научных результатов по краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с кратными характеристиками в ограниченных и полуограниченных областях трехмерного пространства:

новые методики построения решений краевых задач с помощью функции Грина для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве были использованы в научных исследованиях по зарубежному проекту в рамках № НИОКТР 122041800029-5 темы «Краевые задачи и задачи управления для основных и смешанного типов уравнений и их применение к исследованию систем с распределенными параметрами» (справка № 01-13/47 Института прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра Российской академии

наук от 15 апреля 2025 года). В результате стало возможным решать новые краевые задачи для неоднородных уравнений высокого порядка;

методика построения решения новых краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных третьего порядка с кратными характеристиками в ограниченных и неограниченных областях трехмерного пространства была использована в рамках гранта № 374874-2022 темы «Задачи фазовых переходов и критические явления. Математические аспекты их уравнений, быстрые переходы и асимптотика» (справка № 652 Ошского государственного университета Республики Кыргызстан от 17 апреля 2025 года). В результате удалось получить явные решения новых краевых задач для уравнений третьего порядка в ограниченных и неограниченных областях трехмерного пространства.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были представлены и обсуждены на 13 международных и 2 республиканских научных и научно-практических конференциях.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертационной работы опубликовано 23 научных работ, из них 7 научных статей, в том числе опубликованы 3 в зарубежном и в 4 республиканских научных журналах, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для защиты диссертаций на соискание ученой степени доктора философии (PhD).

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы. Объем диссертации составляет 91 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновывается актуальность и востребованность темы диссертации, освещается соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан. Указывается уровень изученности проблемы, формулируются цель и описываются задачи, объект и предмет исследования. Также раскрываются научная новизна и практические результаты работы, теоретическая и практическая значимость полученных результатов, приводится информация о внедрении, сведения об опубликованных работах, а также объём и структура диссертации.

Первая глава диссертации под названием «**Исследование краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в ограниченных областях трехмерного пространства**» посвящена постановке корректных краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в ограниченных областях трехмерного пространства, единственность решения поставленных задач доказываются методом интегралов энергии, а существование - методом Фурье.

В области $D = \{(x, y, z) : x \in (0, p), y \in (0, q), z \in (0, r)\}$ рассмотрим уравнение третьего порядка вида

$$L[u] \equiv u_{xxx} - u_{yy} - u_{zz} = 0, \quad (1)$$

где $p, q, r \in R^+$, $R^+ = \{p, q, r \in R, p > 0, q > 0, r > 0\}$.

В первом параграфе первой главы поставлены краевые задачи и доказаны единственность их решений.

Задача A_1 . Найти решение уравнения (1) в области D из класса

$$u(x, y, z) \in C_{x,y,z}^{3,2,2}(D) \cap C_{x,y,z}^{2,1,1}(\bar{D}), \quad (2)$$

удовлетворяющее следующим краевым условиям:

$$\begin{aligned} u(x, 0, z) = u(x, q, z) = 0, \\ u(x, y, 0) = u(x, y, r) = 0, \end{aligned} \quad x \in [0, p], y \in [0, q], z \in [0, r], \quad (3)$$

$$\begin{aligned} u(0, y, z) = \psi_1(y, z), u(p, y, z) = \psi_2(y, z), \\ u_x(p, y, z) = \psi_3(y, z), \end{aligned} \quad y \in [0, q], z \in [0, r], \quad (4)$$

где $\psi_i(y, z), i = \overline{1, 3}$ – заданные достаточно гладкие функции в области \bar{D} .

Теорема 1. Если задача A_1 имеет решение, то оно единственно.

Задача A_2 . Найти решение уравнения (1) в области D из класса (2), удовлетворяющее краевым условиям (4) и

$$\begin{aligned} u_y(x, 0, z) = u_y(x, q, z) = 0, \\ u_z(x, y, 0) = u_z(x, y, r) = 0, \end{aligned} \quad x \in [0, p], y \in [0, q], z \in [0, r]. \quad (5)$$

Теорема 2. Если задача A_2 имеет решение, то оно единственно.

Задача A_3 . Найти решение уравнения (1) в области D из класса (2), удовлетворяющее краевым условиям (4) и

$$\begin{cases} \alpha u(x, 0, z) + \beta u_y(x, 0, z) = 0, \\ \gamma u(x, q, z) + \delta u_y(x, q, z) = 0, \\ u(x, y, 0) = u(x, y, r) = 0, \end{cases} \quad x \in [0, p], y \in [0, q], z \in [0, r], \quad (6)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R \setminus \{0\}$.

Теорема 3. Если задача A_3 имеет решение, то при выполнении условий $\alpha\beta < 0$ и $\gamma\delta > 0$, оно единственно.

Задача A_4 . Найти решение уравнения (1) в области D из класса (2), удовлетворяющее краевым условиям (4) и

$$\begin{cases} \alpha u(x, y, 0) + \beta u_z(x, y, 0) = 0, \\ \gamma u(x, y, r) + \delta u_z(x, y, r) = 0, \\ u(x, 0, z) = u(x, q, z) = 0, \end{cases} \quad x \in [0, p], y \in [0, q], z \in [0, r], \quad (7)$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R \setminus \{0\}$.

Теорема 4. Если задача A_4 имеет решение, то при выполнении условий $\alpha\beta < 0$ и $\gamma\delta > 0$, оно единственно.

Теоремы единственности решения поставленных задач доказываются с использованием метода интегралов энергии.

Во втором параграфе первой главы для уравнения (1) в области D построено решение в виде бесконечного ряда и доказано существование решения задачи A_1 .

Теорема 5. Если для функции $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1, 3}$ справедливы следующие условия:

$$1) \psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{3,3}(\overline{\Pi}), \quad i = \overline{1, 3}, \quad \text{где } \overline{\Pi} = \{(y, z) : y \in [0, q], z \in [0, r]\};$$

$$2) \begin{cases} \psi_i(0, z) = \psi_i(q, z) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_i(0, z)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi_i(q, z)}{\partial y^2} = 0, \\ \psi_i(y, 0) = \psi_i(y, r) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_i(y, 0)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi_i(y, r)}{\partial z^2} = 0, \end{cases} \quad i = \overline{1, 3},$$

то решение задачи A_1 существует в указанном классе функций.

Доказательство теоремы 5 проводится методом Фурье и решение задачи A_1 найдено в следующем виде:

$$u(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{qr}} \sum_{n,m=1}^{+\infty} \left[C_{1n,m} e^{-k_{n,m}x} + e^{\frac{1}{2}k_{n,m}x} \left(C_{2n,m} \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}x + C_{3n,m} \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}x \right) \right] \times \\ \times \sin \frac{n\pi y}{q} \sin \frac{m\pi z}{r},$$

здесь

$$C_{1n,m} = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{\sqrt{3}}{2} \psi_{1n,m} k_{n,m} e^{k_{n,m}P} - \psi_{2n,m} \delta k_{n,m} e^{\frac{1}{2}k_{n,m}P} + \psi_{3n,m} \beta e^{\frac{1}{2}k_{n,m}P} \right],$$

$$C_{2n,m} = \frac{1}{\Delta} \left[-k_{n,m} (\beta + \delta) \psi_{1n,m} e^{-\frac{1}{2}k_{n,m}P} + \psi_{2n,m} \delta k_{n,m} e^{\frac{1}{2}k_{n,m}P} - \psi_{3n,m} \beta e^{\frac{1}{2}k_{n,m}P} \right],$$

$$C_{3n,m} = \frac{1}{\Delta} \left[k_{n,m} (\alpha + \gamma) \psi_{1n,m} e^{-\frac{1}{2}k_{n,m}P} - \psi_{2n,m} k_{n,m} \left(e^{-k_{n,m}P} + \gamma e^{\frac{1}{2}k_{n,m}P} \right) + \psi_{3n,m} \left(\alpha e^{\frac{1}{2}k_{n,m}P} - e^{-k_{n,m}P} \right) \right],$$

$$\Delta = \sqrt{3} k_{n,m} e^{k_{n,m}P} \left(\frac{1}{2} - e^{\frac{3}{2}k_{n,m}P} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}P + \frac{\pi}{6} \right) \right),$$

где

$$\alpha = \cos \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}P, \quad \beta = \sin \frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}P, \quad \gamma = \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}P + \frac{\pi}{3} \right),$$

$$\delta = \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} k_{n,m}P + \frac{\pi}{3} \right), \quad k_{n,m} = \sqrt[3]{\left(\frac{n^2}{q^2} + \frac{m^2}{r^2} \right) \pi^2},$$

$$\psi_{in,m} = \frac{2}{\sqrt{qr}} \int_0^q \int_0^r \psi_i(y,z) \sin \frac{n\pi y}{q} \sin \frac{m\pi z}{r} dydz, \quad i = \overline{1,3}, \quad n, m \in N.$$

Следует отметить, что Δ не является малым знаменателем, для которого доказано отличие от нуля ($\Delta \neq 0$) и $\min|\Delta| > 0$.

В третьем параграфе первой главы построены решения задач A_2 , A_3 и A_4 . Доказаны следующие теоремы:

Теорема 6. Если для функции $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1,3}$ справедливы следующие условия:

$$1) \psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{3,3}(\overline{\Pi}), \quad i = \overline{1,3}, \quad \text{где } \overline{\Pi} = \{(y, z): y \in [0, q], z \in [0, r]\};$$

$$2) \begin{cases} \frac{\partial \psi_i(0, z)}{\partial y} = \frac{\partial \psi_i(q, z)}{\partial y} = 0, & \frac{\partial^4 \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z} = \frac{\partial^4 \psi_i(y, r)}{\partial y^3 \partial z} = 0, \\ \frac{\partial \psi_i(y, 0)}{\partial z} = \frac{\partial \psi_i(y, r)}{\partial z} = 0, & \frac{\partial^4 \psi_i(0, z)}{\partial y \partial z^3} = \frac{\partial^4 \psi_i(q, z)}{\partial y \partial z^3} = 0, \end{cases} \quad i = \overline{1,3},$$

то решение задачи A_2 существует в указанном классе функций.

Теорема 7. Если для функции $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1,3}$ справедливы следующие условия:

$$1) \psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{4,3}(\overline{\Pi}), \quad i = \overline{1,3}, \quad \text{где } \overline{\Pi} = \{(y, z): y \in [0, q], z \in [0, r]\};$$

$$2) \begin{cases} \alpha \frac{\partial^j \psi_i(0, z)}{\partial y^j} + \beta \frac{\partial^{j+1} \psi_i(0, z)}{\partial y^{j+1}} = 0, & \gamma \frac{\partial^j \psi_i(q, z)}{\partial y^j} + \delta \frac{\partial^{j+1} \psi_i(q, z)}{\partial y^{j+1}} = 0, \quad j = 0, 2, \\ \frac{\partial^4 \psi_i(y, r)}{\partial y^4} = \frac{\partial^4 \psi_i(y, 0)}{\partial y^4} = 0, & \frac{\partial^6 \psi_i(y, r)}{\partial y^4 \partial z^2} = \frac{\partial^6 \psi_i(y, 0)}{\partial y^4 \partial z^2} = 0, \quad i = \overline{1,3}, \end{cases}$$

то решение задачи A_3 существует в указанном классе функций.

Теорема 8. Если для функции $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1,3}$ справедливы следующие условия:

$$1) \psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{3,4}(\overline{\Pi}), \quad i = \overline{1,3}, \quad \text{где } \overline{\Pi} = \{(y, z): y \in [0, q], z \in [0, r]\};$$

$$2) \begin{cases} \psi_i(0, z) = \psi_i(q, z) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_i(0, z)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi_i(q, z)}{\partial y^2} = 0, \\ \alpha \frac{\partial^{3+j} \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z^j} + \beta \frac{\partial^{4+j} \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z^{j+1}} = 0, & \gamma \frac{\partial^{3+j} \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z^j} + \delta \frac{\partial^{4+j} \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z^{j+1}} = 0, \end{cases} \quad j = 0, 2, \quad i = \overline{1,3},$$

то решение задачи A_4 существует в указанном классе функций.

Во второй главе диссертации под названием «Краевые задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в полуограниченных областях трехмерного пространства» исследуются краевые задачи для уравнения (1) в областях

$$D^+ = \{(x, y, z): x \in (0, +\infty), y \in (0, q), z \in (0, r)\} \quad \text{и}$$

$$D^- = \{(x, y, z): x \in (-\infty, 0), y \in (0, q), z \in (0, r)\}.$$

В первом параграфе второй главы поставлена первая краевая задача, доказаны единственность и существование решения.

Задача B_1 . Найти регулярное решение уравнения (1) в области D^+ из класса

$$C_{x,y,z}^{3,2,2}(D^+) \cap C_{x,y,z}^{2,1,1}(D^+ \cup \Gamma_1), \quad (8)$$

имеющего ограниченные первой производной по переменными y и z , равномерно по x и второй производной по x , при $x \rightarrow +\infty$ и $u_y, u_z \in L_2(D^+)$, удовлетворяющее краевым условиям (3) при $x \in [0, +\infty)$, и

$$u(0, y, z) = \psi_1(y, z), \quad (9)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x, y, z) = \lim_{x \rightarrow +\infty} u_x(x, y, z) = 0, \quad y \in [0, q], z \in [0, r],$$

где $\Gamma_1 = \partial D^+$ - граница области D^+ , $\psi_1(y, z)$ - заданная достаточно гладкая функция, причем

$$\begin{cases} \psi_1(0, z) = \psi_1(q, z) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_1(0, z)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi_1(q, z)}{\partial y^2} = 0, \\ \psi_1(y, 0) = \psi_1(y, r) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_1(y, 0)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi_1(y, r)}{\partial z^2} = 0. \end{cases} \quad (10)$$

Задача B_2 . Найти регулярное решение уравнения (1) в области D^- из класса

$$C_{x,y,z}^{3,2,2}(D^-) \cap C_{x,y,z}^{2,1,1}(D^- \cup \Gamma_2), \quad (11)$$

имеющего ограниченные первой производной по переменными y и z , равномерно по x , первой и второй производной по x , при $x \rightarrow -\infty$, и $u_y, u_z \in L_2(D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям (3) при $x \in (-\infty, 0]$, и

$$u(0, y, z) = \psi_2(y, z), \quad u_x(0, y, z) = \psi_3(y, z), \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x, y, z) = 0, \quad y \in [0, q], z \in [0, r],$$

где $\Gamma_2 = \partial D^-$ - граница области D^- , $\psi_i(y, z), i = 2, 3$ - заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\begin{cases} \psi_i(0, z) = \psi_i(q, z) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_i(0, z)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi_i(q, z)}{\partial y^2} = 0, \\ \psi_i(y, 0) = \psi_i(y, r) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_i(y, 0)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi_i(y, r)}{\partial z^2} = 0, \end{cases} \quad i = 2, 3. \quad (13)$$

Теорема 9. Если задачи B_1 и B_2 имеют решения, то каждое из них единственно.

Теорема 9 доказана методом интегралов энергии. Для применения этого метода в полуограниченных областях сначала рассматривается область, ограниченная линиями $x = d > 0$ ($x = c < 0$). Затем, при стремлении $d \rightarrow +\infty$ ($c \rightarrow -\infty$) к соответствующим границам, устанавливается единственность решения первоначальной задачи для уравнения (1).

Теорема 10. Если функции $\psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{3,3}(\bar{\Pi})$, $i = \overline{1,3}$, где $\bar{\Pi} = \{(y, z) : y \in [0, q], z \in [0, r]\}$, то решение задач B_1, B_2 существует при выполнении соответствующих условий (10) и (13).

Теорема 10 доказана методом Фурье, и решение построено явно в виде бесконечного ряда. Установлено, что решение и его частные производные, входящие в уравнение (1), сходятся абсолютно и равномерно в заданной области.

Во втором параграфе второй главы поставлена вторая краевая задача, доказаны единственность и существование решения.

Задача B_3 . Найти регулярное решение уравнения (1) в области D^+ из класса (8), имеющее ограниченную вторую производную по x , равномерно по переменным y и z , при $x \rightarrow +\infty$, и $u_y, u_z \in L_2(D^+)$, удовлетворяющее краевым условиям (5) при $x \in [0, +\infty)$, и (9), где $\psi_1(y, z)$ – заданная достаточно гладкая функция, причем

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_1(0, z)}{\partial y} = \frac{\partial \psi_1(q, z)}{\partial y} = 0, & \frac{\partial^4 \psi_1(y, 0)}{\partial y^3 \partial z} = \frac{\partial^4 \psi_1(y, r)}{\partial y^3 \partial z} = 0, \\ \frac{\partial \psi_1(y, 0)}{\partial z} = \frac{\partial \psi_1(y, r)}{\partial z} = 0, & \frac{\partial^4 \psi_1(0, z)}{\partial z^3 \partial y} = \frac{\partial^4 \psi_1(q, z)}{\partial z^3 \partial y} = 0. \end{cases} \quad (14)$$

Задача B_4 . Найти регулярное решение уравнения (1) в области D^- из класса (11), имеющее ограниченную первую и вторую производные по x , равномерно по переменным y и z , при $x \rightarrow -\infty$, и $u_y, u_z \in L_2(D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям (5) при $x \in (-\infty, 0]$, и (12), где $\psi_i(y, z)$, $i = 2, 3$ – заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi_i(0, z)}{\partial y} = \frac{\partial \psi_i(q, z)}{\partial y} = 0, & \frac{\partial^4 \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z} = \frac{\partial^4 \psi_i(y, r)}{\partial y^3 \partial z} = 0, \\ \frac{\partial \psi_i(y, 0)}{\partial z} = \frac{\partial \psi_i(y, r)}{\partial z} = 0, & \frac{\partial^4 \psi_i(0, z)}{\partial z^3 \partial y} = \frac{\partial^4 \psi_i(q, z)}{\partial z^3 \partial y} = 0, \end{cases} \quad i = 2, 3. \quad (15)$$

Теорема 11. Если задачи B_3 и B_4 имеют решения, то каждое из них единственно.

Теорема 11 доказывается аналогично, как доказательство теоремы 9.

Теорема 12. Если функции $\psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{3,3}(\bar{\Pi})$, $i = \overline{1,3}$, где $\bar{\Pi} = \{(y, z) : y \in [0, q], z \in [0, r]\}$, то решение задач B_3, B_4 существует при выполнении соответствующих условий (14) и (15).

Доказательство теоремы 12 проведено методом Фурье, а решение представлено в виде бесконечного ряда для случаев $n = m = 0$ и $n^2 + m^2 \neq 0$. Показано, что найденное решение в виде бесконечного ряда в каждом случае и его частные производные, входящие в уравнение (1), сходятся абсолютно и равномерно в заданной области.

В третьем параграфе второй главы поставлена третья краевая задача, доказаны единственность и существование решения.

Задача B_5 . Найти регулярное решение уравнения (1) в области D^+ из класса (8), имеющее ограниченную вторую производную по x , равномерно по переменными y и z , при $x \rightarrow +\infty$, и $u_y, u_z \in L_2(D^+)$, удовлетворяющее краевым условиям (6) при $x \in [0, +\infty)$, и (9), где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R \setminus \{0\}$, а $\psi_1(y, z)$ – заданная достаточно гладкая функция, причем

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial^j \psi_1(0, z)}{\partial y^j} + \beta \frac{\partial^{j+1} \psi_1(0, z)}{\partial y^{j+1}} = 0, & \gamma \frac{\partial^j \psi_1(q, z)}{\partial y^j} + \delta \frac{\partial^{j+1} \psi_1(q, z)}{\partial y^{j+1}} = 0, \\ \frac{\partial^4 \psi_1(y, r)}{\partial y^4} = \frac{\partial^4 \psi_1(y, 0)}{\partial y^4} = 0, & \frac{\partial^6 \psi_1(y, r)}{\partial y^4 \partial z^2} = \frac{\partial^6 \psi_1(y, 0)}{\partial y^4 \partial z^2} = 0, \end{cases} \quad j = 0, 2. \quad (16)$$

Задача B_6 . Найти регулярное решение уравнения (1) в области D^- из класса (11), имеющее ограниченную первую и вторую производные по x , равномерно по переменными y и z , при $x \rightarrow -\infty$, и $u_y, u_z \in L_2(D^-)$, удовлетворяющее краевым условиям (6) при $x \in (-\infty, 0]$, и (12), где $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in R \setminus \{0\}$, а $\psi_i(y, z)$, $i = 2, 3$ – заданные достаточно гладкие функции, причем

$$\begin{cases} \alpha \frac{\partial^j \psi_i(0, z)}{\partial y^j} + \beta \frac{\partial^{j+1} \psi_i(0, z)}{\partial y^{j+1}} = 0, & \gamma \frac{\partial^j \psi_i(q, z)}{\partial y^j} + \delta \frac{\partial^{j+1} \psi_i(q, z)}{\partial y^{j+1}} = 0, \quad j = 0, 2, \\ \frac{\partial^4 \psi_i(y, 0)}{\partial y^4} = \frac{\partial^4 \psi_i(y, r)}{\partial y^4} = 0, & \frac{\partial^6 \psi_i(y, 0)}{\partial y^4 \partial z^2} = \frac{\partial^6 \psi_i(y, r)}{\partial y^4 \partial z^2} = 0, \quad i = 2, 3. \end{cases} \quad (17)$$

Теорема 13. Если задачи B_5 и B_6 имеют решения, то при выполнении условий $\alpha\beta < 0$, $\gamma\delta > 0$, они единственны.

Теорема 13 доказывается методом интегралов энергии, и найдены достаточные условия на коэффициенты α, β, γ и δ , обеспечивающие единственность решения задачи B_5 и B_6 .

Теорема 14. Если функции $\psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{4,3}(\overline{\Pi})$, $i = \overline{1,3}$, где $\overline{\Pi} = \{(y, z) : y \in [0, q], z \in [0, r]\}$, то решение задач B_5, B_6 существует при выполнении соответствующих условий (16) и (17).

Теорема 14 доказывается аналогично доказательству теоремы 10, но отличаются собственными числами, собственными функциями и классом граничных функций $\psi_i(x, y)$, $i = \overline{1,3}$, которые обеспечивают равномерную сходимость решения, найденного в виде бесконечных рядов в заданных областях.

В третьей главе под названием «**Краевые задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве**» ставятся краевые задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве. Единственность решения поставленных задач доказывается методом интегралов энергии, а существование методом Фурье и методом построения функции Грина.

В данной главе в области $D = \{(x, y, z) : x \in (0, p), y \in (0, q), z \in (0, r)\}$ рассмотрим следующее неоднородное уравнение третьего порядка вида

$$L[u] \equiv u_{xxx} - u_{yy} - u_{zz} = f(x, y, z), \quad (18)$$

где $p, q, r \in R^+$, $f(x, y, z)$ - заданная достаточно гладкая функция в области \overline{D} .

В первом параграфе третьей главы поставлены краевые задачи и доказаны единственность их решений.

Задача E_1 . Найти решение уравнения (18) в области D из класса (2), удовлетворяющее краевым условиям (3) и

$$\begin{cases} au(0, y, z) + bu_{xx}(0, y, z) = \psi_1(y, z), \\ cu(p, y, z) + du_{xx}(p, y, z) = \psi_2(y, z), \\ u_x(p, y, z) = \psi_3(y, z), \end{cases} \quad y \in [0, q], z \in [0, r], \quad (19)$$

где $a, b, c, d \in R \setminus \{0\}$, $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1,3}$ - заданные достаточно гладкие функции в области \overline{D} .

Теорема 15. Если задача E_1 имеет решение, то при выполнении условий $ab > 0, cd < 0$, оно единственно.

Задача E_2 . Найти решение уравнения (18) в области D из класса (2), удовлетворяющее краевым условиям (5) и (19), где $a, b, c, d \in R \setminus \{0\}$, $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1,3}$ - заданные достаточно гладкие функции в области \overline{D} .

Теорема 16. Если задача E_2 имеет решение, то при выполнении условий $ab > 0, cd < 0$, оно единственно.

Задача E_3 . Найти решение уравнения (18) в области D из класса (2), удовлетворяющее краевым условиям (6) и (19), где $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma$,

$\delta \in R \setminus \{0\}$, $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1, 3}$ – заданные достаточно гладкие функции в области \overline{D} .

Теорема 17. Если задача E_3 имеет решение, то при выполнении условий $ab > 0$, $cd < 0$, $\alpha\beta < 0$, $\gamma\delta > 0$, оно единственно.

Задача E_4 . Найти решение уравнения (18) в области D из класса (2), удовлетворяющее краевым условиям (7) и (19), где $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in R \setminus \{0\}$, $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1, 3}$ – заданные достаточно гладкие функции в области \overline{D} .

Теорема 18. Если задача E_4 имеет решение, то при выполнении условий $ab > 0$, $cd < 0$, $\alpha\beta < 0$, $\gamma\delta > 0$, оно единственно.

Теоремы единственности решение поставленных задач доказаны методом интегралов энергии.

Во второй параграфе третьей главы рассматривается существование решение задачи E_1 .

Теорема 19. Если для функции $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1, 3}$ и $f(x, y, z)$ справедливы следующие условия:

$$1) \psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{3,3}(\overline{\Pi}), \quad i = \overline{1, 3}, \quad \text{где } \overline{\Pi} = \{(y, z) : y \in [0, q], z \in [0, r]\};$$

$$2) f(x, y, z) \in C_{x,y,z}^{1,2,2}(\overline{D});$$

$$3) \begin{cases} \psi_i(0, z) = \psi_i(q, z) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_i(0, z)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi_i(q, z)}{\partial y^2} = 0, \\ \psi_i(y, 0) = \psi_i(y, r) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_i(y, 0)}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \psi_i(y, r)}{\partial z^2} = 0, \quad i = \overline{1, 3}, \\ f(x, 0, z) = f(x, q, z) = 0, & f(x, y, 0) = f(x, y, r) = 0, \end{cases}$$

то решение задачи E_1 существует в указанном классе функций.

Доказательство теоремы 19 проводится методом Фурье, а решение задачи E_1 найдено с помощью построенной функции Грина в следующем виде:

$$u(x, y, z) = \frac{2}{\sqrt{qr}} \sum_{n,m=1}^{+\infty} \left(\rho_{n,m}(x) + \lambda_{n,m} \int_0^p G_{n,m}(x, \xi) g_{n,m}(\xi) d\xi \right) \sin \frac{n\pi y}{q} \sin \frac{m\pi z}{r}, \quad (20)$$

здесь

$$\rho_{n,m}(x) = \frac{1}{ap^2 + 2b} \left((x-p)^2 \psi_{1n,m} + \frac{2apx - ax^2 + 2b}{c} \psi_{2n,m} + (x-p)(apx + 2b) \psi_{3n,m} \right),$$

$$g_{n,m}(x) = \frac{f_{n,m}(x)}{\lambda_{n,m}} - \rho_{n,m}(x), \quad f_{n,m}(x) = \frac{2}{\sqrt{qr}} \int_0^q \int_0^r f(x, y, z) \sin \frac{n\pi y}{q} \sin \frac{m\pi z}{r} dy dz,$$

$$\psi_{in,m} = \frac{2}{\sqrt{qr}} \int_0^q \int_0^r \psi_i(y,z) \sin \frac{n\pi y}{q} \sin \frac{m\pi z}{r} dydz, \quad i = \overline{1,3}, \quad \lambda_{n,m} = \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{r}\right)^2,$$

а $G_{n,m}(x, \xi)$ функция Грина задачи:

$$\begin{cases} U_{n,m}'''(x) + \lambda_{n,m} U_{n,m}(x) = 0, \\ aU_{n,m}(0) + bU_{n,m}''(0) = 0, \\ cU_{n,m}(p) + dU_{n,m}''(p) = 0, \\ U_{n,m}'(p) = 0, \end{cases}$$

и имеет следующий вид:

$$G_{n,m}(x, \xi) = \begin{cases} G_{1n,m}(x, \xi), & 0 \leq x < \xi, \\ G_{2n,m}(x, \xi), & \xi < x \leq p, \end{cases} \quad (21)$$

где

$$\begin{aligned} G_{1n,m}(x, \xi) = & \frac{2}{3k_{n,m}^2 \Delta} \left[e^{-k_{n,m} \left(\frac{1}{2}\xi + x\right)} \left(\left(\frac{ad}{k_{n,m}^2} - \frac{ac}{k_{n,m}^4} \right) \sin \left(\beta_{n,m} \xi + \frac{\pi}{6} \right) + \left(\frac{bc}{k_{n,m}^2} - bd \right) \cos \beta_{n,m} \xi \right) - \right. \\ & - e^{k_{n,m} \left(\xi - \frac{3}{2}p - x\right)} \left(\left(\frac{bc}{k_{n,m}^2} - \frac{ad}{k_{n,m}^2} \right) \cos \beta_{n,m} p - \frac{ac}{k_{n,m}^4} \sin \left(\beta_{n,m} p + \frac{\pi}{6} \right) + bd \cos \left(\beta_{n,m} p + \frac{\pi}{3} \right) \right) + \\ & + e^{\frac{1}{2}k_{n,m}(x-\xi)} \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} + b \right) \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} - d \right) \sin \left((\xi - x) \beta_{n,m} + \frac{\pi}{6} \right) - \\ & - e^{k_{n,m} \left(\xi - \frac{3}{2}p + \frac{1}{2}x\right)} \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} + b \right) \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} \sin \left((p-x) \beta_{n,m} + \frac{\pi}{6} \right) + d \cos (p-x) \beta_{n,m} \right) + \\ & + e^{-\frac{1}{2}k_{n,m}(\xi + 3p - x)} \left(\left(\frac{a}{k_{n,m}^2} \sin \left(\beta_{n,m} \xi + \frac{\pi}{6} \right) - b \cos \beta_{n,m} \xi \right) \left(\frac{2c}{k_{n,m}^2} \sin \left((p-x) \beta_{n,m} + \frac{\pi}{6} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + 2d \cos (p-x) \beta_{n,m} \right) + \left(\left(\frac{2bc}{k_{n,m}^2} - \frac{2ad}{k_{n,m}^2} \right) \cos \beta_{n,m} p + 2bd \cos \left(\beta_{n,m} p + \frac{\pi}{3} \right) - \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{2ac}{k_{n,m}^4} \sin \left(\beta_{n,m} p + \frac{\pi}{6} \right) \right) \sin \left((\xi - x) \beta_{n,m} + \frac{\pi}{6} \right) \right], \\ G_{2n,m}(x, \xi) = & \frac{1}{3k_{n,m}^2 \Delta} \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} + b - 2e^{-\frac{3}{2}k_{n,m}\xi} \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} \sin \left(\beta_{n,m} \xi + \frac{\pi}{6} \right) - b \cos \beta_{n,m} \xi \right) \right) \\ & \left[e^{k_{n,m}(\xi-x)} \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} - d \right) - 2e^{k_{n,m} \left(\xi - \frac{3}{2}p + \frac{1}{2}x\right)} \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} \sin \left((p-x) \beta_{n,m} + \frac{\pi}{6} \right) + d \cos (p-x) \beta_{n,m} \right) \right], \end{aligned}$$

$$\bar{\Delta}(n,m) = \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} + b \right) \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} - d \right) + e^{-\frac{3}{2}k_{n,m}p} \left\{ \left(\frac{2bc}{k_{n,m}^2} - \frac{2ad}{k_{n,m}^2} - \frac{ac}{k_{n,m}^4} + bd \right) \cos \beta_{n,m}p - \right. \\ \left. - \sqrt{3} \left(\frac{ac}{k_{n,m}^4} + bd \right) \sin \beta_{n,m}p \right\}.$$

В диссертации показано, что ряд (20) и его частные производные входящую в уравнению (18) сходятся абсолютно и равномерно в области \bar{D} . При обосновании равномерной сходимости установлено отличие от нуля "малого знаменателя".

В третьем параграфе третьей главы построены решения задач E_2 , E_3 и E_4 . Доказаны следующие теоремы:

Теорема 20. Если для функции $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1,3}$ и $f(x, y, z)$ справедливы следующие условия:

$$1) \psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{3,3}(\bar{\Pi}), \quad i = \overline{1,3}, \quad \text{где } \bar{\Pi} = \{(y, z): y \in [0, q], z \in [0, r]\};$$

$$2) f(x, y, z) \in C_{x,y,z}^{1,2,2}(\bar{D});$$

$$3) \begin{cases} \frac{\partial \psi_i(0, z)}{\partial y} = \frac{\partial \psi_i(q, z)}{\partial y} = 0, & \frac{\partial^4 \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z} = \frac{\partial^4 \psi_i(y, r)}{\partial y^3 \partial z} = 0, \\ \frac{\partial \psi_i(y, 0)}{\partial z} = \frac{\partial \psi_i(y, r)}{\partial z} = 0, & \frac{\partial^4 \psi_i(0, z)}{\partial y \partial z^3} = \frac{\partial^4 \psi_i(q, z)}{\partial y \partial z^3} = 0, \quad i = \overline{1,3}, \\ \frac{\partial f(x, 0, z)}{\partial y} = \frac{\partial f(x, q, z)}{\partial y}, & \frac{\partial f(x, y, 0)}{\partial z} = \frac{\partial f(x, y, r)}{\partial z} = 0, \end{cases}$$

то решение задачи E_2 существует в указанном классе функций.

Теорема 21. Если для функции $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1,3}$ и $f(x, y, z)$ справедливы следующие условия:

$$1) \psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{4,3}(\bar{\Pi}), \quad i = \overline{1,3}, \quad \text{где } \bar{\Pi} = \{(y, z): y \in [0, q], z \in [0, r]\};$$

$$2) f(x, y, z) \in C_{x,y,z}^{1,2,2}(\bar{D});$$

$$3) \begin{cases} \alpha \frac{\partial^j \psi_i(0, z)}{\partial y^j} + \beta \frac{\partial^{j+1} \psi_i(0, z)}{\partial y^{j+1}} = 0, & \gamma \frac{\partial^j \psi_i(q, z)}{\partial y^j} + \delta \frac{\partial^{j+1} \psi_i(q, z)}{\partial y^{j+1}} = 0, \quad j = 0, 2, \\ \frac{\partial^4 \psi_i(y, r)}{\partial y^4} = \frac{\partial^4 \psi_i(y, 0)}{\partial y^4} = 0, & \frac{\partial^6 \psi_i(y, r)}{\partial y^4 \partial z^2} = \frac{\partial^6 \psi_i(y, 0)}{\partial y^4 \partial z^2} = 0, \quad i = \overline{1,3}, \\ \alpha f(x, 0, z) + \beta \frac{\partial f(x, 0, z)}{\partial y} = 0, & \gamma f(x, q, z) + \delta \frac{\partial f(x, q, z)}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial^2 f(x, y, 0)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f(x, y, r)}{\partial y^2} = 0, \end{cases}$$

то решение задачи E_3 существует в указанном классе функций.

Теорема 22. Если для функции $\psi_i(y, z)$, $i = \overline{1, 3}$ и $f(x, y, z)$ справедливы следующие условия:

$$1) \psi_i(y, z) \in C_{y,z}^{3,4}(\overline{\Pi}), \quad i = \overline{1, 3}, \quad \text{где } \overline{\Pi} = \{(y, z): y \in [0, q], z \in [0, r]\};$$

$$2) f(x, y, z) \in C_{x,y,z}^{1,2,2}(\overline{D});$$

$$3) \left\{ \begin{array}{l} \psi_i(0, z) = \psi_i(q, z) = 0, \quad \frac{\partial^2 \psi_i(0, z)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi_i(q, z)}{\partial y^2} = 0, \\ \alpha \frac{\partial^{3+j} \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z^j} + \beta \frac{\partial^{4+j} \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z^{j+1}} = 0, \quad \gamma \frac{\partial^{3+j} \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z^j} + \delta \frac{\partial^{4+j} \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z^{j+1}} = 0, \\ f(x, 0, z) = f(x, q, z) = 0, \quad \alpha \frac{\partial^2 f(x, y, 0)}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial^3 f(x, y, 0)}{\partial y^2 \partial z} = 0, \\ \gamma \frac{\partial^2 f(x, y, r)}{\partial y^2} + \delta \frac{\partial^3 f(x, y, r)}{\partial y^2 \partial z} = 0, \quad j = 0, 2, \quad i = \overline{1, 3}, \end{array} \right.$$

то решение задачи E_4 существует в указанном классе функций.

Доказательство теоремы существования решений поставленных задач было проведено методом Фурье, причем решения получены в явном виде с помощью построенной функции Грина.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена изучению новых краевых задач для уравнений третьего порядка с кратными характеристиками в ограниченных и полуограниченных областях трехмерного пространства. Основные результаты исследования формулируются следующим образом:

1. С использованием методов Фурье и интегралов энергии доказаны существование и единственность решений краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в ограниченной области.

2. С помощью метода разделения переменных и метода интегралов энергии доказаны однозначная разрешимость краевых задач для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в полуограниченных областях.

3. Построена функция Грина краевой задачи со смешанными условиями для неоднородного обыкновенного дифференциального уравнения третьего порядка на основе полученной с методом Фурье, определены ее структура и основные свойства.

4. С использованием метода Фурье, метода функций Грина и интегралов энергии доказана корректность краевых задач со смешанными условиями для неоднородного дифференциального уравнения третьего порядка с кратными характеристиками.

**SCIENTIFIC COUNCIL PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 SOFTWARE
AWARD OF ACADEMIC DEGREES
FERGHANA STATE UNIVERSITY**

NAMANGAN STATE TECHNICAL UNIVERSITY

KHAMITOV AZIZBEK AKHMADZHON UGLI

**BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR A THIRD-ORDER EQUATION
WITH MULTIPLE CHARACTERISTICS IN THREE-DIMENSIONAL
SPACE**

01.01.02 – “Differential equations and Mathematical physics”

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PHD) ON
PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

Fergana - 2025

The topic of the doctor of philosophy (PhD) dissertation in physical and mathematical sciences is registered with the Ministry of Higher education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under № B2024.3.PhD/FM1144.

The dissertation was completed at the Namangan State Technical University.

The abstract of the dissertation is posted in three languages (uzbek, russian, english (summary)) on the website of the Scientific Council (www.fdu.uz) and on the Information and Educational Portal "Ziyonet" (www.ziyonet.uz).

Scientific supervisor: **Apakov Yusupzhon Pulatovich**
Doctor of physical and mathematical sciences, Professor

Official opponents: **Sitnik Sergei Mikhailovich**
Doctor of physical and mathematical sciences, Professor

Ibaidullaev Tulanboy Tursunboevich
Candidat of physical and mathematical sciences, Dotsent

Leading organization: **Urganch State University**


The defense of the dissertation will take place "6" 05 2025 at 10:00 hours at a meeting of the Scientific Council PhD.03/30.12.2019.FM.05.04 at Fergana State University. (Address: 150100, Fergana city, Murabbiylar street, building 19. Tel.: (+99873) 244-22-94. e-mail: fardu_info@umail.uz)

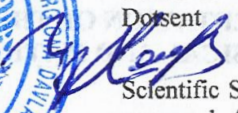
The dissertation can be found at the Information Resource Center of Fergana State University (registered under No. 562). (Address: 150100, Fergana, Murabbiylar street, building 19). Tel.: (+99873)244-44-94.

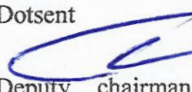
The abstract of the dissertation was sent out "25" 08 2025.

(mailing protocol No. 9 dated "25" 08 2025).




Sh.T. Karimov
Deputy chairman of Scientific Council on
award of scientific degrees, D.Ph.M.S.,
Dotsent


I.U. Khaydarov
Scientific Secretary of Scientific Council
on award of scientific degrees, C.Ph.M.S.,
Dotsent


K.S. Gaziev
Deputy chairman of the Scientific
Seminar under Scientific Council on
award of scientific degrees, C.Ph.M.S.,
Dotsent

INTRODUCTION (abstract of Doctor of Philosophy (PhD) dissertation)

The aim of the research is to formulate and investigate boundary value problems for third-order equations with multiple characteristics in bounded and semi-bounded regions of three-dimensional space.

The object of the research work is third-order equations with multiple characteristics in three-dimensional space.

The scientific novelty of the research is as follows:

using the Fourier method and energy integrals, the existence and uniqueness of solutions to boundary value problems for a third-order equation with multiple characteristics in a bounded domain were proven;

using the method of separation of variables and the method of energy integrals, the unique solvability of boundary value problems for a third-order equation with multiple characteristics in semi-bounded domains was proven;

the Green's function of a boundary value problem with mixed conditions for a non-homogeneous ordinary differential equation of the third order was constructed based on the function obtained using the Fourier method, and its structure and main properties were determined;

using the Fourier method, the method of Green's functions and energy integrals, the correctness of boundary value problems with mixed conditions for a non-homogeneous differential equation of the third order with multiple characteristics was proven.

Implementation of research results. Based on the obtained scientific results on boundary value problems for partial differential equations of the third order with multiple characteristics in bounded and semi-bounded regions of three-dimensional space:

new methods for constructing solutions to boundary value problems using the Green's function for a third-order inhomogeneous equation with multiple characteristics in three-dimensional space were employed in a scientific research project abroad, within the framework of No. NIOKTR 122041800029-5, topic "Boundary value problems and control problems for basic and mixed types of equations and their application to the study of systems with distributed parameters" (reference No. 01-13/47 of the Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences dated April 15, 2025). As a result, it became possible to solve new boundary value problems for high-order inhomogeneous equations;

the technique for constructing solutions to new boundary value problems for third-order partial differential equations with multiple characteristics in bounded and unbounded domains of three-dimensional space was used within the framework of grant No. 374874-2022 on the topic "Phase transition problems and critical phenomena. Mathematical aspects of their equations, fast transitions and asymptotics" (certificate No. 652 of the Osh State University of the Kyrgyz Republic dated April 17, 2025). As a result, it was possible to obtain explicit solutions to new

boundary value problems for third-order equations in bounded and unbounded domains of three-dimensional space.

Approbation of research results. The results of this research were presented and discussed at 13 international and 2 republican scientific and scientific-practical conferences.

Publication of research results. 23 scientific works have been published on the topic of the dissertation, including 7 scientific articles, including 3 published in foreign and 4 in republican journals recommended by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for the defense of dissertations for the degree of Doctor of Philosophy (PhD).

Structure and scope of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, and a list of references. The volume of the dissertation is 91 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS
I bo'lim (Часть I; Part I)

1. Apakov Yu.P., Hamitov A.A. Third Boundary Value Problem for an Equation with the Third Order Multiple Characteristics in Three Dimensional Space // Lobachevskii Journal of Mathematics. 2023. Vol. 44, No 2. - pp. 523-532. DOI: 10.1134/S1995080223020099. (3. Journal IF: 0.8)

2. Apakov Yu.P., Hamitov A.A. On solution of the boundary value problems posed for an equation with the third-order multiple characteristics in semi-bounded domains in three dimensional space // Boletin de la Sociedad Matematica Mexicana. 2023. 29:58. – pp.2-14. <https://doi.org/10.1007/s40590-023-00523-1>. (3. Journal IF: 0.9)

3. Apakov Yu.P., Hamitov A.A. Boundary value problems for a third order equation with multiple characteristics in three-dimensional space in semi-bounded domains // Filomat. 2025. 39:8. - pp. 2603-2612. <https://doi.org/10.2298/FIL2508603A>. (3. Journal IF: 0.8)

4. Apakov Yu.P., Hamitov A.A. Third boundary value problem for a third-order inhomogeneous equation with multiple characteristics in three-dimensional space // Uzbek Mathematical Journal. 2025. Vol. 69, Issue 1. - pp. 27-36. (01.00.00; №6)

5. Хамитов А.А. О корректности краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве // Доклады Академии наук Республики Узбекистан. 2024. № 3. - С. 32-38. (01.00.00; №7)

6. Апаков Ю.П., Хамитов А.А. О решение одной краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве // Научный вестник НамГУ. 2020. № 4. - С. 21-31. (01.00.00; №14)

7. Хамитов А.А. О решении второй краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трёхмерном пространстве // Научный вестник НамГУ. 2025. № 3. - С. 40-45. (01.00.00; №14)

II bo'lim (Часть II; Part II)

8. Апаков Ю.П., Хамитов А.А. Об одной граничной задаче для неоднородного уравнения третьего порядка в трёхмерном пространстве // Вестник Ошского государственного университета Математика. Физика. Техника. 2024. № 2(5), - С. 26-34. DOI: 10.52754/16948645_2024_2(5)_3.

9. Апаков Ю.П., Хамитов А.А. О единственности решения второй краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трёхмерном пространстве // Тезисы докладов международная конференция «Обратные и некорректные задачи». Самарканд, СамГУ. 2-4 октября 2019 г. - С. 54-55.

10. Апаков Ю.П., Хамитов А.А. О единственности решения одной краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками

в трехмерном пространстве // Тезисы докладов Республиканская научная конференции с участием зарубежных ученых «Управление, оптимизация динамические системы-2019». Андижан, АндГУ. 17-19 октября 2019 г. - С. 87-88.

11. Апаков Ю.П., Хамитов А.А. О решения одной краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве // Тезисы докладов международной научной конференции на тему «Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики». Фергана, ФерГУ. 12-13 марта 2020 г. - С. 39-42.

12. Хамитов А.А. Об одной задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве // Сборник материалов Республиканской научно-практической конференции на тему «Теоретические основы и прикладные задачи современной математики». Андижан, АндГУ. 28 марта 2022 г. - С. 286 – 287.

13. Хамитов А.А. Краевая задача для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве в полуограниченной области // “Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки Республики Казахстан”, Алматы. 5-7 апреля 2023 г. - С. 187-188.

14. Апаков Ю.П., Хамитов А.А. Об одной краевой задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве в полубесконечной области // «Третий ренессанс в Узбекистане и инновационные процессы» Международная научно-практическая онлайн конференция. Андижан, АндГУ. 25-26 апреля 2023 г. - С. 182-185.

15. Апаков Ю.П., Хамитов А.А. О разрешимости третьей краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве в полуограниченной области // Тезисы докладов международной научно-практической конференции “Актуальные проблемы физики, математики и механики”. Бухара. 24-25 мая 2023 г. - С. 198-201.

16. Хамитов А.А. Об одной задаче для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве в полуограниченной области // Тезисы докладов VII Всемирного Конгресса математиков тюркского мира (TWMS Congress-2023). Туркестан, Казахстан. 20–23 сентября 2023 г. - С. 142-143.

17. Apakov Yu. P., Hamitov A.A. On the solution of a boundary value problem for a third-order equation with multiple characteristics in three-dimensional space in a semi-bounded domain // Abstracts of VIII international scientific conference “Actual problem of applied mathematics and information technologies-Al-Khwarizmi 2023”. Samarkand, SamSU. September 25-26, 2023. - pp. 179-180.

18. Хамитов А.А. О построение решения краевой задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве в полуограниченной области // Международная научная конференция «Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения». Ташкент. 23-25 ноября 2023 г. - С. 276-278.

19. Апаков Ю.П., Хамитов А.А. Об одной граничной задачи для уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве в полуограниченной области // VII Международная научная конференция «Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы математической биологии, информатики и физики». Нальчик, Россия. 4-8 декабря 2023 г. - С. 41-43.

20. Хамитов А.А. О единственности решение одной краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве // Материалы международной научно-практической конференции “Современные проблемы математики и её преподавания”. Худжанд, Таджикистан. 21-22 июня 2024 г. - С. 88-91.

21. Apakov Yu. P., Hamitov A.A. Boundary value problem for a third-order inhomogeneous equation with multiple characteristics in three-dimensional space // Abstracts of the IX International scientific conference “Actual problems of applied mathematics and information technologies Al-Khwarizmi 2024”. Tashkent. 22-23 october, 2024. - pp. 128-129.

22. Хамитов А.А. О решение краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве // Международная научная конференция «Неклассические уравнения математической физики и их приложения». Ташкент. 24-26 октября 2024 г. - С. 243.

23. Апаков Ю.П., Хамитов А.А. О решении граничной задачи для неоднородного уравнения третьего порядка в R^3 // Традиционная международная апрельская математическая конференция в честь Дня науки Республики Казахстан. Алматы. 1-4 апреля 2025 г. - С. 98-99.

Avtoreferat farg‘ona davlat universiteti «FarDU. Ilmiy xabarlar –Научный вестник. ФерГУ» ilmiy – metodik jurnal mtahririyatida tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek,rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

FDU “Nusxa ko‘paytirish bo‘limi”da chop etildi. 2025-yil.
Bosishga ruxsat etildi: 2025 y.
Bichimi 60/84 1/16. Ofest qog‘ozi
Nashriyot bosma tabog‘i-2,875
Shartli bosma tabog‘i-1.4375
150100. Farg‘ona shahri Murabbiylar ko‘chasi, 19-uy