

**BUXORO DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/27.02.2021.FM.101.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

BUXORO DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

ERGASHEVA NILUFAR MANSUROVNA

**SIRT TO‘LQINLARINING QOVUSHQOQ-ELASTIK YARIM
TEKISLIKDA TARQALISH XUSUSIYATLARI**

01.02.04 – Deformatsiyalanuvchan qattiq jism mexanikasi

**FIZIKA - MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

Buxoro –2025

**Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по
физико-математическим наукам**

**Contents of dissertation abstract of Doctor of Philosophy (PhD)
on Physical-Mathematical Sciences**

Ergasheva Nilufar Mansurovna

Sirt to‘lqinlarining qovushqoq- elastik yarim tekislikda tarqalish xususiyatlari.. 3

Эргашева Нилуфар Мансуровна

Особенности распространения поверхностных волн в вязкоупругой
полуплоскости..... 21

Ergasheva Nilufar Mansurovna

Characteristics of surface wave propagation in a viscoelastic half-plane..... 41

Эълон қилинган ишлар рўйхати

Список опубликованных работ
List of published papers..... 45

**BUXORO DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
PhD.03/27.02.2021.FM.101.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

BUXORO DAVLAT TEXNIKA UNIVERSITETI

ERGASHEVA NILUFAR MANSUROVNA

**SIRT TO‘LQINLARINING QOVUSHQOQ-ELASTIK YARIM
TEKISLIKDA TARQALISH XUSUSIYATLARI**

01.02.04 – Deformatsiyalanuvchan qattiq jism mexanikasi

**FIZIKA - MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD)
DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI**

Buxoro –2025

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2025.2.PhD/FM656 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya Buxoro davlat texnika universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) universitet veb-saytida (www.bstu.uz) va «ZiyoNet» Axborot ta'lim portalida (www.ziynet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbarlar:

Teshaev Muhsin Xudoyberdiyevich
fizika-matematika fanlari doktori (DSc)

Rasmiy opponentlar:

Mavlonov To'lqin Mavlanovich
texnika fanlar doktori, professor

Indiaminov Ravshan Shukurovich
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Yetakchi tashkilot:

Toshkent kimyo-texnologiya instituti

Dissertatsiya himoyasi 2025 yil 18 oktabr kuni soat 11⁰⁰ da Buxoro davlat texnika universiteti huzuridagi PhD.03/27.02.2021.FM.101.02 raqamli Ilmiy kengash majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 200117, Buxoro shahar, Qayum Murtazoyev ko'chasi, 15. Tel./faks: (+99865) 223-78-84. e-mail: bstu_info@edu.uz).

Dissertatsiya bilan Buxoro davlat texnika universitetining Axborot-resurs markazida (№ 390 raqam bilan ro'yxatga olingan) tanishish mumkin. Manzil: (200117, Buxoro shahar, Qayum Murtazoyev ko'chasi, 15. Tel./faks: (+99865) 223-78-84).

Dissertatsiya avtoreferati 2025 yil 02 oktabr kuni tarqatildi.

(2025 yil 14 avgustdagi № 6 raqamli reestr bayonnomasi)



[Handwritten signature]

B.S. Raxmonov

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi,
texnika fanlari doktori (DSc)

[Handwritten signature]

R.A. Sabirova

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy
kotibi, fizika-matematika fanlari bo'yicha
falsafa doktori (PhD)

[Handwritten signature]

Z.I. Boltayev

Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash
qoshidagi Ilmiy seminar raisi, fizika-matematika
fanlari doktori (DSc), professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahonda temir yo‘l tizimlarida yuqori tezlikda harakatlanadigan transport vositalarining barqarorligi muhim muhandislik muammolaridan biri sifatida yetakchi o‘rinni egallamoqda. Dunyo miqyosida mikropolyar Kossera muhiti va gradiyent-elastik muhit kabi umumlashtirilgan muhit modellari ushbu sohada yetakchi o‘rinni egallab, to‘lqin jarayonlarini o‘rganish, zamonaviy metodikalar va algoritmlar ishlab chiqish hamda sonli natijalarni tahlil qilish orqali temir yo‘l infratuzilmasining uzoq muddatli barqarorligini ta‘minlovchi usullarini amaliyotga joriy etishni taqozo etadi. Shu jihatdan, Reley to‘lqinlari ultratovush diapazonida (taxminan 10^6 Hz chastotalarda) metall, shisha va plastmassa kabi materiallarning sirt va sirtga yaqin qatlamlaridagi nuqsonlarni aniqlashda keng qo‘llanilmoqda va sirt qatlaminin tarqalish tezligi, so‘nish darajasi, qoldiq kuchlanishlar hamda termik-mexanik xususiyatlarini tahlil qilishda muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

Jahonda gruntida hosil bo‘ladigan egilish va burilish to‘lqinlari bilan bog‘liq barqarorlik masalalari temir yo‘l konstruksiyalarining kvazistatik va dinamik seysmik to‘lqinlar ta‘sirida mustahkamligini ta‘minlash, kuchlanish-deformatsiya holatini kamaytirish va xavfsiz ekspluatatsiyasini kafolatlash uchun har yili 3 milliard AQSH dollaridan ortiq mablag‘ sarflashni talab etib, shu yo‘nalishda qurilmalarning mustahkamligini oshirishga yo‘naltirilgan ilmiy-tadqiqot ishlari olib borilmoqda. Bu borada materiallarning qovushqoq-elastiklik xususiyatini hisobga olgan holda dinamik masalalarni yechish hamda konstruksiyalarni buzmasdan ularning to‘lqin tarqalish xususiyatlari orqali mustahkamligini baholashga alohida e‘tibor berilmoqda.

Respublikamizda mustaqillik yillarida yer usti va yer osti inshootlari zilzilabardoshligi sohasida qo‘llaniladigan materiallarning, shu jumladan ko‘p qatlamli murakkab tarkibga va fizik xossalarga ega bo‘lgan muhitlarni mustahkamligini oshirishga alohida e‘tibor qaratilmoqda. O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022-yil 30-maydagi PF-144-sonli “O‘zbekiston Respublikasi seysmik xavfsizligini ta‘minlash tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”¹ vazifalari belgilab berilgan. Mazkur vazifalarni amalga oshirishda, jumladan, konstruksiyalarni buzmasdan tekshirish va turli xil konstruksiyalar qoplamalarning buzilishini oldini oluvchi nazaryalar yaratish ham talab etiladi. Buning uchun deformatsiyalanuvchan qattiq jism mexanikasida klassik kontinuum modeli bilan bir qatorda qattiq jismlarda umumlashtirilgan kontinuum modellari keng qo‘llanishni talab etadi. Eng ko‘p qo‘llanishi talab etiladigan umumlashtirilgan (klassik bo‘lmagan) kontinualar orasida mikropolyar Kossera muhiti va gradiyent-elastik muhit ushbu sinfga tegishli. Bunday muhitlarda to‘lqin jarayonlarni o‘rganish metodikasi va algoritmini yaratish, sonli natijalar olish va tahlil qilish muhim ahamiyat kasb etmoqda.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 7 fevraldagi PF-4947-sonli “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha Harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi Farmoni hamda 2020 yil 30 iyuldagi PQ-4794-sonli “O‘zbekiston Respublikasi aholisi va hududining seysmik xavfsizligini ta‘minlash tizimini tubdan

¹O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2022- yil 30-maydagi PF-144-son “O‘zbekiston Respublikasining seysmik xavfsizligini ta‘minlash tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori

takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi va 2024-yil 17-apreldagi PQ-161-sonli “Bino va inshootlarning zilzilaga bardoshlilikini oshirish hamda seysmik xavfni monitoring qilish faoliyatini takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”² shuningdek, mazkur faoliyatga tegishli me‘yoriy-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning Respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Mazkur tadqiqot ishi O‘zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. «Matematika, mexanika, inshootlar seysmodinamikasi va informatika» hamda XIV. «Seysmologiya, binolar va inshootlar seysmik xavfsizligi va qurilish» ustuvor yo‘nalishlari doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Hozirgi vaqtda jahonda simmetrik bo‘lmagan elastiklik nazariyasining (Kossera muhiti) rivojlanishi bilan quyidagi xorijiy davlat olimlari Денисова Г.Г., Новикова В.В., Новацкий В., Костер В.Т., Победре Б.Е., Матвеев В.П., Кулешу М.А., Бровко Г.А., Rajneesh Kumar, Jun Liu, Nistor I., Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В., Миндлин Р.Д., Тирстен Г.Ф., Кунин И.А., Пальмов В.А., Лурье А.И., Suiker A.S. va boshqa olimlar tomonidan ilmiy tadqiqot ishlari olib borilgan.

Respublikamiz olimlari tomonidan gruntli muhitda to‘lqin tarqalishi va muhitni kuchlanganlik-deformatsiyalanganlik holatlarini o‘rganish va baholash bo‘yicha Raxmatulin X.A., O‘rozboyev M.T., Kabulov V.K., Rashidov T.R., Muborakov Y.N., Mardonov B.M., Mirsaidov M.M., Sultonov K.S., Mirzayev I.K., Abdukadirov S., Xudoynazarov X., Yuldashov Sh.S., Safarov I.I. va boshqa olimlar ish olib borishgan. Ular muhit bilan aloqada bo‘lgan turli xil inshootlarda to‘lqin yuklanishi masalalarini hisoblash usullarini rivojlantirishga o‘zlarining hissalarini qo‘shishgan.

Hozirgi vaqtda muhitning qovushqoqlik xususiyatlarini hamda bir jinslimaslik xususiyatlarini hisobga olgan holda xos to‘lqinning gradient elastik va Kossera muhitida tarqalish xususiyatlarini, hamda dinamik jarayonlarni baholash uslublari to‘la ishlab chiqilmagan.

Dissertatsiya mavzusining ilmiy-tadqiqot rejasi bajarilgan oliy ta‘lim muassasasi bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Buxoro davlat texnika universitetida 2021 - 2026 yillarda bajariladigan ilmiy-tadqiqot ishlari rejasining OT-F4-01 raqamli “Matematika va mexanikaning dolzarb muammolari ” mavzusidagi ilmiy ishlar rejasiga muvofiq bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi sirt to‘lqinlarining (simmetrik bo‘lmagan) qovushqoq - elastik yarim tekislikda tarqalishi masalalarini yechish metodikasi va algoritmini ishlab chiqish, analitik va sonli hisoblash usullarini takomillashtirishdan hamda sonli natijalar olish va tahlil qilishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

sirt to‘lqinlarining qovushqoq - elastik yarim tekislik uchun dispersion tenglamalarini olish, sonli yechish asosida dispersiya xarakteristikalarini qurish;

ko‘chish va kuchlanishlar amplitudalarining geometrik parametrlarga bog‘liq

²O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2024- yil 17- apreldagi PQ-161-sonli “Bino va inshootlarning zilzilaga bardoshlilikini oshirish hamda seysmik xavfni monitoring qilish faoliyatini takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi qarori

o'zgarishiga baho berish;

gradiyent-elastik yarim fazo chegarasi bo'ylab harakatlanuvchi manba tomonidan hosil bo'ladigan dinamik jarayonlarga baho berish;

dissipativ bir jinsli bo'lmagan qovushqoq - elastik gradiyent-elastik yarim fazo va Kossera muhitidan iborat uzun to'lqin o'tkazgichlarda kompleks faza tezligining bir nechta moddasini to'lqin soniga nisbatan o'zgarishga solishtirma baho berish hamda olingan natijalar asosida to'lqinning so'nishini baholash;

ideal elastik muhitdan farqli qovushqoq-elastik gradiyent-elastik yarim fazo va Kossera muhitida paydo bo'ladigan yangi ko'ndalang to'lqinning faza tezligi va so'nishini solishtirma tahlil qilish.

Tadqiqotning obyekti sifatida qovushqoq-elastik yarim tekislik olingan.

Tadqiqotning predmetini garmonik to'lqinlar ta'sirida qovushqoq-elastik deformatsiyalanuvchan yarim tekislikda to'lqin tarqalishida materiallarning reologik xossalarni e'tiborga olgan holda kuchlanganlik-deformatsiyalanganlik holati va dinamik xarakteristikalarini aniqlash jarayonlari tashkil etadi.

Tadqiqot usullari. Tadqiqot jarayonida deformatsiyalanuvchan qattiq jismlar mexanikasi va qurilish mexanikasi usullaridan, hisoblash matematikasi, matematik modellashtirish, dasturlash usullari, xususiyl hosilali differensial tenglamalarni yechish uchun "muzlatish", o'zgaruvchilarni ajratish, Gauss, Laplas va chekli ayirmalar usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

ilk marta harakatlanuvchi kuch ta'siridagi osesimmetrik bo'lmagan kuchlanishga ega bo'lgan yarim tekislikda hosil bo'ladigan kuchlanganlik-deformatsiyalanganlik holatini aniqlash metodikasi va algoritmi Fur'ening integral almashtirilishlari, Romberg usuli, Gauss va Myuller usulariga asoslangan holda ishlab chiqilgan;

Kossera muhitida kuchlanishlar va ko'chishlar yarim tekislik sirtidan chuqurlik oshib borishi bilan eksponensial qonuniyat bo'yicha kamayib borishi va gradiyent elastik muhitga qaraganda 10-20% ko'p bo'lishi ishlab chiqilgan metodika va algoritim asosida topilgan;

yarim tekislik sirtida chegaradagi kuchlanishlar nol bo'lgan hol uchun mos keladigan dispersion munosabatlardan rezonans sohalar aniqlangan va chasstotalar mavhum qismlari kesishgan nuqtada energiya dissipatsiyasining intensiv bo'lish samarasi aniqlangan.

ishlab chiqilgan metodika va algoritim asosida olingan dispersion tenglama yechimidan ideal elastik muhitdan farqli qovushqoq-elastik, gradiyent-elastik yarim fazo va Kossera muhitida yangi ko'ndalang to'lqin topilgan. Yangi ko'ndalang to'lqinning faza tezligi va so'nishini xarakterlovchi parametrlar aniqlangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

garmonik to'lqin ta'siridagi deformatsiyalanuvchan yarim tekislikda to'lqin tarqalish chastotasi va so'nish koeffitsientlariga solishtirma baho berilgan;

garmonik to'lqin ta'sirida yarim tekislikda to'lqin tarqalish chastotasi va so'nish koeffitsiyentlariga solishtirma baho berilgan;

bo'ylama va ko'ndalang to'lqinlar ta'siri ostida bo'lgan toshli muhitda klassik elastik muhitdan farqli yangi to'lqinning tarqalish tezligi va rezonans hosil qilish xususiyatlariga baho berildi.

Olingan natijalarning ishonchliligi chegaraviy shartlarning korrekt qo'yilishi, keltirib chiqarilgan matematik ifodalarning qat'iyiligi, asoslangan yechish usullaridan tizimli foydalanilganligi, yechimlarning aniqliligi baholashda boshqa tadqiqotchilar yechimlari bilan taqqoslanganligi va ularning natijalariga mos tushganligi hamda amaliyotga joriy qilinganligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqotda olingan natijalarning ilmiy ahamiyati Kossera muhitida joylashgan uzun, qovushqoq–elastik, yupqa silindrik qobiqda to'lqin tarqalish nazariyasini rivojlantirish va takomillashtirishdan iborat.

Tadqiqot ishining amaliy ahamiyatini esa Gradiyent- qovushqoq elastik yarim fazo va Kossera muhitidan iborat bo'lgan to'lqin o'tkazgichlarda to'lqin tarqalishi va tebranishlar formasini qurishga mo'ljallangan amaliy dasturlar kompleksini ishlab chiqishga xizmat qiladi. Sirt to'lqinlarini qovushqoq- elastik Kossera yarim tekislikda tarqalishini kompleks chastotaga bog'liq tadqiq qilish, seysmik to'lqinlarni tarqalishi va inshootlarga ta'sir qilishini, hamda hosil bo'ladigan kuchlanishlar va deformatsiyalarni optimallashtirishga imkon yaratadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi.

Tadqiqotdagi qovushqoq-elastik yarim tekislikda subsonik tezlikda harakatlanuvchi nuqtaviy manba ta'sirida to'lqin tarqalishi natijasida yuzaga keladigan rezonans tebranishlarni so'ndirish metodikasi va algoritmi asosida:

silindrik qobiqda sirt to'lqini yuklanishi natijasida hosil bo'ladigan kuchlanganlik-deformatsiyalanganlik holatini topish metodikasidan hamda ularni tavsiflovchi dispersion munosabatlardan Toshkent kimyo-texnologiya institutida 2016–2020-yillarda bajarilgan OT-F4-01 raqamli “Qovushqoq suyuqlik oquvchi ko'p qatlamli kompozit quvurlar egri chiziqli bo'laklarining harorat va dinamik yuklanishlar ta'sirida chiziqli bo'lmagan dinamik kuchlanish-deformatsiya holatini o'rganish usullarini ishlab chiqish va nazariyasini rivojlantirish” mavzusidagi fundamental loyihada foydalanilgan (Toshkent kimyo-texnologiya instituti, 2025-yil 21-maydagi 1/01-1822-sonli ma'lumotnomasi). Natijada, qovushqoq-elastik yarim tekislikda tovush tezligigacha (subsonik tezlik) bilan harakatlanuvchi nuqtaviy manbaadan to'lqin tarqalishi natijasida qovushqoq suyuqlik oquvchi ko'p qatlamli kompozit quvurlar dinamik yuklanishlar ta'sirida kuchlanganlik-deformatsiyalanganlik holatini aniqlash imkonini bergan.

dissertatsiyada ishlab chiqilgan uzun qovushqoq-elastik to'ldiruvchili yupqa silindrik qobiqda to'lqin tarqalishi masalasini yechishga qaratilgan algoritmdan Rossiya Fundamental tadqiqotlar jamg'armasining davlat ilmiy-texnika dasturi doirasida 2018–2020-yillarda bajarilgan РФФИ-18-48-240007 raqamli “Issiqlik elektrstansiyalari ishlab chiqarish-ekologik monitoringining axborot ishonchliligini oshirishning multiversion usuli” (“Мультиверсионный метод повышения информационной надежности производственно-экологического мониторинга тепловых электростанций”) nomli fundamental loyihada foydalanilgan (Rossiya ilmiy va muhandislik jamoat birlashmalari ittifoqining Krasnoyarsk o'lkasi fan va texnika uyining 2025-yil 24-apreldagi 084-40-sonli ma'lumotnomasi). Natijada, ishlab chiqarish-ekologik monitoringning nazariy asoslarini yaratish va umumlashtirilgan sifat mezonini baholash uchun jarayonlarni matematik modellashtirish imkoniyati yaratilgan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 5 ta xalqaro ilmiy - amaliy anjumanlarida ma’ruza qilingan va muhokamadan o’tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinishi. Dissertasiya mavzusi bo’yicha jami 13 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasining falsafa doktori (PhD) dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 8 ta maqola, jumladan, 5 tasi respublika va 3 tasi xorijiy jurnallarda nashr qilingan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertasiya tarkibi kirish, to’rtta bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro’yxati va ilovalardan iborat. Dissertatsiyaning hajmi 104 betni tashkil qiladi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya tadqiqotining dolzarbligi va zaruriyati asoslab berilgan, tadqiqotning maqsadi va vazifalari, obykti va predmeti shakllantirilgan. Tadqiqotning O‘zbekiston Respublikasi fan va texnologiyalar rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga muvofiqligi ko‘rsatilgan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon etilgan. Olingan natijalarning ishonchligi asoslangan, ularning ilmiy va amaliy ahamiyatlari yoritilgan. Tadqiqot natijalarining amaliyotga joriy etilishi, ishning aprobatsiyasi, chop etilgan ishlar, dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi bo’yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning **“Sirt to’lqinlarining deformatsiyalanuvchi yarim tekislikda tarqalishini o’rganishga bag’ishlangan adabiyotlar tahlili”** deb nomlangan birinchi bobi uch paragrafdan iborat bo’lib, unda dispersiyaga uchramaydigan sirt to’lqinlarini va dispersiyaga uchraydigan to’lqinlarni o’rganishga bag’ishlangan adabiyotlar tahlili qilingan. Elastik muhitda to’lqin tarqalishi va to’lqin dispersiyasiga oid tushunchalar va ularni o’rganishga bag’ishlangan adabiyotlar tahlil qilindi. Yarim elastik tekislik va ikki muhit kontaktidagi (Stounli) to’lqinlar ham tahlil qilindi. Materiallarning qovushqoq -elastiklik xususiyatlarini hisobga olib, to’lqin tarqalishini ifodalovchi dispersion tenglamani olishga bag’ishlangan adabiyotlar tahlili ham keltirilgan.

Dissertatsiyaning **“Qovushqoq- elastik yarim tekislikda Reley to’lqinlarining tarqalishi masalalarining qo’yilishi, yechish metodikasi va algoritmi (neosesimmetrik kuchlanishlar tenzori va moment kuchlanishlarini hisobga olib)”** deb nomlangan ikkinchi bobida qovushqoq - elastik yarim tekislikda Reley to’lqinlarni tarqalishi (osesimmetrik bo’lmagan kuchlanishlar tenzori va moment kuchlanishlarini hisobga olib) masalalarining matematik qo’yilishi, yechish metodikasi va algoritmi keltirilgan.

Operator ko‘rinishdagi elastiklik moduli \tilde{E}_k uchun quyidagi integral munosabat o‘rinli:

$$\tilde{E}_k f(t) = E_{0k} \left[f(t) - \int_0^t R_{Ek}(t - \tau) f(\tau) d\tau \right], \quad (1)$$

bu yerda, $R_{Ek}(t - \tau)$ – relaksatsiya yadrosi; E_{0k} -oniy elastiklik moduli. (1) tenglamadagi integral had kichik hisoblanadi, shuning uchun $f(t)$ funksiya uchun $f(t) = \psi(t)e^{-i\omega_R t}$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. Bu kichik chiziqli tebranishlarga mos keladi. Bu yerda $\psi(t)$ -vaqtni sekin o‘zgaruvchi funksiyasi, ω_R -haqiqiy kattalik. U holda (1) ni quyidagicha ifoda bilan taqriban almashtirish mumkin

$$\tilde{E}_k f = E_{0k} [1 - \Gamma_k^C(\omega_R) - i\Gamma_k^S(\omega_R)] f,$$

bunda

$$\Gamma^C(\omega_R) = \int_0^\infty R(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau, \Gamma^S(\omega_R) = \int_0^\infty R(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau$$

material relaksatsiya yadrosining mos ravishda, kosinus va sinus Furye tasvirlari.

Bu bobda qovushoq - elastik yarim tekislikda garmonik to'liqlarning tarqalishi o'rganiladi. Ko'pchilik hollarda harakatning xususiy hosilali differensial tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishda olinadi:

$$(\tilde{\lambda}_k + 2\tilde{\mu}_k) \text{graddiv} \vec{u}_k - \tilde{\mu}_k \text{rotrot} \vec{u}_k = \rho_k \frac{\partial^2 \vec{u}_k}{\partial t^2}, \quad (k=1), \quad (2)$$

va u ba'zi murakkab bo'lmagan operatsiyalardan so'ng kompleks koeffitsiyentli birinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasini yechishga keltiriladi. Ba'zi murakkab hollarda tenglamalar sistemasining yechimlari chekli ayirmalar, orthogonal progonka, Myuller, Laplas, Gauss va maxsus funksiyalarga asoslangan metodika va algoritm bilan ham yechiladi. Qo'llangan algoritm asosida C^{++} dasturlash tilida dastur ishlab chiqilgan. Test masalalarni yechishda MAPLE-9.5 va MATLAB dasturiy ta'minotidan ham foydalanildi.

Muzlatish usulini qo'llash natijasida (2) integro-differensial tenglama kompleks koeffitsiyentli xususiy hosilali differensial tenglamaga keladi:

$$(\bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k) \text{graddiv} \vec{u}_k - \bar{\mu}_k \text{rotrot} \vec{u}_k = \rho_k \frac{\partial^2 \vec{u}_k}{\partial t^2}. \quad (3)$$

Bunda

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_k f(t) &= \lambda_{k0} \left[1 - \Gamma_{k\lambda}^{(c)} - i\Gamma_{k\lambda}^{(s)} \right] f(t), \\ \bar{\mu}_k f(t) &= \mu_{k0} \left[1 - \Gamma_{k\mu}^{(c)} - i\Gamma_{k\mu}^{(s)} \right] f(t). \end{aligned} \quad (4)$$

Bu yerda

$$\begin{aligned} \Gamma_{\lambda k}^C(\omega_R) &= \int_0^\infty R_{\lambda k}(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau, \Gamma_{\lambda k}^S(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\lambda k}(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau, \\ \Gamma_{\mu k}^C(\omega_R) &= \int_0^\infty R_{\mu k}(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau, \Gamma_{\mu k}^S(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\mu k}(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau. \end{aligned}$$

-mos ravishda, material relaksatsiya yadrosining kosinus va sinus Furye tasvirlari.

Lame tenglamasi (3) gradiyent - elastik va izotrop muhit uchun quyidagi ko'rinishni egallaydi:

$$\rho_k \ddot{\vec{u}}_k - (\bar{\lambda}_k + \bar{\mu}_k) \text{graddiv} \vec{u}_k - \bar{\mu}_k \Delta \vec{u}_k + 4\bar{\mu}_k L^2 \Delta (\Delta \vec{u}_k + \tilde{v} \text{graddiv} \vec{u}_k) = 0. \quad (5)$$

Faraz qilaylik, yarim tekislik sirtida nuqtaviy kuch D tezlik bilan harakatlansin. Uning tezligi bo'ylama va ko'ndalang to'liq tezliklaridan oshib ketmaydi. Bu holatda muhitda to'liq tarqalishini ifodalovchi tenglamalar quyidagicha bo'ladi

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_{x'x'}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma_{y'x'}}{\partial y'} &= \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{x'y'}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma_{y'y'}}{\partial y'} &= \rho \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (6)$$

O'rganilayotgan masala uchun chegaraviy shart quyidagicha bo'ladi

$$\sigma_{y'y'} = -P\delta(x), \sigma_{y'x'} = 0, \mu_{y'} = 0.$$

Bo'ylama va ko'ndalang to'liq potensillari orqali ko'chishlar quyidagicha topiladi

$$u_{xk} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x'} - \frac{\partial \psi_{zk}}{\partial y'}, \quad u_{yk} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'} - \frac{\partial \psi_{zk}}{\partial x'}, \quad (7)$$

Agar to'liqin tenglamalaridan foydalansak, ular quyidagi ko'rinishga keladi:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - \frac{1}{c_{p1}^2 \Gamma_{k\lambda\mu}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - l^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x'^4} + \frac{\partial^4}{\partial x'^4 \partial y'^4} + \frac{\partial^4}{\partial y'^4} \right) - \frac{1}{c_{s2}^2 \Gamma_{k\mu}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = 0. \quad (8)$$

Harakatlanuvchi koordinatalar sistemasi (x, y) qo'zg'almas koordinatalar sistemasi bilan Galiley almashtiririlishi orqali bog'liq:

$$x = x' - Dt, \quad y = y' \quad (9)$$

U holda dinamik jarayonni ifodalovchi tenglamalar quyidagicha bo'ladi

$$\left(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu} - \rho D^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bar{\lambda} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y} + \bar{\mu} \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + l^2 \Delta \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] = 0, \\ \left(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu} \right) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \bar{\lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \bar{\mu} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(1 - \frac{\rho D^2}{\bar{\mu}} \right) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - l^2 \Delta \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] = 0, \quad (10)$$

(10) tenglamaning yechimini quyidagicha izlaymiz:

$$u = A e^{kqy} \sin(kx), \quad \vartheta = B e^{kqy} \cos(kx). \quad (11)$$

U holda (10) tenglama quyidagi ko'rinishni egallaydi:

$$\left[-\bar{\mu} l^2 k^2 q^4 + \bar{\mu} q^2 (1 + l^2 k^2) - (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu} - \rho D^2) \right] A + \\ + \left[\bar{\mu} l^2 k^2 q^3 + q (\bar{\lambda} + \bar{\mu} - \bar{\mu} l^2 k^2) \right] B = 0, \\ \left[-\bar{\mu} l^2 k^2 q^3 - q (\bar{\lambda} + \bar{\mu} - \bar{\mu} l^2 k^2) \right] A + \\ + \left[q^2 (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu} - \rho D^2) - (\bar{\lambda} + \bar{\mu} l^2 k^2 - \rho D^2) \right] B = 0, \quad (12)$$

Bir jinsli (12) tenglamalar sistemasining notrivial yechimi mavjudlik shartidan quyidagi dispersion tenglamani olamiz:

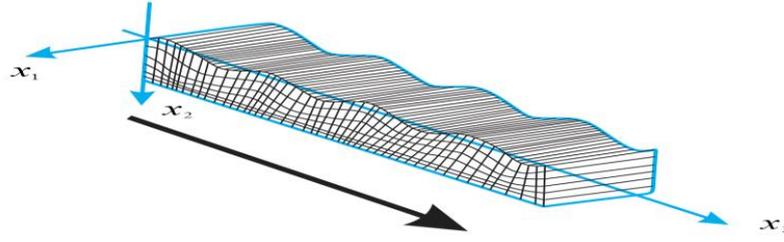
$$(l^2 k^2 - \gamma + \beta_1^2) l^2 k^2 q^6 + (l^2 k^2 (1 + l^2 k^2 - \beta_1^2) + \gamma (1 + l^2 k^2) (1 - \gamma \beta_1^2) + \\ + 2l^2 k^2 (\gamma - l^2 k^2)) q^4 + ((1 + l^2 k^2) (1 + l^2 k^2 - \beta_1^2) - (\gamma - \beta_1^2)^2 + (\gamma - \\ l^2 k^2)^2) q^2 + (\gamma - \beta_1^2) (1 + l^2 k^2 - \beta_1^2) = 0. \quad (13)$$

Bunda $\beta_1^2 = \frac{\rho D^2}{\bar{\mu}}$, $\gamma = \frac{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\bar{\mu}}$. (13) transtsendent tenglamaning ildizlari cheksiz ko'p bo'ladi. U holda bo'ylama va ko'ndalang ko'chishlar quyidagicha bo'ladi:

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} A_i e^{kqiy} \sin k x dk, \quad \vartheta = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \alpha_i A_i e^{kqiy} \cos k x dk.$$

Agar yarim tekislikda xos to'liqin tarqalsa, u holda to'liqin tarqalish tenglamasi quyidagi kompleks koeffitsiyentli oddiy differensial tenglamalar sistemasiga olib kelinadi

$$\left(2\bar{\mu}_n + \bar{\lambda}_n \right) \text{graddiv} \vec{U}_n - \left(\bar{\mu}_n + \bar{\lambda}_n \right) \text{rotrot} \vec{U}_n + 2\alpha_n \text{rot} \vec{\Omega}_n + \rho_n \omega^2 \vec{U}_n(z) = 0, \\ \left(\bar{\beta}_n + 2\bar{\gamma}_n \right) \text{graddiv} \vec{\Omega}_n - \left(\bar{\gamma}_n + \bar{\varepsilon}_n \right) \text{rotrot} \vec{\Omega}_n + 2\alpha_n \text{rot} \vec{U}_n - \\ - 4\bar{\alpha}_n \vec{\Theta}_n + j_n \omega^2 \vec{\Omega}_n = 0, \quad (14)$$



1 –rasm. Reley to‘lqinining tarqalishi

(14) tenglamalar sistemasining yechimini quyidagi ko‘rinishda izlaymiz:

$$\begin{aligned}\vec{u}_n(x, z, t) &= \vec{U}_n\{U_x(z), U_y(z), U_z(z)\}e^{i(kx-\omega t)}, \\ \vec{\theta}_n(x, z, t) &= \vec{\Omega}_n\{W_x(z), W_y(z), W_z(z)\}e^{i(kx-\omega t)}.\end{aligned}\quad (15)$$

Agar (15) ni (14) ga qo‘ysak, quyidagicha oddiy differensial tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{aligned}(\bar{\alpha}_n + \bar{\mu}_n) \frac{d^2 U_x(z)}{dz^2} + (\rho_n \omega^2 - k^2(\bar{\lambda}_n + 2\bar{\mu}_n)) U_x(z) + ik(-\bar{\alpha}_n + \bar{\mu}_n + \bar{\lambda}_n) \frac{dU_z(z)}{dz} \\ - 2\bar{\alpha}_n \frac{dW_y(z)}{dz} = 0, \\ (\bar{\alpha}_n + \bar{\mu}_n) \frac{d^2 U_z(z)}{dz^2} + (\rho_n \omega^2 - k^2(\bar{\alpha}_n + \bar{\mu}_n)) U_z(z) + ik(-\bar{\alpha}_n + \bar{\mu}_n + \bar{\lambda}_n) \frac{dU_z(z)}{dz} \\ - 2i\bar{\alpha}_n W_y(z) = 0 \\ (\bar{\alpha}_n + \bar{\mu}_n) \frac{d^2 U_y(z)}{dz^2} + (\rho_n \omega^2 - k^2(\bar{\alpha}_n + \bar{\mu}_n)) U_y(z) + 2\bar{\alpha}_n \frac{dW_x(z)}{dz} - 2ik\bar{\alpha}_n W_z(z) \\ = 0 \\ (\bar{\gamma}_n + \bar{\varepsilon}_n) \frac{d^2 W_y(z)}{dz^2} + (\rho_n \omega^2 - k^2(\bar{\gamma}_n + \bar{\varepsilon}_n) - 4\bar{\alpha}_n) W_y(z) + 2\bar{\alpha}_n \frac{dW_x(z)}{dz} \\ - 2ik\bar{\alpha}_n U_z(z) = 0 \\ (\bar{\gamma}_n + \bar{\varepsilon}_n) \frac{d^2 W_y(z)}{dz^2} + (\rho_n \omega^2 - k^2(2\bar{\beta}_n + \bar{\gamma}_n) - 4\bar{\alpha}_n) - W_x(z) + ik(2\bar{\beta}_n - \\ \bar{\varepsilon}_n) \frac{dW_z(z)}{dz} - 2\bar{\alpha}_n \frac{dU_z(z)}{dz} = 0 \\ (\bar{\gamma}_n + 2\bar{\beta}_n) \frac{d^2 W_y(z)}{dz^2} + (\rho_n \omega^2 - k^2(\bar{\varepsilon}_n + \bar{\gamma}_n) - 4\bar{\alpha}_n) - W_x(z) + ik(2\bar{\beta}_n - \\ \bar{\varepsilon}_n) \frac{dW_z(z)}{dz} - 2ik\bar{\alpha}_n U_y(z) = 0\end{aligned}\quad (16)$$

(16) tenglamalar sistemasini yechish uchun quyidagicha yangi o‘zgaruvchilar kiritamiz:

$$\begin{aligned}U_x(z) &= ik\Phi_1(z) - \frac{d\Psi_1(z)}{dz}, \\ W_x(z) &= ik\Phi_2(z) - \frac{d\Psi_2(z)}{dz}, \\ U_y(z) &= \Omega_2(z), \\ W_y(z) &= \Omega_1(z), \\ U_z(z) &= ik\Psi_1(z) + \frac{d\Phi_1(z)}{dz}, \\ W_z(z) &= ik\Psi_2(z) + \frac{d\Phi_2(z)}{dz}\end{aligned}\quad (17)$$

(17) ni (16) ga qo‘ysak, quyidagicha kompleks koeffitsiyentli ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2\Phi_1(z)}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{C_1^2} - k^2\right)\Phi_1(z) = 0, \\
& \frac{d^2\Psi_1(z)}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{C_3^2} - k^2\right)\Psi_1(z) + \frac{2}{B}\Omega_1(z) = 0, \\
& \frac{d^2\Omega_1(z)}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{C_4^2} - k^2 - \frac{4A^2B}{B-1}\right)\Omega_1(z) - \\
& - \frac{2A^2B}{B-1} \frac{d^2\Psi_1(z)}{dz^2} + \frac{2k^2A^2B}{B-1}\Psi_1(z) = 0, \\
& \frac{d^2\Phi_2(z)}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{C_5^2} - k^2 - \frac{4A^2BC_4^2}{(B-1)C_5^2}\right)\Phi_2(z) = 0, \\
& \frac{d^2\Psi_2(z)}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{C_4^2} - k^2 - \frac{4A^2B}{B-1}\right)\Psi_2(z) + \frac{2A^2B}{B-1}\Omega_2(z) = 0, \\
& \frac{d^2\Omega_2(z)}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{C_3^2} - k^2\right)\Omega_2 - \frac{2}{B} \frac{d^2\Psi_2(z)}{dz^2} + \frac{2k^2}{B}\Psi_2(z) = 0.
\end{aligned} \tag{18}$$

(18) oddiy differensial tenglamalar sistemasining yechimini quyidagicha izlaymiz:;

$$\begin{aligned}
\Phi_1(z) &= E_0 e^{-\eta_0 z}, \\
\Psi_1(z) &= E_1 e^{-\eta_1 z} + E_2 e^{-\eta_2 z}, \\
\Omega_1(z) &= \frac{B}{2} \left\{ E_1 \left(x_1 - \frac{\omega^2}{C_3^2} \right) e^{-\eta_1 z} + E_2 \left(x_2 - \frac{\omega^2}{C_3^2} \right) e^{-\eta_2 z} \right\},
\end{aligned} \tag{19}$$

xuddi shunday, ikkinchi guruh yechimlarni ham topish mumkin

$$\begin{aligned}
\Phi_2(z) &= D_0 e^{-\xi_0 z}, \Psi_2(z) = D_1 e^{-\xi_1 z} + D_2 e^{-\xi_2 z}, \\
\Omega_2(z) &= \frac{B-1}{2A^2B} \left\{ D_1 \left(x_1 - \frac{\omega^2}{C_4^2} + \frac{4A^2B}{B-1} \right) e^{-\xi_1 z} + D_2 \left(x_2 - \frac{\omega^2}{C_4^2} + \frac{4A^2B}{B-1} \right) e^{-\xi_2 z} \right\}.
\end{aligned} \tag{20}$$

Bunda

$$\begin{aligned}
A &= X_0 \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{B(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})}}, B = \frac{\bar{\alpha} + \bar{\mu}}{\bar{\alpha}}, C = \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}, \\
C_1^2 &= \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho X_0^2 \omega_0^2}, C_2^2 = \frac{\mu_0}{\rho X_0^2 \omega_0^2}, C_3^2 = \frac{B}{B-1} C_2^2, \\
C_4^2 &= \frac{\gamma_0 + \varepsilon_0}{j X_0^2 \omega_0^2}, C_5^2 = \frac{\gamma_0 + 2\beta_0}{j X_0^2 \omega_0^2},
\end{aligned}$$

bu yerda C_1 va C_2 – bo‘ylama va ko‘ndalang to‘lqin tarqalish tushunchasi bilan bir xil olinadi, C_4 va C_5 – Kossera parametrlari deb yuritiladi, C_3 – yozuvlarni qisqartirish uchun kiritilgan. Yuqorida keltirilganlardan foydalanib $U_n(z), W_n(z)$ – yechimlarni ham yozishimiz mumkin bo‘ladi:

$$\begin{aligned}
U_x(z) &= ikE_0 e^{-\eta_0 z} + E_1 \eta_1 e^{-\eta_1 z} + E_2 \eta_2 e^{-\eta_2 z}, \\
U_y(z) &= \frac{B-1}{2A^2B} \left\{ D_1 \left(x_1 - \frac{\omega^2}{C_4^2} + \frac{4A^2B}{B-1} \right) e^{-\xi_1 z} + D_2 \left(x_2 - \frac{\omega^2}{C_4^2} + \frac{4A^2B}{B-1} \right) e^{-\xi_2 z} \right\}, \\
U_z(z) &= \eta_0 E_0 e^{-\eta_0 z} + irE_1 e^{-\eta_1 z} + ikE_2 e^{-\eta_2 z}, \\
W_x(z) &= ikD_0 e^{-\xi_0 z} + D_1 \xi_1 e^{-\xi_1 z} + D_2 \xi_2 e^{-\xi_2 z},
\end{aligned} \tag{21}$$

$$W_y(z) = \frac{B}{2} \left\{ E_1 \left(x_1 - \frac{\omega^2}{C_3^2} \right) e^{-\eta_1 z} + E_2 \left(x_2 - \frac{\omega^2}{C_3^2} \right) e^{-\eta_2 z} \right\},$$

$$W_z(z) = ikD_0 e^{-\xi_0 z} + ikD_1 e^{-\xi_1 z} + ikD_2 e^{-\xi_2 z},$$

bunda

$$\eta_0 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{C_1^2}}, \xi_0 = \sqrt{k^2 + \frac{4A^2 B C_4^2}{(B-1)C_5^2} - \frac{\omega^2}{C_5^2}},$$

$$\eta_1 = \xi_1 = \sqrt{k^2 - x_1}, \eta_2 = \xi_2 = \sqrt{k^2 - x_2},$$

$$x_{1,2} = \frac{C_3^2 + C_4^2}{2C_3^2 C_4^2} \omega^2 - 2A^2 \pm \sqrt{\frac{(C_3^2 - C_4^2)^2}{4C_3^4 C_4^4} \omega^4 - \frac{2A^2(C_2^2 C_3^2 - 2C_3^2 C_4^2 + C_2^2 C_4^2)}{C_2^2 C_3^2 C_4^2} \omega^2 + 4A^4}.$$

Kossera muhiti uchun quyidagi hajmiy to‘lqin tarqalish tezliklari ma’lum:

$$c_l^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho; c_{lr}^2 = (\beta + 2\gamma)/\rho I; c_s^2 = \mu/\rho;$$

$$c_{s\alpha}^2 = (\mu + \alpha)/\rho; c_{sr}^2 = (\gamma + \varepsilon)/\rho I.$$

Olingan yechim asosida Kossera muhitida erkin to‘lqin tarqalishi yoki majburiy (statsionar yoki garmonik, noturg‘in) to‘lqin tarqalishi masalalari yechiladi

$$\det_1 [D_{p1}(\omega, k)] = 0, \det_2 [D_{p2}(\omega, k)] = 0. \quad (22)$$

Dispersion tenglama (22) analitik ko‘rinishda olinadi. Muhit qovushqoq- elastik bo‘lganligi uchun dispersion tenglamadagi noma’lumlar kompleks kattalik bo‘ladi. Kompleks parametrli transsendent tenglama (22) Myuller va Laplas usullari asosida sonli yechiladi. Xos sonlarni hisoblashning absolyut xatoligi $18 \cdot 10^{-11}$ (xos son tenglamaga qo‘yilgandan keyingi natija) ga teng.

Dissertatsiyaning “**Qovushqoq- elastik yarim tekislikda Reley to‘lqinining tarqalishi (osesimmetirik bo‘lmagan kuchlanishlar tenzori)**” deb nomlangan uchinchi bobida qovushqoq - elastik yarim tekislikda Reley to‘lqini tarqalishida ikkinchi bobda qo‘yilgan masalani yechish va sonli natijalar olib, tahlil qilingan. Agar (18) transendent tenglamada

$$\zeta = c_R^2 = \frac{\omega^2}{k^2 c_2^2}, \alpha = L^2 k^2, \beta = \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu},$$

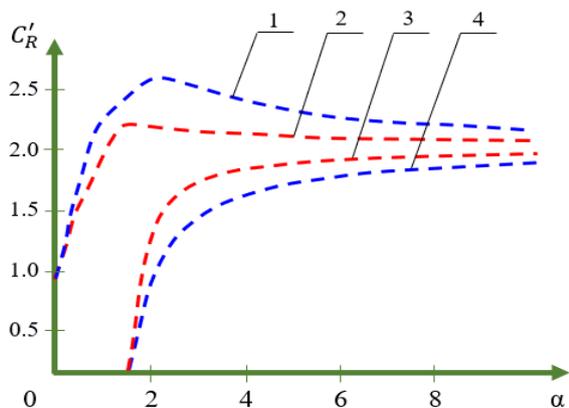
bu yerda c_R – sirt to‘lqini tezligi, natijada quyidagi ko‘rinishdagi dispersion tenglamani olamiz:

$$16(1 - \beta\zeta)(1 + \alpha - \zeta) \left[1 + 2\alpha + 2\sqrt{\alpha(1 + \alpha - \zeta)} \right] =$$

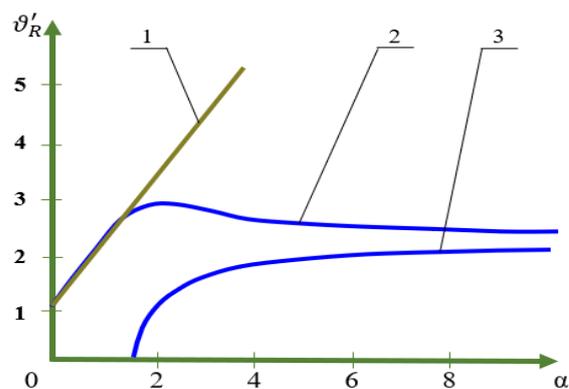
$$= (2 - \zeta)^2 \left[\begin{array}{l} (1 - 3\alpha^2)^2 + \alpha(3 - \alpha)(1 + \alpha - \zeta) + (1 - \alpha^2)(1 + \alpha - \zeta)^2 + \\ + \alpha(1 + \alpha - \zeta)^3 + 2(1 - 3\alpha^2)(3 - \alpha)\sqrt{\alpha(1 + \alpha - \zeta)} + \\ + 2(1 - 3\alpha^2)(1 - \alpha)(1 + \alpha - \zeta) - 2(1 - 3\alpha^2)(1 + \alpha - \zeta) \cdot \\ \cdot \sqrt{\alpha(1 + \alpha - \zeta)} + 2(3 - \alpha)(1 - \alpha)(1 + \alpha - \zeta)\sqrt{\alpha(1 + \alpha - \zeta)} - \\ - 2(3 - \alpha)(1 + \alpha - \zeta)^2 \alpha - 2(1 - \alpha)(1 + \alpha - \zeta)^2 \sqrt{\alpha(1 + \alpha - \zeta)} \end{array} \right]. \quad (23)$$

Agar $L=0$ yoki $\alpha = 0$ bo‘lsa, u holda (19) transendent tenglama klassik muhitdagi Reley to‘lqini tenglamasiga keladi

$$16(1 - \beta\zeta)(1 - \zeta) = (2 - \zeta)^2 (3 + (1 - \zeta)^2 - 2\zeta). \quad (24)$$



2-rasm. Sirt to‘lqini tezligi haqiqiy qismining to‘lqin soniga bogliq o‘zgarishi:
1,4-sirt to‘lqini tezligi; 2,3 – siljish to‘lqini faza tezligi
 $\nu = 0.25$ va $\nu = 0.45$



3-rasm. Sirt to‘lqini faza tezligining to‘lqin soniga bogliq o‘zgarishi :
1,2 – siljish to‘lqini faza tezligi; 3-sirt to‘lqini faza tezligi; $\nu = 0.45$

Natijalar o‘lchamsiz parametrlar uchun olingan. Rasmlardan ko‘rinib turibdiki, $\alpha \rightarrow \infty, \zeta \rightarrow 2, c_R \rightarrow \sqrt{2}$ bo‘ladi. Olingan natijalardan kelib chiqadiki, sirt to‘lqini tezligi siljish to‘lqini tezligidan oshib ketmas ekan. Olingan sonli natijalar 2-3-rasmlarda keltirilgan.

Kossera muhiti tenglamasi quyidagi ko‘rinishda olingan:

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \text{graddiv} \vec{u} + (\bar{\mu} + \bar{\alpha}) \text{rotrot} \vec{u} - 2\bar{\alpha} \text{rot} \vec{\theta} = 0,$$

$$I \frac{\partial^2 \vec{\theta}}{\partial t^2} - (\bar{\beta} + 2\bar{\gamma}) \text{graddiv} \vec{\theta} + (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) \text{rotrot} \vec{\theta} - 2\bar{\alpha} \text{rot} \vec{u} + 4\bar{\alpha} \vec{\theta} = 0. \quad (25)$$

Bu yerda \vec{u} - ko‘chish vektori, $\vec{\theta}$ - buralish vektori, ρ - material zichligi, I -inersiya momenti yoki materialning inersiya xususiyatini ifodalovchi parametr, $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ –Lame doimiylari, $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\varepsilon}$ –yangi elastik parametrlar bo‘lib, quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$\alpha \geq 0, \gamma + \varepsilon \geq 0, 3\beta + 2\gamma \geq 0, -(\gamma + \varepsilon) \leq \gamma - \varepsilon \leq (\gamma + \varepsilon).$$

Sirt to‘lqinlarining asosiy xossalardan biri uning ko‘chish amplitudasining chuqurlikka bog‘liq o‘zgarishi hisoblanadi. Sirt to‘lqinlarini o‘rganishda barcha ko‘chish va buralish amplitudalari $U_n(z), W_n(z), n = x, y, z$ noldan farqli bo‘ladi:

$$U_x(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ E_1 i k e^{-\eta_1 z} + E_2 \eta_2 e^{-\eta_2 z} + E_3 \eta_3 e^{-\eta_3 z} + \right. \\ \left. + D_1 \eta_1 e^{-\eta_1 z} - D_2 \eta_2 e^{-\eta_2 z} - D_3 \eta_3 e^{-\eta_3 z} \right\} e^{i(kx + \omega t)} S_0(\omega) d\omega,$$

$$U_z(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -E_1 i k e^{-\eta_1 z} + E_2 i k e^{-\eta_2 z} + E_3 i k e^{-\eta_3 z} + \right. \\ \left. + D_1 \eta_1 e^{-\eta_1 z} + D_2 i k e^{-\eta_2 z} + D_3 i k e^{-\eta_3 z} \right\} e^{i(kx + \omega t)} S_0(\omega) d\omega,$$

$$W_y(x, z, t) = \frac{B}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ E_2 \left(A_m - \frac{\omega^2}{c_1^2} \right) e^{-\eta_2 z} + E_3 \left(A_p - \frac{\omega^2}{c_1^2} \right) e^{-\eta_3 z} + \right. \\ \left. + D_2 \left(A_m - \frac{\omega^2}{c_1^2} \right) e^{-\eta_2 z} + -D_3 \left(A_p - \frac{\omega^2}{c_1^2} \right) e^{-\eta_3 z} \right\} e^{i(kx + \omega t)} S_0(\omega) d\omega,$$

$$\begin{aligned}
U_y(x, z, t) &= \frac{F}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ E_2 \left(A_m - \frac{\omega^2}{C_4^2} + \frac{4}{F} \right) e^{-\xi_2 z} + E_3 \left(A_p - \frac{\omega^2}{C_4^2} + \frac{4}{F} \right) e^{-\xi_3 z} + \right. \\
&\quad \left. + D_2 \left(A_m - \frac{\omega^2}{C_4^2} + \frac{4}{F} \right) e^{-\xi_2 z} + D_3 \left(A_p - \frac{\omega^2}{C_4^2} + \frac{4}{F} \right) e^{-\xi_3 z} \right\} e^{i(kx + \omega t)} S_0(\omega) d\omega, \\
W_x(x, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ E_1 i k e^{-\xi_1 z} + E_2 \xi_2 e^{-\xi_2 z} + E_3 \xi_3 e^{-\xi_3 z} + \right. \\
&\quad \left. + D_1 i k e^{\xi_1 z} - D_2 \xi_2 e^{\xi_2 z} - D_3 \xi_3 e^{\xi_3 z} \right\} e^{i(kx + \omega t)} S_0(\omega) d\omega \\
W_z(x, z, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -E_1 \xi_1 e^{-\xi_1 z} + E_2 i k e^{-\xi_2 z} + E_3 i k e^{-\xi_3 z} + \right. \\
&\quad \left. + D_1 \xi_2 e^{\xi_1 z} + D_2 i k e^{\xi_2 z} + D_3 i k e^{\xi_3 z} \right\} e^{i(kx + \omega t)} S_0(\omega) d\omega. \quad (26)
\end{aligned}$$

Bu yerda D_j va E_j ($j = 1, 2, 3$) chegaraviy shartlardan topiladi;

$$\begin{aligned}
\eta_1 &= \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{C_1^2}}, \quad \xi_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{C_5^2} + \frac{4C_4^2}{FC_5^2}}, \\
\eta_2 &= \xi_2 = \sqrt{k^2 - A_m}, \quad \eta_3 = \xi_3 = \sqrt{k^2 - A_p}, \\
B &= \frac{\bar{\alpha} + \bar{\mu}}{\bar{\alpha}}, \quad F = \frac{B - 1}{A^2 B}.
\end{aligned}$$

(26) yechimdan yarim tekislikka qo'yilgan shart asosida Reley to'liqini o'rganish mumkin. Olingan yechim chuqurlik oshgan sari so'ngani uchun, quyidagi integral doimiylari nolga teng bo'lishi kerak: $D_4 = D_5 = D_6 = 0, E_4 = E_5 = E_6 = 0$.

Yarim tekislik chegarasi kuchlanishlardan ozod qilingan bo'lsin, u holda

$$\begin{aligned}
\sigma_{zx}|_{z=0} &= 0, \quad \sigma_{zy}|_{z=0} = 0, \quad \sigma_{zz}|_{z=0} = 0, \\
\mu_{zx}|_{z=0} &= 0, \quad \mu_{zy}|_{z=0} = 0, \quad \mu_{zz}|_{z=0} = 0, \quad (27)
\end{aligned}$$

(26) umumiy yechimdan va (27) chegaraviy shartlardan foydalansak, bir jinsli kompleks koeffitsiyentli algebraik tenglamalar sistemasini olamiz. Bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasi notrivial yechimining mavjudlik shartidan quyidagi tenglamani olamiz:

$$\det[M_p(\eta_1, \eta_2, \eta_3)] = 0, \quad (28)$$

Bu tenglama (u_x, u_y, θ_y komponentlar) muhit sirti nuqtasining elliptik trayektoriya bo'yicha harakatlanishini bildiradi. Xuddi shunday, u_y, θ_x, θ_z ko'chish komponentlari uchun quyidagicha dispersion munosabatdan foydalanamiz

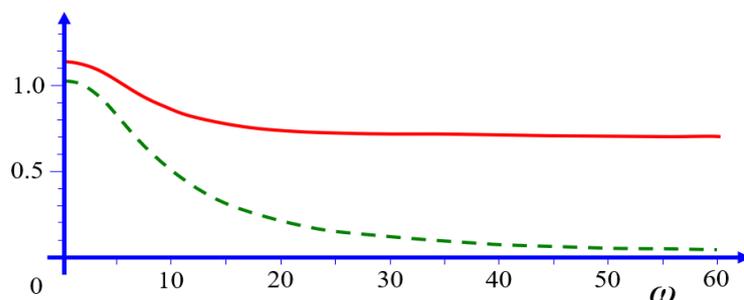
$$\det[M_t(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] = 0. \quad (29)$$

Agar dispersion tenglama ochib yozilsa, u holda quyidagi tenglamani olamiz:

$$\begin{aligned}
&\sqrt{k^2 - x_1} \left(x_1 - \frac{\omega^2}{C_3^2} \right) \left((2k^2 - \frac{\omega^2}{C_2^2})^2 - 4k^2 \sqrt{k^2 - x_2} \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{C_1^2}} - \sqrt{k^2 - x_2} \left(x_2 - \frac{\omega^2}{C_3^2} \right) \right) \\
&\cdot \left\{ (2k^2 - \frac{\omega^2}{C_2^2})^2 - 4k^2 \sqrt{k^2 - x_1} \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{C_1^2}} \right\} = 0. \quad (30)
\end{aligned}$$

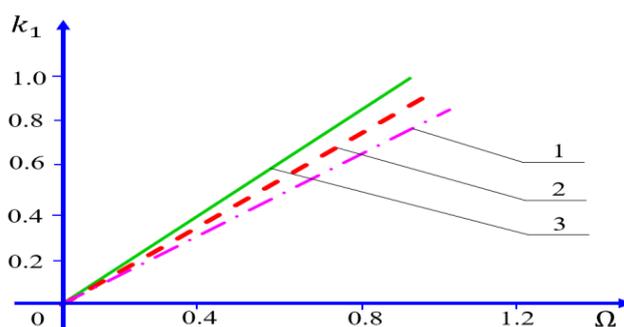
Bu tenglama Reley tenglamasi hisoblanadi.

Sonli natijalar 4-7 rasmlarda keltirilgan. Bu natijalarda (faza tezligi va chastotalar) dispersion munosabatni (transsendent tenglamani) sonli Myuller usuli bilan yechish orqali topiladi.



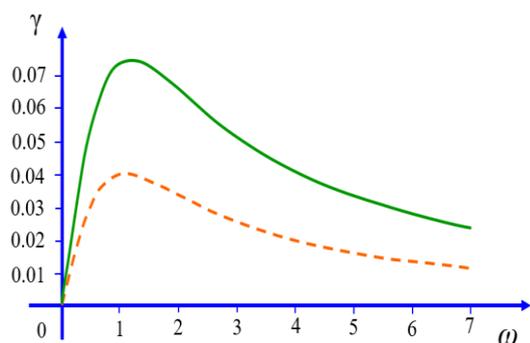
4-rasm. Sirt to‘lqini tezligi (qizil chiziq) va siljish to‘lqini faza tezligining (ko‘k chiziq) chastotaga bog‘liq o‘zgarishi

Kossera muhiti modeli olinganda sirt to‘lqini faza tezligi siljish to‘lqinining faza tezligidan har doim katta bo‘lar ekan. Olingan natijalardan kelib chiqadiki, normal kuchlanish, momentli muhit olinganda, klassik muhitga qaraganda 24% ga ko‘p bo‘lishi topildi. Ko‘chish amplitudasining trayektoriyasi bunday muhitda ham ellips trayektoriyasi bo‘ylab “harakatlanar” ekan.



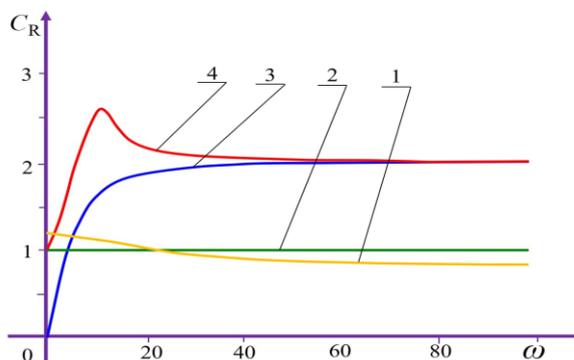
5 - rasm. To‘lqin soni haqiqiy qismining chastotaga bog‘liq o‘zgarishi (gradiyent-elastik muhit uchun) 1. $\nu = 0.01$; 2. $\nu = 0.25$; 3. $\nu = 0.45$.

To‘lqin sonining chastotaga bog‘liq o‘zgarishi (gradiyent- elastik muhit uchun) 5–rasmda keltirilgan. Rasmdan ko‘rinib turibdiki, kichik chastotalarda to‘lqin sonining oshib borib, katta chastotalarda pasayib ketgan.



6-rasm. To‘lqin so‘nish dekrementining chastotaga bog‘liq o‘zgarishi.

$k_2(\omega)$ ($\omega \rightarrow +\infty$) bog‘lanish gorizontaal asimptotaga ega ekan



7-rasm. Sirt to‘lqini faza tezliklarini chastotaga bog‘liq o‘zgarishi. Qovushqoq elastik muhitda sirt to‘lqinlari tarqalishi jarayonida yarim fazoning chegarasi bo‘ylab so‘nib boradi va dispersiyaga uchraydi.

Past (kichik) chastotali diapazonda kichik dispersiyaning paydo bo‘lishiga yordam beradi. Momentli muhit parametrlarining qiymatlari qanchalik kichik bo‘lsa, uning namoyon bo‘lishi shunchalik kam bo‘ladi. Qovushqoq elastik muhitda sirt to‘lqinlari tarqalish jarayonida yarim fazoning chegarasi bo‘ylab chuqurlik oshib borishi bilan so‘nib

boradi va dispersiyaga uchraydi. Olingan natijalardan kelib chiqadiki, normal kuchlanish, momentli muhit olinganda, klassik muhitga qaraganda 24% ko‘p bo‘lishi topildi.

Dissertatsiyaning **“O‘zgarmas tezlik bilan harakatlanuvchi nuqtaviy manbadan hosil bo‘ladigan to‘lqin”** deb nomlangan to‘rtinchi bobida harakatlanuvchi kuch ta’siridagi osesimetrik bo‘lmagan kuchlanishga ega bo‘lgan yarim tekislikda hosil bo‘ladigan kuchlanganlik - deformatsiyalanganlik holatini aniqlash metodikasi va algoritmi Fur’eyning integral almashtirilishlari, Romberg, Gauss va Myuller usullariga asoslangan holda ishlab chiqilgan. Kuchlanishlar va ko‘chishlar yarim tekislik sirtidan chuqurlikka qarab eksponensial qonuniyat bo‘yicha kamayib borishi topildi. Kuchlanishlar va ko‘chishlar gradiyent elastik muhitga qaraganda Kossera muhitida 10 - 20 % ga katta bo‘lishi topildi.

Aytaylik, yarim tekislik sirtida nuqtaviy kuch D tezlik bilan harakatlanadi. Uning tezligi bo‘ylama va ko‘ndalang to‘lqin tezliklaridan oshmaydi. Bunday holatda muhitda to‘lqin tarqalishi jarayoni (6) tenglamalar orqali ifodalanadi. Ko‘chishlar

$$u = \frac{iP}{2\pi\mu\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_2 e^{i\lambda_1\alpha y} + 2\lambda_1\lambda_2 e^{i\lambda_2\alpha y}) \frac{e^{-i\alpha x}}{\alpha} d\alpha, \quad (31)$$

$$\vartheta = \frac{iP}{2\pi\mu\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_2 e^{i\lambda_1\alpha y} - 2\lambda_1 e^{i\lambda_2\alpha y}) \frac{e^{-i\alpha x}}{\alpha} d\alpha.$$

haqiqiy funksiyalar bo‘lgani sababli, ularni quyidagi shaklda yozish mumkin:

$$u = -\frac{P}{2\pi\mu\Delta} \left[\gamma_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha (x - \lambda_1 y)}{\alpha} d\alpha - 2\lambda_1\lambda_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha (x - \lambda_2 y)}{\alpha} d\alpha \right].$$

$$\vartheta = \frac{P}{2\pi\mu\Delta} \left[\gamma_2\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha (x - \lambda_1 y)}{\alpha} d\alpha - 2\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha (x - \lambda_2 y)}{\alpha} d\alpha \right]. \quad (32)$$

Harakat tenglamasi (6) va unga mos chegaraviy shartlarga Furrye integral almashtirishlarini qo‘llasak, normal kuchlanish holatida quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\sigma_{zz}^* = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_1(r_0\Omega) e^{i\Omega t}}{\Omega_1[\Delta_2\Delta_3 + \Delta_4\Delta_5]} d\Omega, \quad (33)$$

$$\Delta_1(r_{01}\Omega) = (\Delta_3 + \tau_0 E) \left[2\Omega H_{n-1}^{(1)}(\Omega) - ((2n^2 + 2n) + \Omega^2) H_n^{(1)}(\Omega) \right] +$$

$$+ [\tau_0\Delta_2 - \Delta_4] \left[2n(n+1) H_n^{(1)}\left(\frac{C_{P1}}{C_{S1}}\Omega\right) + \frac{2C_P n \Omega}{C_{S1}} H_{n-1}^{(1)}\left(\frac{C_P}{C_S}\Omega\right) \right].$$

Integrallarni cheksiz oraliqda hisoblash amaliy jihatdan murakkab bo‘lgani sababli, ular chekli oraliqda integrallaymiz:

$$\sigma_{zzn}^* = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_a}^{\omega_b} \frac{\Delta_1(r_{01}\Omega_1)}{\Omega_1[\Delta_2\Delta_3 + \Delta_4\Delta_5]} e^{-i\Omega t} d\Omega. \quad (34)$$

$\sigma_{zz}^{(i)F}(\Omega)$ ning spektral zichligi tushadigan to‘lqin xossalari ham bog‘liq bo‘ladi. ω_a, ω_b bu chegaralarning qiymatlari, hisoblash jarayonida integral osti funksiyaga bog‘liq o‘zgaradi. Integrallash oralig‘ini tanlash talab etiladigan hisoblash aniqligiga bog‘liq bo‘ladi. Boshqa tomondan, taqribiy integralning chegarasini $-\infty$ (ω_a) dan ∞ (ω_b) gacha olinishi qanday xatoliklarga olib kelishi muammosi ochiqligicha qolgan. Integral (34) ni cheksiz hadli qator bilan almashtirib sonli hisoblash ham mumkin bo‘lmagan ish. Boshqa tomondan, n -ning katta qiymatlarida hadlar (Bessel va Xankel funksiyalari n - tartibli bir va ikki jinsli funksiyalar) uchun asimptotik formulalar mavjud ekan. Cheksiz qatorni chekli hadlar yig‘indisi orqali baho berish imkoni mavjud. Hisoblashlar ikkita algoritmni hisoblashga, ya’ni (33) va (34) integrallarni hisoblashga olib keladi. Olingan (31) yechimni Xevisayd funksiyasi orqali ifoda qilamiz,

$$H(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 0.5, & z = 0, \\ 1.0, & z > 0. \end{cases}$$

U holda

$$H(z) = 0.5 + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha.$$

Oldingi ko'chishlar (31) quyidagi ko'rinishni egallaydi:

$$u = -\frac{P}{\bar{\mu}\Delta} [\gamma H(x - \lambda_1 y) - 2\lambda_1 \lambda_2 H(x - \lambda_2 y)] + const,$$

$$\vartheta = -\frac{P}{\bar{\mu}\Delta} [\gamma \lambda_1 H(x - \lambda_1 y) + 2\lambda_1 \lambda_2 H(x - \lambda_2 y)] + const. \quad (35)$$

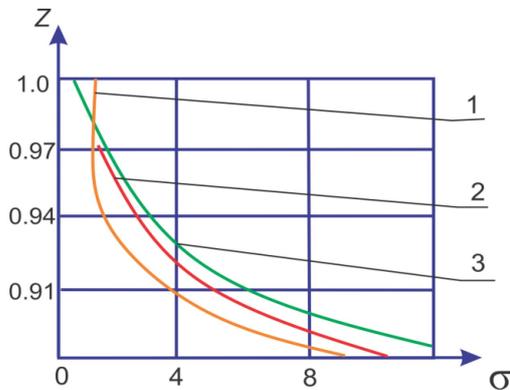
Majburiy tebranishlarni o'rganishda mavhum xususiy chastotalarni o'rganish muhim ahamiyatga ega. Elastik muhitda joylashgan bo'shliqning xususiy chastotalari radiusi bilan ko'ndalang va bo'ylama to'lqinlarning tezligiga bog'liq bo'ladi. Mavjud diskret chastotalar yer osti quvurlarni hisoblashda katta rol o'ynaydi. Materialning qovushqoqligini hisobga olish uchun Rjanitsin–Koltunovning uch parametrlilik kuchsiz singulyar yadrosi qo'llaniladi: $R(t) = \frac{Ae^{-\beta t}}{t^{1-\alpha}}$. Uning parametrlari quyidagicha olingan:

$A = 0,048$; $\beta = 0,05$; $\alpha = 0,1, \nu_1 = \nu_2 = 0,14$;

Uning parametrlari uchun quyidagi quyidagilar qabul qilingan:

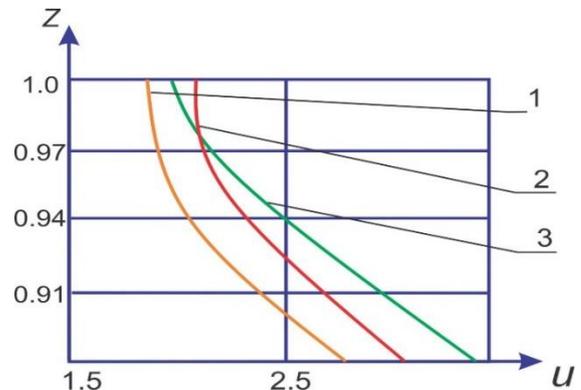
$$\bar{\rho} = 19250 \text{ kg/m}^3, \rho = 2700 \text{ kg/m}^3, \bar{\lambda} = 1994 \cdot 10^9 \text{ Pa}, \lambda = 55.94 \cdot 10^9 \text{ Pa},$$

$$\bar{\mu} = 158.56 \cdot 10^9 \text{ Pa}, \mu = 23.94 \cdot 10^9 \text{ Pa}, \bar{c}_l = 5180 \text{ m/s}, c_t = 3100 \text{ m/s}$$



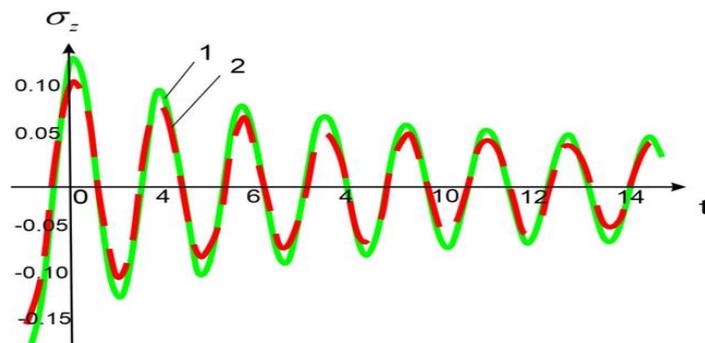
8-rasm. Normal kuchlanishning chuqurlik bo'yicha o'zgarishi

(1. Klassik muhit; 2. Gradiyent qovushqoq-elastik muhit; 3. Kossera qovushqoq-elastik muhiti).



9-rasm. Urinma ko'chishning chuqurlik bo'yicha o'zgarishi

(1. Klassik muhit; 2. Gradiyent qovushqoq-elastik muhit; 3. Kossera qovushqoq-elastik-muhiti)



10-rasm. Normal kuchlanishning vaqtga bog'liq o'zgarishi
1. Yerofeev natijalari, 2. Dissertatsiya natijalari

Natijalar 3 -5% farqi bilan ustma- ust tushadi.

Yuqorida keltirilgan rasmlardan ko‘rinib turibdiki, chuqurlik ortishi bilan ko‘chish va kuchlanishlar eksponensial qonuniyat bo‘yicha kamayib borar ekan.

Harakatlanuvchi kuch ta‘siridagi osesimetrik bo‘lmagan kuchlanishga ega bo‘lgan yarim tekislikda hosil bo‘ladigan kuchlanganlik-deformatsiyalanganlik holatini aniqlash metodikasi va algoritmi Fur‘yening integral almashtirilishi, Romberg, Gauss va Myuller usullariga asoslangan holda ishlab chiqilgan. Kuchlanishlar va ko‘chishlar gradiyent-elastik muhitga qaraganda Kossera muhitida 10 -20 % ko‘p bo‘lishi topilgan.

UMUMIY XULOSALAR

1. Gradiyent-qovushqoq elastik kontinumning matematik modeli doirasida, ya‘ni kuchlanish-deformatsiya holati, siljish vektorining ikkinchi gradiyentlari, osissimetrik bo‘lmagan kuchlanish tenzori va moment kuchlanish tenzorini hisobga oluvchi yarim tekislikdagi dinamik jarayonlarni o‘rganish masalasi matematik qo‘yildi, yechish metodikasi va algoritmi ishlab chiqilgan.

2. Analitik tadqiqotlar natijasida chegara gradiyent-elastik yarim fazo bo‘ylab doimiy tovush tezligigacha (subsonik tezlikda) tezlik bilan harakatlanuvchi manba sirt elastik to‘lqinlarini hosil qilishini ko‘rsatdi. Bunday to‘lqinlar, klassik sirt to‘lqinlari (Reley) dan farqli o‘laroq, dispersiyaga uchrashi topildi. Muhit zarralarining ko‘chish va kuchlanish amplitudalari harakatlanuvchi manba yukining kattaligiga, shuningdek uning tezligiga qarab o‘zgarashi topilgan.

3. Dinamik qovushqoq- elastiklik nazariyasining tenglamalari zarrachali to‘plamining kinetik energiya munosabatlarini qanotlantiruvchi, yarim tekislik sirtida chegara kuchlanishlar nol bo‘lgan hol uchun mos keladigan tizimni ifodalovchi murakkab dispersiya tenglamasi olingan.

4. Qovushqoq-elastik muhitda sirt to‘lqinlari yarim fazo chegarasi bo‘ylab chuqurlikka qarab so‘nadi va dispersiyaga uchraydi. Olingan natijalar shuni ko‘rsatadiki, momentli muhitda normal kuchlanish klassik muhitga nisbatan o‘rtacha 24 % ga katta bo‘ladi. Bunday muhitda ko‘chish amplitudasi trayektoriyasi ellips shaklida bo‘lib, zarracha ellips bo‘ylab harakatlanadi. Xuddi shunday hodisa Kossera tipidagi qovushqoq-elastik material uchun ham kuzatilgan.

5. Harakatlanuvchi kuch ta‘siridagi osesimetrik bo‘lmagan kuchlanishga ega bo‘lgan yarim tekislikda hosil bo‘ladigan kuchlanishlar - deformatsiya holatini aniqlash metodikasi va algoritmi Fur‘yening integral almashtirilishi, Romberg, Gauss va Myuller usullariga asoslangan holda ishlab chiqilgan.

6. Kuchlanishlar va ko‘chishlar yarim tekislik sirtidan chuqurlikka qarab eksponensial qonuniyat bo‘yicha kamayib borishi topilgan. Kuchlanishlar va ko‘chishlar gradiyent- elastik muhitga qaraganda Kossera muhitida 10 -20% ko‘p bo‘lishi topilgan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ PhD.03/27.02.2021.FM.101.02 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ
УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ БУХАРСКОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ
ТЕХНИЧЕСКОМ УНИВЕРСИТЕТЕ**

БУХАРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

ЭРГАШЕВА НИЛУФАР МАНСУРОВНА

**ОСОБЕННОСТИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ПОВЕРХНОСТНЫХ ВОЛН В
ВЯЗКОУПРУГОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ**

01.02.04 – Механика деформируемого твердого тела

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD) ПО
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Бухара – 2025

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за номером B2025.2.PhD/FM656.

Диссертация выполнена в Бухарском государственном техническом университете.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекском, русском, английском (резюме)) размещен на веб-сайте университета (www.bstu.uz) и на информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (www.ziynet.uz).

Научный руководитель:

Тешаев Мухсин Худойбердиевич
доктор физико-математических наук (DSc)

Официальные оппоненты:

Мавлонов Тулкин Мавланович
доктор технических наук, профессор

Индиаминов Равшан Шукурович
доктор физико-математических наук, профессор

Ведущая организация:

Ташкентский химико-технологический институт

Защита диссертации состоится 18 октября 2025 г. в 11⁰⁰ часов на заседании Научного совета PhD.03/27.02.2021.FM.101.02 при Бухарском государственном техническом университете. (Адрес: 200117, г.Бухара, ул. Каюма Муртазаева 15. Тел./факс: (+99865) 223-78-84. e-mail: bstu_info@edu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Бухарского государственного технического университета (зарегистрирована за № 390). (Адрес: 200117, г.Бухара, ул. Каюма Муртазаева 15. Тел./факс: (+99865) 223-78-84).

Автореферат диссертации разослан 02 октября 2025 года.

(протокол реестра № 6 от 14 августа 2025 года.)



[Handwritten signature]

Б.С. Рахмонов

Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, доктор технических наук (DSc)

[Handwritten signature]

Р.А. Сабирова

Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, доктор философии по физико-математическим наукам. (PhD)

[Handwritten signature]

З.И. Болтаев

Председатель Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, доктор физико-математических наук (DSc), профессор.

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. В мире, устойчивость транспортных средств, движущихся на железнодорожных системах на высокой скорости, является одной из важнейших инженерных проблем. В мировом масштабе обобщённые модели среды, такие как микрополярная среда Коссера и градиентно-упругая среда, занимают ведущее положение в этой области, что требует внедрения методов, обеспечивающих долговременную устойчивость железнодорожной инфраструктуры путем изучения волновых процессов, разработки современных методик и алгоритмов, анализа численных результатов.

В этом аспекте, волны Рэлея широко используются в ультразвуковом диапазоне (на частотах порядка 10^6 Гц) для обнаружения дефектов в поверхностных и приповерхностных слоях таких материалов, как металлы, стекло и пластик, и играют важную роль при анализе скорости распространения, скорости затухания, остаточных напряжений и термомеханических свойств поверхностного слоя.

Во всём мире, решение вопросов устойчивости железнодорожных сооружений к воздействию изгибающих и крутильных (торсионных) волн, возникающих в грунте, требует ежегодных затрат более 3 млрд долларов США для обеспечения устойчивости железнодорожных сооружений при воздействии квазистатических и динамических сейсмических волн, снижения напряженно-деформированного состояния и обеспечения их безопасной эксплуатации, и в этом направлении ведутся научно-исследовательские и опытно-конструкторские работы по повышению устойчивости сооружений. В связи с этим особое внимание уделяется решению динамических задач с учетом вязкоупругих свойств материалов и оценке прочности конструкций по их волновым свойствам без их разрушения.

За годы независимости в нашей республике особое внимание уделяется повышению прочности материалов, используемых в области сейсмостойкости надземных и подземных сооружений, в том числе многослойных сред со сложным составом и физическими свойствами. В Указе Президента Республики Узбекистан № УП-144 от 30 мая 2022 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы обеспечения сейсмической безопасности Республики Узбекистан»³ указан ряд задач. При выполнении этих задач необходимо, в частности, проводить контроль конструкций без повреждений и создавать теории, предотвращающие повреждение покрытий различных конструкций. Для этого необходимо широкое применение обобщенных моделей сплошной среды в твердых телах, наряду с классической моделью сплошной среды в механике деформируемого твердого тела. Среди наиболее широко используемых обобщённых (неклассических) континуумов к этому классу относятся микро полярная среда Коссера и градиентно-упругая среда. При этом важное значение имеют разработка методики и алгоритма исследования волновых процессов в таких средах, а также получение и анализ численных

³Указ Президента Республики Узбекистан № УП-144 от 30 мая 2022 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы обеспечения сейсмической безопасности Республики Узбекистан»

результатов.

Данное диссертационное исследование в определенной мере служит реализации задач, поставленных в Указе Президента Республики Узбекистан № УП-4947 от 7 февраля 2017 года «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», Постановлениях Президента Республики Узбекистан № ПП-4794 от 30 июля 2020 года «О мерах по коренному совершенствованию системы обеспечения сейсмической безопасности населения и территории Республики Узбекистан», №ПП-161 от 17 апреля 2024 года «О мерах по повышению сейсмостойкости зданий и сооружений, а также совершенствованию деятельности по мониторингу сейсмической опасности»², а также иных нормативно-правовых актах, связанных с данной деятельностью.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данная исследовательская работа выполнена в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий республики IV. «Математика, механика, сейсמודинамика сооружений и информатика» и XIV. «Сейсмология, сейсмическая безопасность зданий и сооружений и строительство».

Степень изученности проблемы. В настоящее время, с развитием в мире теории асимметричной упругости (среды Коссера), рядом ученых зарубежных стран проводятся научные исследования в этой области, в частности Денисова Г.Г., Новикова В.В., Новацкий В., Костер В.Т., Победре Б.Е., Матвеев В.П., Кулешу М.А., Бровко Г.А., Rajneesh Kumar, Jun Liu, Nistor I., Аэро Э.Л., Кувшинский Е.В., Миндлин Р.Д., Тирстен Г.Ф., Кунин И.А., Пальмов В.А., Лурье А.И., Suiker A.S. и др.

Изучение и оценка распространения волн в грунтовой среде и напряженно-деформированного состояния среды нашли отражение в исследованиях учёных нашей республики как Рахматулин Х.А., Урозбоев М.Т., Кабулов В.К., Рашидов Т.Р., Мубораков Ю.Н., Мардонов Б.М., Мирсаидов М.М., Султанов К.С., Мирзаев И.К., Абдукадыров С., Худойназаров Х., Юлдашов Ш.С., Сафаров И.И. и др. Они внесли вклад в развитие методов расчёта задач волнового нагружения в различных конструкциях, контактирующих с окружающей средой.

Однако до конца не разработаны методы оценки свойств распространения собственных волн в градиентных упругих средах и средах Коссера, а также динамических процессов, учитывающих вязкость и неоднородность свойств среды.

Связь темы диссертации с планом научно-исследовательских работ высшего учебного заведения, в котором выполнена исследовательская работа. Диссертационная работа выполнена в соответствии с планом научно-исследовательских работ Бухарского государственного технического университета № ОТ-Ф4-01 на тему «Актуальные проблемы математики и механики» в 2021-2026 гг.

Цель исследования заключается в разработке методики и алгоритма решения задач распространения поверхностных волн в (несимметричной) вязкоупругой полуплоскости, совершенствование аналитических и численных методов расчета, а также получение и анализ численных результатов

Задачи исследования:

определение дисперсионных характеристик на основе решения уравнений дисперсии поверхностных волн, полученных для вязкоупругой полуплоскости;

оценка убывания амплитуд перемещений и напряжений с глубиной в а) градиентно-упругом полупространстве; б) для полуплоскости, состоящей из среды Коссера;

исследование генерации поверхностной волны источником, движущимся вдоль границы градиентно-упругого полупространства; оценка сдвиговой волны в материале;

сравнительная оценка изменения нескольких мод комплексной фазовой скорости от волнового числа в длинных волноводах, состоящих из диссипативного неоднородного вязкоупругого градиентно-упругого полупространства и среды Коссера, и на основе полученных результатов параметрическая оценка затухания волны;

исследование фазовой скорости и затухания новой поперечной волны, возникающей в вязкоупругом градиентно-упругом полупространстве и среде Коссера, отличных от идеальных упругих сред.

В качестве **объекта исследования** выбрана вязкоупругая полуплоскость.

Предметом исследования является процесс определения напряженно-деформированного состояния и динамических характеристик материалов при воздействии гармонических волн с учетом реологических свойств материалов при распространении волн в вязкоупругой деформируемой полуплоскости.

Методы исследования. В ходе исследования применялись методы механики деформируемого твердого тела и строительной механики, вычислительной математики, математического моделирования, методы программирования, «замораживания» для решения уравнений в частных производных, разделения переменных, методы Гаусса, Лапласа и конечных разностей.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

впервые разработаны методика и алгоритм определения напряженно-деформированного состояния, возникающего в полуплоскости с неосесимметричным напряжением под действием движущейся силы, на основе интегральных преобразований Фурье, метода Ромберга, методов Гаусса и Мюллера;

на основе разработанной методики и алгоритма установлено, что напряжения и перемещения в среде Коссера уменьшаются по экспоненциальному закону с увеличением глубины от поверхности полуплоскости и на 10-20% больше, чем в градиентно-упругой среде;

из соответствующих дисперсионных соотношений для случая нулевых напряжений на границе поверхности полуплоскости определены резонансные области, и выявлен эффект интенсивной диссипации энергии в точке пересечения мнимых частей частот;

на основе разработанной методики и алгоритма из решения дисперсионного уравнения обнаружена новая поперечная волна в вязкоупругом градиентно-упругом полупространстве и среде Коссера, в отличие от идеально упругой

среды. Определены параметры, характеризующие фазовую скорость и затухание этой новой поперечной волны.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

дана сравнительная оценка частоты распространения и коэффициентов затухания волн в деформируемой полуплоскости под воздействием гармонической волны;

дана сравнительная оценка частоты распространения и коэффициентов затухания волн в полуплоскости под воздействием гармонической волны;

проведена оценка скорости распространения и резонансных свойств генерации новой волны, отличной от классической упругой среды, в каменной среде под воздействием продольных и поперечных волн.

Достоверность полученных результатов поясняется корректностью постановки граничных условий, надежностью полученных математических выражений, систематическим использованием обоснованных методов решения, точностью решений по сравнению с решениями других исследователей и соответствием их результатам, а также их практической реализацией.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость полученных в исследовании результатов заключается в развитии и совершенствовании теории распространения волн в длинной вязкоупругой тонкой цилиндрической оболочке, находящейся в среде Коссера.

Практическая значимость исследования заключается в разработке комплекса прикладных программ, предназначенных для моделирования распространения волн и колебаний в волноводах, состоящих из градиентно-вязкоупругого полупространства и среды Коссера. Комплексное частотно-зависимое исследование распространения поверхностных волн в вязкоупругой полуплоскости Коссера позволяет оптимизировать распространение сейсмических волн и их воздействие на конструкции, а также возникающие при этом напряжения и деформации.

Внедрение результатов исследований. На основе разработанных в исследовательской работе методики и алгоритма погашения резонансных колебаний, возникающих при распространении волн под воздействием точечного источника, движущегося с дозвуковой скоростью в вязкоупругой полуплоскости:

методика определения напряженно-деформированного состояния, возникающего при воздействии поверхностной волновой нагрузки на цилиндрическую оболочку, и их описывающие дисперсионные соотношения были использованы в реализации фундаментального проекта ОТ-Ф4-01 «Разработка методов и развитие теории исследования нелинейного динамического напряженно-деформированного состояния криволинейных участков многослойных композитных труб, заполненных вязкой жидкостью, под действием температурных и динамических нагрузок», выполненном в Ташкентском химико-технологическом институте в 2016-2020гг. (справка Ташкентского химико-технологического института №1/01-1822 от 21 мая 2025 г.). В результате достигнуто определение напряженно-деформированного состояния многослойных композитных труб, протекающих в них вязкой

жидкостью при динамическом нагружении в результате распространения волн от точечного источника, движущегося со скоростью до звука (дозвуковой скоростью) в вязкоупругой полуплоскости.

разработанный в диссертации алгоритм решения задачи распространения волн в тонкой цилиндрической оболочке с длинным вязкоупругим наполнителем, был использован в фундаментальном проекте РФФИ-18-48-240007 «Мультиверсионный метод повышения информационной надежности производственно-экологического мониторинга тепловых электростанций», выполненном в 2018-2020 гг. в рамках Государственной научно-технической программы Российского фонда фундаментальных исследований (справка Дома Дом науки и техники Красноярского края Российского союза научных и инженерных общественных объединений № 084-40 от 24 апреля 2025 г.). В результате достигнуто создание теоретической основы производственно-экологического мониторинга и математического моделирования процессов для оценки обобщенного критерия качества.

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования были обсуждены и одобрены на международных и республиканских конференциях, в том числе на 5 международных научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследования. Всего по теме диссертации опубликовано 13 научных работ, в том числе 8 статей в научных изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан к публикации основных научных результатов диссертаций доктора философии (PhD), из которых 5 статьи в республиканских и 3 статьи в международных журналах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Общий объем диссертации составляет 104 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснована актуальность и востребованность диссертационного исследования, сформулированы цели и задачи, объект и предмет исследования, показано соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий Республики Узбекистан, описаны научная новизна и практические результаты исследования, обоснованы достоверность полученных результатов, описана их научно-практическая значимость, приведены сведения о внедрении результатов исследования, опубликованных работах, структуре и объеме диссертации.

Первая глава диссертации, озаглавленная "**Анализ литературы, посвященной изучению распространения поверхностных волн в деформируемой полуплоскости**", состоит из трех параграфов, в которых проведен анализ литературы, посвященной изучению недисперсионных поверхностных волн и дисперсионных волн. Проанализированы понятия распространения волн и дисперсии волн в упругой среде и литература, посвященная их изучению. Также были проанализированы волны на контакте

полуупругой плоскости и двух сред (волны Стоунли). Приведен анализ литературы, посвященной получению дисперсионного уравнения, описывающего распространение волны с учетом вязкоупругих свойств материалов.

Во второй главе диссертации, озаглавленной "**Постановка, методика и алгоритм решения задач распространения волн Рэлея в вязкоупругой полуплоскости (с учетом тензора неосесимметричных напряжений и моментных напряжений)**" приведены математическая постановка, методика и алгоритм решения задач распространения волн Рэлея в вязкоупругой полуплоскости (с учетом тензора неосесимметричных напряжений и моментных напряжений).

Для модуля упругости \tilde{E}_k в операторной форме справедливо следующее интегральное соотношение:

$$\tilde{E}_k f(t) = E_{0k} \left[f(t) - \int_0^t R_{Ek}(t - \tau) f(\tau) d\tau \right], \quad (1)$$

где $R_{Ek}(t - \tau)$ – ядро релаксации; E_{0k} – модуль мгновенной упругости. Интегральный член в уравнении (1) считается малым, поэтому для функции $f(t)$ уместно выражение $f(t) = \psi(t)e^{-i\omega_R t}$. Это соответствует малым линейным колебаниям. Здесь $\psi(t)$ – медленно меняющаяся функция времени, ω_R – действительная величина. Тогда (1) можно приближенно заменить выражением

$$\tilde{E}_k f = E_{0k} [1 - \Gamma_k^C(\omega_R) - i\Gamma_k^S(\omega_R)] f,$$

при этом

$$\Gamma^C(\omega_R) = \int_0^\infty R(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau, \Gamma^S(\omega_R) = \int_0^\infty R(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau$$

– соответственно, косинусное и синусное изображения Фурье ядра релаксации материала.

В данной главе изучается распространение гармонических волн в вязкоупругой полуплоскости. В большинстве случаев система дифференциальных уравнений движения с частных производных получается в виде:

$$(\tilde{\lambda}_k + 2\tilde{\mu}_k) \text{graddiv} \vec{u}_k - \tilde{\mu}_k \text{rotrot} \vec{u}_k = \rho_k \frac{\partial^2 \vec{u}_k}{\partial t^2}, \quad (k=1), \quad (2)$$

и после выполнения некоторых несложных операций сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с комплексными коэффициентами. В некоторых сложных случаях решение системы уравнений решаются также методами и алгоритмами, основанными на метод конечных разностей, ортогональная прогонка, Мюллера, Лапласа, Гаусса и специальных функций. На основе использованного алгоритма была разработана программа на языке программирования C++. Для решения тестовых задач также использовались программные пакеты MAPLE-9.5 и MATLAB. В результате применения метода замораживания интегро-дифференциальное уравнение (2) сводится к дифференциальному уравнению в частных производных с комплексными коэффициентами:

$$(\bar{\lambda}_k + 2\bar{\mu}_k) \text{graddiv} \vec{u}_k - \bar{\mu}_k \text{rotrot} \vec{u}_k = \rho_k \frac{\partial^2 \vec{u}_k}{\partial t^2}. \quad (3)$$

при этом

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_k f(t) &= \lambda_{k0} \left[1 - \Gamma_{k\lambda}^{(c)} - i\Gamma_{k\lambda}^{(s)} \right] f(t), \\ \bar{\mu}_k f(t) &= \mu_{k0} \left[1 - \Gamma_{k\mu}^{(c)} - i\Gamma_{k\mu}^{(s)} \right] f(t).\end{aligned}\quad (4)$$

где

$$\begin{aligned}\Gamma_{\lambda k}^C(\omega_R) &= \int_0^\infty R_{\lambda k}(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau, \Gamma_{\lambda k}^S(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\lambda k}(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau, \\ \Gamma_{\mu k}^C(\omega_R) &= \int_0^\infty R_{\mu k}(\tau) \cos \omega_R \tau d\tau, \Gamma_{\mu k}^S(\omega_R) = \int_0^\infty R_{\mu k}(\tau) \sin \omega_R \tau d\tau.\end{aligned}$$

– соответственно, косинус и синус изображения Фурье ядра релаксации материала.

Уравнение Ламе (3) для градиентно-упругой и изотропной среды принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\rho_k \ddot{\vec{u}}_k - (\bar{\lambda}_k + \bar{\mu}_k) \text{grad div} \vec{u}_k - \bar{\mu}_k \Delta \vec{u}_k + \\ + 4\bar{\mu}_k L^2 \Delta (\Delta \vec{u}_k + \tilde{v} \text{grad div} \vec{u}_k) = 0.\end{aligned}\quad (5)$$

Предположим, что сосредоточенная сила движется со скоростью D по поверхности полуплоскости. Её скорость не превышает скоростей продольной и поперечной волн. В этом случае уравнения, описывающие распространение волн в среде, имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_{x'x'}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma_{y'x'}}{\partial y'} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \\ \frac{\partial \sigma_{x'y'}}{\partial x'} + \frac{\partial \sigma_{y'y'}}{\partial y'} = \rho \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial t^2},\end{aligned}\quad (6)$$

Граничное условие для рассматриваемой задачи имеет вид:

$$\sigma_{y'y'} = -P\delta(x), \sigma_{y'x'} = 0, \mu_{y'} = 0.$$

Смещения через продольные и поперечные волновые потенциалы находятся следующим образом:

$$u_{xk} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial x'} - \frac{\partial \psi_{zk}}{\partial y'}, \quad u_{yk} = \frac{\partial \varphi_k}{\partial y'} - \frac{\partial \psi_{zk}}{\partial x'},\quad (7)$$

Если использовать волновые уравнения, то они будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - \frac{1}{c_{p1}^2 \Gamma_{k\lambda\mu}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \varphi = 0, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} - l^2 \left(\frac{\partial^4}{\partial x'^4} + \frac{\partial^4}{\partial x'^4 \partial y'^4} + \frac{\partial^4}{\partial y'^4} \right) - \frac{1}{c_{s2}^2 \Gamma_{k\mu}} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \vartheta = 0.\end{aligned}\quad (8)$$

Движущаяся система координат (x, y) связана с неподвижной системы координат через Галилеевские преобразования:

$$x = x' - Dt, y = y' \quad (9)$$

Тогда уравнения, представляющие динамический процесс, будут иметь следующий вид:

$$(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu} - \rho D^2) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \bar{\lambda} \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y} + \bar{\mu} \left[\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + l^2 \Delta \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] = 0,$$

$$(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial y^2} + \bar{\lambda} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \bar{\mu} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \left(1 - \frac{\rho D^2}{\bar{\mu}}\right) \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - l^2 \Delta \left(\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) \right] = 0, \quad (10)$$

Решение уравнения (10) ищем в следующем виде

$$u = A e^{kqy} \sin(kx), \vartheta = B e^{kqy} \cos(kx). \quad (11)$$

Тогда уравнение (10) принимает следующий вид

$$\begin{aligned} & [-\bar{\mu} l^2 k^2 q^4 + \bar{\mu} q^2 (1 + l^2 k^2) - (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu} - \rho D^2)] A + \\ & + [\bar{\mu} l^2 k^2 q^3 + q(\bar{\lambda} + \bar{\mu} - \bar{\mu} l^2 k^2)] B = 0, \\ & [-\bar{\mu} l^2 k^2 q^3 - q(\bar{\lambda} + \bar{\mu} - \bar{\mu} l^2 k^2)] A + \\ & + [q^2(\bar{\lambda} + 2\bar{\mu} - \rho D^2) - (\bar{\lambda} + \bar{\mu} l^2 k^2 - \rho D^2)] B = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

Из условия существования нетривиального решения однородной системы уравнений (12) получаем следующее дисперсионное уравнение

$$(l^2 k^2 - \gamma + \beta_1^2) l^2 k^2 q^6 + (l^2 k^2 (1 + l^2 k^2 - \beta_1^2) + \gamma (1 + l^2 k^2) (1 - \gamma \beta_1^2) + 2l^2 k^2 (\gamma - l^2 k^2)) q^4 + ((1 + l^2 k^2) (1 + l^2 k^2 - \beta_1^2) - (\gamma - \beta_1^2)^2 + (\gamma - l^2 k^2)^2) q^2 + (\gamma - \beta_1^2) (1 + l^2 k^2 - \beta_1^2) = 0. \quad (13)$$

Здесь $\beta_1^2 = \frac{\rho D^2}{\bar{\mu}}$, $\gamma = \frac{\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}}{\bar{\mu}}$. Корней трансцендентного уравнения (13) бесконечно много. Тогда продольные и поперечные перемещения имеют вид

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} A_i e^{kqiy} \sin k x dk, \vartheta = \sum_{i=1}^{\infty} \int_0^{\infty} a_i A_i e^{kqiy} \cos k x dk.$$

Если собственная волна распространяется в полуплоскости, то уравнение распространения волны можно свести к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений с комплексными коэффициентами:

$$\begin{aligned} (2\bar{\mu}_n + \bar{\lambda}_n) \text{grad div } \vec{U}_n - (\bar{\mu}_n + \bar{\lambda}_n) \text{rot rot } \vec{U}_n + 2\alpha_n \text{rot } \vec{\Omega}_n + \rho_n \omega^2 \vec{U}_n(z) &= 0, \\ (\bar{\beta}_n + 2\bar{\gamma}_n) \text{grad div } \vec{\Omega}_n - (\bar{\gamma}_n + \bar{\varepsilon}_n) \text{rot rot } \vec{\Omega}_n + 2\alpha_n \text{rot } \vec{U}_n - 4\bar{\alpha}_n \vec{\theta}_n + \\ j_n \omega^2 \vec{\Omega}_n &= 0, \end{aligned} \quad (14)$$

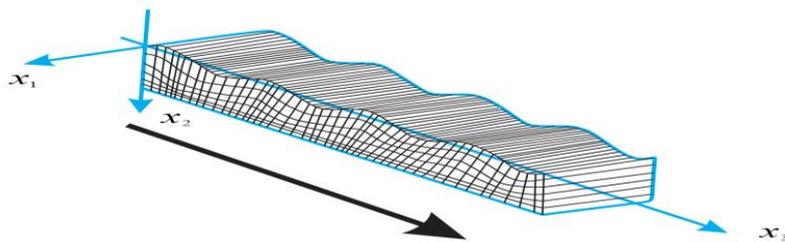


Рис. 1. Распространение волны Рэлея

Решение системы уравнений (14) ищем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \vec{u}_n(x, z, t) &= \vec{U}_n \{U_x(z), U_y(z), U_z(z)\} e^{i(kx - \omega t)}, \\ \vec{\theta}_n(x, z, t) &= \vec{\Omega}_n \{W_x(z), W_y(z), W_z(z)\} e^{i(kx - \omega t)}. \end{aligned} \quad (15)$$

Если подставить (15) в (14), получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} (\bar{\alpha}_n + \bar{\mu}_n) \frac{d^2 U_x(z)}{dz^2} + (\rho_n \omega^2 - k^2 (\bar{\lambda}_n + 2\bar{\mu}_n)) U_x(z) + ik(-\bar{\alpha}_n + \bar{\mu}_n + \bar{\lambda}_n) \frac{dU_z(z)}{dz} \\ - 2\bar{\alpha}_n \frac{dW_y(z)}{dz} = 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (\bar{\alpha}_n + \bar{\mu}_n) \frac{d^2 U_z(z)}{dz^2} + (\rho_n \omega^2 - k^2 (\bar{\alpha}_n + \bar{\mu}_n)) U_z(z) + ik(-\bar{\alpha}_n + \bar{\mu}_n + \bar{\lambda}_n) \frac{dU_z(z)}{dz} \\
& \quad - 2i\bar{\alpha}_n W_y(z) = 0 \\
& (\bar{\alpha}_n + \bar{\mu}_n) \frac{d^2 U_y(z)}{dz^2} + (\rho_n \omega^2 - k^2 (\bar{\alpha}_n + \bar{\mu}_n)) U_y(z) + 2\bar{\alpha}_n \frac{dW_x(z)}{dz} - 2ik\bar{\alpha}_n W_z(z) \\
& \quad = 0 \\
& (\bar{\gamma}_n + \bar{\varepsilon}_n) \frac{d^2 W_y(z)}{dz^2} + (\rho_n \omega^2 - k^2 (\bar{\gamma}_n + \bar{\varepsilon}_n) - 4\bar{\alpha}_n) W_y(z) + 2\bar{\alpha}_n \frac{dW_x(z)}{dz} \\
& \quad - 2ik\bar{\alpha}_n U_z(z) = 0 \\
& (\bar{\gamma}_n + \bar{\varepsilon}_n) \frac{d^2 W_y(z)}{dz^2} + (\rho_n \omega^2 - k^2 (2\bar{\beta}_n + \bar{\gamma}_n) - 4\bar{\alpha}_n) - W_x(z) + ik(2\bar{\beta}_n - \\
& \quad \bar{\varepsilon}_n) \frac{dW_z(z)}{dz} - 2\bar{\alpha}_n \frac{dU_z(z)}{dz} = 0 \\
& (\bar{\gamma}_n + 2\bar{\beta}_n) \frac{d^2 W_y(z)}{dz^2} + (\rho_n \omega^2 - k^2 (\bar{\varepsilon}_n + \bar{\gamma}_n) - 4\bar{\alpha}_n) - W_x(z) + ik(2\bar{\beta}_n - \\
& \quad \bar{\varepsilon}_n) \frac{dW_z(z)}{dz} - 2ik\bar{\alpha}_n U_y(z) = 0 \tag{16}
\end{aligned}$$

Для решения системы уравнений (16) введем следующие новые переменные:

$$\begin{aligned}
U_x(z) &= ik\Phi_1(z) - \frac{d\Psi_1(z)}{dz}, \\
W_x(z) &= ik\Phi_2(z) - \frac{d\Psi_2(z)}{dz}, \\
U_y(z) &= \Omega_2(z), \\
W_y(z) &= \Omega_1(z), \\
U_z(z) &= ik\Psi_1(z) + \frac{d\Phi_1(z)}{dz}, \\
W_z(z) &= ik\Psi_2(z) + \frac{d\Phi_2(z)}{dz} \tag{17}
\end{aligned}$$

Подставляя (17) в (16), получаем следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с комплексными коэффициентами:

$$\begin{aligned}
& \frac{d^2 \Phi_1(z)}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{C_1^2} - k^2 \right) \Phi_1(z) = 0, \\
& \frac{d^2 \Psi_1(z)}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{C_3^2} - k^2 \right) \Psi_1(z) + \frac{2}{B} \Omega_1(z) = 0, \\
& \frac{d^2 \Omega_1(z)}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{C_4^2} - k^2 - \frac{4A^2 B}{B-1} \right) \Omega_1(z) - \\
& \quad - \frac{2A^2 B}{B-1} \frac{d^2 \Psi_1(z)}{dz^2} + \frac{2k^2 A^2 B}{B-1} \Psi_1(z) = 0, \\
& \frac{d^2 \Phi_2(z)}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{C_5^2} - k^2 - \frac{4A^2 B C_4^2}{(B-1)C_5^2} \right) \Phi_2(z) = 0, \\
& \frac{d^2 \Psi_2(z)}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{C_4^2} - k^2 - \frac{4A^2 B}{B-1} \right) \Psi_2(z) + \frac{2A^2 B}{B-1} \Omega_2(z) = 0, \tag{18}
\end{aligned}$$

$$\frac{d^2 \Omega_2(z)}{dz^2} + \left(\frac{\omega^2}{C_3^2} - k^2\right) \Omega_2 - \frac{2}{B} \frac{d^2 \Psi_2(z)}{dz^2} + \frac{2k^2}{B} \Psi_2(z) = 0.$$

Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (18) ищем в следующем виде

$$\begin{aligned} \Phi_1(z) &= E_0 e^{-\eta_0 z}, \\ \Psi_1(z) &= E_1 e^{-\eta_1 z} + E_2 e^{-\eta_2 z}, \\ \Omega_1(z) &= \frac{B}{2} \left\{ E_1 \left(x_1 - \frac{\omega^2}{C_3^2} \right) e^{-\eta_1 z} + E_2 \left(x_2 - \frac{\omega^2}{C_3^2} \right) e^{-\eta_2 z} \right\}, \end{aligned} \quad (19)$$

аналогично можно найти и вторую группу решений

$$\begin{aligned} \Phi_2(z) &= D_0 e^{-\xi_0 z}, \Psi_2(z) = D_1 e^{-\xi_1 z} + D_2 e^{-\xi_2 z}, \\ \Omega_2(z) &= \frac{B-1}{2A^2 B} \left\{ D_1 \left(x_1 - \frac{\omega^2}{C_4^2} + \frac{4A^2 B}{B-1} \right) e^{-\xi_1 z} + D_2 \left(x_2 - \frac{\omega^2}{C_4^2} + \frac{4A^2 B}{B-1} \right) e^{-\xi_2 z} \right\}. \end{aligned} \quad (20)$$

здесь

$$\begin{aligned} A &= X_0 \sqrt{\frac{\bar{\mu}}{B(\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon})}}, B = \frac{\bar{\alpha} + \bar{\mu}}{\bar{\alpha}}, C = \frac{\bar{\gamma} - \bar{\varepsilon}}{\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}}, \\ C_1^2 &= \frac{\lambda_0 + 2\mu_0}{\rho X_0^2 \omega_0^2}, C_2^2 = \frac{\mu_0}{\rho X_0^2 \omega_0^2}, C_3^2 = \frac{B}{B-1} C_2^2, \\ C_4^2 &= \frac{\gamma_0 + \varepsilon_0}{j X_0^2 \omega_0^2}, C_5^2 = \frac{\gamma_0 + 2\beta_0}{j X_0^2 \omega_0^2}, \end{aligned}$$

где C_1 и C_2 принимаются одинаково как понятия распространения продольных и поперечных волн, C_4 и C_5 называются параметрами Коссера, а C_3 включен для сокращения записи. Используя вышесказанные, можно также записать решения $U_n(z), W_n(z)$:

$$\begin{aligned} U_x(z) &= ikE_0 e^{-\eta_0 z} + E_1 \eta_1 e^{-\eta_1 z} + E_2 \eta_2 e^{-\eta_2 z}, \\ U_y(z) &= \frac{B-1}{2A^2 B} \left\{ D_1 \left(x_1 - \frac{\omega^2}{C_4^2} + \frac{4A^2 B}{B-1} \right) e^{-\xi_1 z} + D_2 \left(x_2 - \frac{\omega^2}{C_4^2} + \frac{4A^2 B}{B-1} \right) e^{-\xi_2 z} \right\}, \\ U_z(z) &= \eta_0 E_0 e^{-\eta_0 z} + irE_1 e^{-\eta_1 z} + ikE_2 e^{-\eta_2 z}, \\ W_x(z) &= ikD_0 e^{-\xi_0 z} + D_1 \xi_1 e^{-\xi_1 z} + D_2 \xi_2 e^{-\xi_2 z}, \\ W_y(z) &= \frac{B}{2} \left\{ E_1 \left(x_1 - \frac{\omega^2}{C_3^2} \right) e^{-\eta_1 z} + E_2 \left(x_2 - \frac{\omega^2}{C_3^2} \right) e^{-\eta_2 z} \right\}, \\ W_z(z) &= ikD_0 e^{-\xi_0 z} + ikD_1 e^{-\xi_1 z} + ikD_2 e^{-\xi_2 z}, \end{aligned} \quad (21)$$

здесь

$$\begin{aligned} \eta_0 &= \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{C_1^2}}, \xi_0 = \sqrt{k^2 + \frac{4A^2 B C_4^2}{(B-1)C_5^2} - \frac{\omega^2}{C_5^2}}, \\ \eta_1 &= \xi_1 = \sqrt{k^2 - x_1}, \eta_2 = \xi_2 = \sqrt{k^2 - x_2}, \\ x_{1,2} &= \frac{C_3^2 + C_4^2}{2C_3^2 C_4^2} \omega^2 - 2A^2 \pm \sqrt{\frac{(C_3^2 - C_4^2)^2}{4C_3^4 C_4^4} \omega^4 - \frac{2A^2(C_2^2 C_3^2 - 2C_3^2 C_4^2 + C_2^2 C_4^2)}{C_2^2 C_3^2 C_4^2} \omega^2 + 4A^4}. \end{aligned}$$

Для среды Коссера известны следующие скорости распространения объемных волн:

$$\begin{aligned} c_l^2 &= (\lambda + 2\mu)/\rho; c_{lr}^2 = (\beta + 2\gamma)/\rho I; c_s^2 = \mu/\rho; \\ c_{s\alpha}^2 &= (\mu + \alpha)/\rho; c_{sr}^2 = (\gamma + \varepsilon)/\rho I. \end{aligned}$$

На основе полученного решения решаются задачи распространения свободных или вынужденных (стационарных или гармонических,

нестационарных) волн в среде Коссера:

$$\det_1 [D_{p1}(\omega, k)] = 0, \det_2 [D_{p2}(\omega, k)] = 0. \quad (22)$$

Дисперсионное уравнение (22) получается в аналитическом виде. Поскольку среда вязкоупругая, неизвестные в дисперсионном уравнении являются комплексными величинами. Трансцендентное уравнение (22) с комплексными параметрами решается численно, на основе методов Мюллера и Лапласа. Абсолютная погрешность вычисления собственных значений равна $18 \cdot 10^{-11}$ (результату после подстановки собственных значений в уравнение).

В третьей главе диссертации "**Распространение волны Рэлея в вязкоупругой полуплоскости (неосесимметричный тензор напряжений)**" проанализировано решение задачи, поставленной во второй главе, и получены численные результаты при распространении волны Рэлея в вязкоупругой полуплоскости.

Если в трансцендентном уравнении (18)

$$\zeta = c_R^2 = \frac{\omega^2}{k^2 c_2^2}, \alpha = L^2 k^2, \beta = \frac{1 - 2\nu}{2 - 2\nu'}$$

где c_R – скорость поверхностной волны, в результате получаем дисперсионное уравнение в виде

$$= (2 - \zeta)^2 \left[\begin{aligned} &16(1 - \beta\zeta)(1 + \alpha - \zeta)[1 + 2\alpha + 2\sqrt{\alpha(1 + \alpha - \zeta)}] = \\ &\left[\begin{aligned} &(1 - 3\alpha^2)^2 + \alpha(3 - \alpha)(1 + \alpha - \zeta) + (1 - \alpha^2)(1 + \alpha - \zeta)^2 + \\ &+ \alpha(1 + \alpha - \zeta)^3 + 2(1 - 3\alpha^2)(3 - \alpha)\sqrt{\alpha(1 + \alpha - \zeta)} + \\ &+ 2(1 - 3\alpha^2)(1 - \alpha)(1 + \alpha - \zeta) - 2(1 - 3\alpha^2)(1 + \alpha - \zeta) \cdot \\ &\cdot \sqrt{\alpha(1 + \alpha - \zeta)} + 2(3 - \alpha)(1 - \alpha)(1 + \alpha - \zeta)\sqrt{\alpha(1 + \alpha - \zeta)} - \\ &- 2(3 - \alpha)(1 + \alpha - \zeta)^2\alpha - 2(1 - \alpha)(1 + \alpha - \zeta)^2\sqrt{\alpha(1 + \alpha - \zeta)} \end{aligned} \right]. \end{aligned} \right. \quad (23)$$

Если $L=0$ или $\alpha=0$, то трансцендентное уравнение (19) сводится к уравнению волны Рэлея в классической среде

$$16(1 - \beta\zeta)(1 - \zeta) = (2 - \zeta)^2(3 + (1 - \zeta)^2 - 2\zeta). \quad (24)$$

Результаты получены для безразмерных параметров. Как видно из рисунков, $\alpha \rightarrow \infty, \zeta \rightarrow 2, c_R \rightarrow \sqrt{2}$. Из полученных результатов следует, что скорость поверхностной волны не превышает скорости сдвиговой волны. Полученные численные результаты представлены на рис. 2 и 3.

Уравнение среды Коссера получено в следующем виде

$$\rho \frac{\partial^2 \vec{u}}{\partial t^2} - (\bar{\lambda} + 2\bar{\mu}) \text{grad div} \vec{u} + (\bar{\mu} + \bar{\alpha}) \text{rot rot} \vec{u} - 2\bar{\alpha} \text{rot} \vec{\theta} = 0, \\ I \frac{\partial^2 \vec{\theta}}{\partial t^2} - (\bar{\beta} + 2\bar{\gamma}) \text{grad div} \vec{\theta} + (\bar{\gamma} + \bar{\varepsilon}) \text{rot rot} \vec{\theta} - 2\bar{\alpha} \text{rot} \vec{u} + 4\bar{\alpha} \vec{\theta} = 0. \quad (25)$$

где \vec{u} - вектор смещения, $\vec{\theta}$ - вектор кручения, ρ - плотность материала, I - параметр, характеризующий момент инерции или инерционные свойства материала, $\bar{\lambda}, \bar{\mu}$ - константы Ламе, $\bar{\alpha}, \bar{\beta}, \bar{\gamma}, \bar{\varepsilon}$ - новые упругие параметры, удовлетворяющие следующим условиям:

$$\alpha \geq 0, \gamma + \varepsilon \geq 0, 3\beta + 2\gamma \geq 0, -(\gamma + \varepsilon) \leq \gamma - \varepsilon \leq (\gamma + \varepsilon).$$

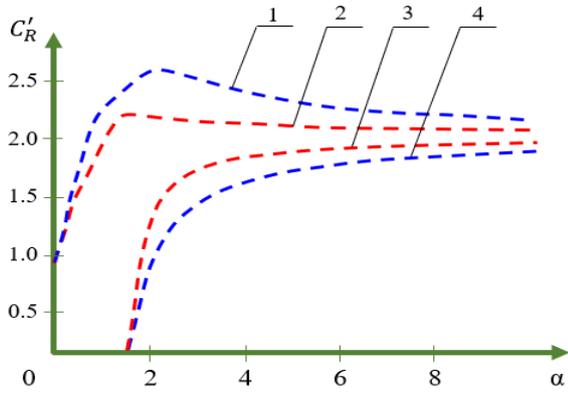


Рис. 2. Изменение действительной части скорости поверхностной волны в зависимости от волнового числа:

1,4 – скорость поверхностной волны;
2,3 – фазовая скорость сдвиговой волны $\nu = 0.25$ и $\nu = 0.45$

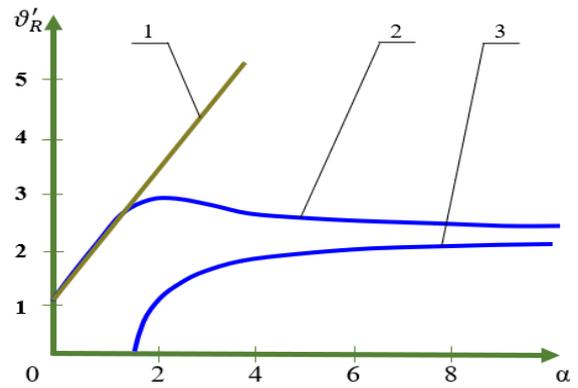


Рис. 3. Зависимость фазовой скорости поверхностной волны от волнового числа:

1,2 – фазовая скорость сдвиговой волны; 3 – фазовая скорость поверхностной волны; $\nu = 0.45$

Одним из основных свойств поверхностных волн является изменение амплитуды их перемещения в зависимости от глубины. При изучении поверхностных волн все амплитуды смещения и кручения $U_n(z), W_n(z), n = x, y, z$ отличны от нуля:

$$U_x(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ E_1 i k e^{-\eta_1 z} + E_2 \eta_2 e^{-\eta_2 z} + E_3 \eta_3 e^{-\eta_3 z} + \right. \\ \left. + D_1 \eta_1 e^{-\eta_1 z} - D_2 \eta_2 e^{-\eta_2 z} - D_3 \eta_3 e^{-\eta_3 z} \right\} e^{i(kx + \omega t)} S_0(\omega) d\omega,$$

$$U_z(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -E_1 i k e^{-\eta_1 z} + E_2 i k e^{-\eta_2 z} + E_3 i k e^{-\eta_3 z} + \right. \\ \left. + D_1 \eta_1 e^{-\eta_1 z} + D_2 i k e^{-\eta_2 z} + D_3 i k e^{-\eta_3 z} \right\} e^{i(kx + \omega t)} S_0(\omega) d\omega,$$

$$W_y(x, z, t) =$$

$$\frac{B}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ E_2 \left(A_m - \frac{\omega^2}{C_1^2} \right) e^{-\eta_2 z} + E_3 \left(A_p - \frac{\omega^2}{C_1^2} \right) e^{-\eta_3 z} + \right. \\ \left. + D_2 \left(A_m - \frac{\omega^2}{C_1^2} \right) e^{-\eta_2 z} + -D_3 \left(A_p - \frac{\omega^2}{C_1^2} \right) e^{-\eta_3 z} \right\} e^{i(kx + \omega t)} S_0(\omega) d\omega, \quad (26)$$

$$U_y(x, z, t) = \frac{F}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ E_2 \left(A_m - \frac{\omega^2}{C_4^2} + \frac{4}{F} \right) e^{-\xi_2 z} + E_3 \left(A_p - \frac{\omega^2}{C_4^2} + \frac{4}{F} \right) e^{-\xi_3 z} + \right. \\ \left. + D_2 \left(A_m - \frac{\omega^2}{C_4^2} + \frac{4}{F} \right) e^{-\xi_2 z} + D_3 \left(A_p - \frac{\omega^2}{C_4^2} + \frac{4}{F} \right) e^{-\xi_3 z} \right\} e^{i(kx + \omega t)} S_0(\omega) d\omega,$$

$$W_x(x, z, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ E_1 i k e^{-\xi_1 z} + E_2 \xi_2 e^{-\xi_2 z} + E_3 \xi_3 e^{-\xi_3 z} + \right. \\ \left. + D_1 i k e^{\xi_1 z} - D_2 \xi_2 e^{\xi_2 z} - D_3 \xi_3 e^{\xi_3 z} \right\} e^{i(kx + \omega t)} S_0(\omega) d\omega$$

$$W_z(x, z, t) =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ -E_1 \xi_1 e^{-\xi_1 z} + E_2 i k e^{-\xi_2 z} + E_3 i k e^{-\xi_3 z} + \right. \\ \left. + D_1 \xi_2 e^{\xi_1 z} + D_2 i k e^{\xi_2 z} + D_3 i k e^{\xi_3 z} \right\} e^{i(kx + \omega t)} S_0(\omega) d\omega.$$

где D_j и E_j ($j = 1, 2, 3$) находятся из граничных условий;

$$\eta_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{C_1^2}}, \quad \xi_1 = \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{C_5^2} + \frac{4C_4^2}{FC_5^2}},$$

$$\eta_2 = \xi_2 = \sqrt{k^2 - A_m}, \eta_3 = \xi_3 = \sqrt{k^2 - A_p},$$

$$B = \frac{\bar{\alpha} + \bar{\mu}}{\bar{\alpha}}, F = \frac{B - 1}{A^2 B}.$$

Из решения (26) можно исследовать волну Рэлея, исходя из условия, наложенного на полуплоскость. Поскольку полученное решение затухает с увеличением глубины, следующие интегральные константы должны быть равны нулю: $D_4 = D_5 = D_6 = 0, E_4 = E_5 = E_6 = 0$.

Пусть граница полуплоскости свободна от напряжений, тогда

$$\sigma_{zx}|_{z=0} = 0, \sigma_{zy}|_{z=0} = 0, \sigma_{zz}|_{z=0} = 0,$$

$$\mu_{zx}|_{z=0} = 0, \mu_{zy}|_{z=0} = 0, \mu_{zz}|_{z=0} = 0, \quad (27)$$

Используя общее решение (26) и граничные условия (27), получим систему однородных алгебраических уравнений с комплексными коэффициентами. Из условия существования нетривиального решения системы однородных алгебраических уравнений получаем следующее уравнение:

$$\det[M_p(\eta_1, \eta_2, \eta_3)] = 0, \quad (28)$$

Это уравнение (u_x, u_y, θ_y komponentlar) показывает, что движение точки поверхности среды движутся по эллиптической траектории. Аналогично, для компонент перемещений u_y, θ_x, θ_z используем следующее дисперсионное соотношение:

$$\det[M_t(\xi_1, \xi_2, \xi_3)] = 0. \quad (29)$$

Если записать дисперсионное уравнение в развернутом виде, то получим следующее уравнение:

$$\sqrt{k^2 - x_1} \left(x_1 - \frac{\omega^2}{c_3^2} \right) \left((2k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2})^2 - 4k^2 \sqrt{k^2 - x_2} \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}} - \sqrt{k^2 - x_2} \left(x_2 - \frac{\omega^2}{c_3^2} \right) \right) \cdot \left\{ (2k^2 - \frac{\omega^2}{c_2^2})^2 - 4k^2 \sqrt{k^2 - x_1} \sqrt{k^2 - \frac{\omega^2}{c_1^2}} \right\} = 0. \quad (30)$$

Это уравнение является уравнением Рэлея.

Численные результаты представлены на рис. 4–7. Эти результаты (фазовая скорость и частоты) определяются путем решения дисперсионного соотношения (трансцендентного уравнения) численным методом Мюллера.

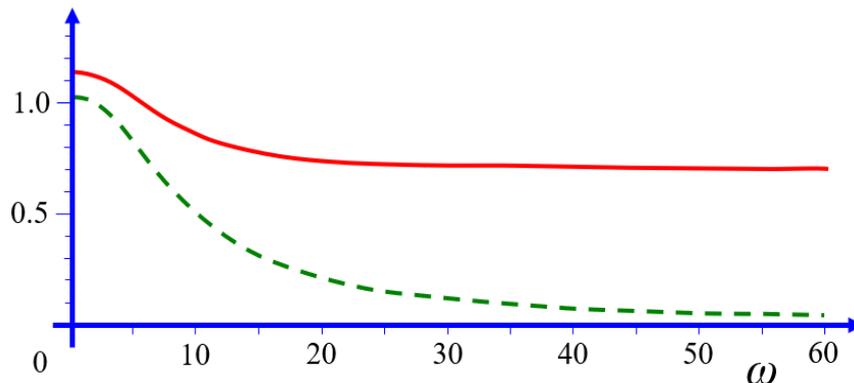


Рис. 4. Изменение скорости поверхностной волны (красная линия) и фазовой скорости сдвиговой волны (синяя линия) в зависимости от частоты

При моделировании среды Коссера фазовая скорость поверхностной волны

всегда больше фазовой скорости волны смещения. Из полученных результатов следует, что нормальное напряжение при моментной среде на 24% больше, чем в классической среде. Оказывается, что траектория амплитуды перемещения и в такой среде "движется" по траектории эллипса.

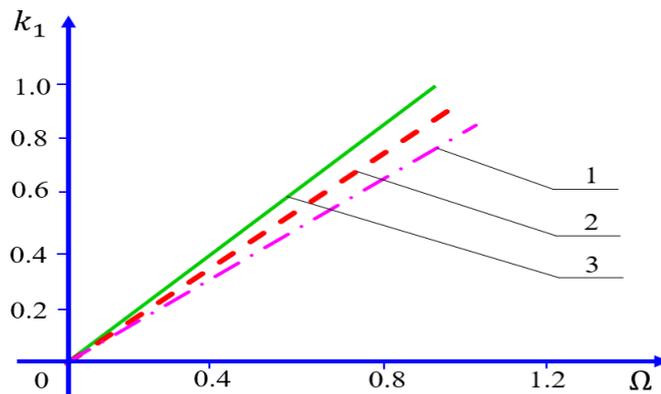


Рис. 5. Изменение действительной части волнового числа в зависимости от частоты (для градиентно-упругой среды)
 1. $\nu = 0,01$; 2. $\nu = 0,25$; 3. $\nu = 0,45$.

Изменение волнового числа в зависимости от частоты (для градиентно-упругой среды) показано на рис. 5. Как видно из рисунка, на малых частотах волновое число увеличивается, а на больших частотах - уменьшается.

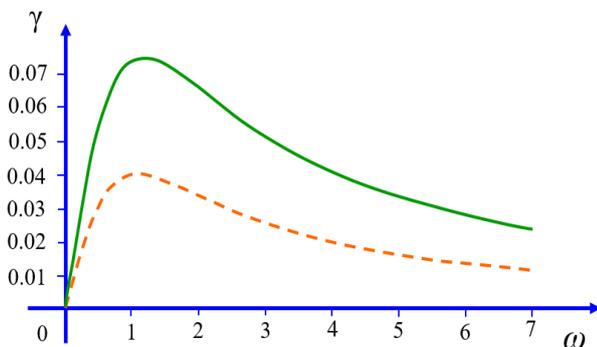


Рис. 6. Изменение декремента затухания волны в зависимости от частоты.

Зависимость $k_2(\omega)$ ($\omega \rightarrow +\infty$) имеет горизонтальную асимптоту

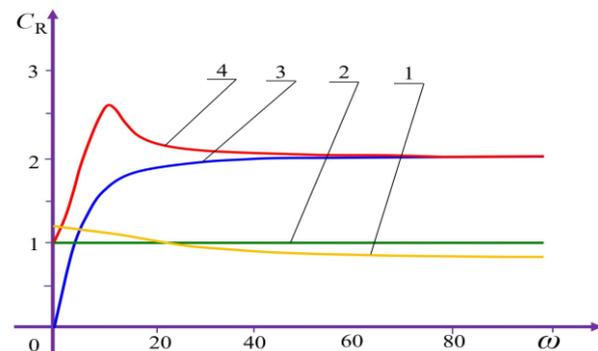


Рис. 7. Изменение фазовых скоростей поверхностных волн в зависимости от частоты.

При распространении поверхностных волн в вязкоупругой среде они затухают вдоль границы полупространства и испытывают дисперсию.

При распространении поверхностных волн в вязкоупругой среде они затухают вдоль границы полупространства и подвергаются дисперсии. Это способствует появлению малой дисперсии в области низких (малых) частот. Чем меньше значения параметров моментной среды, тем меньше вероятность её проявления. В вязкоупругой среде поверхностные волны при распространении затухают в глубину вдоль границы полупространства и подвергаются дисперсии. Из полученных результатов следует, что нормальное напряжение в моментной среде оказывается на 24% больше, чем в классической среде

В четвертой главе диссертации, озаглавленной "**Волна, создаваемая точечным источником, движущимся с постоянной скоростью**", разработаны методика и алгоритм определения напряженно-деформированного состояния, возникающего в полуплоскости с неосесимметричным напряжением под действием движущейся силы, основанные на интегральном преобразовании Фурье, методах Ромберга, Гаусса и Мюллера. Установлено, что напряжения и перемещения экспоненциально убывают от поверхности полуплоскости в глубину. Было обнаружено, что напряжения и смещения в среде Коссера на 10–20% больше, чем в градиентной- упругой среде.

Пусть сосредоточенная сила движется со скоростью D по поверхности полуплоскости. Её скорость не превышает скоростей продольной и поперечной волн. В этом случае процесс распространения волн в среде выражается уравнениями (6):

$$\begin{aligned} u &= \frac{iP}{2\pi\bar{\mu}\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_2 e^{i\lambda_1 \alpha y} + 2\lambda_1 \lambda_2 e^{i\lambda_2 \alpha y}) \frac{e^{-i\alpha x}}{\alpha} d\alpha, \\ \vartheta &= \frac{iP}{2\pi\bar{\mu}\Delta} \int_{-\infty}^{\infty} (\gamma_2 e^{i\lambda_1 \alpha y} - 2\lambda_1 e^{i\lambda_2 \alpha y}) \frac{e^{-i\alpha x}}{\alpha} d\alpha. \end{aligned} \quad (31)$$

Поскольку смещения являются действительными функциями, то они могут быть записаны в виде:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{P}{2\pi\bar{\mu}\Delta} \left[\gamma_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha (x - \lambda_1 y)}{\alpha} d\alpha - 2\lambda_1 \lambda_2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha (x - \lambda_2 y)}{\alpha} d\alpha \right], \\ \vartheta &= \frac{P}{2\pi\bar{\mu}\Delta} \left[\gamma_2 \lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha (x - \lambda_1 y)}{\alpha} d\alpha - 2\lambda_1 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \alpha (x - \lambda_2 y)}{\alpha} d\alpha \right]. \end{aligned} \quad (32)$$

Применяя интегральные преобразования Фурье к уравнению движения (6) и соответствующим граничным условиям, получаем следующее выражение для случая нормального напряжения:

$$\begin{aligned} \sigma_{zz}^* &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_1(r_0, \Omega) e^{i\Omega t}}{\Omega_1 [\Delta_2 \Delta_3 + \Delta_4 \Delta_5]} d\Omega, \\ \Delta_1(r_{01}, \Omega) &= (\Delta_3 + \tau_0 E) \left[2\Omega H_{n-1}^{(1)}(\Omega) - ((2n^2 + 2n) + \Omega^2) H_n^{(1)}(\Omega) \right] + \\ &+ [\tau_0 \Delta_2 - \Delta_4] \left[2n(n+1) H_n^{(1)}((C_{P1}/C_{S1})\Omega) + \frac{2C_P n \Omega}{C_{S1}} H_{n-1}^{(1)}\left(\frac{C_P}{C_S} \Omega\right) \right]. \end{aligned} \quad (33)$$

Поскольку вычисление интегралов на бесконечном интервале практически затруднительно, проинтегрируем их на конечном интервале:

$$\sigma_{zzn}^* = \frac{1}{2\pi} \int_{\omega_a}^{\omega_b} \frac{\Delta_1(r_{01}, \Omega_1)}{\Omega_1 [\Delta_2 \Delta_3 + \Delta_4 \Delta_5]} e^{-i\Omega t} d\Omega. \quad (34)$$

Спектральная плотность функции $\sigma_{zz}^{(i)F}(\Omega)$ также зависит от свойств падающей волны. Значения этих пределов ω_a, ω_b меняются в процессе вычисления в зависимости от подынтегральной функции. Выбор интервала интегрирования зависит от требуемой точности вычислений. С другой стороны, вопрос о том, какие погрешности может вызвать взятие приближенного интеграла, т.е. предела от $-\infty$ до ω_a и ω_b до ∞ остается открытым. Замена интеграла (32) бесконечным рядом членов также является невыполнимой задачей. С другой стороны, при больших значениях n существуют асимптотические формулы для членов (функции Бесселя и Ханкеля – функции

первого и второго рода порядка n). Сумму бесконечного ряда можно вычислить по конечному. Вычисления приводят к вычислению двух алгоритмов, а именно, вычисления интегралов (33) и (34). Выразим полученное решение (31) через функцию Хевисайда,

$$H(z) = \begin{cases} 0, & z < 0 \\ 0.5, & z = 0, \\ 1.0, & z > 0. \end{cases}$$

Тогда

$$H(z) = 0.5 + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{\alpha} d\alpha.$$

предыдущее выражение (31) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} u &= -\frac{P}{\bar{\mu}\Delta} [\gamma H(x - \lambda_1 y) - 2\lambda_1 \lambda_2 H(x - \lambda_2 y)] + const, \\ \vartheta &= -\frac{P}{\bar{\mu}\Delta} [\gamma \lambda_1 H(x - \lambda_1 y) + 2\lambda_1 \lambda_2 H(x - \lambda_2 y)] + const. \end{aligned} \quad (35)$$

При исследовании вынужденных колебаний важное значение имеет изучение мнимых собственных частот. Собственные частоты полости, находящейся в упругой среде, зависят от радиуса и скорости поперечных и продольных волн. Существующие дискретные частоты играют большую роль в расчете подземных трубопроводов. Для учета вязкости материала используется трехпараметрическое слабо сингулярное ядро Ржаницына-Колтунова: $R(t) = \frac{Ae^{-\beta t}}{t^{1-\alpha}}$. За его параметры приняты следующие

$$A = 0,048; \quad \beta = 0,05; \quad \alpha = 0,1, \nu_1 = \nu_2 = 0,14;$$

Для этого использовались следующие величины:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= 19250 \text{ kg/m}^3, \rho = 2700 \text{ kg/m}^3, \bar{\lambda} = 1994 \cdot 10^9 \text{ Pa}, \lambda = 55.94 \cdot 10^9 \text{ Pa}, \\ \bar{\mu} &= 158.56 \cdot 10^9 \text{ Pa}, \mu = 23.94 \cdot 10^9 \text{ Pa}, \bar{c}_l = 5180 \text{ m/s}, c_t = 3100 \text{ m/s} \end{aligned}$$

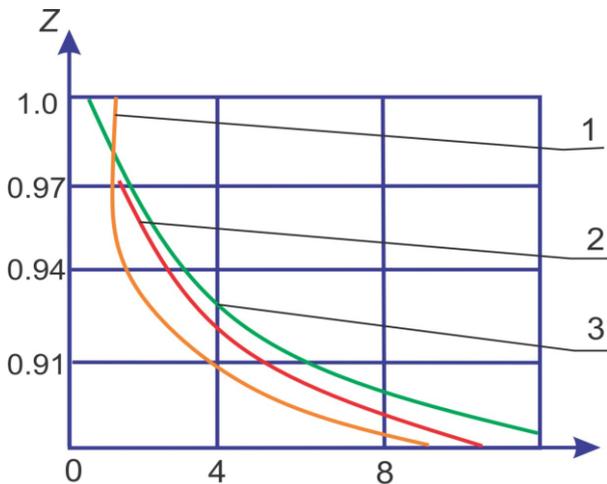


Рис. 8. Изменение нормального напряжения по глубине. (1. Классическая среда; 2. Градиентная вязкоупругая среда; 3. Вязкоупругая среда Коссера).

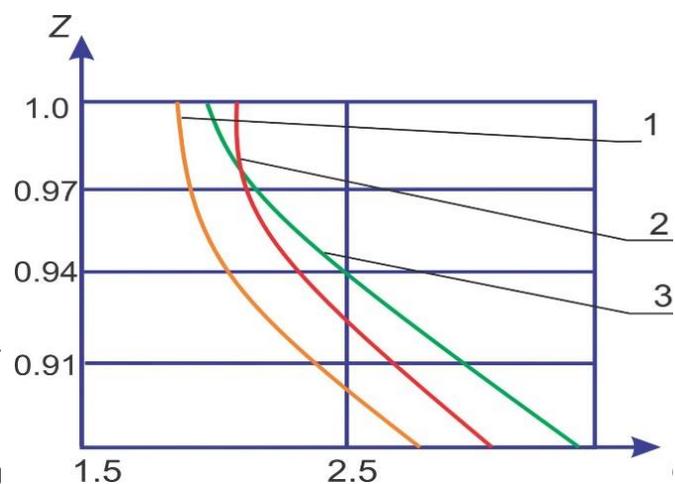
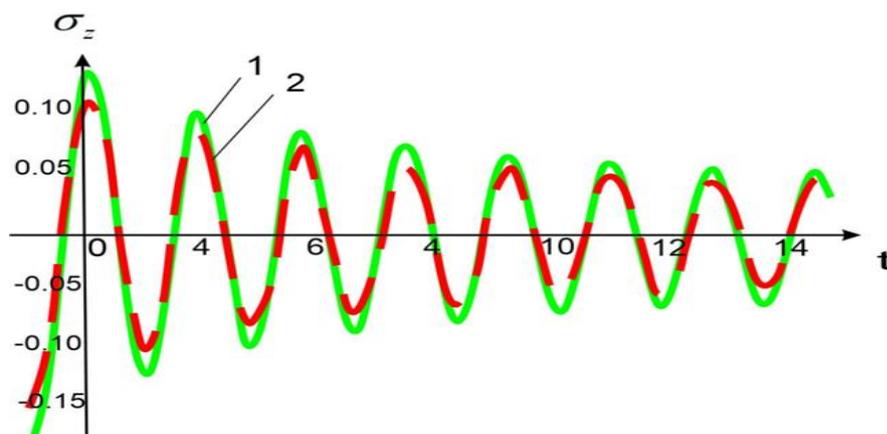


Рис. 9. Изменение смещения по глубине. (1. Классическая среда; 2. Градиентная вязкоупругая среда; 3. Вязкоупругая среда Коссера)



**Рис. 10. Изменение нормального напряжения во времени
1. Результаты Ерофеева, 2. Результаты диссертации.**

Результаты совпадают с разницей в 3–5%.

Как видно из представленных выше рисунков, перемещения и напряжения экспоненциально убывают по глубине. Разработаны методика и алгоритм определения напряженно-деформированного состояния в полуплоскости с асимметричными напряжениями под действием движущейся силы на основе интегрального преобразования Фурье, метода Ромберга, методов Гаусса и Мюллера. Установлено, что напряжения и перемещения экспоненциально убывают от поверхности полуплоскости по глубине. Установлено, что в среде Коссера напряжения и перемещения на 10–20% выше, чем в градиентно-упругой среде.

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

1. В рамках математической модели градиентно-вязкоупругого континуума, математически поставлена задача изучения динамических процессов в полуплоскости, учитывающих напряженно-деформированное состояние, вторые градиенты вектора смещения, несимметрический тензор напряжения и тензор моментного напряжения, разработаны методика и алгоритм решения.

2. В результате аналитических исследований показано, что источник, движущийся вдоль границы градиентно-упругого полупространства с постоянной скоростью вплоть до скорости звука (при дозвуковых скоростях), образует поверхностные упругие волны. Установлено, что такие волны, в отличие от классических поверхностных волн (рэлеевских), обладают диспергирующим характером. Установлено, что амплитуды смещений и напряжений частиц среды изменяются в зависимости от величины движущейся нагрузки источника, а также от его скорости.

3. На основе уравнений теории динамической вязкоупругости получено уравнение дисперсии, удовлетворяющее соотношениям кинетической энергии частиц множества, соответствующее случаю, когда граничные напряжения на поверхности полуплоскости равны нулю.

4. В вязкоупругой среде поверхностные волны затухают вдоль границы полупространства по глубине и подвергаются дисперсии. Полученные результаты показывают, что в моментной среде нормальное напряжение в

среднем на 24% больше, чем в классической среде. В такой среде траектория амплитуды смещения эллиптическая, а частица движется по эллипсу. Аналогичное явление наблюдалось для вязкоупругого материала типа Коссера.

5. Разработаны методика и алгоритм определения напряженно-деформированного состояния в полуплоскости с асимметричными напряжениями под действием движущейся силы на основе интегрального преобразования Фурье, методов Ромберга, Гаусса и Мюллера.

6. Установлено, что напряжения и перемещения уменьшаются от поверхности полуплоскости к глубине по экспоненциальному закону. Установлено, что напряжения и перемещения в среде Коссера на 10-20% больше, чем в градиентно-упругой среде.

**SCIENTIFIC COUNCIL PhD.03/27.02.2021.FM.101.02 ON
AWARDING SCIENTIFIC DEGREES AT BUKHARA
STATE TECHNICAL UNIVERSITY**

BUKHARA STATE TECHNICAL UNIVERSITY

ERGASHEVA NILUFAR MANSUROVNA

**FEATURES OF EXPANSION OF SURFACE WAVES IN A VISCOELASTIC
HALF-PLANE**

01.02.04 – Mechanics of deformable solids

**ABSTRACT OF THE DISSERTATION
of Doctor of Philosophy (PhD) on Physical and Mathematical Sciences**

Bukhara – 2025

The theme of the dissertation for a Doctor of Philosophy (PhD) on Physical and Mathematical Sciences was registered under No. B2025.2.PhD/FM656 by the Supreme Attestation Commission under the Ministry of Higher education, science and innovation of the Republic of Uzbekistan

The dissertation was completed at Bukhara State Technical University.

The abstract of dissertation in three languages (Uzbek, Russian, English (abstract)) is posted on the website of the Scientific Council (www.bstu.uz) and “ZiyoNet” information and educational portal (www.ziynet.uz).

Scientific supervisor:

Teshaev Mukhsin Khudoyberdievich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences (DSc)

Official opponents:

Mavlonov Tolqin Mavlanovich
Doctor of Technical Sciences, Professor

Indiaminov Ravshan Shukurovich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor

Leading organization:

Tashkent Institute of Chemical Technology

The dissertation defense will be held on October 18, 2025 y. at 11⁰⁰ o'clock at the meeting of Scientific Council Phd.03/27.02.2021.FM.101.02 at Bukhara State Technical University. (Address: 200117, 15. Qayum Murtazaev street, Bukhara. Phone:/fax: (+99865) 223-78-84. e-mail: bmti_info@edu.uz).

The dissertation is available at the Information resource center of Bukhara State Technical University (registered under the No.390). (Address: 200117, 15. Qayum Murtazaev street, Bukhara. Phone:/fax: (+99865) 223-78-84).

The dissertation abstract is distributed on October 02, 2025.

(Mailing report № 6 on August 14, 2025 y.)



B.S. Rakhmonov

Chairman of the Scientific council on awarding scientific degrees, Doctor of Technical Sciences (DSc)

R.A. Sabirova

Scientific secretary of the Scientific council on awarding scientific degrees, Doctor of philosophy on Physical and Mathematical Sciences

Z.I. Boltaev

Chairman of the Scientific seminar under Scientific council on awarding scientific degrees, Doctor of Physical and Mathematical Sciences (DSc), Professor

INTRODUCTION (abstract of PhD dissertation)

The purpose of the research is to develop a methodology and algorithm for solving problems of surface wave propagation in an (asymmetric) viscoelastic half-plane, to improve analytical and numerical calculation methods, and obtain and analyze numerical results.

The tasks of research are:

- to derive dispersion equations for surface waves in a viscoelastic half-plane and construct dispersion characteristics based on numerical solutions;
- to estimate changes in displacement and stress amplitudes depending on geometric parameters;
- to estimate dynamic processes arising from a source moving along the boundary of a gradient-elastic half-space;
- to compare changes in several modes of complex phase speed as a function of wave number in long waveguides consisting of a dissipative inhomogeneous viscoelastic gradient-elastic half-space and a Cosserat medium, and to estimate wave attenuation based on the obtained results;
- comparative analysis of the phase speed and attenuation of a new transverse wave arising in a viscoelastic gradient-elastic half-space and a Cosserat medium, different from an ideal elastic medium.

The scientific novelty of the research is as follows:

The scientific novelty of the research is as follows:

for the first time, a methodology and algorithm for determining the stress-strain state formed in a half-plane with asymmetric stress under the action of a moving force have been developed, based on integral Fourier transforms, the Romberg method, and the Gauss and Müller methods.

based on the developed methodology and algorithm, it was established that stresses and displacements in a Cosserat medium decrease exponentially with increasing depth from the surface of the half-plane, with the gradient being 10–20% greater than in an elastic medium.

for the case where the boundary stresses on the surface of the half-plane are zero, resonant zones are determined from the corresponding dispersion relations, and the effect of intense energy dissipation at the intersection of abstract frequency regions is determined.

as a result of solving the dispersion equation obtained on the basis of the developed method and algorithm, a new transverse wave was discovered in a viscoelastic, gradient-elastic half-space and a Cosserat medium, different from an ideal elastic medium, and the parameters characterizing the phase speed and attenuation of the new transverse wave were determined.

Implementation of research results. Based on the methodology and algorithm developed in the research work for damping resonant oscillations arising during wave extension under the influence of a point source moving at a subsonic speed in a viscoelastic half-plane:

the methodology for determining the stress-strain state arising under the influence of a surface wave load on a cylindrical shell, and their describing dispersion relations

were used in the implementation of the fundamental project OT-F4-01 “Development of methods and development of a theory for studying the nonlinear dynamic stress-strain state of curved sections of multilayer composite pipes filled with a viscous liquid under the influence of temperature and dynamic loads”, completed at the Tashkent Chemical-Technological Institute in 2016-2020 (reference of the Tashkent Chemical-Technological Institute No. 1/01-1822 dated May 21, 2025). As a result, the determination of the stress-strain state of multilayer composite pipes with a viscous liquid flowing through them under dynamic loading as a result of the propagation of waves from a point source moving at a speed of up to sound (subsonic speed) in a viscoelastic half-plane has been achieved.

the algorithm for solving the problem of wave propagation in a thin cylindrical shell with a long viscoelastic filler developed in the dissertation was used in the fundamental project RFBR-18-48-240007 “Multiversion method for improving the information reliability of industrial and environmental monitoring of thermal power plants”, completed in 2018-2020 in the frame of the State Scientific and Technical Program of the Russian Foundation for Basic Research (reference of the House of Science and Technology of the Krasnoyarsk House of the Russian Union of Scientific and Engineering Public Associations No. 084-40 dated April 24, 2025). As a result, a theoretical basis for industrial and environmental monitoring and mathematical modeling of processes for assessing the generalized quality criterion has been created.

Approbation of research results. The results of the study were discussed at 5 International scientific and practical conferences.

Publication of research results. A total of 13 scientific works on the topic of the dissertation were published, including 8 in scientific publications of the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan, where it was recommended to publish the main scientific results of dissertations, of which 5 in Republican, 3 in foreign journals.

Structure and volume of the dissertation. The content of the dissertation consists of an introduction, four chapters, a conclusion, a list of literature used and an appendix. The volume of the dissertation was 104 pages.

E'LON QILINGAN ILMIY ISHLAR RO'YHATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo'lim (I часть; part I)

1. Teshayev M.X, Ergasheva N.M. Tovush tezligidan katta bo'lmagan tezlikda harakatlanuvchi nuqtaviy manbadan hosil bo'ladigan to'liqin xususiyatlari // «Ilm sarchashmalari» Ilmiy-nazariy, metodik jurnali. – Urganch. – 2025 – №5(1). 16-23 b. (01.00.00, №12)

2. Ergasheva N.M. Магнит майдонидаги қовушқоқ-эластик юпка қобик элеменларнинг қобик элементларнинг хос тебранишлари // Вухоро davlat universiteti ilmiy axboroti. Ilmiy-nazariy jurnali. 2025. № 2. 82-88 b. (01.00.00., №3)

3. Ergasheva N.M. Kossera muhitidan iborat qovushqoq-elastik yarim tekislikda xos to'liqin tarqalishi // Вухоро davlat universiteti ilmiy axboroti. Ilmiy-nazariy jurnali. 2025. № 4. 133-138 b. (01.00.00, №3)

4. Teshayev M.X., Ergasheva N.M. Concepts of viscoelastic materials and considerations of nuclear relaxation parametrs // International Scientific Journal Theoretical & Applied Science. e-ISSN: 2409-0085. 2025. Issue: 04, Volume: 144. P. 79-83 (CrossRef №35).

5. Teshayev M.X, Ergasheva N.M. Propagation of axisymmetric surface waves in a viscoelastic in half-plane // International Scientific Journal Theoretical & Applied Science. e-ISSN: 2409-0085. 2025. Issue: 04 Volume: 144. P. 68-73 (CrossRef №35).

6. Джураев Д.Р., Шарипов М.З., Хайитов Д.Э., Ризокулов М.Н., Шамсиев Р.Х., Эргашева Н.М. Динамика колебательного движения доменных границ в феррите-гранате $Tb_3Fe_5O_{12}$ // Научный вестник Бухарского государственного университета. Бухара: 2019. №3. – С. 6-10. (01.00.00; №3)

7. Sharipov M.Z., Raupova I.B., Ergasheva N.M., Olimpur F.I. Influence of biaxial mechanical stresses on the magneto-optical properties of holmium-yttrium ferrite-garnet // Scientific reports of Bukhara State University, 2022. №2. – P. 2-13. (01.00.00; №3)

8. Teshayev M. K., Boltaev Z. I., Sharipov M. Z., Ergasheva N.M. // Linear transverse vibrations of a viscous magnetoelastic plate // Modern Innovations, Systems and Technologies, 2025 5(2), P.2001–2008. <https://doi.org/10.47813/2782-2818-2025-5-2-2001-2008>. (Open Access Journals № 25)

II bo'lim (II часть; part II)

9. Болтаев З.И., Собирова Р.А., Жалолов Ф.Б., Эргашева Н.М. О взаимодействие нестационарных нагрузок с тонким трубопроводом. Актуальные проблемы современной геометрии и топологии /Тезисы докладов международной научной конференции. – Ташкент. – 2024. – С. 177-179

10. Ergasheva N.M. Magnit maydonida bo'lgan qovushqoq-elastik plastinka va silindrik qobiqda to'liqin tarqalish xususiyatlari /Инновационная энергетика фундаментальные основы энергетика и инновационные инженерные решения. Сборник материалов международной научная конференции. – Ургенч. – 2025, 9-10 апреля. –С. 142-143

11. Ergasheva N.M. Ko‘p qatlamli Kossera muhitidan iborat konstruksiyalarda dispersion munosabatni yechish algoritmi /Тезисы Международной научной конференции «ОПТИКОМР–2025: Оптические и вычислительные технологии. – Бухара. – 2025. – С. 51-53.

12. М.Х. Тешаев., Ш.З. Аблокулов., Ф.Б. Жалолов., М.Нарзуллоев., Н Эргашева. Гашение вибраций вязкоупругой балки с присоединенными динамическими гасителями колебаний /Сборник материалов международной научной и научно-технической конференции на тему «Эффективное использование водных ресурсов в условиях глобального изменения климата». – Бухара: 29-30-апреля 2025 г. – С. 330-335

13. Ergasheva N.M. Qovushqoq-elastiklik materiallar haqida tushunchalar va yadro relaksatsiyasi parametrlari haqidagi mulohazalar /Тезисы Международной научной конференции «ОПТИКОМР–2025: Оптические и вычислительные технологии. – Бухара. – 2025. – С. 51-53

**Avtoreferatning o‘zbek, rus va ingliz tilidagi matnlari
“IPAKYO‘LI” nashriyotida tahrirdan o‘tqizildi.**



Bosishga ruxsat etildi: 02.10.2025.

Qog‘oz bichimi 60x84 1/16.

Times New Roman garniturasida chop etildi.

Hajmi 3 bosma taboq. Adadi 100 nusxa. Buyurtma № 408.

“West Media Express” MCHJ bosmaxonasida chop etildi.

Bosmaxona manzili: Buxoro shahri,

Qayum Murtazoyev ko‘chasi 15A uy.

Tel: +998 55 311 39 00

