**O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH**

V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

BOLTAYEV AZIZ KUZIYEVICH

DISKRET OPERATORLAR YORDAMIDA GILBERT FAZOLARIDA FUNKSIONALLARNI YAQINLASHTIRISHNI OPTIMALLASHTIRISH

**01.01.03 – Hisoblash matematikasi va diskret matematika
(fizika-matematika fanlari)**

**FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
doktori (DSc) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

TOSHKENT – 2025

UDK: 519.652, 519.644

Fizika-matematika fanlari doktori (DSc) dissertatsiyasi a avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора (DSc) по физико-математическим наукам

Content of dissertation abstract of doctor (DSc) on physical-mathematical sciences

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH

V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

BOLTAYEV AZIZ KUZIYEVICH

DISKRET OPERATORLAR YORDAMIDA GILBERT FAZOLARIDA FUNKSIONALLARNI YAQINLASHTIRISHNI OPTIMALLASHTIRISH

01.01.03 – Hisoblash matematikasi va diskret matematika
(fizika-matematika fanlari)

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
doktori (DSc) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

TOSHKENT – 2025

Fizika-matematika fanlari doktori (DSc) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2025.2.DSc/FM300 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (резюме)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (http://ik-fizmat.nuu.uz/) va «Ziyonet» ta’lim axborot tarmog‘ida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy maslahatchi:	**Shadimetov Xolmatvay Maxkambayevich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Uteuliyev Niyetbay Uteuliyevich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Xudoyberganov Mirzoali O‘razaliyevich fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Eshkuvatov Zaynidin Karimovich fizika-matematika fanlari doktori
Yetakchi tashkilot:	**Rossiya Fanlar Akademiyasining Kabardin-Balkar ilmiy markazining Amaliy matematika va avtomatlashtirish Instituti**

Dissertatsiya himoyasi O‘zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 raqamli Ilmiy kengashning «___»_________ 2025 yil soat____ dagi majlisida bo‘lib o‘tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 227-12-24, faks: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan O‘zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (___ raqami bilan ro‘yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 246-02-24).

Dissertatsiya avtoreferati 2025 yil «____» _______________ kuni tarqatildi.
(2025 yil «____» ___________ dagi _______ raqamli reyestr bayonnomasi).

M.M. Aripov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., professor

Z.R. Raxmonov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d.

R.D. Aloyev
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy kengash huzuridagi ilmiy seminar raisi, f.-m.f.d., professor

KIRISH (doktorlik (DSc) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahonda olib borilayotgan koʻplab tadqiqotlarning aksariyati amaliy masalalarni yechish bilan bogʻliq. Xususan, zilzilaning seysmogrammalarini hamda sintez qilingan gologrammalarini tahlil qilish, geofizika va sanoat muhandisligi kabi sohalarda interpolyatsion formulalar, yarim normaga eng kichik qiymat beruvchi natural splaynlar hamda magnit va issiqlik maydonlarini simulyatsiya qilish, optik tizimlarni modellashtirish, iqtisodiy bashoratlarni tadqiq qilish, shaharsozlik muhandisligi kabi yoʻnalishlarda tadbigʻi keng boʻlgan optimal kubatur va kvadratur formulalarni qurish hamda ularni amaliyotga joriy etishni taqozo etadi. Shu jihatdan funksiyaning oʻzi va m – tartibli umumlashgan hosilasi yigʻindisi kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar fazosida koʻrsatkichli, trigonometrik va eksponensial – trigonometrik funksiyalarga aniq boʻladigan kvadratur va interpolyatsion formulalar, yarim normaga eng kichik qiymat beruvchi koʻrsatkichli–trigonometrik natural splaynlar qurish hamda diskret operatorlar yordamida Gilbert fazolarida funksionallarni yaqinlashtirishni optimallashtirishdan foydalanish muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

Jahonda funksiyalarni yaqinlashtirish uchun interpolyatsion formulalar hamda splaynlar qurish, aniq integrallarni sonli hisoblash uchun optimal kubatur va kvadratur formulalar qurishga yoʻnaltirilgan ilmiy-tadqiqot ishlari olib borilmoqda. Olingan formulalar neft va gaz sanoatida, suyuqliklar va gazlar dinamikasida hamda iqtisodiy va moliyaviy bashoratlarda hosil boʻladigan matematik-fizika tenglamalarini taqribiy yechishda, sun’iy intelekt mashinalari oʻrganishidagi aktiv va yoʻqotish funksiyalarini yaqinlashtirishda keng qoʻllaniladi. Shu sababli, optimal kvadratur va interpolyatsion formulalar, yarim normaga eng kichik qiymat beruvchi koʻrsatkichli–trigonometrik splaynlar qurish hamda ularning yaqinlashish tartibini baholash, diskret operatorlar yordamida Gilbert fazolarida funksionallarni yaqinlashtirishni optimallashtirishga alohida e’tibor berilmoqda.

Respublikamizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqiga ega boʻlgan kompyuter tomografiyasi tasvirlarini qayta ishlash, iqtisodiyot faoliyatini takomillashtirish, axborot tizimlaridagi ma’lumotlarni bashoratlashda matematik usullarni ishlab chiqish yuzasidan keng qamrovli chora-tadbirlar amalga oshirilib, muayyan natijalarga erishilmoqda. 2020 - 2023-yillarda Oʻzbekiston Respublikasida matematika fanlari boʻyicha ta’lim sifatini yaxshilash, ilmiy-tadqiqotlarning natijadorligi va amaliy ahamiyatini oshirish, jumladan «Algebra, matematik hamda funksional analiz, differensial tenglamalar, matematik fizika, matematik modellashtirish, hisoblash matematikasi va diskret matematika, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika» boʻyicha muhim vazifalar belgilab berilgan[1]. Ushbu vazifalarni

[1] Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 yil 7 maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy- tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida”gi PQ-4708-son qarori.

amalga oshirishda, jumladan, diskret operatorlar yordamida Gilbert fazolarida funksionallarni yaqinlashtirishni optimallashtirish muhim ahamiyat kasb etmoqda.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevral PF-4947-sonli “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi, 2022-yil 28-yanvar PF-60 sonli “2022-2026- yillarga mo‘ljallangan Yangi O‘zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to‘g‘risida”gi farmonlari, 2017-yil 17-fevral PQ-2789-sonli “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2017-yil 20-aprel PQ-2909-sonli “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2018-yil 27-aprel PQ-3682-sonli “Innovatsion g‘oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2020-yil 7-may PQ-4708-sonli “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi, 2024 yil 14-oktyabr PQ-358-sonli “Sun’iy intellekt texnologiyalarini 2030-yilga qadar rivojlantirish strategiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya tadqiqoti muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga bog‘liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. «Matematika, mexanika va informatika» ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi. Splaynlar, interpolyatsion fomulalar, kvadratur va kubatur formulalar qurish hamda ularning yaqinlashish tartibini baholash bo‘yicha ilmiy izlanishlar dunyoning yetakchi ilmiy tadqiqot markazlari va oliy ta’lim muassasalari, jumladan, Rossiya Fanlar Akademiyasi Sibir bo‘limi S.L. Sobolev nomidagi Matematika instituti (Rossiya), Rossiya Fanlar akademiyasining Hisoblash matematikasi va matematik geofizika instituti (Rossiya), Ufa ilmiy markazining hisoblash markazli Matematika instituti (Rossiya), Sibir Federal, Novosibirsk, Sankt-Peterburg, Moskva davlat Universitetlari (Rossiya), Babeş-Bolyai University (Ruminiya), Mathematical institute of Serbian Academy of Sciences and Arts (Serbiya), North China University of Technology (Xitoy), Beijing Normal University (Xitoy), Korean Institute of Science and Technology (Janubiy Koreya), Korean Institute for Advanced Study (Janubiy Koreya), Fukui University (Yaponiya), University of Tokio (Yaponiya), University Putra Malaysia (Malayziya), University of Malaya (Malayziya), Stanford University (AQSH), University of Wisconsin–Medison (AQSH), Harvard University (AQSH), University of Calabria (Italiya), University of Padua (Italiya), Universita della Basilicata (Italiya), University of Satiago de Compostela (Ispaniya), Technische Universität Braunschweig (Germaniya), Institute of Mathematics of Jena University (Germaniya), Université Joseph Fourier (Fransiya), University of Oslo (Norvegiya), Oʻzbekiston Fanlar Akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti, Mirzo Ulugʻbek nomidagi Oʻzbekiston Milliy Universiteti (Oʻzbekiston) da olib borilmoqda.

Splaynlar, interpolyatsion fomulalar, kvadratur va kubatur formulalar qurish hamda ularning yaqinlashish tartibini baholashga oid dunyoda olib borilgan tadqiqotlar natijasida quyidagi natijalar olingan: splayn funksiyalar hamda interpolyatsion formulalar asosida turli interpolatsion va approksimatsion algoritmlar ishlab chiqilgan, ularning yaqinlashish tezligi matematik asosda baholangan hamda ularning amaliy tadbiqlarda qoʻllanish samaradorligi isbotlangan. Masalan, tibbiyot va kompyuter tomografiyasi sohasida Germaniya, AQSH va Yaponiyaning nufuzli ilmiy tadqiqot markazlari hamda oliy ta’lim muassasalarida tasvir segmentatsiyasi boʻyicha koʻplab ishlanmalar bor, sun’iy intellekt va mashinaviy oʻrganish sohasida Xitoy va AQSH universitetlarida kamroq xatoliklarlar bilan bashoratlash hamda neyron tarmoqlarda murakkab funksiyalarni tadqiq etish imkonini bergan, iqtisodiyot va statistik bashoratlash sohasida Italiya, Fransiya va Norvegiya universitetlarida dinamik model yaratish, risk tahlili va qaror qabul qilishda qoʻllanilgan, raqamli signalni qayta ishlash sohasida Rossiya, Xitoy va Koreyadagi nufuzli ilmiy tadqiqot markazlarda tiniqroq ovoz yozish va sifatli video olish, siqilgan fayllarning sifatini yaxshilashga erishilgan; kvadratur va kubatur formulalar asosan murakkab matematik modellashtirishlarda va yuqori oʻlchovli integral masalalarini hal qilishda qoʻllaniladi. Bu boradagi ilmiy izlanishlar S.L. Sobolev nomidagi Matematika instituti, Ufa ilmiy markazining hisoblash markazli Matematika instituti, Sibir Federal Universiteti (Rossiya), University of Calabria, University of Padua (Italiya), University of Wisconsin–Madison (AQSH), muhandislik va texnologik jarayonlarni modellashtirishda Fukui University, University of Tokio (Yaponiya), Technische Universität Braunschweig, Institute of Mathematics of Jena University (Germaniya), North China University of Technology, Beijing Normal University (Xitoy), statistik tahlil va bashoratlashda University of Satiago de Compostela (Ispaniya), Université Joseph Fourier (Fransiya), University Putra Malaysia, University of Malaya (Malayziya), sun’iy intelekt va mashinaviy oʻrganishda Korean Institute of Science and Technology, Korean Institute for Advanced Study (Janubiy Koreya), Stanford University, Harvard University (AQSH), iqtisodiyot va ijtimoiy fanlar sohasida modellashtirishda hamda prognozlashda University of Oslo (Norvegiya), Babeş-Bolyai University (Ruminiya), Mathematical institute of Serbian Academy of Sciences and Arts (Serbiya), ta’lim va ilmiy tadqiqot sohalarida Oʻzbekiston Fanlar Akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti, Mirzo Ulugʻbek nomidagi Oʻzbekiston Milliy Universiteti (Oʻzbekiston) larda olib borilmoqda.

Dunyoda interpolyatsion va kvadratur formulalarini, shuningdek, natural splaynllarni qurish va ularni amaliyotga tatbiq etish boʻyicha ilmiy tadqiqotlar davom etmoqda, bu tadqiqotlarda diskret operatorlar yordamida Gilbert fazolarida funksionallarni yaqinlashtirishni optimallashtirish, ularning samaradorligini oshirish maqsadida yangi algoritmlar ishlab chiqish, xatolik funksionallarini hisoblash, shuningdek, optimal koeffitsiyentlarni topish uchun Lagranj aniqmas koʻpaytuvchilar usulidan foydalanib Viner – Xopf tipidagi sistemani olish, ushbu sistema yechimi mavjud va yagonaligini isbotlash, optimal koeffitsiyentlarning oshkor koʻrinishini topish uchun yuqori tartibli differensial operatorlarning diskret analogini qurish, hamda yarim normaga eng kichik qiymat beruvchi koʻrsatkichli–trigonometrik splaynlar qurish, koʻrsatkichli va trigonometrik funksiyalarga aniq boʻladigan interpolyatsion va kvadratur formulalar qurish hamda ularning yaqinlashish tartibini baholash kabi ustuvor yoʻnalishlar oʻrganilmoqda.

Muammoning oʻrganilganlik darajasi. Splayn funksiyalari va interpolyatsiya formulalari zamonaviy hisoblash matematikasining stoxastik differensial tenglamalar va funksional analiz masalalarini sonli yechish uchun eng muhim vositalaridan biridir. Splayn nazariyasining asoschisi J. Schoenberg birinchi boʻlib tekislangan interpolyatsiyalarni qurish uchun boʻlakli koʻphadlardan foydalanishni taklif qilgan. Splaynlarni yaqinlashtirishning sonli usullarini ishlab chiqishga K. De Boor katta hissa qoʻshgan. N. Dyn splaynlarga asoslangan rekursiv algoritmlarni ishlab chiqdi va koʻp oʻzgaruvchili splayn interpolyatsiyasi usullarini oʻrgandi. M. Unser splaynlar va toʻlqinlar tahlili oʻrtasidagi bogʻliqlikni va ularni tibbiy tasvirni qayta ishlashda (masalan, MRT va KT) qoʻllashni oʻrgandi. B. Rozenberg, M. Lapeyre va Jan-Klod Rosh kompyuter grafikasida silliq egri chiziqlar va 3D modellarni yaratishda splaynlardan faol foydalandilar. Xususan, B-splaynlarni ishlab chiqish va ularni sanoat dizaynida, muhandislik vizualizatsiyasida qoʻllashda sezilarli yutuqlarga erishishdi. L. Veymin, Ch. Yunji va X. Feng geografik axborot tizimlari (GIS), muhandislik hisoblari, modellashtirish va qishloq xoʻjaligi texnologiyalarida splayn funksiyalarini qoʻllaydilar. T. Shiraishi, Y. Takaxashi va Y. Isakava splaynlar yordamida animatsiyani yaxshilash usullarini ishlab chiqdilar.

Integral va karrali integrallarni taqribiy hisoblash uchun kvadratur va kubatur formulalarini qurish masalasi hisoblash nazariyasining muhim masalalaridan biridir. Ushbu muammoni hal qilish ustida koʻplab mashhur matematiklar ishlagan, masalan, S.L. Sobolev optimal koeffitsiyentlar uchun analitik ifodasini topishda foydalaniladigan optimal kvadratur va kubatur formulalarini qurishning yangi algoritmini ishlab chiqdi va ularni murakkab tizimlar va muhandislikda qoʻlladi. M. Hammerlin va J. Stöhr differensial tenglamalar va optimallashtirish masalalarini sonli yechish uchun kvadratur formulalarini takomillashtirish ustida faol ishladilar. Ular murakkab masalalarni hal qilishda yuqori aniqlikka erishishga imkon beruvchi moslashuvchan tugunlar va koeffitsiyentlarni optimallashtirishga asoslangan usullarni taklif qildilar. R.P.Brent va S.B. Molerning ishlarida yangi raqamli algoritmlar ishlab chiqildi, bu esa kvadratur formulalarining aniqligi va tezligini sezilarli darajada yaxshilash imkonini berdi. Shuningdek, ular turli

amaliy masalalarni hal qilish uchun ushbu usullarni optimallashtirish ustida ishladilar.
F. Basso va M. Benassi kvadratur formulalarining matematik nazariyasini ishlab chiqish, shuningdek ularni sonli hisob-kitoblarda va fizik jarayonlarni modellashtirishda qo‘llash bilan shug‘ullangan. Ular ko‘p o‘lchovli fazolarda integrallarning aniq yechimini osonlashtiradigan ko‘p tugunli to‘rlardan foydalangan holda kubatur formulalarini qurish usullarini taklif qildilar. G.V. Milovanović va D. Yovanović sanoat jarayonlari va matematik-fizik masalalarni modellashtirishda faol foydalaniladigan kvadratur va kubatur formulalarini optimallashtirishning yangi yondashuvlarini taklif qildilar. Ular moslashuvchan ko‘p tugunli to‘rlar algoritmlarini qo‘llash orqali xatoliklarni minimallashtirishga asoslangan usullarni ishlab chiqdilar. X.K. Li va J.H. Kim robototexnika va kompyuter grafikasidagi muammolarni hal qilish uchun kvadratur formulalarini qo‘llash orqali robot harakatini optimallashtirish va animatsiyani yaxshilash uchun yangi usullarni ishlab chiqdilar. Ular optimal trayektoriyalarni aniqlash va robot harakatini hisoblashdagi xatoliklarni minimallashtirish, shuningdek, raqamli modellarda animatsiya sifatini yaxshilash uchun moslashuv usullaridan foydalanganlar.

S.L. Sobolev, I.P. Mysovskix, V.I. Lebedev, G.N. Salixov, M.I. Isroilov va E.A. Shamsiev sferada kubatur formulalarini qurganlar. Funksional fazolarda taqribiy integrallashni optimallashtirish bilan S.L. Sobolev, S.M. Nikolskiy, A. Sard, N.P. Korneychuk, A.A. Zhensykbaev va boshqalar shug’ullanganlar. Interpolyatsion splayn funksiyalari bo‘yicha muhim natijalar I.Schoenberg, P. Holliday, K. de Boor, J. Ahlberg, E. Nilsson, Walsh, P. Laurent, S. Stechkin, Yu. Subbotin, Yu. Zavyalov, V. Miroshnichenko, M. Ignatyev va A. Pevniy ishlarida olingan. Shuni ta‘kidlash kerakki, funksional fazolarda optimal interpolyatsion, kvadratur, kubatur va ayirmali formulalarini qurishda X.M. Shadimetov, A.R. Hayotov, F.A.Nuraliyev, S.A.Baxramov, O.X. G‘ulomov, N.Mamatova, S.S.A’zamov, D.M.Axmedov, S.S.Babayev, R.N.Mirzaqobilov yangi optimal algoritmlarni ishlab chiqishgan. Nochiziqli parabolik, giperbolik tenglamalar va sistemalarning taqribiy yechimi uchun M.M. Aripov, R.D. Aloev, D. Utebayev, Ch.B. Normurodov, Z.R. Rahmonov, M.U. Xudoyberganov va boshqalar yangi asimptotik usullarni ishlab chiqdilar va turli xil ayirmali sxemalarining turg‘unligini isbotladilar.

Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilgan ilmiy-tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti Hisoblash matematikasi laboratoriyasining “Gilbert fazolarida optimal kvadratur, interpolyatsion, ayirmali formulalar qurish va ularni integral tenglamalarni yechishga tatbiqlari” mavzusidagi kalendar reja doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi Gilbert fazosida ko‘rsatkichli-trigonometrik funksiyalarga aniq bo‘lgan natural splaynlar, optimal interpolyatsion va kvadratur formulalarni qurish, ularning xatolik funksionali normasini hisoblashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

funksiyaning o'zi va uning m – tartibli umumlashgan hosilasi yig'indisi kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar fazosida interpolyatsion, kvadratur formulalari va splayn funksiyalari xatoliklarining yuqori baholarini topish;

fiksirlangan tugunlarda olingan yuqori baholarni koeffitsiyentlar orqali minimallashtirib interpolyatsion, kvadratur formulalari va splayn funksiyalarining optimal koeffitsiyentlarini topish uchun chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini olish;

interpolyatsion, kvadratur formulalari va splayn funksiyalar bo'yicha olingan sistemalar yechimlarining mavjudligi va yagonaligini isbotlash;

interpolyatsion, kvadrat formulalar va splayn funksiyalarning optimal koeffitsiyentlarini topish uchun $D_m[\beta]$ diskret operatorlarini qurish;

interpolyatsion, kvadratur formulalari va splayn funksiyalarining optimal koeffitsiyentlari analitik ifodalarini topish;

interpolyatsion, kvadratur formulalari va splayn funksiyalarning optimal normalarini hisoblash.

Tadqiqotning ob'yekti natural splaynlar, interpolyatsion va kvadratur formulalar, yuqori tartibli differensial operatorlarning diskret analogi, xatolik funksionallari va Gilbert fazolaridan iborat.

Tadqiqotning predmeti ekstremal funksiyalar, ko'rsatkichli-trigonometrik funksiyalarga aniq bo'lgan natural splaynlar, optimal interpolyatsion va kvadratur formulalar, $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1\left(m-\text{toq}\right)$ va $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\frac{d^{m}}{dx^{m}}+1\left(m-\text{juft}\right)$ differensial operatorlarning diskret analoglari, $W_2^{(m,0)}\left(0,1\right)$ Gilbert fazosidan olingan funksiyalardan iborat.

Tadqiqotning usullari. Tadqiqot ishida hisoblash matematikasi, funksional analiz, hamda differensial tenglamalar nazariyasi, umumlashgan funksiyalar, diskret argumentli funksiyalar nazariyasi usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

funksiyaning o'zi va uning m – tartibli umumlashgan hosilasi yig'indisi kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar fazosida interpolyatsion, kvadratur formulalari va splayn funksiyalari xatoliklarining yuqori baholari uning ekstremal funksiyalari yordamida topilgan;

fiksirlangan tugunlarda olingan yuqori baholarni koeffitsiyentlar orqali minimallashtirib interpolyatsion, kvadratur formulalari va splayn funksiyalarining optimal koeffitsiyentlariga nisbatan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi olingan;

interpolyatsion, kvadratur formulalari va splayn funksiyalar bo'yicha olingan sistemalar yechimlarining mavjudligi va yagonaligi uning asosiy matritsasining xosmasligi orqali isbotlangan;

interpolyatsion, kvadratur formulalar va splayn funksiyalarning optimal koeffitsiyentlarini topish uchun Furye almashtirishlari va qoldiqlar nazariyasiga tegishli formulalardan foydalanib $D_m[\beta]$ diskret operatorlari qurilgan;

interpolyatsion, kvadratur formulalari va splayn funksiyalarining optimal koeffitsiyentlarining analitik ifodalari diskret operatorlar yordamida topilgan;

interpolyatsion, kvadratur formulalari va splayn funksiyalarning optimal normalari koeffitsiyentlardan foydalanib hisoblangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

qurilgan optimal kvadratur formulalar yordamida murakkab tizimlarda hosil boʻladigan dinamik jarayonlarning matematik modellari qurilgan;

qurilgan kvadratur formulalarning optimal koeffitsiyentlari yordamida ikki karra nochiziqli kross-diffuziya masalasining sonli yechish sxemasi qurilgan;

qurilgan optimal interpolyatsion formulalar yordamida geosferadagi ayrim dinamik jarayonlarning integro-differensial tenglamalarini sonli yechish sxemasi qurilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi kvadratur formulalar nazariyasi, hisoblash matematikasi, funksional analiz, diskret argumentli funksiyalar nazariyasi metodlarini qoʻllanilganligi, hamda matematik mulohazalarning qatʼiyligi bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati dissertatsiya ishida funksiyaning oʻzi va m – tartibli umumlashgan hosilasi yigʻindisi kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar fazosida koʻrsatkichli, trigonometrik va eksponensial – trigonometrik funksiyalarga aniq boʻladigan kvadratur va interpolyatsion formulalar, yarim normaga eng kichik qiymat beruvchi koʻrsatkichli–trigonometrik natural splaynlar qurish hamda diskret operatorlar yordamida Gilbert fazolarida funksionallarni yaqinlashtirishni optimallashtirish bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati dissertatsiya ishida koʻrsatkichli, trigonometrik va eksponensial – trigonometrik funksiyalarga aniq boʻlgan optimal kvadratur va interpolyatsion formulalar, yarim normaga eng kichik qiymat beruvchi koʻrsatkichli–trigonometrik natural splaynlar yordamida magnit va issiqlik maydonlarini simmulatsiya qilish, optik tizimlarni modellashtirish, iqtisodiy bashoratlarni tadqiq qilishga imkon berishi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Funksiyaning oʻzi va m – tartibli umumlashgan hosilasi yigʻindisi kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar fazosida koʻrsatkichli, trigonometrik va eksponensial – trigonometrik funksiyalarga aniq boʻladigan kvadratur va interpolyatsion formulalar, yarim normaga eng kichik qiymat beruvchi koʻrsatkichli–trigonometrik natural splaynlar qurish hamda diskret operatorlar yordamida Gilbert fazolarida funksionallarni yaqinlashtirishni optimallashtirish boʻyicha olingan ilmiy natijalar asosida:

Gilbertning $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida qurilgan optimal kvadratur formula 122041800031-8 raqamli “Matematik fizikaning chegaraviy masalalarini yechishning sonli usullari va optimal tarmoq tizimlarini kompyuter orqali loyihalashtirish” amaliy loyihasida murakkab tizimlarda hosil bo‘ladigan dinamik jarayonlarning matematik modellarini qurishda qo‘llanilgan. (Rossiya Fanlar Akademiyasining Kabardin-Balkar ilmiy markazining Amaliy matematika va avtomatlashtirish Instituti 2025 yil 17 iyundagi 01-03/62-sonli ma’lumotnomasi). Natijada, optimal tizimlarini kompyuter oraqali loyihalashtirishda hosil bo‘ladigan dinamik jarayonlarning matematik modellarini qurishga imkon bergan;

Gilbertning $W_2^{(m,0)}(0,1)\left(m-toq\right)$ fazosida Sobolev metodidan foydalanib eksponensial-trigonometrik funksiyalarga aniq bo‘lgan optimal kvadratur formulalar F-4-30-raqamli “Ikki marta nochiziqli kross sistemaning konvektiv ko‘chish, o‘zgaruvchan zichlik, manba yoki yutilish ta’siridagi sifat xossalarini tadqiq qilish” mavzusidagi fundamental loyihada ushbu qurilgan kvadratur formulalarning optimal koeffitsiyentlaridan kross-diffuziya sistemalari uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalarni sonli yechishda foydalanilgan. (O‘zbekiston Milliy Universitetining 2025 yil 17 iyundagi 04/11-7602-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijalardan foydalanish, ikki karra nochiziqli kross-diffuziya masalasining sonli yechish sxemasi va algoritmini qurish hamda sonli natijalarni vizuallashtirish imkonini bergan;

qurilgan optimal kvadratur formulalar 22-11-00064 raqamli “Geosferalardagi dinamik jarayonlarning irsiyatini inobatga olgan holda modellashtirish” amaliy loyihasida geosferadagi ayrim dinamik jarayonlarning integro-differensial tenglamalarini hisoblash uchun foydalanilgan. (Rossiya Fanlar akademiyasi Uzoq Sharq bo‘limining Kosmofizik tadqiqotlar va radioto‘lqinlar tarqalishi institutining 2025 yil 19 iyundagi 264 - sonli ma’lumotnomasi). Natijada, geosferadagi ayrim dinamik jarayonlarning integro-differensial tenglamalarini sonli yechish sxemasini qurishga imkon bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 20 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan 15 ta xalqaro va 5 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinishi.

Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha jami 44 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 18 ta maqola, jumladan 8 tasi xorijiy va 10 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan, shuningdek elektron hisoblash mashinalari ushun dasturni rasmiy ro‘yxatdan o‘tkazish to‘g‘risidagi uchta guvohnoma olingan.

Dissertatsiyaning hajmi va tuzilishi. Dissertatsiya kirish qismi, to‘rtta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning hajmi 194 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslangan, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi ko‘rsatilgan, mavzu bo‘yicha xorijiy ilmiy-tadqiqotlar sharhi, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi bo‘yicha ma’lumotlar keltirilgan.

Dissertatsiyaning « $W_2^{(m,0)}(0,1)$ **fazosida interpolyatsion va kvadratur formulalarining xatolik funksionallarini yaqinlashtirish** » deb nomlangan birinchi bobida kvadratur va interpolyatsion formulalarini optimallashtirish masalasi qo‘yilgan. Bu yerda kvadratur va interpolyatsion formulalarining ekstremal funktsiyalari topilgan, ekstremal funksiya yordamida qaralayotgan formulalar xatoliklarining yuqori bahosi topilgan, kvadratur va interpolatsion formulalari xatoliklarining yuqori bahosini koeffitsiyentlar bo‘yicha minimallashtirish uchun Vinner-Xopf tipidagi sistema olingan hamda optimal kvadratur va interpolatsion formulalarning $W_2^{(m,0)}(0,1)$ Gilbert fazosida mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

Quyidagi kvadratur formulani qaraymiz

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi(x_\beta), \tag{1}$$

bunda $C[\beta]$ va x_β $\left(x_\beta \in [0,1]\right)$ lar mos ravishda (1) kvadratur formulaning *koeffitsiyentlari va tugun nuqtalari* deyiladi, φ funksiya esa quyidagicha aniqlangan $W_2^{(m,0)}(0,1)$ chiziqli fazoning elementidir

$$W_2^{(m,0)}(0,1) = \left\{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, \varphi^{(m-1)} \textit{ absolyut uzluksiz va } \varphi^{(m)} \in L_2(0,1)\right\}.$$

Ushbu funksiyalar sinfi $W_2^{(m,0)}(0,1)$ quyidagi skalyar ko‘paytma yordamida

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{W_2^{(m,0)}} = \int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x) + \varphi(x)\right)\left(\psi^{(m)}(x) + \psi(x)\right)dx \tag{2}$$

Gilbert fazosi bo‘ladi.

Shuningdek, $W_2^{(m,0)}(0,1)$ Gilbert fazosida

$$\left\|\varphi \middle| W_2^{(m,0)}\right\| = \left\{\int_0^1 \left[\varphi^{(m)}(x) + \varphi(x)\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

(2) skalyar ko‘paytmaga mos yarim norma kiritiladi. Uning nol elementi $\varphi^{(m)}(x) + \varphi(x) = 0$ tenglamaning yechimidir.

Integral va kvadratur yig‘indi orasidagi quyidagi ayirma

$$\int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi(x_\beta) = (\ell,\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx \tag{4}$$

(1) – kvadratur formulaning xatoligi deyiladi, hamda bu ayirmaga

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\delta(x - x_\beta) \tag{5}$$

ko‘rinishga ega xatolik funksionali mos keladi. Bu yerda $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ − [0,1] kesmasining xarakteristik funksiyasi, hamda $\delta(x)$− Dirakning delta–funksiyasi.

Koshi-Shvars tengsizligiga asosan, quyidagi bahoga ega bo‘lamiz

$$|(\ell,\varphi)| \le \left\|\varphi|W_2^{(m,0)}\right\| \left\|\ell|W_2^{(m,0)*}\right\|.$$

Demak, $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoda (1) kvadratur formulaning absolyut xatoligi qo‘shma fazodagi ℓ xatolik funksionali normasi yordamida yuqoridan baholanadi. Bundan quyidagi masalaga ega bo‘lamiz.

1-masala. (1) kvadratur formulaning (5) xatolik funksionali $\left\|\ell|W_2^{(m,0)*}\right\|$ normasini hisoblash.

(5) tenglikdan ko‘rinib turibdiki, xatolik funksionalining $\left\|\ell|W_2^{(m,0)*}\right\|$ normasi $C[\beta]$ koeffitsiyentlarga va x_β tugun nuqtalarga bog‘liq.

$W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida optimal kvadratur formula qurish uchun quyidagi masalani yechish kerak bo‘ladi.

2-masala. $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoda

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}|W_2^{(m,0)*}\right\| = \inf_{C[\beta]}\left\|\ell|W_2^{(m,0)*}\right\|$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $C[\beta]$ koeffitsiyentlarini topish.

Xatolik funksionali (5) normasini hisoblash uchun quyidagi tenglikni qanoatlantiruvchi ψ_ℓ ekstremal funksiya tushunchasidan foydalanamiz.

$$(\ell,\psi_\ell) = \left\|\ell \,|\, W_2^{(m,0)*}\right\| \cdot \left\|\psi_\ell \,|\, W_2^{(m,0)}\right\|. \tag{6}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $\psi_\ell \in W_2^{(m,0)}(0,1)$ funksiyasi (5) tenglik bilan aniqlangan ℓ funksionalining *ekstremal funksiyasi* deyiladi.

$W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazo Gilbert fazosi bo‘lgani uchun chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko‘rinishi haqidagi Riss teoremasidan $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida quyidagi tenglikni qanoatlantiruvchi yagona ψ_ℓ funksiya mavjud

$$(\ell,\varphi) = \langle\psi_\ell,\varphi\rangle_{W_2^{(m,0)}} \tag{7}$$

va $\|\ell\| = \|\psi_\ell\|$, bunda $\langle\psi_\ell,\varphi\rangle_{W_2^{(m,0)}}$ ushbu $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosidagi ψ_ℓ va φ funksiyalarning skalyar ko‘paytmasi.

(7) tenglamani yechish bilan shug‘ullanamiz. (7) tenglamaning o‘ng tomonini bo‘laklab integrallash orqali quyidagiga ega bo‘lamiz

$$(\ell,\varphi)=(-1)^m\int_0^1\left(\psi_\ell^{(2m)}(x)+\psi_\ell^{(m)}(x)+(-1)^m\psi_\ell^{(m)}(x)+(-1)^m\psi_\ell(x)\right)\varphi(x)dx+$$

$$+\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\left(\psi_\ell^{(m+s)}(x)+\psi_\ell^{(s)}(x)\right)\varphi^{(m-s-1)}(x)\Big|_0^1 \quad .$$

Bu yerdan, biz, m sonining toq va juft hollari uchun mos ravishda quyidagi tengliklarga kelamiz: m- toq bo‘lganda

$$(\ell,\varphi)=(-1)^m\int_0^1\left(\psi_\ell^{(2m)}(x)-\psi_\ell(x)\right)\varphi(x)dx+$$

$$+\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\left(\psi_\ell^{(m+s)}(x)+\psi_\ell^{(s)}(x)\right)\varphi^{(m-s-1)}(x)\Big|_0^1 \tag{8}$$

va m- juft bo‘lganda

$$(\ell,\varphi)=\int_0^1\left(\psi_\ell^{(2m)}(x)+2\psi_\ell^{(m)}(x)+\psi_\ell(x)\right)\varphi(x)dx+$$

$$+\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\left(\psi_\ell^{(m+s)}(x)+\psi_\ell^{(s)}(x)\right)\varphi^{(m-s-1)}(x)\Big|_0^1 \tag{9}$$

ψ_ℓ ekstremal funksiyani topish uchun m ning mos keladigan qiymatlariga qarab (8) yoki (9) ifodalarni ko‘rib chiqish zarurligi aniq.

Avvaliga m - toq bo‘lsin, u holda ψ_ℓ funksiyaning yagonaligini inobatga olib, quyidagi tenglamani olamiz

$$\psi_\ell^{(2m)}(x)-\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x) \tag{10}$$

bunda

$$\left[\left(\psi_\ell^{(m+i)}(x)+\psi_\ell^{(i)}(x)\right)\right]\Big|_{x=0}^{x=1}=0,\quad i=\overline{0,m-1}\ . \tag{11}$$

chegaraviy shartlar o‘rinli.

Quyidagi isbotlangan

1-Teorema. m - toq bo‘lganda (11) chegaraviy shartlar bilan berilgan (10) tenglamaning yechimi (1) – kvadratur formula ℓ xatolik funksionalining ψ_ℓ ekstremal funksiyasi bo‘lib u quyidagi ko‘rinishga ega

$$\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*G_m(x)+Y_m(x), \tag{12}$$

bunda

$$G_m(x)=\frac{\mathrm{sign}x}{2m}\cdot\left[\sinh(\mathrm{x})+\sum_{k=1}^{m-1}e^{x\cdot\cos\left(\frac{\pi k}{m}\right)}\cdot\cos\left(x\sin\left(\frac{\pi k}{m}\right)+\frac{\pi k}{m}\right)\right] \tag{13}$$

va

$$Y_m(x)=d_0e^{-x}+\sum_{k=1}^{\frac{m-1}{2}}e^{-x\cdot\cos\frac{2\pi k}{m}}\left[d_{1k}\cos\left(x\sin\left(\frac{2\pi k}{m}\right)\right)+d_{2k}\sin\left(x\sin\left(\frac{2\pi k}{m}\right)\right)\right], \quad (14)$$

d_0, d_{1k} va d_{2k} – ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Bunda ℓ funksional $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoda aniqlanganligi uchun quyidagi shartlar bajariladi

$$(\ell,e^{-x})=0\ , \quad (15)$$

$$\left(\ell,e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\cos\left(x\sin\frac{2\pi k}{m}\right)\right)=0,\quad k=\overline{1,\frac{m-1}{2}}\ , \quad (16)$$

$$\left(\ell,e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\sin\left(x\sin\frac{2\pi k}{m}\right)\right)=0,\quad k=\overline{1,\frac{m-1}{2}}\ . \quad (17)$$

Bu yerdan $m-$toq bo‘lganda (1) – kvadratur formula quyidagi funksiyalarga aniq bo‘ladi deb xulosa qilamiz.

$$e^{-x},\ e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\cos\left(x\sin\frac{2\pi k}{m}\right),\ e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\sin\left(x\sin\frac{2\pi k}{m}\right),\ k=\overline{1,\frac{m-1}{2}}$$

Keyinchalik $m-$juft bo‘lsin, u holda ψ_ℓ funksiyaning yagonaligini inobatga olib, quyidagi tenglamani olamiz

$$\psi_\ell^{(2m)}(x)+2\psi_\ell^{(m)}(x)+\psi_\ell(x)=\ell(x) \quad (18)$$

bunda

$$\left[\left(\psi_\ell^{(m+i)}(x)+\psi_\ell^{(i)}(x)\right)\right]\Big|_{x=0}^{x=1}=0,\quad i=\overline{0,m-1} \quad (19)$$

chegaraviy shartlar o‘rinli.

Quyidagi isbotlangan

2-Teorema. m- juft bo‘lganda (19) chegaraviy shartlar bilan berilgan (18) tenglamaning yechimi (1) – kvadratur formula ℓ xatolik funksionalining ψ_ℓ ekstremal funksiyasi bo‘lib u quyidagi ko‘rinishga ega

$$\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*G_m(x)+Y_m(x), \quad (20)$$

bunda

$$G_m(x)=\frac{\mathrm{sign}x}{2m^2}\cdot\sum_{k=1}^{m}\left[(1-m)e^{x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\cos\left(x\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)+\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)+\right.$$
$$\left.+xe^{x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\cos\left(x\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)+\frac{2\pi\cdot(2k-1)}{m}\right)\right], \quad (21)$$

va

$$Y_m(x)=\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}e^{-x\cdot\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\left[r_{1k}\cos\left(x\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)+r_{2k}\sin\left(x\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)\right] \quad (22)$$

bu yerda r_{1k} va r_{2k} - haqiqiy sonlar.

Bunda ℓ funksional $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoda aniqlanganligi uchun quyidagi shartlar bajariladi

$$\left(\ell, e^{-x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\cos\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)=0, \quad k=\overline{1,\frac{m}{2}}\ , \tag{23}$$

$$\left(\ell, e^{-x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\sin\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)=0, \quad k=\overline{1,\frac{m}{2}}\ . \tag{24}$$

Bu yerdan $m-$juft bo‘lganda (1) – kvadratur formula quyidagi funksiyalarga aniq bo‘ladi deb xulosa qilamiz.

$$e^{-x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\cos\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right),\ e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\sin\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right),\ k=\overline{1,\frac{m}{2}}\ .$$

Keyinchalik, (12) va (20) topilgan ekstremal funksiyalaridan foydalanib, ℓ xatolik funksionali normasining kvadrati uchun quyidagi ifoda topilgan

$$\left\|\ell|W_2^{(m,0)*}\right\|^2=(-1)^m\left[\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C[\beta]C[\gamma]G_m(x_\beta-x_\gamma)+\int_0^1\int_0^1 G_m(x-y)dxdy-\right.$$
$$\left.-2\sum_{\beta=0}^{N}C[\beta]\int_0^1 G_m(x-x_\beta)dx\right]. \tag{25}$$

Shunday qilib, 1-masala to‘liq yechildi. Endi biz quyidagi interpolyatsion formulani qaraymiz

$$\varphi(z)\cong P_\varphi(z)=\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta(z)\varphi(x_\beta), \tag{26}$$

bu yerda $P_\varphi(z)=\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta(z)\varphi(x_\beta)$ – interpolyatsion formula va

$$\ell(x,z)=\delta(x-z)-\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta(z)\delta(x-x_\beta)\ . \tag{27}$$

Ushbu interpolyatsion formulaning xatolik funksionali, $P_\varphi(z)$ interpolyatsion formulaning $C_\beta(z)$ – koeffitsiyentlari hamda x_β – tugun nuqlari, $\delta(x)$ esa Dirakning delta funksiyasi, $\varphi(x)$ funksiya $W_2^{(m,0)}(0,1)$ Gilbert fazosining elementidir.

(26) – ko‘rinishdagi interpolyatsion formulaning *xatoligi* deb quyidagi

$$(\ell,\varphi)=\varphi(z)-P_\varphi(z). \tag{28}$$

ayirmaga aytiladi.

Koshi-Shvars tengsizligiga asosan, quyidagi bahoga ega bo‘lamiz

$$\left|(\ell,\varphi)\right|\le\left\|\varphi|W_2^{(m,0)}\right\|\cdot\left\|\ell|W_2^{(m,0)*}\right\|,$$

bu yerda

$$\|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}}=\sup_{\varphi,\|\varphi\|\neq 0}\frac{|(\ell,\varphi)|}{\|\varphi\|_{W_2^{(m,0)}}}.$$

Demak, $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoda (26) interpolyatsion formulaning absolyut xatoligi qo‘shma fazodagi $\ell(x,z)$ xatolik funksionali normasi yordamida yuqoridan baholanadi. Bundan quyidagi masalaga ega bo‘lamiz.

3-masala. (26) interpolyatsion formulaning $\ell(x,z)$ xatolik funksionali normasini hisoblash.

Ko‘rinib turibdiki, $\ell(x,z)$ xatolik funksionalining normasi $C_\beta(z)$ koeffitsiyentlarga va x_β tugun nuqtalarga bog‘liq. $\|\ell\|$ qiymatini $C_\beta(z)$ koeffitsiyentlar bo‘yicha minimallashtirish masalasi chiziqli masaladir, lekin x_β tugun nuqtalar bo‘yicha esa umumiy holda chiziqli bo‘lmagan masaladir. Bu yerda x_β fiksirlangan tugun nuqtalarda $C_\beta(z)$ koeffitsiyentlari bo‘yicha $\|\ell\|$ qiymatining minimumini topish masalasini ko‘rib chiqamiz.

Quyidagi

$$\left\|\mathring{\ell}\right\|_{W_2^{(m,0)*}} = \inf_{C_\beta(z)} \|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}} \tag{29}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $\mathring{C}_\beta(z)$ koeffitsiyentlarga (agar mavjud bo‘lsa) *optimal koeffitsiyentlar* va ularga mos keluvchi

$$\mathring{P}_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^{N} \mathring{C}_\beta(z)\varphi(x_\beta)$$

interpolyatsion formulaga $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazodagi *optimal interpolyatsion formula* deyiladi.

Shunday qilib, $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoda (26) ko‘rinishidagi optimal interpolyatsion formulani qurish uchun quyidagi masalani yechish kerak bo‘ladi.

4-masala. Fiksirlangan x_β tugun nuqtalarda (29) tenglikni qanoatlantiruvchi $\mathring{C}_\beta(z)$ koeffitsiyentlarini topish.

Xatolik funksionali (27) normasini hisoblash uchun quyidagi tenglikni qanoatlantiruvchi U_ℓ ekstremal funksiya tushunchasidan foydalanamiz.

$$(\ell, U_\ell) = \left\|\ell \middle| W_2^{(m,0)*}\right\| \cdot \left\|U_\ell \middle| W_2^{(m,0)}\right\|. \tag{30}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $U_\ell \in W_2^{(m,0)}(0,1)$ funksiyasi (27) tenglik bilan aniqlangan $\ell(x,z)$ funksionalining *ekstremal funksiyasi* deyiladi.

$W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazo Gilbert fazosi bo‘lgani uchun chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko‘rinishi haqidagi Riss teoremasidan $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida quyidagi tenglikni qanoatlantiruvchi yagona U_ℓ funksiya mavjud

$$(\ell,\varphi) = \langle U_\ell, \varphi\rangle_{W_2^{(m,0)}} \tag{31}$$

va $\|\ell\| = \|U_\ell\|$, bunda $\langle U_\ell, \varphi\rangle_{W_2^{(m,0)}}$ ushbu $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosidagi U_ℓ va φ funksiyalarning skalyar ko‘paytmasi.

(31) tenglamani yechish bilan shug‘ullanamiz. (31) tenglamaning o‘ng tomonini bo‘laklab integrallash orqali quyidagiga ega bo‘lamiz

$$(\ell,\varphi)=(-1)^m\int\limits_0^1\Big(U_\ell^{(2m)}(x)+U_\ell^{(m)}(x)+(-1)^m U_\ell^{(m)}(x)+(-1)^m U_\ell(x)\Big)\varphi(x)dx+$$

$$+\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\Big(U_\ell^{(m+s)}(x)+U_\ell^{(s)}(x)\Big)\varphi^{(m-s-1)}(x)\Big|_0^1.$$

Bu yerdan, biz, m sonining toq va juft hollari uchun mos ravishda quyidagi tengliklarga kelamiz: m- toq bo‘lganda

$$(\ell,\varphi)=(-1)^m\int\limits_0^1\Big(U_\ell^{(2m)}(x)-U_\ell(x)\Big)\varphi(x)dx+$$

$$+\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\Big(U_\ell^{(m+s)}(x)+U_\ell^{(s)}(x)\Big)\varphi^{(m-s-1)}(x)\Big|_0^1 \tag{32}$$

va m- juft bo‘lganda

$$(\ell,\varphi)=\int\limits_0^1\Big(U_\ell^{(2m)}(x)+2U_\ell^{(m)}(x)+U_\ell(x)\Big)\varphi(x)dx+$$

$$+\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\Big(U_\ell^{(m+s)}(x)+U_\ell^{(s)}(x)\Big)\varphi^{(m-s-1)}(x)\Big|_0^1 \tag{33}$$

U_ℓ ekstremal funksiyani topish uchun m ning mos keladigan qiymatlariga qarab (32) yoki (33) ifodalarni ko‘rib chiqish zarurligi aniq.

Avvaliga m - toq bo‘lsin, u holda U_ℓ funksiyaning yagonaligini inobatga olib, quyidagi tenglamani olamiz

$$U_\ell^{(2m)}(x)-U_\ell(x)=(-1)^m\ell(x) \tag{34}$$

bunda

$$\left[\Big(U_\ell^{(m+i)}(x)+U_\ell^{(i)}(x)\Big)\right]\Big|_{x=0}^{x=1}=0,\quad i=\overline{0,m-1}\ . \tag{35}$$

chegaraviy shartlar o‘rinli.

Quyidagi isbotlangan

3-Teorema. m - toq bo‘lganda (35) chegaraviy shartlar bilan berilgan (34) tenglamaning yechimi (26) – interpolyatsion formula $\ell(x,z)$ xatolik funksionalining U_ℓ ekstremal funksiyasi bo‘lib u quyidagi ko‘rinishga ega

$$U_\ell(x)=(-1)^m\ell(x,z)*G_m(x)+Y_m(x)\ , \tag{36}$$

bunda $G_m(x)$ - Grin funksiyasi (13) da aniqlangan va

$$Y_m(x)=d_0(z)e^{-x}+\sum_{k=1}^{\frac{m-1}{2}}e^{-x\cdot\cos\frac{2\pi k}{m}}\cdot\Bigg[d_{1k}(z)\cos\left(x\sin\left(\frac{2\pi k}{m}\right)\right)+$$

$$+d_{2k}(z)\sin\left(x\sin\left(\frac{2\pi k}{m}\right)\right)\Bigg], \tag{37}$$

bu yerda $d_0(z)$, $d_{1k}(z)$ va $d_{2k}(z)$ lar ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Bunda $\ell(x,z)$ funksional $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoda aniqlanganligi uchun quyidagi shartlar bajariladi

$$\left(\ell(x,z), e^{-x}\right) = 0 \ , \tag{38}$$

$$\left(\ell(x,z), e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\cos\left(x\sin\frac{2\pi k}{m}\right)\right) = 0, \quad k = \overline{1,\frac{m-1}{2}} \ , \tag{39}$$

$$\left(\ell(x,z), e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\sin\left(x\sin\frac{2\pi k}{m}\right)\right) = 0, \quad k = \overline{1,\frac{m-1}{2}} \ . \tag{40}$$

Bu yerdan $m-$ toq bo'lganda (26) – interpolyatsion formula quyidagi funksiyalarga aniq bo'ladi deb xulosa qilamiz.

$$e^{-x},\ e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\cos\left(x\sin\frac{2\pi k}{m}\right),\ e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\sin\left(x\sin\frac{2\pi k}{m}\right),\ k = \overline{1,\frac{m-1}{2}}$$

Keyinchalik $m-$juft bo'lsin, u holda U_ℓ funksiyaning yagonaligini inobatga olib, quyidagi tenglamani olamiz

$$U_\ell^{(2m)}(x) + 2U_\ell^{(m)}(x) + U_\ell(x) = \ell(x) \tag{41}$$

bunda

$$\left[\left(U_\ell^{(m+i)}(x) + U_\ell^{(i)}(x)\right)\right]\Big|_{x=0}^{x=1} = 0, \quad i = \overline{0, m-1} \tag{42}$$

chegaraviy shartlar o'rinli.

Quyidagi isbotlangan

4-Teorema. m- juft bo'lganda (42) chegaraviy shartlar bilan berilgan (41) tenglamaning yechimi (26) – interpolyatsion formula $\ell(x,z)$ xatolik funksionalining U_ℓ ekstremal funksiyasi bo'lib u quyidagi ko'rinishga ega

$$U_\ell(x) = \ell(x,z) * G_m(x) + Y_m(x) \ , \tag{43}$$

bunda $G_m(x)$ - Grin funksiyasi (21) da aniqlangan va

$$Y_m(x) = \sum_{k=1}^{\frac{m}{2}} e^{x\cdot\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}} \cdot \left[r_{1k}(z)\cos\left(x\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right) + \right.$$
$$\left. + r_{2k}(z)\sin\left(x\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)\right], \tag{44}$$

bu yerda $r_{1k}(z)$ va $r_{2k}(z)$ - haqiqiy sonlar.

Bunda $\ell(x,z)$ funksional $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoda aniqlanganligi uchun quyidagi shartlar bajariladi

$$\left(\ell(x,z), e^{x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\cos\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right) = 0, \quad k = \overline{1,\frac{m}{2}} \ , \tag{45}$$

$$\left(\ell(x,z), e^{x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}} \sin\left(x \sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)=0, \quad k=\overline{1,\frac{m}{2}}\ . \qquad (46)$$

Bu yerdan $m-$ juft bo‘lganda (26) – interpolyatsion formula quyidagi funksiyalarga aniq bo‘ladi deb xulosa qilamiz.

$$e^{-x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}} \cos\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right),\ e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}} \sin\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right),\ k=\overline{1,\frac{m}{2}}\,.$$

Keyinchalik, (36) va (43) topilgan ekstremal funksiyalaridan foydalanib, $\ell(x,z)$ xatolik funksionali normasining kvadrati uchun quyidagi ifoda topilgan

$$\left\|\ell(x,z)\middle|W_2^{(m,0)*}\right\|^2=(-1)^m\cdot\left[\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_\beta(z)C_\gamma(z)G_m(x_\beta-x_\gamma)-2\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta(z)G_m\left(z-x_\beta\right)\right].\ (47)$$

Shunday qilib, 3-masala to‘liq yechidi.

Keyin 1.4 – paragrafda $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoda optimal kvadratur va interpolyatsion formulalarining $C[\beta]$ va $C_\beta(z)$ koeffitsiyentlari uchun chiziqli tenglamalar sistemalari olingan. Ushbu sistemalar yechimlarining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan. Ushbu sistemalarning yechimi qaraliyotgan formulalarning xatolik funksionali normasining kvadratiga minimum berishi isbotlangan.

Gilbert fazolarida optimal kvadratur va interpolyatsion formulalarni qurishning Sobolev metodi differensial operatorlarning diskret analoglariga asoslangan va optimal koeffitsiyentlarning oshkor ko‘rinishini olishga imkon beradi. Ushbu dissertatsiya ishida $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoda optimal formulalarni qurish uchun bizga yuqori tartibli differensial operatorlarning mos diskret analoglari kerak bo‘ladi.

« **Yuqori tartibli diskret operator**» deb nomlangan ikkinchi bobi kerak bo‘ladigan m - toq bo‘lganda $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ va $m-$juft bo‘lganda $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\frac{d^m}{dx^m}+1$ differensial operatorlarning diskret analoglarini qurishga bag‘ishlangan.

Ushbu

$$D_m[\beta]*G_m[\beta]=\delta[\beta] \qquad (48)$$

tenglamaning yechimi $D_m[\beta], m$ - toq bo‘lganda $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ va $m-$juft bo‘lganda $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\frac{d^m}{dx^m}+1$ *differensial operatorlarning mos diskret analogi* deyiladi. Bu yerda $G_m[\beta]$ mos ravishda m - toq bo‘lganda (13) tenglik bilan va $m-$juft bo‘lganda (21) tenglik bilan aniqlangan $G_m(x)$ funksiyalarga mos diskret argumentli funksiya. 2.2–paragrafda m - toq bo‘lganda $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ va $m-$juft bo‘lganda $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\frac{d^m}{dx^m}+1$ differensial operatorlarning $D_m[\beta]$ diskret analoglari qurilgan.

Quyidagi teoremalar isbotlangan:

5-Teorema. $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ differensial operatorning m -toq bo‘lganda (48)-tenglikni qanoatlantiruvchi $D_m\left[\beta\right]$ diskret analogi quyidagi ko‘rinishga ega

$$D_m\left[\beta\right]=\frac{m}{K}\cdot\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k\cdot\lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta|\geq 2,\\ 1+\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k, & |\beta|=1,\\ M_1-\frac{K_1}{K}+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\lambda_k}, & \beta=0,\end{cases} \tag{49}$$

bunda $K,\,K_1,\,M_1,\,A_k,\lambda_k$ – ma’lum kattaliklar va $|\lambda_k|<1$.

6-Teorema. $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\frac{d^m}{dx^m}+1$ differensial operatorning m -juft bo‘lganda (48)-tenglikni qanoatlantiruvchi $D_m\left[\beta\right]$ diskret analogi quyidagi ko‘rinishga ega

$$D_m\left[\beta\right]=\frac{m^2}{K^*}\cdot\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k^*\cdot\tau_k^{|\beta|-1}, & |\beta|\geq 2,\\ 1+\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k^*, & |\beta|=1,\\ M_1^*-\frac{K_1^*}{K^*}+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{A_k^*}{\tau_k}, & \beta=0.\end{cases} \tag{50}$$

bunda $K^*,\,K_1^*,\,M_1^*,A_k^*,\tau_k$ – ma’lum kattaliklar va $|\tau_k|<1$.

2.3-paragrafda $\frac{d^2}{dx^2}-1,\ \frac{d^4}{dx^4}+2\frac{d^2}{dx^2}+1,\ \frac{d^6}{dx^6}-1$ va $\frac{d^8}{dx^8}+2\frac{d^4}{dx^4}+1$ differensial operatorlarning $D_m\left[\beta\right]$ diskret analogining ba’zi bir xossalari isbotlangan.

Dissertatsiyaning « **Taqribiy integrallashni optimallashtirish**» deb nomlangan uchinchi bobida $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoda $m=1,2,3$ va $m=4$ bo‘lganda optimal kvadratur formulalarning koeffitsiyentlari topilgan va ℓ xatolik funksionalining normasi hisoblangan. Bunda ikkinchi bobning natijalaridan foydalanilgan, ya’ni $\frac{d^2}{dx^2}-1,\ \frac{d^4}{dx^4}+2\frac{d^2}{dx^2}+1,\ \frac{d^6}{dx^6}-1$ va $\frac{d^8}{dx^8}+2\frac{d^4}{dx^4}+1$ differensial operatorlarning $D_m\left[\beta\right]$ diskret analoglari qo‘llanilgan. 3.1 paragrafda $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida kvadratur formulalarning optimal koeffitsiyentlarini topish algoritmi berilgan.

3.2 paragrafda $W_2^{(1,0)}(0,1)$ va $W_2^{(2,0)}(0,1)$ fazolarda (1) ko‘rinishdagi kvadratur formulalarning optimal koeffitsiyentlari keltirilgan. Ushbu hollardagi natijalar,

$W_2^{(1,0)}(0,1)$ va $K_2(P_2)$ fazolarda X.M. Shadimetov va A.R. Hayotov ishlaridagi olingan natijalar bilan mos tushadi.

Keyinchalik $m=3$ va $m=4$ holatlarida (1) ko‘rinishdagi optimal kvadratur formulalari qurilgan va quyidagi teoremalar isbotlangan:

7-Teorema. Ushbu $W_2^{(3,0)}(0,1)$ fazosida (1) ko‘rinishdagi optimal kvadratur formulaning koeffitsiyentlari quyidagi ko‘rinishga ega

$$
\begin{aligned}
C[0] &= 1-\frac{T}{e^h-1}-\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{m_k\lambda_k}{e^h-\lambda_k}+\frac{n_k\lambda_k^N}{\lambda_k e^h-1}\right),\\
C[\beta] &= T+\sum_{k=1}^{2}\left(m_k\lambda_k^{\beta}+n_k\lambda_k^{N-\beta}\right),\ \beta=1,...,N-1,\\
C[N] &= \frac{Te^h}{e^h-1}+e^h\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{m_k\lambda_k^N}{e^h-\lambda_k}+\frac{n_k\lambda_k}{\lambda_k e^h-1}\right)-1,
\end{aligned}
\tag{51}
$$

bu yerda $T,\ K,\ K_1,\ K_2,\lambda_k$ - ma’lum kattaliklar va $|\lambda_k|<1$.

8-Teorema. Ushbu $W_2^{(4,0)}(0,1)$ fazosida (1) ko‘rinishdagi optimal kvadratur formulaning koeffitsiyentlari quyidagi ko‘rinishga ega

$$
\begin{aligned}
C[0] &= T^*+\frac{8}{K^*}\left[Q_1(h)+\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k^*}{\tau_k}\left[M_k+\tau_k^N\cdot N_k\right]\right],\\
C[\beta] &= T^*+\frac{8}{K^*}\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k^*}{\tau_k}\left[\tau_k^{\beta}\cdot M_k+\tau_k^{N-\beta}\cdot N_k\right],\ \beta=1,2,...,N-1,\\
C[N] &= T^*+\frac{8}{K^*}\left[Q_2(h)+\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k^*}{\tau_k}\left[\tau_k^N\cdot M_k+N_k\right]\right],
\end{aligned}
\tag{52}
$$

bu yerda $T^*,\ K^*,\ Q_1(h),\ Q_2(h),Q_3(h),\ A_k^*,\ M_k,\ N_k,\ \tau_k$ - ma’lum kattaliklar va $|\tau_k|<1$.

3.3-paragrafda $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoda $m=1,2,3$ va $m=4$ holatlardagi (1) ko‘rinishidagi optimal kvadratur formulalarning ℓ xatolik funksionali normasining kvadrati hisoblangan va quyidagi natijalar olingan. Shuni ta’kidlash joizki, optimal kvadratur formulalarining (5) xatolik funktsionali normasining kvadrati X.M. Shadimetov va A.R. Hayotov ishlarida olingan natijalar bilan ustma – ust tushdi.

9-Teorema. $W_2^{(3,0)}(0,1)$ fazoda (1) ko‘rinishdagi optimal kvadratur formulaning (5) xatolik funksionali normasining kvadrati uchun quyidagi o‘rinli

$$
\|\overset{\circ}{\ell}\|^2=1-\frac{(2N-1)T+C[0]+C[N]}{2}+Q_1+\frac{1}{6}Q_2+\frac{1}{3}Q_3, \tag{53}
$$

bunda $Q_1,\ Q_2,\ Q_3$ ma’lum kattaliklar.

10-Teorema. $W_2^{(4,0)}(0,1)$ fazoda (1) ko‘rinishdagi optimal kvadratur formulaning (5) xatolik funksionali normasining kvadrati uchun quyidagi o‘rinli

$$\|\overset{\circ}{\ell}\|^2=\frac{9}{8}-C_0-C_N-T^*\cdot\left(N-1\right)-Q_1^*-Q_2^*-Q_3^*, \tag{54}$$

bunda T^*, Q_1^*, Q_2^*, Q_3^* ma'lum kattaliklar.

3.4-paragrafda $W_2^{(m,0)}\left(0,1\right)$ fazoda $m=1,2,3$ va $m=4$ holatlarda optimal kvadratur formulalari xatoliklarining yuqori bahosi uchun sonli natijalar keltirilgan.

Dissertatsiyaning « **Interpolyatsiyalashni optimallashtirish** » deb nomlangan to'rtinchi bobida $W_2^{(m,0)}\left(0,1\right)$ fazoda $m=1,2,3$ va $m=4$ bo'lganda optimal kvadratur formulalarning hamda yarim normaga eng kichik qiymat beruvchi ko'rsatkichli–trigonometrik natural splaynlarning koeffitsiyentlari topilgan. Bunda ikkinchi bobning natijalaridan foydalanilgan, ya'ni $\frac{d^2}{dx^2}-1,\ \frac{d^4}{dx^4}+2\frac{d^2}{dx^2}+1,\ \frac{d^6}{dx^6}-1$ va $\frac{d^8}{dx^8}+2\frac{d^4}{dx^4}+1$ differensial operatorlarning $D_m\left[\beta\right]$ diskret analoglari qo'llanilgan. 4.1 paragrafda $W_2^{(m,0)}\left(0,1\right)$ fazosida interpolyatsion formulalarning optimal koeffitsiyentlarni topish algoritmi berilgan.

4.2 paragrafda $W_2^{(1,0)}\left(0,1\right)$ va $W_2^{(2,0)}\left(0,1\right)$ fazolarda (26) ko'rinishdagi interpolyatsion formulalarning optimal koeffitsiyentlari keltirilgan. Ushbu hollardagi natijalar, $W_2^{(1,0)}\left(0,1\right)$ va $K_2(P_2)$ fazolarda X.M. Shadimetov va A.R. Hayotov ishlaridagi olingan natijalar bilan mos tushadi.

Keyinchalik $m=3$ va $m=4$ holatlarida (26) ko'rinishdagi optimal interpolyatsion formulalari qurilgan va quyidagi teoremalar isbotlangan:

11-Teorema. Ushbu $W_2^{(3,0)}\left(0,1\right)$ fazoda teng masofali tugunlarga ega (26) ko'rinishidagi optimal interpolyatsion formulaning koeffitsiyentlari quyidagi ko'rinishga ega

$$\begin{aligned}
&C_0\left(z\right)=\frac{3}{K}\cdot\left[B_1\left(z,h\right)+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{\lambda_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{\gamma}G_3\left(z-h\gamma\right)+M_k+\lambda_k^N N_k\right)\right],\\
&C_\beta\left(z\right)=\frac{3}{K}\cdot\left[B_2\left(z,h\right)+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{\lambda_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{|\beta-\gamma|}G_3\left(z-h\gamma\right)+\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\lambda_k^{\beta}M_k+\lambda_k^{N-\beta}N_k\right]\right],\ \beta=1,2,...,N-1,\\
&C_N\left(z\right)=\frac{3}{K}\cdot\left[B_3\left(z,h\right)+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{\lambda_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{N-\gamma}G_3\left(z-h\gamma\right)+\lambda_k^N M_k+N_k\right]\right],
\end{aligned} \tag{55}$$

bu yerda $K,\ B_1\left(z,h\right),\ B_2\left(z,h\right),\ B_3\left(z,h\right),\ A_k,\ \lambda_k$ - ma'lum kattaliklar va $\left|\lambda_k\right|<1$.

12-Teorema. Ushbu $W_2^{(4,0)}\left(0,1\right)$ fazoda teng masofali tugunlarga ega (26) ko'rinishidagi optimal interpolyatsion formulaning koeffitsiyentlari quyidagi ko'rinishga ega

$$C_0(z)=\frac{8}{F_1}\cdot\left[B_1^*(z,h)+\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k^*}{\tau_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}\tau_k^{\gamma}G_4(z-h\gamma)+M_k+\tau_k^N N_k\right)\right],$$

$$C_\beta(z)=\frac{8}{F_1}\cdot\left[B_2^*(z,h)+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k^*}{\tau_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\tau_k^{|\beta-\gamma|}G_4(z-h\gamma)+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\tau_k^{\beta}M_k+\tau_k^{N-\beta}N_k\right]\right],\ \beta=1,2,...,N-1, \tag{56}$$

$$C_N(z)=\frac{8}{F_1}\cdot\left[B_3^*(z,h)+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k^*}{\tau_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\tau_k^{N-\gamma}G_4(z-h\gamma)+\tau_k^N M_k+N_k\right]\right],$$

bu yerda $F_1,\ B_1^*(z,h),\ B_2^*(z,h),\ B_3^*(z,h),\ A_k^*,\ \tau_k$ - ma’lum kattaliklar va $|\tau_k|<1$.

4.3-paragda qo‘llash uchun juda qulay bo‘lgan $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoda $m=3$ va $m=4$ holatlarida ko‘rsatkichli – trigonometrik natural splaynlar koeffitsiyentlari uchun aniq formulalar olingan.

Aytaylik, bizga $x_\beta\in[0,\ 1]$, $\beta = 0, 1, ..., N$ nuqtalarda y_β, $\beta = 0, 1, ..., N$ qiymatlar berilgan bo‘lsin. Quyidagi interpolyatsiya masalasini qaraymiz.

5–Masala. Ushbu (3) yarim normaga minimum beruvchi va

$$S_m(x_\beta)=\varphi(x_\beta),\ \ \beta=0,1,...,N, \tag{57}$$

interpolyatsiya shartlarini qanoatlantiruvchi $S_m(x)\in W_2^{(m,0)}(0,1)$ funksiyani topish, bunda $x_\beta\in[0,\ 1]$ - interpolyatsiya tugun nuqtalari, $\varphi(x_\beta)=y_\beta$ - berilgan qiymatlar.

Shuni ta’kidlash joizki, $m=1$ va $m=2$ hollardagi 5-masalaning yechimi bo‘lgan $S_1(x)$ va $S_2(x)$ natural splaynlar, X.M.Shadimetov va A.R.Hayotovning ishlarida $W_2^{(1,0)}(0,1)$ va $K_2(P_2)$ fazolarda qurilgan splaynlar bilan ustma-ust tushadi.

Keyinchalik, biz $m=3$ bo‘lganda 5-masalani o‘rganib chiqdik va uning yechimi uchun quyidagi formulani oldik

$$S_3(x)=\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma G_3(x-x_\gamma)+d_0e^{-x}+d_{11}e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+d_{21}e^{\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \tag{58}$$

bunda d_0, d_{11} va d_{21} - haqiqiy sonlar.

Quyidagi o‘rinli

13-Teorema. Ushbu $W_2^{(3,0)}(0,1)$ fazoda teng masofali tugunlarga ega (58) ko‘rinishidagi ko‘rsatkichli - trigonometrik natural splayn koeffitsiyentlari quyidagi ko‘rinishga ega

$$C_0=\frac{3}{K}\left[\varphi(0)\left(M_1-\frac{K_1}{K}\right)+\varphi(h)+d_0^- e^{h}+d_{11}^- e^{-\frac{h}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right)-\right.$$
$$\left.-d_{21}^- e^{-\frac{h}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right)+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{\lambda_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{\gamma}\varphi(h\gamma)+M_k+\lambda_k^{N}\cdot N_k\right)\right],$$
$$C_\beta=\frac{3}{K}\left[\varphi(h\beta)\left(M_1-\frac{K_1}{K}\right)+\varphi(h(\beta-1))+\varphi(h(\beta-1))+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{\lambda_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{|\beta-\gamma|}\varphi(h\gamma)+\lambda_k^{\beta}\cdot M_k+\lambda_k^{N-\beta}\cdot N_k\right)\right],\ \beta=1,2,...,N-1,$$
$$C_N=\frac{3}{K}\left[\varphi(1)\left(M_1-\frac{K_1}{K}\right)+\varphi(1-h)+d_0^+ e^{-(1+h)}+d_{11}^+ e^{\frac{1+h}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1+h)\right)+\right.$$
$$\left.+d_{21}^+ e^{\frac{1+h}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1+h)\right)+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{\lambda_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{N-\gamma}\varphi(h\gamma)+\lambda_k^{N}\cdot M_k+N_k\right)\right],$$

bunda $K,\ K_1,\ \mathrm{M}_1,\ A_k, M_k$ va N_k lar ma’lum kattaliklar.

Keyinchalik, biz $m=4$ bo‘lganda 5-masalani o‘rganib chiqdik va uning yechimi uchun quyidagi formulani oldik

$$S_4(x)=\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma G_4(x-x_\gamma)+r_{11}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+r_{12}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+$$
$$+r_{21}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+r_{22}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right), \tag{59}$$

bunda $r_{11},\ r_{12},\ r_{21}$ va r_{22} - haqiqiy sonlar.

Quyidagi o‘rinli

14-Teorema. Ushbu $W_2^{(3,0)}(0,1)$ fazoda teng masofali tugunlarga ega (59) ko‘rinishidagi ko‘rsatkichli - trigonometrik natural splayn koeffitsiyentlari quyidagi ko‘rinishga ega

$$C_0=\frac{8}{F_1}\left[\varphi(0)F_2+\varphi(h)+r_{11}^- e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}h}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}h\right)-r_{12}^- e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}h}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}h\right)+\right.$$
$$\left.+r_{21}^- e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}h\right)-r_{22}^- e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}h\right)+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_{1k}}{\tau_{1k}}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}\tau_{1k}^{\gamma}\varphi(h\gamma)+M_{1k}+\tau_{1k}^{N}\cdot N_{1k}\right)\right],$$
$$C_\beta=\frac{3}{F_1}\left[\varphi(h\beta)F_2+\varphi(h(\beta-1))+\varphi(h(\beta-1))+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_{1k}}{\tau_{1k}}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}\tau_{1k}^{|\beta-\gamma|}\varphi(h\gamma)+\tau_{1k}^{\beta}\cdot M_{1k}+\tau_{1k}^{N-\beta}\cdot N_{1k}\right)\right],\ \beta=1,2,...,N-1,$$

$$C_N = \frac{3}{F_1}\left[\varphi(1)F_2 + \varphi(1-h) + r_{11}^{+} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h)} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h) \right) + \right.$$

$$+ r_{12}^{+} e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h)} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h) \right) + r_{21}^{+} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h)} \cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h) \right) +$$

$$\left. + r_{22}^{+} e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h)} \sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h) \right) + \sum_{k=1}^{2} \frac{A_{1k}}{\tau_{1k}} \left(\sum_{\gamma=0}^{N} \tau_{1k}^{N-\gamma} \varphi(h\gamma) + \tau_{1k}^{N} \cdot M_{1k} + N_{1k} \right) \right],$$

bunda $F_1,\ F_2,,M_{1k}$ ва N_{1k} lar ma’lum kattaliklar.

To‘rtinchi bobning oxirida sonli misollarda $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoda $m=2,3$ holatlarda yarim - normaga eng kichik qiymatini beruvchi ko‘rsatkichli-trigonometrik natural splaynlarning xatoliklari kubik splaynning xatoliklari bilan solishtirilgan. Keyinchalik, $W_2^{(4,0)}(0,1)$ fazodagi optimal interpolyatsiya formulaning xatoligi boshqa mualliflarning sonli natijalari bilan taqqoslangan.

XULOSA

Dissertatsiya ishi funksiyaning o‘zi va m – tartibli umumlashgan hosilasi yig‘indisi kvadrati bilan integrallanuvchi funksiyalar fazosida optimal kvadratur va interpolyatsion formulalarini qurishga, yarim normaga eng kichik qiymat beruvchi ko‘rsatkichli–trigonometrik natural splayn funksiyalar qurishga, shuningdek, diskret operatorlar yordamida Gilbert fazolarida funksionallarni yaqinlashtirishni optimallashtirishga bag‘ishlangan. Undan tashqari, $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoda $m=1,2,3$ va $m=4$ holatlari uchun optimal kvadratur va interpolyatsion formulalarning, ko‘rsatkichli–trigonometrik natural splayn funksiyalarning xatoliklarini baholashni tatqiq qilishga bag‘ishlangan.

Izlanishning asosiy natijalari quyidagilardan iborat.

1. $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoda eksponensial-trigonometrik funksiyalarga aniq bo‘lgan kvadratur va interpolyatsion formulalarning ekstremal funksiyalari topilgan.

2. $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazoda kvadratur va interpolyatsion formulalarning xatolik funksionallari normalarining ko‘rinishlari olingan.

3. $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida m natural soni uchun optimal kvadratur va interpolyatsion formulalarning, ko‘rsatkichli–trigonometrik natural splayn funksiyalarning koeffitsiyentlari uchun chiziqli tenglamalar sistemasi olingan, sistema yechimining mavjudligi va yagonaligi isbotlangan.

4. m toq holi uchun $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ va m juft holi uchun $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\frac{d^m}{dx^m}+1$ differensial operatorlarning $D_m[\beta]$ diskret analoglari qurilgan va ularning ayrim xossalari isbotlangan.

5. $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida optimal kvadratur, interpolyatsion va splayn funksiyalarini qurishning yangi usullari keltirilgan.

6. Ushbu usullarni tadbiq qilish orqali $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida $m=1,2,3$ va $m=4$ hollari uchun eksponensial, trigonometrik va eksponensial-trigonometrik funksiyalarga aniq bo‘lgan optimal kvadratur va interpolyatsion formulalari qurilgan.

7. $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida $m=1,2,3$ va $m=4$ hollari uchun kvadratuir formulalarning optimal xatolik funksionallarining normalari hisoblangan.

8. Ishlab chiqilgan usullarni tadbiq qilish orqali $W_2^{(m,0)}(0,1)$ fazosida $m=1,2,3$ va $m=4$ hollari uchun eksponensial-trigonometrik funksiyalarga aniq bo‘lgan interpolyatsion formulalar va ko‘rsatkichli–trigonometrik natural splayn funksiyalari qurilgan.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

БОЛТАЕВ АЗИЗ КУЗИЕВИЧ

ОПТИМИЗАЦИЯ ПРИБЛИЖЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛОВ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ПОМОЩЬЮ ДИСКРЕТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

01.01.03 – Вычислительная и дискретная математика

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора (DSc) по
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

ТАШКЕНТ – 2025

Тема диссертации доктора (DSc) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за № B2025.2.DSc/FM300.

Диссертация выполнена в институте математики имени В.И.Романовского АНРУз.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (http://ik-fizmat.nuu.uz/) и на Информационно-образовательном портале «Ziyonet» (www.ziyonet.uz)

Научный консультант:	**Шадиметов Холматвай Махкамбаевич** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Утеулиев Ниетбай Утеулиевич** доктор физико-математических наук, профессор
	Худойберганов Мирзоали Уразалиевич доктор физико-математических наук, профессор
	Эшкуватов Зайнидин Каримович доктор физико-математических наук
Ведущая организация:	**Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН**

Защита диссертации состоится «____» _____________2025 года в ____ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за №_____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «____» _______________2025 года.
(протокол рассылки №________ от «____» _______________2025 года).

М.М. Арипов
Председатель Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., профессор

З.Р. Рахмонов
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н.

Р.Д. Алоев
Председатель научного семинара при Научном совете по присуждению ученой степени доктора наук, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация докторский диссертации (DSc))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Большая часть исследований, проводимых сегодня в мире, связана с решением практических задач. В частности, требуется построение и реализация оптимальных кубатурных, квадратурных и интерполяционных формул, натуральные сплайны дающие наименьшее значение полу-норме, имеющие широкое применение в таких областях, как анализ сейсмограмм землетрясений и синтезированных голограмм, в геофизике и промышленной инженерии, моделирование магнитных и тепловых полей, моделирование оптических систем, исследование экономических прогнозов, градостроительство. В связи с этим важно использовать квадратурных и интерполяционных формул, точных для показательных, тригонометрических и экспоненциально-тригонометрических функций, построение показательно-тригонометрических натуральных сплайнов, дающих наименьшее значение полу-норму в пространстве функций, интегрирующийся с квадратом суммы самой функции и ее обобщенной производной m-го порядка, а также оптимизация аппроксимации функционалов в пространствах Гильберта с помощью дискретных операторов являются важными задачами вычислительной математики.

В мире ведутся исследования по построению интерполяционных формул и сплайнов для аппроксимации функций, а также построение оптимальных кубатурных и квадратурных формул для численного вычисления определенных интегралов. Полученные формулы широко используются в нефтегазовой отрасли, в динамике жидкостей и газов, экономическом и финансовом прогнозировании возникающих при приближенном решении уравнений математикой физики, а также при аппроксимации функций активов и потерь в машинном обучении искусственного интеллекта. Поэтому особое внимание уделяется построению оптимальных квадратурных и интерполяционных формул, экспоненциально-тригонометрических сплайнов, дающие наименьшее значение полу-нормы и оценка порядка их аппроксимации, а также оптимизация аппроксимации функционалов в гильбертовых пространствах с помощью дискретных операторов.

В нашей стране реализуются комплексные меры по обработке изображений компьютерной томографии, совершенствованию экономической деятельности, развитию математических методов прогнозирования данных в информационных системах, имеющих научное и практическое применение на уровне фундаментальных наук, и достигаются определенные результаты. В Республике Узбекистан на 2020-2023 годы поставлены важные задачи по улучшению качества образования по математическим наукам, повышению эффективности и практической значимости научных исследований, в том числе по направлениям «Алгебра, математический и функциональный анализ, дифференциальные уравнения, математическая физика, математическое моделирование, вычислительная математика и дискретная математика, теория вероятностей и математическая статистика»[2]. При реализации этих задач большое значение имеет оптимизация приближения функционалов в Гильбертовых пространствах с помощью дискретных операторов.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан УП –№ 4947 от 07 февраля 2017 года “О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан”, УП-№60 от 28 января 2022 года “О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы”, в постановлениях ПП – № 2789 от 17 февраля 2017 года “О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности”, ПП – № 2909 от 20 апреля 2017 года “О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования”, ПП –№ 3682 от 27 апреля 2018 года “О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов”, ПП – № 4708 от 07 мая 2020 года “О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики”, ПП - №358 от 14 октября 2024 года “Об утверждении Стратегии развития технологий искусственного интеллекта до 2030 года”, а также в других нормативно–правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации.

Научные исследования по построению сплайнов, интерполяционных формул, квадратурных и кубатурных формул, а также оценке их сходимости проводятся в ведущих научных исследовательских центрах и высших учебных заведениях мира, включая Институт математики им. С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук (Россия), Институт вычислительной математики и математической геофизики Российской академии наук (Россия), Математический институт вычислительного центра Уфа научного центра (Россия), Сибирский федеральный университет, Новосибирский, Санкт-Петербургский, Московский государственные университеты (Россия), Университет Бабеша-Боляи (Румыния), Математический институт Сербской академии наук и искусств (Сербия), Северный китайский университет технологий (Китай), Пекинский нормальный университет (Китай), Корейский институт науки и технологий (Южная Корея), Корейский институт передовых исследований (Южная Корея), Университет Фукуи (Япония), Токийский университет (Япония), Университет Путра Малайзия (Малайзия), Университет Малая (Малайзия), Стэнфордский университет (США), Университет Висконсин-Мэдисон

[2] Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП–4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 07 мая 2020 года.

(США), Гарвардский университет (США), Университет Калабрии (Италия), Университет Падуи (Италия), Университет Базиликаты (Италия), Университет Сантьяго-де-Компостела (Испания), Технический университет Брауншвейга (Германия), Институт математики Университета Йены (Германия), Университет Жозефа Фурье (Франция), Университет Осло (Норвегия), Институт математики им. В.И. Романовского АН РУз, Национальный университет имени Мирзо Улугбека (Узбекистан).

Исследования, проводимые в мире по построению сплайнов, интерполяционных формул, квадратурных и кубатурных формул, а также оценке их сходимости, привели к следующим результатам: на основе сплайн-функций и интерполяционных формул разработаны различные интерполяционные и аппроксимационные алгоритмы, скорость их сходимости оценена с математической точки зрения, а эффективность их применения в практических задачах доказана. Например, в области медицины и компьютерной томографии в Германии, США и Японии в ведущих научных центрах и университетах разработано множество методов сегментации изображений, в области искусственного интеллекта и машинного обучения университеты Китая и США позволили предсказывать с меньшими ошибками и исследовать сложные функции в нейронных сетях, в области экономического и статистического прогнозирования в университетах Италии, Франции и Норвегии использованы для создания динамических моделей, анализа рисков и принятия решений, в области цифровой обработки сигналов в ведущих научных центрах России, Китая и Кореи достигнуты успехи в записи более чистого звука и получении качественного видео, улучшении качества сжатых файлов; квадратурные и кубатурные формулы в основном применяются в сложном математическом моделировании и решении кратных интегральных задач. Научные исследования в этой области проводятся в Институте математики имени С.Л. Соболева Сибирского отделения Российской академии наук, Математическом институте вычислительного центра Уфа научного центра, Сибирском федеральном университете (Россия), Университете Калабрии, Университете Падуи (Италия), Университете Висконсин-Мэдисон (США), в области моделирования инженерных и технологических процессов в Университете Фукуи, Токийском университете (Япония), Техническом университете Брауншвейга, Институте математики Университета Йены (Германия), Северном китайском университете технологий, Пекинском нормальном университете (Китай), в области статистического анализа и прогнозирования в Университете Сантьяго-де-Компостела (Испания), Университете Жозефа Фурье (Франция), Университете Путра Малайзия, Университете Малая (Малайзия), в области искусственного интеллекта и машинного обучения в Корейском институте науки и технологий, Корейском институте передовых исследований (Южная Корея), Стэнфордском университете, Гарвардском университете (США), в области моделирования и прогнозирования в экономике и социальных науках в Университете Осло (Норвегия), Университете Бабеш-Боляи (Румыния), Математическом институте Сербской академии наук и искусств (Сербия), в области образования и научных исследований в Институте математики имени В.И. Романовского Академии наук Узбекистана, Национальном университете имени Мирзо Улугбека (Узбекистан).

В мире ведутся научные исследования по построению формул интерполяции, квадратур и натуральных сплайнов и их применению на практике. В рамках данного исследования изучаются такие приоритетные направления, как оптимизация аппроксимации функционалов в пространствах Гильберта с помощью дискретных операторов, разработка новых алгоритмов для повышения их эффективности, вычисление функционалов погрешности и получение системы типа Винера-Хопфа с использованием метода неопределенных множителей Лагранжа для нахождения оптимальных коэффициентов, доказывается существования и единственности решения этой системы, построение дискретного аналога дифференциальных операторов высших порядков для нахождения явного вида оптимальных коэффициентов и построение экспоненциально-тригонометрических сплайнов, дающие наименьшее значение полу-нормы, построение интерполяционных и квадратурных формул, точных для экспоненциальных и тригонометрических функций, и оценка порядка их аппроксимации.

Степень изученности проблемы. Сплайн-функции и интерполяционные формулы являются одним из важнейших инструментов современной вычислительной математики для численного решения задач стохастических дифференциальных уравнений и функционального анализа. Основатель теории сплайнов И. Шёнберг первым предложил использовать кусочно-полиномы для построения сглаженных интерполяций. К. Де Бур внес значительный вклад в разработку численных методов аппроксимации сплайнов. Н. Дин разработал рекурсивные алгоритмы на основе сплайнов и исследовал методы многомерной сплайн-интерполяции. М. Унсер изучал взаимосвязь между сплайнами и вейвлет-анализом и их применение в обработке медицинских изображений (например, МРТ и КТ). Б. Розенберг, М. Лапейр и Жан-Клод Рош активно использовали сплайны в компьютерной графике для создания плавных кривых и трехмерных моделей. В частности, значительный прогресс достигнут в разработке B-сплайнов и их применении в промышленном дизайне и инженерной визуализации. Л. Вэйминь, Ч. Юньцзи и С. Фэн применяют сплайн-функции в географических информационных системах (ГИС), инженерных расчетах, моделировании и сельскохозяйственных технологиях. Т. Сираиши, Й. Такахаши и Й. Исакава разработали методы улучшения анимации с использованием сплайнов.

Построение квадратурных и кубатурных формул для приближённого вычисления определённых и кратных интегралов является одной из значимых задач вычислительной математики. Решением этой задачи занимались многие известные математики, например, в работах С.Л. Соболева разработан новый алгоритм построения оптимальных квадратурных и кубатурных формул, используемых для нахождения аналитических выражений оптимальных коэффициентов и применил их к сложным системам и технике. Активное усовершенствование квадратурных методов для численных методов решения дифференциальных уравнений и оптимизационных задач связано с работами М. Хаммерлина и Й. Штёра. Они предложили методы, основанные на адаптивных сетках узлов и оптимизации коэффициентов, что позволяет достигать более высокой точности при решении сложных задач. А в работах Р.П. Брент и С.Б. Молер были разработаны новые численные алгоритмы, которые позволили значительно улучшить точность и скорость работы квадратурных формул. Ф. Бассо и М. Бенасси, занимались развитием математической теории квадратурных формул, а также их применением в численных расчетах и моделировании физических процессов. Они предложили методы для построения кубатурных формул, использующих много узловые сетки, что способствует точному решению интегралов в многомерных пространствах. М. Милованович и Д. Йованович предложили новые подходы для оптимизации квадратурных и кубатурных формул, которые активно используются для моделирования промышленных процессов и физико-математических задач. Они разработали методы, основанные на минимизации погрешностей через использование адаптивных квадратурных узлов и многосеточных алгоритмов. Х.К. Ли и Дж.Х. Ким, разработали новые методы оптимизации движения роботов и улучшения анимации, применяя квадратурные формулы для решения задач робототехники и компьютерной графики. Они использовали адаптивные методы для определения оптимальных траекторий и минимизации погрешностей при расчете движения роботов, а также для улучшения качества анимации в цифровых моделях.

С.Л. Соболев, И.П. Мысовских, В.И. Лебедев, Г.Н. Салихов, М.И. Исраилов и Э.А. Шамсиев построили кубатурные формулы на сфере. Оптимизацией приближенного интегрированием в функциональных пространствах занимались С.Л. Соболев, С.М. Николский, А. Сард, Н.П. Корнейчук, А.А. Женсыкбаев и другие. По интерполяционным сплайн функцией получены существенные результаты в работах И. Шёнберга, П. Холлидея, К. де Бура, Ж. Алберга, Э. Нилсона, Уолша, П. Лорана, С. Стечкина, Ю. Субботина, Ю. Завьялова, В. Мирошниченко, М. Игнатева и А. Певния. Следует отметить, что для построения оптимальных интерполяционных, квадратурных, кубатурных и разностных формул в функциональных пространствах Х.М. Шадиметов, А.Р. Хаётов, Ф.А. Нуралиев, С.А. Бахрамов, О.Х. Гулямов, Н. Маматова, С.С. Аъзамов, Д.М. Ахмедов, С.С. Бабаев, Р.Н. Мирзакабилов разработали новые оптимальные алгоритмы. Для приближенного решения нелинейных параболических, гиперболических уравнений и систем М.М. Арипов, Р.Дж. Алоев, Д. Утебаев, Ч.Б. Нормуродов, З.Р. Рахмонов, М.У. Худойберганов и другие разработали новые асимптотические методы и доказали устойчивость различных разностных схем.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами научно-исследовательской организации, в котором выполняется

диссертация. Диссертационное исследование выполнено в рамках календарного плана лаборатории вычислительной математики Института математики им. В.И.Романовского Академия Наук Республики Узбекистан по теме “Построение оптимальных квадратурных, интерполяционных, дифференциальных формул в Гильбертовых пространствах и их приложения к решению интегральных уравнений”.

Целью исследования являются построение натуральных сплайнов, оптимальных интерполяционных и квадратурных, точных на показательно-тригонометрических функциях и вычисление норм их функционалов погрешностей в пространстве Гильберта.

Задачи исследования.

найти верхних оценок погрешностей интерполяционных, квадратурных формул и сплайн функции в пространстве функции интегрируемых с квадратом суммы самой функции и ее обобщенной производной m–го порядка;

получить систем линейных алгебраических уравнений для нахождения оптимальных коэффициентов интерполяционных, квадратурных формул и сплайн функции минимизируя по коэффициентам полученные верхних оценок при фиксированных узлах;

доказать существования и единственность решений полученных систем интерполяционных, квадратурных формул и сплайн функции;

построить дискретных операторов $D_m[\beta]$ для нахождения оптимальных коэффициентов интерполяционных, квадратурных формул и сплайн функции;

найти аналитические выражения для оптимальных коэффициентов интерполяционных, квадратурных формул и сплайн функции;

вычислить оптимальных норм интерполяционных, квадратурных формул и сплайн функции.

Объект исследования. Натуральные сплайны, интерполяционные и квадратурные и формулы, дискретный аналог дифференциальных операторов высших порядков, функционалы погрешностей, пространство Гильберта.

Предмет исследования. Экстремальные функции, натуральные сплайны, оптимальные интерполяционные и квадратурные формулы, точных на экспоненциально-тригонометрических функциях, дискретные аналоги дифференциальных операторов $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ для нечетных m и $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\frac{d^m}{dx^m}+1$ для четных m, функции из гильбертово пространства $W_2^{(m,0)}(0,1)$.

Методы исследования. Исследование основано на использовании методов вычислительной математики и функционального анализа в сочетании с положениями теории дифференциальных уравнений, обобщённых функций и функций с дискретным аргументом

Научная новизна исследования заключается в следующем:

найдены верхние оценки погрешностей интерполяционных, квадратурных формул и сплайн функции с использованием ее экстремальных функций в пространстве функции интегрируемых с квадратом суммы самой функции и ее обобщенной производной m–го порядка;

получены системы линейных алгебраических уравнений для нахождения оптимальных коэффициентов интерполяционных, квадратурных формул и сплайн функции минимизируя по коэффициентам полученных верхних оценок при фиксированных узлах;

доказана существования и единственность решений полученных систем через несобственной их основной матрицы интерполяционных, квадратурных формул и сплайн функции;

построены дискретные операторы $D_m[\beta]$ использованием преобразований Фурье и формул теории вычетов для нахождения оптимальных коэффициентов интерполяционных, квадратурных формул и сплайн функции;

найдены аналитические выражения для оптимальных коэффициентов с помощью лискретных операторов интерполяционных, квадратурных формул и сплайн функции;

вычислена оптимальные нормы с использованием коэффициентов интерполяционных, квадратурных формул и сплайн функции.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

построенная оптимальная квадратурная формула используется при построении математических моделей динамических процессов, формирующихся в сложных системах;

оптимальные коэффициенты построенной квадратурной формулы использовались при построении схемы численного решения задачи дважды нелинейной кросс-диффузии;

построенная оптимальная интерполяционная формула используется при построении схемы численного решения интегро-дифференциальных уравнений некоторых динамических процессов в геосфере.

Достоверность результатов исследования обоснована использованием методов теории квадратурных формул, методов вычислительной математики, функционального анализа, теории функций дискретного аргумента, а также строгостью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость полученных результатов диссертационной работы заключается в том, что построены квадратурные и интерполяционные формулы, точных для показательных, тригонометрических и экспоненциально-тригонометрических функций, построены показательно-тригонометрические натуральные сплайны, дающие наименьшее значение полу-нормы в пространстве функций, интегрирующийся с квадратом суммы самой функции и ее обобщенной производной m-го порядка, а также оптимизацией аппроксимации функционалов в пространствах Гильберта с помощью дискретных операторов.

Практическая значимость диссертации состоит в том, что полученные оптимальные квадратурные и интерполяционные формулы, точных для показательных, тригонометрических и экспоненциально-тригонометрических функций, а также экспоненциально-тригонометрические натуральные сплайны, дающие наименьшее значение полу-нормы, могут быть применены при моделирование магнитных и тепловых полей, моделирование оптических систем, а также экономические прогнозы.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных научных результатов по построению квадратурных и интерполяционных формул, точных на показательных, тригонометрических и экспоненциально-тригонометрических функций, построению показательно-тригонометрических натуральных сплайнов, дающие наименьшее значение полу-нормы в пространстве функций, интегрирующийся с квадратом суммы самой функции и ее обобщенной производной m-го порядка, а также оптимизации аппроксимации функционалов в пространствах Гильберта с помощью дискретных операторов:

построенная оптимальная квадратурная формула в гильбертовым пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ была использована для построения математических моделей динамических процессов, формирующихся в сложных системах в практическом проекте № 122041800031-8 «Численные методы решения краевых задач математической физики и компьютерное проектирование оптимальных сетевых систем». (Институт прикладной математики и автоматизации Кабардино-Балкарского научного центра РАН, справка № 01-03/62 от 17 июня 2025 года). В результате она позволила построить математические модели динамических процессов, происходящих при автоматизированном проектировании оптимальных систем;

оптимальные квадратурные формулы, точные для показательно-тригонометрических функций с использованием метода Соболева в гильбертовым пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ использованы в фундаментальном проекте № F-4-30 по теме «Исследование качественных свойств дважды нелинейной перекрестной системы под воздействием конвективного переноса, переменной плотности, источника или поглощения», а оптимальные коэффициенты построенных квадратурных формул использованы для численного решения краевых задач для перекрестно-диффузионных систем. (Национальный Университет Узбекистана, справка № 04/11-7602 от 17 июня 2025 года). Использование научных результатов позволило построить схему и алгоритм численного решения дважды нелинейной задачи перекрестной диффузии и визуализировать численные результаты;

построенные оптимальные квадратурные формулы были использованы для расчета интегро-дифференциальных уравнений некоторых динамических процессов в геосфере в практическом проекте № 22-11-00064 «Моделирование динамических процессов в геосфере с учетом наследственности». (Справка № 264 Института космофизических исследований и распространения радиоволн ДВО РАН от 19 июня 2025 г.). В результате удалось построить схему численного решения интегро-дифференциальных уравнений некоторых динамических процессов в геосфере.

Апробация результатов исследования. Результаты диссертационного исследования обсуждались на 20 научно-практических конференциях, в том числе, на 15 международных и 5 республиканской научно-практической конференции.

Опубликованность результатов исследования. По теме диссертационного исследования подготовлено и опубликовано 44 научные публикации, из которых 18 входят в перечень научных изданий, утверждённых Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для представления докторских диссертаций. В их числе 8 статей, опубликованных в зарубежных журналах, и 10 статей, вышедших в республиканских научных изданиях. Кроме того, автору принадлежат три свидетельства об официальной регистрации программ для электронных вычислительных машин.

Объём и структура диссертации. Диссертация содержит 194 страниц и состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обоснованы актуальность и востребованность темы диссертации, определено соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики, приведен обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и указана степень изученности проблемы, сформулированы цели и задачи, выявлены объект и предмет исследования, изложены научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, даны сведения о внедрении результатов исследования, об опубликованных работах и о структуре диссертации.

В первой главе диссертации, названной **«Приближения функционалов погрешностей интерполяционных и квадратурных формул в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$»,** поставлена задачи оптимизации квадратурных и интерполяционных формул. Здесь найдена экстремальные функции квадратурных и интерполяционных формул, с помощью экстремальной функции найдена верхняя оценка погрешностей исследуемых формул, для минимизации верхней оценки погрешностей квадратурных и интерполяционных формул по коэффициентам получена система типа Виннера-Хопфа и доказана существования и единственности оптимальных квадратурных и интерполяционных формул в гильбертовом пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$.

Рассмотрим следующую квадратурную формулу

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi(x_\beta), \tag{1}$$

где $C[\beta]$ и x_β $\left(x_\beta \in [0,1]\right)$ называются *коэффициентами* и *узлами* квадратурной формулы (1), φ является элементом класса $W_2^{(m,0)}(0,1)$, где этот класс определяется следующим образом

$$W_2^{(m,0)}(0,1) = \left\{\varphi : [0,1] \to \mathbb{R} \,\middle|\, \varphi^{(m-1)} \text{абсолютно непрерывна и } \varphi^{(m)} \in L_2(0,1)\right\}.$$

Класс функций $W_2^{(m,0)}(0,1)$ со скалярным произведением

$$\langle \varphi, \psi \rangle_m = \int_0^1 \left(\varphi^{(m)}(x) + \varphi(x)\right)\left(\psi^{(m)}(x) + \psi(x)\right)dx \tag{2}$$

является гильбертовым пространством, если мы отождествляем функции, которые отличаются от решения уравнения $\varphi^{(m)}(x) + \varphi(x) = 0$. Следовательно, $W_2^{(m,0)}(0,1)$ это гильбертово пространство, снабженной полунормой

$$\left\|\varphi \middle| W_2^{(m,0)}\right\| = \left\{\int_0^1 \left[\varphi^{(m)}(x) + \varphi(x)\right]^2 dx\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{3}$$

соответствующей скалярному произведению (2).

Следующая разность между интегралом и квадратурной суммой

$$\int_0^1 \varphi(x)dx - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\varphi(x_\beta) = (\ell, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x)\varphi(x)dx \tag{4}$$

называется погрешностью квадратурной формулы (1), здесь функционал ℓ называется *функционалом погрешности* формулы (1) и имеет следующий вид

$$\ell(x) = \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^{N} C[\beta]\delta(x - x_\beta), \tag{5}$$

где $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ − характеристическая функция отрезка $[0,1]$, δ –дельта-функция Дирака.

Согласно неравенству Коши-Шварца имеем следующую оценку

$$\left|(\ell, \varphi)\right| \le \left\|\varphi \middle| W_2^{(m,0)}\right\| \left\|\ell \middle| W_2^{(m,0)*}\right\|.$$

Отсюда заключаем, что абсолютная погрешность квадратурной формулы (1) в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ оценивается сверху с помощью нормы функционала погрешности ℓ в сопряженном пространстве $W_2^{(m,0)*}(0,1)$.

Откуда получаем следующую задачу.

Задача 1. *Вычислить норму* $\left\|\ell \middle| W_2^{(m,0)*}\right\|$ *функционала погрешности (5) квадратурной формулы* (1).

Из равенства (5) видно, что норма $\left\|\ell\left|W_2^{(m,0)*}\right.\right\|$ функционала погрешности зависит от коэффициентов $C[\beta]$ и узлов x_β.

Для того чтобы построить оптимальную квадратурную формулу вида (1) в смысле Сарда в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ требуется решить следующую задачу.

Задача 2. *Найти коэффициенты* $C[\beta]$ *удовлетворяющие равенству*

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}\left|W_2^{(m,0)*}\right.\right\| = \inf_{C[\beta]}\left\|\ell\left|W_2^{(m,0)*}\right.\right\|$$

в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$.

Чтобы вычислить норму функционала погрешности (5) используем понятие экстремальной функции.

Функция $\psi_\ell \in W_2^{(m,0)}(0,1)$ для которой выполняется равенство

$$(\ell,\psi_\ell) = \left\|\ell \mid W_2^{(m,0)*}\right\| \cdot \left\|\psi_\ell \mid W_2^{(m,0)}\right\| \tag{6}$$

называется *экстремальной функцией* функционала ℓ определенный равенством (5).

Так как пространство $W_2^{(m,0)}(0,1)$ является гильбертовым, то по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала существует единственная функция ψ_ℓ из пространства $W_2^{(m,0)}(0,1)$, для которой выполняется следующее равенство

$$(\ell,\varphi) = \langle \psi_\ell, \varphi\rangle_{W_2^{(m,0)}} \tag{7}$$

и $\left\|\ell \mid W_2^{(m,0)*}\right\| = \left\|\psi_\ell \mid W_2^{(m,0)}\right\|$, где $\langle \psi_\ell, \varphi\rangle_{W_2^{(m,0)}}$ – скалярное произведение двух функций ψ_ℓ и φ из пространства $W_2^{(m,0)}(0,1)$.

Займемся решением уравнения (7). Интегрируя по частям правую часть уравнения (7), имеем

$$(\ell,\varphi) = (-1)^m \int_0^1 \left(\psi_\ell^{(2m)}(x) + \psi_\ell^{(m)}(x) + (-1)^m \psi_\ell^{(m)}(x) + (-1)^m \psi_\ell(x)\right)\varphi(x)\,dx +$$

$$+\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\left(\psi_\ell^{(m+s)}(x) + \psi_\ell^{(s)}(x)\right)\varphi^{(m-s-1)}(x)\Big|_0^1.$$

Отсюда мы приходим к следующим двум случаям для нечетных и четных натуральных значений m, соответственно:

$$(\ell,\varphi) = (-1)^m \int_0^1 \left(\psi_\ell^{(2m)}(x) - \psi_\ell(x)\right)\varphi(x)\,dx +$$

$$+\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\left(\psi_\ell^{(m+s)}(x) + \psi_\ell^{(s)}(x)\right)\varphi^{(m-s-1)}(x)\Big|_0^1 \quad \text{при } m\text{- нечетном} \tag{8}$$

и

$$(\ell,\varphi)=\int_0^1\left(\psi_\ell^{(2m)}(x)+2\psi_\ell^{(m)}(x)+\psi_\ell(x)\right)\varphi(x)dx+$$
$$+\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\left(\psi_\ell^{(m+s)}(x)+\psi_\ell^{(s)}(x)\right)\varphi^{(m-s-1)}(x)\Big|_0^1 \quad \text{при } m\text{- четном} \qquad (9)$$

Ясно, что для нахождения экстремальной функции ψ_ℓ необходимо рассматривать уравнения (8) и (9) в зависимости от соответствующих значений m.

Сначала предполагаем, что m - нечетное натуральное число.

Тогда, учитывая единственность функции ψ_ℓ, из (8) получаем уравнение

$$\psi_\ell^{(2m)}(x)-\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x) \qquad (10)$$

с краевыми условиями

$$\left[\left(\psi_\ell^{(m+i)}(x)+\psi_\ell^{(i)}(x)\right)\right]\Big|_{x=0}^{x=1}=0,\quad i=\overline{0,m-1}\ . \qquad (11)$$

Доказана следующая

Теорема 1. Для нечетных m решение уравнения (10) с краевыми условиями (11) является экстремальной функцией ψ_ℓ функционала погрешности ℓ квадратурной формулы (1) и имеет вид

$$\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*G_m(x)+Y_m(x), \qquad (12)$$

где

$$G_m(x)=\frac{\text{sign}x}{2m}\cdot\left[\sinh(\text{x})+\sum_{k=1}^{m-1}e^{x\cdot\cos\left(\frac{\pi k}{m}\right)}\cdot\cos\left(x\sin\left(\frac{\pi k}{m}\right)+\frac{\pi k}{m}\right)\right], \qquad (13)$$

$$Y_m(x)=d_0e^{-x}+\sum_{k=1}^{\frac{m-1}{2}}e^{-x\cdot\cos\frac{2\pi k}{m}}\left[d_{1k}\cos\left(x\sin\left(\frac{2\pi k}{m}\right)\right)+d_{2k}\sin\left(x\sin\left(\frac{2\pi k}{m}\right)\right)\right], \qquad (14)$$

где d_0, d_{1k} и d_{2k} - действительные числа.

Так как функционал погрешности ℓ определен в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$, должны выполняться следующие условия

$$(\ell,e^{-x})=0\ , \qquad (15)$$

$$\left(\ell,e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\cos\left(x\sin\frac{2\pi k}{m}\right)\right)=0,\quad k=\overline{1,\frac{m-1}{2}}\ , \qquad (16)$$

$$\left(\ell,e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\sin\left(x\sin\frac{2\pi k}{m}\right)\right)=0,\quad k=\overline{1,\frac{m-1}{2}}\ . \qquad (17)$$

Это означает, что квадратурная формула (1) при m-нечетном будет точна на функциях:

$$e^{-x},\ e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\cos\left(x\sin\frac{2\pi k}{m}\right),\ e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\sin\left(x\sin\frac{2\pi k}{m}\right),\ k=\overline{1,\frac{m-1}{2}}.$$

Теперь, мы предполагаем, что m - четное натуральное число.

Тогда, учитывая единственность функции ψ_ℓ, из (9) получаем уравнение

$$\psi_\ell^{(2m)}(x)+2\psi_\ell^{(m)}(x)+\psi_\ell(x)=\ell(x) \tag{18}$$

с краевыми условиями

$$\left[\left(\psi_\ell^{(m+i)}(x)+\psi_\ell^{(i)}(x)\right)\right]\Big|_{x=0}^{x=1}=0,\quad i=\overline{0,m-1}\ . \tag{19}$$

Доказана следующая

Теорема 2. Для четных m решение уравнения (18) с краевыми условиями (19) является экстремальной функцией ψ_ℓ функционала погрешности ℓ квадратурной формулы (1) и имеет вид

$$\psi_\ell(x)=(-1)^m\ell(x)*G_m(x)+Y_m(x), \tag{20}$$

где

$$G_m(x)=\frac{\operatorname{sign}x}{2m^2}\cdot\sum_{k=1}^{m}\left[(1-m)e^{x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\cos\left(x\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)+\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)+\right.$$
$$\left.+xe^{x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\cos\left(x\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)+\frac{2\pi\cdot(2k-1)}{m}\right)\right] \tag{21}$$

и

$$Y_m(x)=\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}e^{-x\cdot\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\left[r_{1k}\cos\left(x\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)+r_{2k}\sin\left(x\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)\right] \tag{22}$$

где r_{1k} и r_{2k} - действительные числа.

Так как функционал погрешности ℓ определен в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$, должны выполняться следующие условия

$$\left(\ell,e^{-x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\cos\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)=0,\quad k=\overline{1,\frac{m}{2}}\ , \tag{23}$$

$$\left(\ell,e^{-x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\sin\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)=0,\quad k=\overline{1,\frac{m}{2}}\ . \tag{24}$$

Отсюда заключаем, что квадратурная формула (1) при m-четном будет точна на функциях:

$$e^{-x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\cos\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right),\ e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\sin\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right),\ k=\overline{1,\frac{m}{2}}.$$

Далее, с помощью экстремальных функции (12) и (20) найдено представление квадрата нормы функционала погрешности ℓ, которое имеет вид

$$\left\|\ell|W_2^{(m,0)*}\right\|^2=(-1)^m\left[\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C[\beta]C[\gamma]G_m(x_\beta-x_\gamma)+\int_0^1\int_0^1G_m(x-y)dxdy-\right.$$
$$\left.-2\sum_{\beta=0}^{N}C[\beta]\int_0^1G_m(x-x_\beta)dx\right]. \tag{25}$$

Таким образом, задача 1 решена полностью. Теперь мы рассмотрим слдующую интерполяционную формулу

$$\varphi(z) \cong P_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\varphi(x_\beta), \tag{26}$$

где $P_\varphi(z) = \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\varphi(x_\beta)$ – интерполяционная формула и

$$\ell(x,z) = \delta\left(x-z\right) - \sum_{\beta=0}^{N} C_\beta(z)\delta(x-x_\beta) \tag{27}$$

функционал погрешности этой интерполяционной формулы, $C_\beta(z)$ – коэффициенты, а x_β – узлы интерполяционной формулы $P_\varphi(z)$, $x_\beta \in [0,1]$, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака, функция $\varphi(x)$ принадлежит гильбертову пространству $W_2^{(m,0)}(0,1)$.

Погрешностью интерполяционной формулы (26) называется разность

$$(\ell,\varphi) = \varphi(z) - P_\varphi(z). \tag{28}$$

По неравенству Коши-Шварца абсолютная погрешность (28) оценивается следующим образом

$$\left|(\ell,\varphi)\right| \le \|\varphi\|_{W_2^{(m,0)}} \cdot \|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}},$$

где

$$\|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}} = \sup_{\varphi,\|\varphi\|\neq 0} \frac{\left|(\ell,\varphi)\right|}{\|\varphi\|_{W_2^{(m,0)}}}.$$

Поэтому для оценки погрешности интерполяционной формулы (26) по функциям пространства $W_2^{(m,0)}(0,1)$ требуется найти норму функционала погрешности $\ell\left(x,z\right)$ в сопряженном пространстве $W_2^{(m,0)*}(0,1)$.

Отсюда мы получим

Задача 3. *Найти норму функционала погрешности $\ell\left(x,z\right)$ интерполяционной формулы (26) в пространстве $W_2^{(m,0)*}(0,1)$.*

Ясно, что норма функционала погрешности $\ell\left(x,z\right)$ зависит от коэффициентов $C_\beta(z)$ и узлов x_β. Задача минимизации величины $\|\ell\|$ по коэффициентам $C_\beta(z)$ является линейной задачей, а по узлам x_β, в общем случае, нелинейной и сложной задачей. Здесь мы рассматриваем задачу минимизации величины $\|\ell\|$ коэффициентами $C_\beta(z)$ при фиксированных узлах x_β.

Коэффициенты $\overset{\circ}{C}_\beta(z)$ (если они существуют), удовлетворяющие следующему равенству

$$\left\|\overset{\circ}{\ell}\right\|_{W_2^{(m,0)*}} = \inf_{C_\beta(z)} \|\ell\|_{W_2^{(m,0)*}} \tag{29}$$

называются *оптимальными коэффициентами* и соответствующая им интерполяционная формула

$$\overset{\circ}{P}_{\varphi}(z)=\sum_{\beta=0}^{N}\overset{\circ}{C}_{\beta}(z)\varphi(x_{\beta})$$

называется *оптимальной интерполяционной формулой* в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$.

Таким образом, для построения оптимальной интерполяционной формулы вида (26) в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ нам необходимо решить следующую задачу.

Задача 4. *Найти коэффициенты* $\overset{\circ}{C}_{\beta}(z)$, *удовлетворяющие равенству (29) при фиксированных узлах* x_{β}.

Чтобы вычислить норму функционала погрешности (27) используем понятие экстремальной функции.

Функция $U_{\ell}\in W_2^{(m,0)}(0,1)$ для которой выполняется равенство

$$\left(\ell,U_{\ell}\right)=\left\|\ell\,|\,W_2^{(m,0)*}\right\|\cdot\left\|U_{\ell}\,|\,W_2^{(m,0)}\right\| \qquad (30)$$

называется *экстремальной функцией* функционала $\ell(x,z)$ определенный равенством (27).

Так как пространство $W_2^{(m,0)}(0,1)$ является гильбертовым, то по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала существует единственная функция U_{ℓ} из пространства $W_2^{(m,0)}(0,1)$, для которой выполняется следующее равенство

$$\left(\ell,\varphi\right)=\left\langle U_{\ell},\varphi\right\rangle_{W_2^{(m,0)}} \qquad (31)$$

и $\left\|\ell\,|\,W_2^{(m,0)*}\right\|=\left\|U_{\ell}\,|\,W_2^{(m,0)}\right\|$, где $\left\langle U_{\ell},\varphi\right\rangle_{W_2^{(m,0)}}$ – скалярное произведение двух функций U_{ℓ} и φ из пространства $W_2^{(m,0)}(0,1)$.

Займемся решением уравнения (31). Интегрируя по частям правую часть уравнения (31), имеем

$$\left(\ell,\varphi\right)=(-1)^m\int_0^1\Big(U_{\ell}^{(2m)}(x)+U_{\ell}^{(m)}(x)+(-1)^mU_{\ell}^{(m)}(x)+(-1)^mU_{\ell}(x)\Big)\varphi(x)dx+$$

$$+\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\Big(U_{\ell}^{(m+s)}(x)+U_{\ell}^{(s)}(x)\Big)\varphi^{(m-s-1)}(x)\Big|_0^1.$$

Отсюда мы приходим к следующим двум случаям для нечетных и четных натуральных значений m, соответственно:

$$\left(\ell,\varphi\right)=(-1)^m\int_0^1\Big(U_{\ell}^{(2m)}(x)-U_{\ell}(x)\Big)\varphi(x)dx+$$

$$+\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\Big(U_{\ell}^{(m+s)}(x)+U_{\ell}^{(s)}(x)\Big)\varphi^{(m-s-1)}(x)\Big|_0^1 \quad \text{при } m\text{- нечетном} \qquad (32)$$

и

$$\left(\ell,\varphi\right)=\int\limits_0^1\left(U_\ell^{(2m)}\left(x\right)+2U_\ell^{(m)}\left(x\right)+U_\ell\left(x\right)\right)\varphi\left(x\right)dx+$$

$$+\sum_{s=0}^{m-1}\left(-1\right)^s\left(U_\ell^{(m+s)}\left(x\right)+U_\ell^{(s)}\left(x\right)\right)\varphi^{(m-s-1)}\left(x\right)\Big|_0^1 \quad \text{при } m\text{- четном} \qquad (33)$$

Ясно, что для нахождения экстремальной функции U_ℓ необходимо рассматривать уравнения (32) и (33) в зависимости от соответствующих значений m.

Сначала предполагаем, что m - нечетное натуральное число.

Тогда, учитывая единственность функции U_ℓ , из (32) получаем уравнение

$$U_\ell^{(2m)}(x)-U_\ell(x)=(-1)^m\ell(x) \qquad (34)$$

с краевыми условиями

$$\left[\left(U_\ell^{(m+i)}(x)+U_\ell^{(i)}(x)\right)\right]\Bigg|_{x=0}^{x=1}=0,\quad i=\overline{0,m-1}\ . \qquad (35)$$

Доказана следующая

Теорема 3. Для нечетных m решение уравнения (34) с краевыми условиями (35) является экстремальной функцией U_ℓ функционала погрешности $\ell\left(x,z\right)$ интерполяционной формулы (26) и имеет вид

$$U_\ell\left(x\right)=(-1)^m\ell\left(x,z\right)*G_m(x)+Y_m(x)\ ., \qquad (36)$$

где $G_m(x)$- функция Грина определено в (13) а

$$Y_m(x)=d_0\left(z\right)e^{-x}+\sum_{k=1}^{\frac{m-1}{2}}e^{-x\cdot\cos\frac{2\pi k}{m}}\cdot\left[d_{1,k}\left(z\right)\cos\left(x\sin\left(\frac{2\pi k}{m}\right)\right)+\right.$$
$$\left.+d_{2,k}\left(z\right)\sin\left(x\sin\left(\frac{2\pi k}{m}\right)\right)\right], \qquad (37)$$

где $d_0\left(z\right)$, $d_{1k}\left(z\right)$ и $d_{2k}\left(z\right)$ - действительные числа.

Так как функционал погрешности $\ell\left(x,z\right)$ определен в пространстве $W_2^{(m,0)}\left(0,1\right)$, должны выполняться следующие условия

$$\left(\ell\left(x,z\right),e^{-x}\right)=0\ , \qquad (38)$$

$$\left(\ell\left(x,z\right),e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\cos\left(x\sin\frac{2\pi k}{m}\right)\right)=0,\quad k=\overline{1,\frac{m-1}{2}}\ , \qquad (39)$$

$$\left(\ell\left(x,z\right),e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\sin\left(x\sin\frac{2\pi k}{m}\right)\right)=0,\quad k=\overline{1,\frac{m-1}{2}}\ . \qquad (40)$$

Это означает, что интерполяционная формула (26) при m-нечетном будет точна на функциях:

$$e^{-x},\ e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\cos\left(x\sin\frac{2\pi k}{m}\right),\ e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\sin\left(x\sin\frac{2\pi k}{m}\right),\ k=\overline{1,\frac{m-1}{2}}.$$

Теперь, мы предполагаем, что m - четное натуральное число.

Тогда, учитывая единственность функции U_ℓ, из (33) получаем уравнение

$$U_\ell^{(2m)}(x)+2U_\ell^{(m)}(x)+U_\ell(x)=\ell(x) \qquad (41)$$

с краевыми условиями

$$\left[\left(U_\ell^{(m+i)}(x)+U_\ell^{(i)}(x)\right)\right]\Big|_{x=0}^{x=1}=0,\quad i=\overline{0,m-1}\ . \qquad (42)$$

Доказана следующая

Теорема 4. Для четных m решение уравнения (41) с краевыми условиями (42) является экстремальной функцией U_ℓ функционала погрешности $\ell(x,z)$ интерполяционной формулы (26) и имеет вид

$$U_\ell(x)=\ell(x,z)*G_m(x)+Y_m(x)\ , \qquad (43)$$

где $G_m(x)$- функция Грина определено в (21) а

$$Y_m(x)=\sum_{k=1}^{\frac{m}{2}}e^{x\cdot\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\cdot\left[r_{1k}(z)\cos\left(x\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)+\right.$$
$$\left.+r_{2k}(z)\sin\left(x\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)\right], \qquad (44)$$

где $r_{1k}(z)$ и $r_{2k}(z)$ - действительные числа.

Так как функционал погрешности $\ell(x,z)$ определен в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$, должны выполняться следующие условия

$$\left(\ell(x,z),e^{x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\cos\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)=0,\quad k=\overline{1,\frac{m}{2}}\ , \qquad (45)$$

$$\left(\ell(x,z),e^{x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\sin\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right)\right)=0,\quad k=\overline{1,\frac{m}{2}}\ . \qquad (46)$$

Отсюда заключаем, что интерполяционная формула (26) при m-четном будет точна на функциях:

$$e^{-x\cos\frac{(2k-1)\pi}{m}}\cos\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right),\ e^{-x\cos\frac{2\pi k}{m}}\sin\left(x\sin\frac{(2k-1)\pi}{m}\right),\ k=\overline{1,\frac{m}{2}}.$$

Далее, с помощью экстремальных функции (36) и (43) найдено представление квадрата нормы функционала погрешности $\ell(x,z)$, которое имеет вид

$$\left\|\ell(x,z)|W_2^{(m,0)*}\right\|^2=(-1)^m\cdot\left[\sum_{\beta=0}^{N}\sum_{\gamma=0}^{N}C_\beta(z)C_\gamma(z)G_m(x_\beta-x_\gamma)-2\sum_{\beta=0}^{N}C_\beta(z)G_m(z-x_\beta)\right]. \qquad (47)$$

Таким образом, задача 3 решена полностью.

Затем, в параграфе 1.4 в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ получена система линейных уравнений для коэффициентов $C[\beta]$ и $C_\beta(z)$ оптимальных квадратурных и интерполяционных формул. Доказаны существование и единственность решения этих систем. Также доказано, что решение этой системы дает минимум квадрату нормы функционала погрешности исследуемых формул.

Метод Соболева построения оптимальных квадратурных и интерполяционных формул в гильбертовых пространствах основан на дискретные аналоги дифференциальных операторов и позволяет получить явный вид оптимальных коэффициентов. В настоящей диссертационной работе для построения оптимальных формул в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ нам требуется соответствующие дискретные аналоги некоторых дифференциальных операторов высокого порядка.

Вторая глава, названная **«Дискретный оператор высокого порядка»,** как раз посвящена построению дискретных аналогов требуемых дифференциальных операторов $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ для нечетных m и $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\frac{d^m}{dx^m}+1$ для четных m.

Решение $D_m[\beta]$ уравнения

$$D_m[\beta]*G_m[\beta]=\delta[\beta] \tag{48}$$

называется *дискретным аналогом соответствующих дифференциальных операторов* $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ для нечетных m и $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\frac{d^m}{dx^m}+1$ для четных m. Здесь $G_m[\beta]$– функция дискретного аргумента, соответствующая функции $G_m(x)$, определенной равенствами (13) для нечетных m и (21) для четных m. В параграфе 2.2 построен дискретный аналог $D_m[\beta]$ дифференциальных операторов $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$ для нечетных m и $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\frac{d^m}{dx^m}+1$ для четных m. Доказаны следующие теоремы:

Теорема 5. Дискретный аналог $D_m[\beta]$ дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}-1$, удовлетворяющий равенству (48) для нечетных натуральных m, имеет вид:

$$D_m[\beta]=\frac{m}{K}\cdot\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k\cdot\lambda_k^{|\beta|-1}, & |\beta|\ge 2,\\ 1+\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k, & |\beta|=1,\\ M_1-\frac{K_1}{K}+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{A_k}{\lambda_k}, & \beta=0,\end{cases} \tag{49}$$

где $K,\ K_1,\ M_1,\ A_k,\ \lambda_k$ – известные величины и $|\lambda_k|<1$.

Теорема 6. Дискретный аналог $D_m[\beta]$ дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}+2\frac{d^m}{dx^m}+1$, удовлетворяющий равенству (48) для четных натуральных m, имеет вид:

$$D_m[\beta]=\frac{m^2}{K^*}\cdot\begin{cases}\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k^*\cdot\tau_k^{|\beta|-1}, & |\beta|\ge 2,\\ 1+\sum\limits_{k=1}^{m-1}A_k^*, & |\beta|=1,\\ M_1^*-\frac{K_1^*}{K^*}+\sum\limits_{k=1}^{m-1}\frac{A_k^*}{\tau_k}, & \beta=0.\end{cases}\qquad(50)$$

где $K^*,\ K_1^*,\ M_1^*,\ A_k^*,\tau_k$ – известные величины и $|\tau_k|<1$.

В параграфе 2.3 доказаны некоторые свойства дискретного аналога $D_m[\beta]$ дифференциальных операторов $\frac{d^2}{dx^2}-1,\ \frac{d^4}{dx^4}+2\frac{d^2}{dx^2}+1,\ \frac{d^6}{dx^6}-1$ и $\frac{d^8}{dx^8}+2\frac{d^4}{dx^4}+1$.

В третьей главе диссертации, названной **«Оптимизация приближенного интегрирования»**, найдены коэффициенты оптимальных квадратурных формул в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ в случаях $m=1,2,3,4$ и вычислена норма функционала погрешности ℓ. При этом использован результат второй главы, т.е. дискретные аналоги $D_m[\beta]$ дифференциальных операторов $\frac{d^2}{dx^2}-1,\ \frac{d^4}{dx^4}+2\frac{d^2}{dx^2}+1,\ \frac{d^6}{dx^6}-1$ и $\frac{d^8}{dx^8}+2\frac{d^4}{dx^4}+1$. В параграфе 3.1 приведен алгоритм нахождения оптимальных коэффициентов квадратурных формул в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$.

В параграфе 3.2 в пространствах $W_2^{(1,0)}(0,1)$ и $W_2^{(2,0)}(0,1)$ оптимальные коэффициенты квадратурных формул вида (1) совпадают с известными оптимальными коэффициентами квадратурных формул из работ Х.М. Шадиметова и А.Р. Хаётова.

Далее, построена оптимальная квадратурная формула вида (1) в случаях $m=3$ и $m=4$, доказаны следующие теоремы:

Теорема 7. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (1) в пространстве $W_2^{(3,0)}(0,1)$ имеют следующий вид

$$C[0]=1-\frac{T}{e^h-1}-\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{m_k\lambda_k}{e^h-\lambda_k}+\frac{n_k\lambda_k^N}{\lambda_k e^h-1}\right),$$

$$C[\beta]=T+\sum_{k=1}^{2}\left(m_k\lambda_k^{\beta}+n_k\lambda_k^{N-\beta}\right),\ \beta=1,...,N-1,$$
$$C[N]=\frac{Te^h}{e^h-1}+e^h\sum_{k=1}^{2}\left(\frac{m_k\lambda_k^N}{e^h-\lambda_k}+\frac{n_k\lambda_k}{\lambda_k e^h-1}\right)-1, \tag{51}$$
где $T,\ K,\ K_1,\ K_2,\lambda_k$ - известны и $|\lambda_k|<1$.

Теорема 8. Коэффициенты оптимальных квадратурных формул вида (1) в пространстве $W_2^{(4,0)}(0,1)$ имеют следующий вид

$$C[0]=T^*+\frac{8}{K^*}\left[Q_1(h)+\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k^*}{\tau_k}\left[M_k+\tau_k^N\cdot N_k\right]\right],$$
$$C[\beta]=T^*+\frac{8}{K^*}\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k^*}{\tau_k}\left[\tau_k^{\beta}\cdot M_k+\tau_k^{N-\beta}\cdot N_k\right],\ \beta=1,2,...,N-1, \tag{52}$$
$$C[N]=T^*+\frac{8}{K^*}\left[Q_2(h)+\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k^*}{\tau_k}\left[\tau_k^N\cdot M_k+N_k\right]\right],$$
где $T^*,\ K^*,\ Q_1(h),\ Q_2(h),Q_3(h),\ A_k^*,\ M_k,\ N_k,\ \tau_k$ - известны и $|\tau_k|<1$.

В параграфе 3.3 вычислен квадрат нормы функционала погрешности ℓ оптимальной квадратурной формулы вида (1) в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ в случаях $m=1,2,3,4$ и получены следующие результаты. Отметим, что квадрат нормы функционала погрешности (5) оптимальной квадратурной формулы совпали результатами полученных в работах Х.М. Шадиметова и А.Р. Хаётова.

Теорема 9. Квадрат нормы функционала погрешности (5) оптимальной квадратурной формулы вида (1) в пространстве $W_2^{(3,0)}(0,1)$ имеет вид

$$\|\overset{\circ}{\ell}\|^2=1-\frac{(2N-1)T+C[0]+C[N]}{2}+Q_1+\frac{1}{6}Q_2+\frac{1}{3}Q_3, \tag{53}$$
где $Q_1,\ Q_2,\ Q_3$ известные величины.

Теорема 10. Квадрат нормы функционала погрешности (5) оптимальной квадратурной формулы вида (1) в пространстве $W_2^{(4,0)}(0,1)$ имеет вид

$$\|\overset{\circ}{\ell}\|^2=\frac{9}{8}-C_0-C_N-T^*\cdot(N-1)-Q_1^*-Q_2^*-Q_3^*, \tag{54}$$
где $T^*,\ Q_1^*,\ Q_2^*,\ Q_3^*$ известные величины.

В параграфе 3.4 приведены численные эксперименты верхней оценки погрешностей оптимальных квадратурных формул в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ в случаях $m=1,2,3,4$.

В четвертей главе диссертации, названной **«Оптимизация интерполирования»**, найдены коэффициенты оптимальных интерполяционных формул и показательно-тригонометрических натуральных сплайнов, дающих наименьшее значение полу-норму в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ в случаях $m=1,2,3,4$. При этом использован результат второй главы, т.е. дискретные аналоги $D_m[\beta]$ дифференциальных операторов $\frac{d^2}{dx^2}-1,\ \frac{d^4}{dx^4}+2\frac{d^2}{dx^2}+1,\ \frac{d^6}{dx^6}-1$ и $\frac{d^8}{dx^8}+2\frac{d^4}{dx^4}+1$. В параграфе 4.1 приведен алгоритм нахождения оптимальных коэффициентов интерполяционных формул в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$.

В параграфе 4.2 в пространствах $W_2^{(1,0)}(0,1)$ и $W_2^{(2,0)}(0,1)$ оптимальные коэффициенты интерполяционных формул вида (26) совпадают с известными оптимальными коэффициентами интерполяционных формул из работ Х.М. Шадиметова и А.Р. Хаётова.

Далее, построена оптимальная интерполяционная формула вида (26) в случаях $m=3$ и $m=4$, доказаны следующие теоремы:

Теорема 11. Коэффициенты оптимальных интерполяционных формул вида (26) с равноотстоящими узлами в пространстве $W_2^{(3,0)}(0,1)$ имеют следующий вид

$$
\begin{aligned}
C_0(z) &= \frac{3}{K}\cdot\left[B_1(z,h)+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{\lambda_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{\gamma}G_3(z-h\gamma)+M_k+\lambda_k^N N_k\right)\right],\\
C_\beta(z) &= \frac{3}{K}\cdot\left[B_2(z,h)+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{\lambda_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{|\beta-\gamma|}G_3(z-h\gamma)+\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\lambda_k^{\beta}M_k+\lambda_k^{N-\beta}N_k\right]\right],\ \beta=1,2,...,N-1,\\
C_N(z) &= \frac{3}{K}\cdot\left[B_3(z,h)+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{\lambda_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{N-\gamma}G_3(z-h\gamma)+\lambda_k^N M_k+N_k\right]\right],
\end{aligned}
\qquad (55)
$$

где $K,\ B_1(z,h),\ B_2(z,h),\ B_3(z,h),\ A_k,\ \lambda_k$ - известны и $|\lambda_k|<1$.

Теорема 12. Коэффициенты оптимальных интерполяционных формул вида (26) с равноотстоящими узлами в пространстве $W_2^{(4,0)}(0,1)$ имеют следующий вид

$$
\begin{aligned}
C_0(z) &= \frac{8}{F_1}\cdot\left[B_1^*(z,h)+\sum_{k=1}^{3}\frac{A_k^*}{\tau_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}\tau_k^{\gamma}G_4(z-h\gamma)+M_k+\tau_k^N N_k\right)\right],\\
C_\beta(z) &= \frac{8}{F_1}\cdot\left[B_2^*(z,h)+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k^*}{\tau_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\tau_k^{|\beta-\gamma|}G_4(z-h\gamma)+\right.\right.\\
&\quad\left.\left.+\tau_k^{\beta}M_k+\tau_k^{N-\beta}N_k\right]\right],\ \beta=1,2,...,N-1,\\
C_N(z) &= \frac{8}{F_1}\cdot\left[B_3^*(z,h)+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k^*}{\tau_k}\left[\sum_{\gamma=0}^{N}\tau_k^{N-\gamma}G_4(z-h\gamma)+\tau_k^N M_k+N_k\right]\right],
\end{aligned}
\qquad (56)
$$

где $F_1,\ B_1^*(z,h),\ B_2^*(z,h),\ B_3^*(z,h),\ A_k^*,\ \tau_k$ - известны и $|\tau_k|<1$.

В параграфе 4.3 мы получаем явные формулы для коэффициентов показательно – тригонометрических натуральных сплайнов в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ в случаях $m=3$ и $m=4$ которые очень удобны для применения.

Предположим, что нам заданы значения $y_\beta,\ \beta = 0, 1, ..., N$ в точках $x_\beta \in [0,\ 1],\ \beta = 0, 1, ..., N$. Рассмотрим следующую задачу интерполяции.

Задача 5. Найти функцию $S_m(x)\in W_2^{(m,0)}(0,1)$, дающую минимум полунорме (3) и удовлетворяющую условию интерполяции

$$S_m(x_\beta)=\varphi(x_\beta),\ \ \beta=0,1,...,N, \tag{57}$$

где $x_\beta \in [0,\ 1]$ - узлы интерполяции, $\varphi(x_\beta)=y_\beta$ - заданные значения.

Мы отметим, что решения задачи 5 в случаях $m=1$ и $m=2$ совпадают с натуральными сплайнами $S_1(x)$ и $S_2(x)$, построенными в пространствах $W_2^{(1,0)}(0,1)$ и $K_2(P_2)$, соответственно, в работах Х.М.Шадиметова и А.Р.Хаётова.

Далее, нами исследована задача 5 при $m=3$ и для ее решения получена следующая формула

$$S_3(x)=\sum_{\gamma=0}^{N} C_\gamma G_3(x-x_\gamma)+d_0 e^{-x}+d_{11}e^{\frac{x}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)+d_{21}e^{\frac{x}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right), \tag{58}$$

где d_0, d_{11} и d_{21} - действительные числа. Справедлива следующая

Теорема 13. Коэффициенты показательно-тригонометрических натурального сплайна вида (58) с равноотстоящими узлами в пространстве $W_2^{(3,0)}(0,1)$ имеют следующий вид

$$C_0=\frac{3}{K}\left[\varphi(0)\left(M_1-\frac{K_1}{K}\right)+\varphi(h)+d_0^- e^{h}+d_{11}^- e^{-\frac{h}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right)-\right.$$
$$\left.-d_{21}^- e^{-\frac{h}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}h\right)+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{\lambda_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{\gamma}\varphi(h\gamma)+M_k+\lambda_k^N\cdot N_k\right)\right],$$

$$C_\beta=\frac{3}{K}\left[\varphi(h\beta)\left(M_1-\frac{K_1}{K}\right)+\varphi(h(\beta-1))+\varphi(h(\beta-1))+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{\lambda_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{|\beta-\gamma|}\varphi(h\gamma)+\lambda_k^{\beta}\cdot M_k+\lambda_k^{N-\beta}\cdot N_k\right)\right],\ \beta=1,2,...,N-1,$$

$$C_N=\frac{3}{K}\left[\varphi(1)\left(M_1-\frac{K_1}{K}\right)+\varphi(1-h)+d_0^+ e^{-(1+h)}+d_{11}^+ e^{\frac{1+h}{2}}\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1+h)\right)+\right.$$
$$\left.+d_{21}^+ e^{\frac{1+h}{2}}\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}(1+h)\right)+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_k}{\lambda_k}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}\lambda_k^{N-\gamma}\varphi(h\gamma)+\lambda_k^{N}\cdot M_k+N_k\right)\right],$$

где $K,\ K_1,\ \mathrm{M}_1,\ A_k, M_k$ и N_k известны.

Далее, нами исследована задача 5 при $m=4$ и для ее решения получена следующая формула

$$S_4(x)=\sum_{\gamma=0}^{N}C_\gamma G_4(x-x_\gamma)+r_{11}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+r_{12}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+$$
$$+r_{21}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right)+r_{22}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x\right), \tag{59}$$

где $r_{11},\ r_{12},\ r_{21}$ и r_{22} - действительные числа.

Справедлива следующая

Теорема 14. Коэффициенты показательно-тригонометрических натурального сплайна вида (59) с равноотстоящими узлами в пространстве $W_2^{(4,0)}(0,1)$ имеют следующий вид

$$C_0=\frac{8}{F_1}\Bigg[\varphi(0)F_2+\varphi(h)+r_{11}^{-}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}h}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}h\right)-r_{12}^{-}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}h}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}h\right)+$$
$$+r_{21}^{-}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}h\right)-r_{22}^{-}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}h}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}h\right)+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_{1k}}{\tau_{1k}}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}\tau_{1k}^{\gamma}\varphi(h\gamma)+M_{1k}+\tau_{1k}^{N}\cdot N_{1k}\right)\Bigg],$$

$$C_\beta=\frac{3}{F_1}\Big[\varphi(h\beta)F_2+\varphi(h(\beta-1))+\varphi(h(\beta-1))+$$
$$+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_{1k}}{\tau_{1k}}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}\tau_{1k}^{|\beta-\gamma|}\varphi(h\gamma)+\tau_{1k}^{\beta}\cdot M_{1k}+\tau_{1k}^{N-\beta}\cdot N_{1k}\right)\Big],\ \beta=1,2,...,N-1,$$

$$C_N=\frac{3}{F_1}\Bigg[\varphi(1)F_2+\varphi(1-h)+r_{11}^{+}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h)}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h)\right)+$$
$$+r_{12}^{+}e^{\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h)}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h)\right)+r_{21}^{+}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h)}\cos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h)\right)+$$
$$+r_{22}^{+}e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h)}\sin\left(\frac{\sqrt{2}}{2}(1+h)\right)+\sum_{k=1}^{2}\frac{A_{1k}}{\tau_{1k}}\left(\sum_{\gamma=0}^{N}\tau_{1k}^{N-\gamma}\varphi(h\gamma)+\tau_{1k}^{N}\cdot M_{1k}+N_{1k}\right)\Bigg],$$

где $F_1,\ F_2,,M_{1k}$ и N_{1k} известны.

В конце четвертей главы в численных примерах сравнены погрешности показательно-тригонометрических натуральных сплайнов, дающих наименьшее значение полу-норму в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ в случаях $m=2,3$ с погрешности кубического сплайна. Далее, сравнена погрешность оптимальной интерполяционной формулы в пространстве $W_2^{(4,0)}(0,1)$ с результатами других авторов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертационная работа посвящена построению оптимальных квадратурных и интерполяционных формул, показательно-тригонометрических натуральных сплайнов, дающие наименьшее значение полу-норму в пространстве функций, интегрирующийся с квадратом суммы самой функции и ее обобщенной производной m-го порядка, а также оптимизация аппроксимации функционалов в пространствах Гильберта с помощью дискретных операторов. Также исследованы оценки погрешностей оптимальных квадратурных и интерполяционных формул, построение показательно-тригонометрических натуральных сплайнов в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ для случаев m=1,2,3 и $m=4$.

Основные результаты исследования состоят в следующем.

1. Найдены экстремальные функции для квадратурных интерполяционных формул, которые точны на экспоненциально-тригонометрических функциях в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$.

2. Получено выражение нормы функционала погрешности квадратурных и интерполяционных формул в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$.

3. Получена система линейных алгебраических уравнений для коэффициентов квадратурных и интерполяционных формул, показательно-тригонометрических натуральных сплайнов в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ для натуральных чисел m . Исследованы существование и единственность решений этой системы.

4. Построены дискретные аналоги $D_m[\beta]$ дифференциальных операторов $d^{2m}/dx^{2m}-1$ при нечетных m и $d^{2m}/dx^{2m}+2d^m/dx^m+1$ при четных m и доказаны ряд их свойств.

5. Приведены новые методы для построения оптимальных квадратурных, интерполяционных и сплайн функции в пространствах $W_2^{(m,0)}(0,1)$.

6. Реализуя эти методы построены оптимальные квадратурные формулы в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ вслучаях m=1,2,3 и $m=4$, которые точны для экспоненциальных, тригонометрических и экспоненциально-тригонометрических функций.

7. Вычислена норма оптимального функционала погрешности квадратурных формул в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ в случаях m=1,2,3 и $m=4$.

8. Реализуя разработанные методы построены интерполяционные формулы и показательно-тригонометрические натуральные сплайны в пространстве $W_2^{(m,0)}(0,1)$ в случаях m=1,2,3 и $m=4$, которые точны на экспоненциально-тригонометрических функций.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING
SCIENTIFIC DEGREES DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

V.I. ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

BOLTAEV AZIZ KUZIEVICH

OPTIMAL LATTICE QUADRATURE AND INTERPOLATION FORMULAS ON CLASSES OF DIFFERENTIABLE FUNCTIONS

01.01.03 – Computational and discrete mathematics

ABSTRACT OF DOCTORAL DISSERTATION (DSc)
ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

TASHKENT – 2025

The theme of dissertation of doctor (DSc) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number № B2025.2.DSc/FM300.

Dissertation has been prepared at V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences.

Abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the website http://ik-fizmat.nuu.uz/ and the «ZiyoNet» Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific advisor:	**Shadimetov Kholmatvay Makhkambaevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Official opponents:	**Uteuliev Nietbay Uteulievich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Khudoyberganov Mirzoali Urazalievich Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
	Eshkuvatov Zaynidin Karimovich Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Leading organization:	**Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences**

Defense will take place «____» _____________2025 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc/03/30/12/2019/FM.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on «____» _______________2025 year
(Mailing report № ___________on «____» _______________2025 year)

M.M. Aripov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

Z.R. Rakhmonov
Scientific Secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S.

R.D. Aloyev
Chairman of Scientific Seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.-M.S., professor

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation (DSc))

The aim of the study is to construct natural splines, optimal interpolation and quadrature formulas, exact on exponential-trigonometric functions and calculate the norms of their error functionals in Hilbert space.

The object of the research is natural splines, interpolation and quadrature formulas, discrete analogue of higher-order differential operators, error functionals, Hilbert space.

The scientific novelty of the research work is as follows:

upper estimates of errors of interpolation, quadrature formulas and spline functions in the space of functions integrable with the square of the sum of the function itself and its generalized derivative of the *m*-th order using its extremal functions were found;

for finding the optimal coefficients of interpolation, quadrature formulas and spline functions by minimizing the coefficients of the obtained upper estimates at fixed nodes systems of linear algebraic equations were obtained;

the existence and uniqueness of solutions of the obtained systems of interpolation, quadrature formulas and spline functions through their improper fundamental matrix was proved;

to find the optimal coefficients of interpolation, quadrature formulas and spline functions discrete operators $D_m[\beta]$ using Fourier transforms and formulas of residue theory were constructed;

analytical expressions for optimal coefficients of interpolation, quadrature formulas and spline functions using discrete operators were found;

the optimal norms of interpolation, quadrature formulas and spline functions using the coefficients were calculated.

Implementation of the research results. Based on the obtained scientific results on the construction of quadrature and interpolation formulas, exact on exponential, trigonometric and exponential-trigonometric functions, the construction of exponential-trigonometric natural splines, giving the smallest value of the semi-norm in the space of functions integrable with the square of the sum of the function itself and its generalized derivative of the m-th order and also the optimization of the approximation of functionals in Hilbert spaces using discrete operators:

the constructed optimal quadrature formula in the Hilbert space $W_2^{(m,0)}(0,1)$ was used to construct mathematical models of dynamic processes occurring in complex systems in practical project No. 122041800031-8 "Numerical methods for solving boundary value problems of mathematical physics and computer-aided design of optimal network systems". (No. 01-03/62 Institute of Applied Mathematics and Automation of the Kabardino-Balkarian Scientific Center of the Russian Academy of Sciences on June 17, 2025). As a result, it made it possible to construct mathematical models of dynamic processes occurring during the automated design of optimal systems;

optimal quadrature formulas, exact for exponential trigonometric functions using the Sobolev method in the Hilbert space $W_2^{(m,0)}(0,1)$ are used in the fundamental project No. F-4-30 on the topic "Study of qualitative properties of a doubly nonlinear cross-diffusion system under the influence of convective transfer, variable density, source or absorption", and the optimal coefficients of the constructed quadrature formulas are used for the numerical solution of boundary value problems for cross-diffusion systems. (No. 04/11-7602 National University of Uzbekistan on June 17, 2025). The use of scientific results made it possible to construct a scheme and algorithm for the numerical solution of a doubly nonlinear cross-diffusion problem and visualize the numerical results;

the constructed optimal interpolation formulas were used to calculate the integro-differential equations of some dynamic processes in the geosphere in the practical project No. 22-11-00064 "Modeling dynamic processes in the geosphere taking into account heredity". (No. 264 of the Institute of Cosmophysical Research and Radio Wave Propagation of the Far Eastern Branch of the Russian Academy of Sciences on June 19, 2025). As a result, it was possible to construct a scheme for the numerical solution of integro-differential equations of some dynamic processes in the geosphere.

The structure and volume of the thesis. The thesis consists of an introduction, three chapters, conclusion and bibliography. The volume of the thesis is 194 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (Часть I; Part I)

1. Shadimetov Kh.M., Hayotov A.R., Boltaev A.K. Construction of optimal quadrature formulas exact for exponentional-trigonometric functions by Sobolev's method. // Acta Mathematica Sinica, English series, 2021,Vol. 37, №7, pp.1066-1088. https://doi.org/10.1007/s10114-021-9506-6. Scopus (IF:=0.95).
2. Boltaev A.K., Akhmedov D.M. On an exponential-trigonometric natural interpolation spline.// AIP Conference Proceedings 2365, 020023 (2021); https://doi.org/10.1063/5.0057116 Scopus (IF:=0.4)
3. Болтаев А.К. Экстремальная функция одной интерполяционной формулы в пространстве $W_2^{(3,0)}(0,1)$ // Bulletin of the Institute of Mathematics, V.I. Romanovskiy Institute of Mathematics. 2021. № 3. pp. 47-51. (01.00.00; №17).
4. Shadimetov Kh.M., Boltaev A.K., Parovik R.I. Construction of optimal interpolation formula exact for trigonometric functions by Sobolev’s method // Вестник Краунц, Физ-мат, науки, 2022, Т38, №1, -С. 131-146. https://doi.org/10.26117/2079-6641-2022-38-1-131-146 Crossref
5. Болтаев А.К., Шоназаров С.К. Система для нахождения оптимальных коэффициентов интерполяционных формул // Проблемы вычислительной и прикладной математики, - Ташкент, 2022, №5/1(44), -С. 54-63. (01.00.00; №9)
6. Болтаев А.К. Об одной дискретной системе типа Винеры-Хопфа оптимальной квадратурной формулы // Проблемы вычислительной и прикладной математики, - Ташкент, 2022, №6 (45), -С. 101-113. (01.00.00; №9)
7. Болтаев А.К. Существование и единственность решения системы для оптимальных коэффициентов. Bull. Inst. Math., 2022, Vol.5, №6, pp. 64-71. (01.00.00; №17)
8. Kholmat Shadimetov, Aziz Boltaev, Roman Parovik. Optimization of the Approximate Integration Formula Using the Discrete Analogue of a High-Order Differential Operator. Mathematics, 2023, 11, 3114. https:// doi.org/10.3390/math11143114. Scopus (IF:=2.9)
9. Болтаев А.К. Алгоритм для нахождения оптимальных коэффициентов интерполяционных формул // Проблемы вычислительной и прикладной математики, - Ташкент, 2023, № 2(1), -С. 58-68. (01.00.00; №9)
10. Boltaev A.K. Existence and uniqueness of the solution for a linear system of optimal coefficients // Uzbek Mathematical Journal. 2023, Vol. 67, Issue 2, pp. 31-38. DOI: 10.29229/uzmj.2023-2-4 (01.00.00; №6)
11. Х.М.Шадиметов, А.К.Болтаев. Об одной оптимальной интерполяционной формуле// Доклады Академии наук Республики Узбекистан, -Ташкент, 2023, №5, -С. 10-14

12. Shadimetov K.M., Boltaev A.K. An Exponential-Trigonometric Optimal Interpolation Formula. Lobachevskii J Math., 44, 4379–4392 (2023). https://doi.org/10.1134/S1995080223100359 Scopus (IF:=0.8)

13. Shadimetov Kholmat, Boltaev Aziz. System for finding the optimal coefficients of an interpolation spline. AIP Conference Proceedings, 2024, Vol. 3004, No. 1, 060036 Scopus (IF:=0.5)

14. Шадиметов Х.М., А.К.Болтаев. Оптимизация погрешности экспоненциально - тригонометрической интерполяционной формулы// Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. Науки, 2024, Том. 28, №4, -С. 665-681. https://doi.org/10.14498/vsgtu2094 Scopus (IF:=0.833)

15. Болтаев А.К. Об одной модификации метода Соболева для приближения функции // Проблемы вычислительной и прикладной математики, - Ташкент, 2024, №4/2 (60), -С. 34-45. (01.00.00; №9)

16. Shadimetov Kh.M., Boltaev A.K. Optimization of the Approximate Integration Formula Using the Quadrature Formula// International Journal of Analysis and Applications, 2025, Vol. 23, No: 53. https://doi.org/10.28924/2291-8639-23-2025-53. Scopus (IF:=0.75)

17. Shadimetov Kh.M., Boltaev A.K. On An Interpolation of a Function by Exponential-Trigonometric Natural Splines // Uzbek Mathematical Journal. 2025, Vol. 69, Issue 1, pp. 141-150. DOI: 10.29229/uzmj.2025-1-14 (01.00.00; №6)

18. Болтаев А.К., Пардаева О.Ф. Об одной интерполяции функции натуральными сплайнами // Проблемы вычислительной и прикладной математики, - Ташкент, 2025, №3(67), -С. 97-106. (01.00.00; №9)

II bo‘lim (Часть II; Part II)

19. Shadimetov Kh.M., Boltaev A.K., Nuraliev F.A. The extremal function of interpolation formulas in $W_2^{(2,0)}$ space. // Вестник Краунц, Физ-мат, науки, 2021, Т36, №3, С. 123-132. Crossref

20. Болтаев А.К. Об оптимальной интерполяционной формуле на классах дифференцируемых функциях // Проблемы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, 2021, №4(34), С. 96-105. (01.00.00; №9)

21. Boltaev A.K., Shadimetov Kh.M. Optimal interpolation formulas on classes of differentiable functions // Uzbek Mathematical Journal. 2021. Vol.65. Issue 4. pp. 166-74. (01.00.00; №6)

22. Болтаев А.К. Об экстремальной функции одной оптимальной интерполяционной формулы. “Актуальные проблемы стохастическогоанализа” международная научная конференция. Ташкент. 20-21 февраля 2021г. 505-506 с.

23. Болтаев А. К., Болтаев Э.К. Максимизирующий элемент одной интерполяционной формулы. “Амалий математика ва ахборот технологияларининг замонавий муаммолари” мавзусида халқаро илмий-амалий конференция. Бухара. 15 апрел 2021. 209-210 бетлар

24. Boltaev Aziz, Aslonov Ulugbek. Coefficients of the optimal interpolation formulas in $W_2^{(3,0)}(0,1)$ space. The international scientific conference “Modern

problems of the applied mathematics and information technology – Al-Khorezmiy 2021", Fergana, November 15–17, 2021, p. 261

25. Boltaev A.K., Atamuradova B.M. Coefficients of the optimal interpolation formulas in $W_2^{(4,0)}(0,1)$ space. "Нелокальные краевые задачи и родственные проблемы биологии, информатики и физики". VI международная научная конференция. Налчик-Эльбус, 5-9 декабря. 2021. –С. 218

26. Boltaev A.K., Atamuradova B.M. On an extremal function of interpolation formula. "Theoretical foundations and applied problems of modern mathematics" Республиканская научно-практическая конференция. Андижан. 28 марта 2022г. 174-176 с.

27. Болтаев А. К., Шоназаров С. К., Марасулова Д.Ю. Дискретная система типа Винера-Хопфа одной интерполяционной формулы. "Актуальные вопросы алгебры и анализа", Республиканская научно-практическая конференция, Термиз, 18-19 ноября, 2021, С. 261-262

28. Boltaev A.K., Atamuradova B.M. On an extremal function of interpolation formula. Abstracts of the international scientific and practical conference "Actual problems of mathematical modeling and information technology", Nukus, May 2-3, 2023.

29. Boltaev A.K., Pardaeva O.F., Boltaev E.K. System for finding the optimal coefficients of an exponential-trigonometric spline. Abstracts of the international scientific and practical conference "Actual problems of mathematical modeling and information technology", Nukus, May 2-3, 2023.

30. Shadimetov Kh. M., Boltaev A.K. The discrete analogue of a high-order differential operator. The international scientific conference "Actual problems of applied mathematics and information technologies – Al–Khorezmiy 2023", Samarkand, September 25–26, 2023, p. 140

31. Boltaev A.K. Coefficients of the optimal quadrature formulas in $W_2^{(4,0)}(0,1)$ space. "Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения" Международная научная конференция, Ташкент, 23-25 ноября, 2023, С. 109-110

32. Болтаев А.К. Некоторые свойство дискретного оператора высокого порядка. «Актуальные проблемы прикладной математики, математического моделирования и информатики» Республиканской научной конференции, Нукус, 24-25 мая, 2024, С. 370-372

33. Болтаев А.К., Болтаев Э.К. Вычисление нормы функционала погрешности оптимальных интерполяционных формул. «Современные проблемы и перспективы прикладной математики» Республиканской научной конференции, Карши, 24-25 мая, 2024, С. 306-308

34. Болтаев А.К., Пардаева О.Ф. Коэффициенты интерполяционного сплайна минимизирующую полу-норму. «Современные проблемы и перспективы прикладной математики» Республиканской научной конференции, Карши, 24-25 мая, 2024, С. 308-310

35. Болтаев А.К. Дискретная система типа Винера-Хопфа одной квадратурной формулы. “Современные проблемы математики и её преподавания” Международная научно-практической конференция, Хужанд, 21-22 июня, 2024, С. 36-40

36. Boltaev A.K. Some properties of a high-order discrete operator. Abstracts of the IX international scientific conference “Actual problems of applied mathematics and information technologies – Al–Khorezmiy 2024”, Tashkent, October 22–23, 2024, p. 105

37. Болтаев А.К. Вычисление нормы функционала погрешности оптимальных квадратурных формул. “Неклассические уравнения математической физики и их приложения” Международная научная конференция посвященная 90 летию со дня рождения академика Т.Д.Джураева, Ташкент, 24-26 октября, 2024, С. 136

38. Болтаев А.К. Элемент Рисса одной квадратурной формулы. «Современные методы математической физики и их приложения» Республиканская научная конференция посвященная 80-летию со дня рождения академика Ш.А. Алимова, Ташкент, 22-24 апреля, 2025, С. 311-313

39. Болтаев А.К., Мухаммадова З.А. Система для нахождения коэффициентов натуральных сплайнов. Abstracts of the international scientific and theoretical conference “Current problems of physics, mathematics and artificial intelligence technologies”, Bukhara, May 16–17, 2025, p. 142-144

40. Shadimetov X.M., Boltayev A.Q., Nuraliyev F.A., Rahmatjonov M.M. Interpolyatsion formula va uning tadbiqlari. “Differensial tenglamalar va matematikaning turdosh bo‘limlari zamonaviy muammolari” mavzusidagi Respublika ilmiy anjumani, Farg‘ona, 16-17 may, 2025, b. 193-195

41. Shadimetov X.M., Boltayev A.Q., Sobirjonov B.Q. Eksponensial-trigonometrik natural splayn va uning tadbiqlari. “Differensial tenglamalar va matematikaning turdosh bo‘limlari zamonaviy muammolari” mavzusidagi Respublika ilmiy anjumani, Farg‘ona, 16-17 may, 2025, b. 195-197

42. A. Boltayev va B. Atamuradova. Eksponensial–trigonometrik funksiyalarga aniq bo‘lgan optimal kvadratur formulalar qurish algoritmi. O‘zbekiston Respublikasi Adliya Vazirligi huzuridagi Intelektual mulk agentligi. № DGU 13148, 20.11.2021

43. A. Boltayev. Murakkab funksiyalarga aniq bo‘lgan optimal interpolyatsion formulalar qurish algoritmi. O‘zbekiston Respublikasi Adliya Vazirligi huzuridagi Intelektual mulk agentligi. № DGU 19807, 02.12.2022.

44. A. Boltayev va O. Pardayeva. Eksponensial-trigonometrik natural splayn qurish algoritmi. O‘zbekiston Respublikasi Adliya Vazirligi huzuridagi Intelektual mulk agentligi. № DGU 42915, 16.10.2024.

Avtoreferat «Public Publish Printing» nashriyotda tahrirdan o‘tkazildi

Bosishga ruxsat etildi: 03.11.2025-yil
Bichimi 60x84 $^{1}/_{16}$, «Times New Roman»
garniturada raqamli bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog‘i 3,0. Adadi: 100. Buyurtma: № 96.

«Public Publish Printing» MChJ
bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent, M. Ulug‘bek tum., Moylisoy, 22.