

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH

V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

DAVLATOVA FATIMA ISRAILOVNA

**GILBERT FAZOLARIDA FURYE INTEGRALLARINING
OPTIMAL APPROKSIMATSIYASI**

**01.01.03 – Hisoblash matematikasi va diskret matematika
(fizika-matematika fanlari)**

**Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI**

Toshkent-2025

**Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
avtoreferati mundarijasi**

**Оглавление автореферата диссертации
доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам**

**Content of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-
mathematical sciences**

Davlatova Fatima Israilovna

Gilbert fazolarida Furiye integrallarining optimal approksimatsiyasi..... 3

Давлатова Фатима Исраиловна

Оптимальная аппроксимация интегралов Фурье в гильбертовых
пространствах..... 21

Davlatova Fatima Israilovna

Optimal approximation of Fourier integrals in Hilbert spaces..... 39

E'lon qilingan ishlar ro'yxati

Список опубликованных работ

List of published works 43

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI
HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI
DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 RAQAMLI ILMIY KENGASH

V.I. ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI

DAVLATOVA FATIMA ISRAILOVNA

GILBERT FAZOLARIDA FURYE INTEGRALLARINING
OPTIMAL APPROKSIMATSIYASI

01.01.03 – Hisoblash matematikasi va diskret matematika
(fizika-matematika fanlari)

fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (Doctor of Philosophy) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Oliy ta'lim, fan va innovatsiyalar vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2024.4.PhD/FM1182 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Dissertatsiya O'zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) va «Ziyonet» ta'lim axborot tarmog'ida (www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar: **Shadimetov Xalmatvay Maxkambayevich**
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Rasmiy opponentlar: **Normurodov Chori Begaliyevich**
fizika-matematika fanlari doktori, professor

Boltayev Aziz Kuziyevich
fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD), dotsent

Yetakchi tashkilot: **Qoraqalpoq davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi O'zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 raqamli Ilmiy kengashning «___»_____ 2025 yil soat___ dagi majlisida bo'lib o'tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 227-12-24, faks: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertatsiya bilan O'zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (___ raqami bilan ro'yxatga olingan). (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel.: (+99871) 246-02-24).

Dissertatsiya avtoreferati 2025 yil «___» _____ kuni tarqatildi.
(2025 yil «___» _____ dagi _____ raqamli reestr bayonnomasi).

M.M. Aripov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy
kengash raisi, f.-m.f.d., professor

Z.R. Raxmonov
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy
kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d.,
professor

R.D. Aloyev
Ilmiy darajalar beruvchi ilmiy
kengash huzuridagi ilmiy seminar
raisi, f.-m.f.d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasining annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Jahonda olib borilayotgan ko‘plab ilmiy – amaliy tadqiqotlar natijasida haqiqiy argumentli kompleks qiymatli uzluksiz funksiyalar fazosida eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalarni qurish, aniq integrallarni taqribiy hisoblash va qo‘llash yetakchi o‘rinlardan birini egallamoqda. Dunyo miqyosida kuchli tebranuvchi integrallarni sonli hisoblashda kvadratur va kubatur formulalar nazariyasi asosiy vosita sifatida xizmat qiladi. Ushbu formulalar, ayniqsa, kvant kimyosi, tasvirlar tahlili, elektrodinamika, kompyuter tomografiyasi, suyuqliklar mexanikasi, matematik fizika, elektron texnika va elektromagnit nurlanish kabi sohalarda differensial va integral tenglamalarni sonli yechish, ularni amaliyotga joriy etishni taqozo etadi. Shu jihatdan differensiallanuvchi funksiyalar sinfida eksponensial funksiyalarga aniq bo‘lgan hosilali, eksponensial vaznli optimal kvadratur formulalarni tadqiq etish, ma’lum Gilbert fazolarida qurilgan formulalarning xatoligini baholashda foydalanish muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

Jahonda Gilbert fazolarida aniqligi yuqori bo‘lgan eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalar qurishga yo‘naltirilgan ilmiy-tadqiqot ishlari olib borilmoqda. Bu borada tasvirlar tahlili, elektrodinamika, kompyuter tomografiyasi, suyuqliklar mexanikasi va elektromagnit nurlanish kabi ko‘plab sohalarda hosil bo‘ladigan differensial va integral tenglamalarni sonli yechishda, mavjud metodlardan foydalanib funksiyalarning turli sinflarida eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalar qurish va matematik masalalarning yechimlarini yetarlicha aniqlikda hisoblash imkonini beruvchi metodlarini yaratishga alohida e’tibor berilmoqda.

Respublikamizda fundamental fanlarning ilmiy va amaliy tatbiqiga ega bo‘lgan eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur, kubatur, interpolasyon formulalar qurish va ularning xatoliklarini ma’lum Gilbert fazolarida baholash hamda tasvirlar tahlili, kompyuter tomografiyasi masalalarini sonli analitik yechish usullarini ishlab chiqish yuzasidan keng qamrovli chora-tadbirlar amalga oshirilib, muayyan natijalarga erishilmoqda. 2020–2023-yillarda O‘zbekiston Respublikasida matematika fanlari bo‘yicha ta’lim sifatini yaxshilash, ilmiy-tadqiqotlarning natijadorligi va amaliy ahamiyatini oshirish, jumladan, “Funksional analiz, algebra, differensial tenglamalar, matematik fizika, matematik modellashtirish, ehtimollar nazariyasi, matematik statistika, hisoblash matematikasi va diskret matematika” bo‘yicha muhim vazifalar belgilab berilgan¹. Ushbu vazifalarni amalga oshirishda, jumladan, ma’lum Gilbert fazolarida eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalarni qurish ularning xatolik funksionallari normalarining kvadratini hisoblash muhim ahamiyat kasb etmoqda.

O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevral PF-4947-sonli “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi, 2022-yil 28-yanvar PF-60 sonli “2022-2026-

¹ O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2020 – yil 7 – maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy – tadqiqotlarni rivojlantirish chora – tadbirlari to‘g‘risida” gi PQ – 4708 – sonli qarori.

yillarga mo'ljallangan Yangi O'zbekistonning taraqqiyot strategiyasi to'g'risida"gi farmonlari, 2017-yil 17-fevral PQ-2789-sonli "Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi, 2017-yil 20-aprel PQ-2909-sonli "Oliy ta'lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi, 2018-yil 27-aprel PQ-3682-sonli "Innovatsion g'oyalar, texnologiyalar va loyihalarni amaliyotga joriy qilish tizimini yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi, 2020-yil 7-may PQ-4708-sonli "Matematika sohasidagi ta'lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to'g'risida"gi qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa me'yoriy-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishga ushbu dissertatsiya ishi muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo'nalishlariga bog'liqligi. Mazkur tadqiqot respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. «Matematika, mexanika va informatika» ustuvor yo'nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o'rganilganlik darajasi. Ma'lumki, fan va texnika sohasidagi ko'plab muammolar, ayniqsa, kuchli tebranuvchi funksiyalarga ega bo'lgan maxsus integrallarni hisoblashga, xususan, Furye koeffitsiyentlari va Furye integrallari kabi matematik ifodalarni aniqlashga olib keladi. Ushbu turdagi integrallarni taqribiy hisoblash uchun bir qator maxsus usullar va algoritmlar ishlab chiqilgan bo'lib, ular hisoblash matematikasida muhim o'rin tutadi. Bu usullar qatoriga Faylon usuli, asimptotik yoyish usullari, Levinning kollokatsiya usuli, eng tez tushish usuli, shuningdek, optimal kvadratur va kubatur formulalari kabi yondashuvlarni misol qilib keltirish mumkin. Faylon usuli dastlab integrallash oralig'ida funksiyaning bo'lakma-bo'lak yaqinlashtirishga asoslangan holda taklif etilgan bo'lib, bu usul kuchli tebranuvchi integrallarni hisoblashda samarali yondashuv sifatida keng tan olingan. Keyingi yillarda ushbu sohada sezilarli yutuqlarga erishildi va turli xil kuchli tebranuvchi funksiyalarga ega integrallarni taqribiy hisoblash uchun bir qator yangi usullar ishlab chiqildi. Bularga Faylon tipidagi formulalar, Klenshou-Kurtis-Faylon tipidagi formulalar, Levin tipidagi usullar, takomillashtirilgan Klenshou-Kurtis usullari, umumlashtirilgan kvadratur formulalari kiradi. Ushbu usullar nafaqat hisoblash aniqligini oshirish, balki hisoblash jarayonining samaradorligini ham sezilarli darajada yaxshilash imkonini berdi. So'nggi o'n yilliklarda ushbu sohada faol tadqiqotlar olib borilmoqda. Xususan, Abbas S. K., Sohrabi S., Ranjbar H., Shivaram K.T., Prakasha H.T., Lovetskiy K.P., Sevastianov L.A., Hnatič M., Kulyabov D.S., He G., Liu Y., Zaman S., Suliman, Siraj-ul-Islam., Yunyun Ma Yuesheng Xu, Jing Gao, Iserles A., Deaño A., Huybrechs D., Wang Y., Xiang Sh., Huybrechs D., Kuijlaars A., Lejon N., kabi olimlarning ilmiy ishlarida ushbu usullarni rivojlantirish va qo'llash bo'yicha keng ko'lamli tadqiqotlar olib borilgan. Ularning ishlari funksiyalarning turli fazolarida Faylon, asimptotik yoyish, Levin kollakatsiya va eng tez tushish usullar yordamida sonli integrallash formulalari hamda ularning yaqinlashish xususiyatlarini o'rganish va amaliy masalalarda qo'llash imkoniyatlarini kengaytirishga qaratilgan. Bundan tashqari, asimptotik yoyish usullari bo'yicha

olib borilgan tadqiqotlar ham alohida e'tiborga loyiq. Iserles A., Nørsett S.P., Frank W., Olver J., Stein E.M., Xiang S., Beylkin G. va Monzon L. kabi olimlar asimptotik usullarni rivojlantirish va ularni kuchli tebranuvchi integrallarni hisoblashda qo'llash bo'yicha muhim natijalarga erishdilar. Bu tadqiqotlar nafaqat nazariy jihatdan muhim, balki amaliy sohalarida, masalan, kvant fizikasi, elektromagnit nurlanish va tasvirni qayta ishlash kabi sohalarida keng qo'llaniladigan yechimlarni taqdim etadi. Ushbu usullar va tadqiqotlar hisoblash matematikasining rivojlanishiga katta hissa qo'shmoqda va kelgusida yanada murakkab masalalarni yechish uchun yangi imkoniyatlar ochmoqda.

Ta'kidlash joizki, so'nggi yillarda $L_2^{(m)}$ va $W_2^{(m,m-1)}$ Gilbert fazolarida Shadimetov X.M., Milovanović G.V., Hayotov A.R., C.-O.Lee, S.Jeon, Boltayev N.D., Babayev S.S., Bozarov B.I. va Xayriyev U.N. kabi olimlar kuchli tebranuvchi integrallarni taqribiy hisoblash masalalariga bag'ishlangan chuqur ilmiy tadqiqotlar olib bordilar. Ularning asosiy maqsadi optimal kvadratur formulalarini qurish va ushbu formulalarni turli amaliy masalalarni yechishda qo'llashdan iborat bo'ldi. Ushbu tadqiqotlar nafaqat nazariy jihatdan muhim yangiliklar keltirdi, balki amaliy sohalarida sezilarli yutuqlarga ham olib keldi. Xususan, sanoat va tibbiyot sohasida kompyuter tomografiyasi texnologiyalariga oid tasvirlarni laboratoriya sharoitida yuqori aniqlikda qayta tiklash imkoniyati yaratildi. Bu yutuqlar, ayniqsa, diagnostika va sifat nazorati kabi sohalarida muhim ahamiyat kasb etdi.

Dissertatsiya mavzusining dissertatsiya bajarilgan ilmiy-tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalarini bilan bog'liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti O'zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasi V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika instituti Hisoblash matematikasi laboratoriyasining "Gilbert fazolarida optimal kvadratur, interpolyatsion, ayirmali formulalar qurish va ularni integral tenglamalarni yechishga tatbiqlari" mavzusidagi kalendar reja doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi haqiqiy argumentli kompleks qiymatli uzluksiz funksiyalarning Gilbert fazolarida eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalarni qurish, ularning xatolik funksionallari normalarni hisoblashdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

Sobolevning $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulaning xatolik funksionalining normasini analitik ko'rinishini topish;

Gilbertning haqiqiy argumentli kompleks qiymatli $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazosida eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalar koeffitsiyentlari uchun chiziqli tenglamalar sistemasini olish;

haqiqiy argumentli kompleks qiymatli funksiyalarning $L_2^{(2)}$ va $W_2^{(2,1)}$ Gilbert fazolarida eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalarning xatolik funksionallari normalariga minimum qiymat beruvchi koeffitsiyentlarning oshkor formulalarini topish;

$L_2^{(2)}$ va $W_2^{(2,1)}$ Gilbert fazolarida eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalar xatoliklarini baholash;

Sobolevning $L_2^{(3)}$ fazosida optimal koeffitsiyentlarning analitik formulalarini topish.

Tadqiqotning obyekti Gilbert fazolari, sonli integrallash formulalari, diskret argumentli funksiyalar, chiziqli funksionallar, chiziqli tenglamalar sistemasidan iborat.

Tadqiqotning predmeti eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formula, xatolik funksionali, ekstremal funksiya, differensial operatorning diskret analogi, diskret Viner-Xopf tenglamalar sistemasi, optimal koeffitsiyentlar, xatolik funksionali normasidan iborat.

Tadqiqotning usullari. Tadqiqot ishida hisoblash matematikasi, funksional analiz, hamda differensial tenglamalar nazariyasi, umumlashgan funksiyalar, diskret argumentli funksiyalar nazariyasi usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

Sobolevning $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulaning xatolik funksionali normasining analitik ko‘rinishi topilgan;

Gilbertning haqiqiy argumentli kompleks qiymatli $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazosida eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalar koeffitsiyentlari uchun chiziqli tenglamalar sistemasi olingan;

haqiqiy argumentli kompleks qiymatli funksiyalarning $L_2^{(2)}$ va $W_2^{(2,1)}$ Gilbert fazolarida eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalarning xatolik funksionallari normalariga minimum qiymat beruvchi koeffitsiyentlarning oshkor formulalari topilgan;

$L_2^{(2)}$ va $W_2^{(2,1)}$ Gilbert fazolarida eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalar xatoliklari optimal koeffitsiyentlar yordamida yuqoridan baholangan;

Sobolevning $L_2^{(3)}$ fazosida optimal koeffitsiyentlarning analitik formulalari uning diskret operatori yordamida topilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari quyidagilardan iborat:

qurilgan eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalar o‘ng tomondan tasodifiy senzuralanish modelida ikki o‘lchovli ishonchlilik funksiyasi uchun eksponensial, ko‘paytmali va darajali tipdagi baholarni asoslashda qo‘llanilgan;

eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalar yordamida gaz tarmoqlarini simulyatsiya qilishning samarali modellari uchun integral munosabatlarni taqribiy yechishda qo‘llanilgan.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi kvadratur formulalar nazariyasi, hisoblash matematikasi, funksional analiz, diskret argumentli funksiyalar nazariyasi metodlarini qo‘llanilganligi, hamda matematik mulohazalarning qat’iyligi bilan asoslangan.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati ma’lum Gilbert fazolarida Furye koeffitsiyentlarini taqribiy

hisoblash uchun vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalar qurish algoritmi va qurilgan formulalarning yaqinlashish tezligi yuqoriligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati qurilgan optimal kvadratur formulalar kvant kimyosi, tasvir tahlili, elektrodinamika, kompyuter tomografiyasi, suyuqliklar mexanikasi, matematik fizika, elektron texnika, akustik va elektro magnit nurlanish kabi masalalarini kuchli tebranuvchi integrallar yordamida taqribiy yechishga xizmat qiladi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalar bo'yicha olingan ilmiy natijalar asosida:

$L_2^{(2)}(0,1)$ fazosida qurilgan optimal kvadratur formula UZB-Ind-2021-97 raqamli "Bog'liq to'liq bo'lmagan ko'p o'lchovli ma'lumotlar uchun amaliy statistik muammolar" mavzusidagi amaliy loyihasida o'ng tomondan tasodifiy senzurlanish modelida ikki o'lchovli ishonchlilik funksiyasini baholasgda qo'llanilgan. (M.V. Lomonosov nomidagi Moskva davlat Universiteti Toshkent filiali, 2025 yil 02 maydagi 01-01-73-sonli ma'lumotnomasi). Natijada, o'ng tomondan tasodifiy senzurlanish modelida ikki o'lchovli ishonchlilik funksiyasi uchun eksponensial, ko'paytmali va darajali tipdagi baholarni asoslashga imkon bergan;

Furye integrallarini sonli hisoblash uchun qurilgan optimal formuladan 2022-2023 yillarda Toshkent axborot texnologiyalari universitetida bajarilgan IL-5321091543 raqamli "Gaz tarmoqlarining topologik modelini yaratish va simulyatsiya qilish" mavzusidagi innovatsion loyihani bajarishda, ya'ni loyihada gaz tarmoqlarining topologik modelini yaratishda va simulyatsiya qilishda foydalanilgan. (Toshkent axborot texnologiyalari universiteti, 2025-yil 27-yanvardagi 305/05-2 sonli ma'lumotnomasi). Natijada gaz tarmoqlarini simulyatsiya qilishning samarali modellari uchun integral munosabatlarni taqribiy yechish imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Mazkur tadqiqot natijalari 14 ta ilmiy-amaliy anjumanlarda, jumladan 9 ta xalqaro va 5 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o'tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e'lon qilinishi.

Dissertatsiya mavzusi bo'yicha jami 21 ta ilmiy ish chop etilgan, shulardan, O'zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya komissiyasining doktorlik dissertatsiyalari asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 7 ta maqola, jumladan 2 tasi xorijiy va 5 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan, shuningdek elektron hisoblash mashinalari uchun dasturni rasmiy ro'yxatdan o'tkazish to'g'risidagi guvohnoma olingan.

Dissertatsiyaning hajmi va tuzilishi. Dissertatsiya kirish qismi, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning hajmi 107 betni tashkil etgan.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati, tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlantirishning ustuvor yo'nalishlariga mos

kelishi asoslangan. Dissertatsiya mavzusi bo'yicha chet eldagi ilmiy tadqiqotlarning qisqasha ma'lumoti va muammoning o'rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqotning maqsad, vazifalari shakllantirilgan, uning ob'yekti va predmeti ko'rsatilgan, tadqiqotning amaliy natijalari va ilmiy yangiliklari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining qo'llanilishi, dissertatsiya tuzilishi va nashr qilingan ilmiy ishlar to'g'risida ma'lumotlar keltirilgan.

Ushbu dissertatsiyaning **“Eksponensial vaznli Ermit tipidagi optimal kvadratur formulalarni qurish”** nomli birinchi bobi kirish xarakteriga ega bo'lib, bu bobning birinchi paragrafida kuchli tebranuvchi haqiqiy argumentli kompleks qiymatli uzluksiz funksiyalar fazosida eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalarni qurish bo'yicha olib borilgan ilmiy izlanishlar haqida so'z boradi. Birinchi bobning ikkinchi paragrafida umumiy ko'rinishdagi Ermit tipidagi optimal kvadratur formulalarni o'rganishga bag'ishlangan bo'lib ushbu dissertatsiya ishi $p(x) = e^{2\pi i \omega x}$ vaznli optimal kvadratur formulalar qurishga bag'ishlangan.

Biz quyidagi ko'rinishdagi kvadratur formulani qaraymiz

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{\beta=0}^N C_i[\beta] \varphi^{(i)}(x_{\beta}), \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-1. \quad (1)$$

Bu yerda turli chiziqli fazolarda, xususan, Gilbert fazolarida (1)-ko'rinishdagi hosilali optimal kvadratur formulalarni qurish muammosi paydo bo'ladi. Bu muammo hisoblash matematikasi nuqtai nazaridan yangi va qiziqarlidir. Ushbu muammoni dastlab biz $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida yechish bilan shug'ullanamiz. Ushbu fazo quyidagicha ta'riflanadi

$$L_2^{(m)}(0,1) = \{ \varphi : [0,1] \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi^{(m-1)} - \text{absolyut uzluksiz}, \varphi^{(m)} \in L_2(0,1) \}.$$

Ushbu fazoda ikkita φ va ψ funksiyalarning skalyar ko'paytmasi

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L_2^{(m)}} = \int_0^1 \varphi^{(m)}(x) \overline{\psi^{(m)}}(x) dx$$

tenglik bilan aniqlanadi, bunda $\overline{\psi}$ bu ψ funksiyaga kompleks qo'shma funksiya. Bu fazoda φ funksiyaning normasi esa mos ravishda

$$\| \varphi \|_{L_2^{(m)}(0,1)} = \langle \varphi, \varphi \rangle_{L_2^{(m)}}^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 \varphi^{(m)}(x) \overline{\varphi^{(m)}}(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

formula bilan aniqlanadi.

Ushbu fazoda quyidagi ko'rinishdagi vaznli, hosilali kvadratur formulani qaraymiz

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^N d_{\alpha}[\beta] \varphi^{(\alpha)}(h\beta), \quad (2)$$

bu yerda $e^{2\pi i \omega x}$ - vazn funksiyasi, $h = 1/N$, N - biror natural son, $i^2 = -1$, $d_{\alpha}[\beta]$ - (2)-kvadratur formulaning ko'effitsiyentlari, $\omega \in \mathbb{R}$.

Integral va kvadratur yig'indi orasidagi quyidagi ayirma (2)-kvadratur formulaning xatoligi deyiladi

$$(\ell, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \varphi(x) dx = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^N d_{\alpha}[\beta] \varphi^{(\alpha)}(h\beta). \quad (3)$$

Ushbu ayirmaga mos xatolik funksionali quyidagicha

$$\ell(x) = e^{2\pi i \omega x} \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^N (-1)^{\alpha} d_{\alpha}[\beta] \delta^{(\alpha)}(x - h\beta), \quad (4)$$

bu yerda $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ funksiya $[0,1]$ kesmaning xarakteristik funksiyasi, $\delta(x)$ – Dirakning delta-funksiyasi.

Yuqorida keltirilgan $\ell(x)$ xatolik funksionali $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida aniqlanganligi sababli quyidagi shartlar bajarilishi kerak

$$(\ell, x^{\alpha}) = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-1. \quad (5)$$

Ushbu tengliklar (2)-kvadratur formulaning darajasi $m-1$ dan oshmaydigan barcha algebraik ko'phadlarga aniqligini ta'minlaydi.

Koshi-Shvars tengsizligiga asosan quyidagini olamiz

$$|(\ell, \varphi)| \leq \|\ell\|_{L_2^{(m)*}(0,1)} \cdot \|\varphi\|_{L_2^{(m)}(0,1)}.$$

Bu (3)-xatolikning absolyut qiymati $\ell(x)$ xatolik funksionalining normasi yordamida yuqoridan baholanishini bildiradi.

Bundan quyidagi masala kelib chiqadi.

1-masala. Ushbu $L_2^{(m)*}(0,1)$ fazosida (2)-ko'rinishdagi kvadratur formulaning $\ell(x)$ xatolik funksionali normasi ko'rinishini topish.

Bunda xatolik funksionali $d_{\alpha}[\beta]$ koefitsiyentlarga bog'liq. Optimal kvadratur formula qurishda tugun nuqtalar fiksirlangan deb olinadi va normaga eng kichik qiymat beruvchi koefitsiyentlar qidiriladi. Bundan esa quyidagi masala kelib chiqadi.

2-masala. Xatolik funksionali $\ell(x)$ ning normasiga eng kichik qiymat beruvchi $d_{\alpha}[\beta]$ koefitsiyentlarni topish.

Topilgan $d_{\alpha}[\beta]$ koefitsiyentlar (2)-kvadratur formulaning *optimal koefitsiyentlari* deyiladi va $\dot{d}_{\alpha}[\beta]$ kabi belgilanadi. Ushbu koefitsiyentlarga ega (2)-kvadratur formula *optimal kvadratur formula* deyiladi.

1-masalani yechish uchun S.L.Sobolev tomonidan kiritilgan ekstremal funksiya tushunchasidan foydalanamiz.

1-ta'rif. Quyidagi tenglikni

$$(\ell, \psi_{\ell}) = \|\ell\|_{L_2^{(m)*}(0,1)} \cdot \|\psi_{\ell}\|_{L_2^{(m)}(0,1)}$$

qanoatlantiruvchi ψ_{ℓ} funksiyaga ℓ funksionalning **ekstremal funksiyasi** deb ataladi.

Gilbert fazosidagi chiziqli uzluksiz funksionalning umumiy ko'rinishi haqidagi Riss teoremasidan foydalanib $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida aniqlangan ixtiyoriy

chiziqli uzluksiz funksional uchun ushbu fazoda yagona ψ_ℓ element mavjud bo‘lib, barcha $\varphi(x) \in L_2^{(m)}(0,1)$ uchun

$$(\ell, \varphi) = \langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{L_2^{(m)}} \quad \text{va} \quad \|\ell\|_{L_2^{(m)*}} = \|\psi_\ell\|_{L_2^{(m)}}$$

tengliklar o‘rinli bo‘ladi. Yuqoridagi ta’rif va Riss teoremasiga asosan quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz

$$\|\ell\|_{L_2^{(m)*}(0,1)}^2 = (\ell, \psi_\ell).$$

$L_2^{(m)}$ fazosida $\ell(x)$ xatolik funksionaliga mos keluvchi ψ_ℓ ekstremal funksiya S.L.Sobolev tomonidan aniqlangan bo‘lib quyidagi ko‘rinishda

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \bar{\ell}(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x),$$

bu yerda $G_m(x)$ funksiya $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$ differensial operatorning fundamental yechimi.

Bundan quyidagi teorema kelib chiqadi.

1-teorema. $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosidagi (2)-kvadratur formulaning (4) xatolik funksionali normasining kvadrati uchun quyidagi formula o‘rinli:

$$\begin{aligned} & \|\ell(x) | L_2^{(m)*}(0,1)\|^2 = \\ & (-1)^m \left[\sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N (-1)^\alpha \left(d_p^R[\beta] d_\alpha^R[\gamma] + d_p^I[\beta] d_\alpha^I[\gamma] \right) \frac{(h\beta - h\gamma)^{2m-1-\alpha-p} \text{sign}(h\beta - h\gamma)}{2(2m-1-\alpha-p)!} - \right. \\ & \quad - 2 \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^N (-1)^\alpha \int_0^1 \left(d_\alpha^R[\beta] \cos 2\pi\omega x + d_\alpha^I[\beta] \sin 2\pi\omega x \right) \frac{(x-h\beta)^{2m-1-\alpha}}{2(2m-1-\alpha)!} \text{sign}(x-h\beta) dx + \\ & \quad \left. + \int_0^1 \int_0^1 \cos[2\pi\omega(x-y)] \frac{(x-y)^{2m-1} \text{sign}(x-y)}{2(2m-1)!} dx dy \right], \end{aligned} \quad (6)$$

bunda $d_\alpha[\beta] = d_\alpha^R[\beta] + id_\alpha^I[\beta]$, $\alpha = \overline{0, m-1}$.

$L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida 1-masala yechildi. Keyingi paragrafda 2-masalani yechish algoritmi berilgan.

Dissertatsiyaning **“Sobolev fazosida eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalar qurish”** deb nomlangan ikkinchi bobi haqiqiy argumentli kompleks qiymatli uzluksiz funksiyalar fazosida eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalarni qurish, ularning xatolik funksionallari normalarini hisoblashga bag‘ishlangan.

Bunda biz (2) kvadratur formulada $\alpha=1$ bo‘lgan holdan boshlaymiz. Bunda $L_2^{(2)}(0,1)$ fazosida quyidagi kvadratur formulani qaraymiz

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \varphi(h\beta) + \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \varphi'(h\beta), \quad (7)$$

bu yerda $e^{2\pi i \omega x}$ - vazn funksiyasi, $d_0[\beta]$ – ma’lum koeffitsiyentlar, $d_1[\beta]$ – noma’lum koeffitsiyentlar, $h=1/N$, N -natural son, $i^2 = -1$, $\forall \omega \in \square$, $\varphi(x) \in L_2^{(2)}(0,1)$.

Yuqorida berilgan (7) kvadratur formulaga quyidagi xatolik funksionali mos keladi

$$\ell(x) = e^{2\pi i \omega x} \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \delta(x - h\beta) + \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \delta'(x - h\beta). \quad (8)$$

Shuningdek, quyidagi ayirma (7) kvadratur formulaning xatoligi

$$(\ell, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \varphi(x) dx = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \varphi(h\beta) - \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \varphi'(h\beta).$$

Bunda ℓ xatolik funksionali

$$(\ell, x) = 0 \quad (9)$$

shartni qanoatlantiradi.

(7) kvadratur formulaga mos keluvchi (8) xatolik funksionali normasining kvadratini (6) ifodadan $m = 2$ bo'lganda hosil qilinadi. Hosil bo'lgan $\|\ell\|^2$ ifoda (9) shartda minimum qiymat beruvchi $d_1^R[\beta]$ va $d_1^I[\beta]$ koefitsiyentlarni topish uchun quyidagi Lagranj funksiyasini tuzib olamiz

$$\begin{aligned} \Psi(d_1^R[0], d_1^R[1], \dots, d_1^R[N], d_1^I[0], d_1^I[1], \dots, d_1^I[N], \lambda^R, \lambda^I) = \\ = \|\ell\|^2 - 2\lambda^R \left(\int_0^1 \cos 2\pi \omega x \cdot x dx - \sum_{\beta=0}^N d_0^R[\beta] \cdot (h\beta) - \sum_{\beta=0}^N d_1^R[\beta] \right) - \\ - 2\lambda^I \left(\int_0^1 \sin 2\pi \omega x \cdot x dx - \sum_{\beta=0}^N d_0^I[\beta] \cdot (h\beta) - \sum_{\beta=0}^N d_1^I[\beta] \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Ushbu Lagranj funksiyasidan $d_1^R[\beta]$, $d_1^I[\beta]$, $(\beta = 0, \dots, N)$, λ^R va λ^I koefitsiyentlar bo'yicha xususiy hosilalarini olib, ularni mos ravishda nolga tenglab, $d_1[\beta] = d_1^R[\beta] + i d_1^I[\beta]$ va $\lambda = \lambda^R + i \lambda^I$ belgilashlardan foydalanib, (7) kvadratur formulaning koefitsiyentlari uchun quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\sum_{\gamma=0}^N d_1[\gamma] \frac{(h\beta - h\gamma) \operatorname{sign}(h\beta - h\gamma)}{2} - \lambda = F_2(h\beta, \omega), \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (11)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N d_1[\gamma] = g_2(\omega), \quad (12)$$

bu yerda $F_2(h\beta, \omega)$ va $g_2(\omega)$ ma'lum kattaliklar.

(11) va (12) sistemaning yechimi bo'ladigan optimal koefitsiyentlar uchun quyidagi teoremlar isbotlangan.

2-teorema. Sobolevning $L_2^{(2)}(0,1)$ fazosida $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ va $\omega h \notin \mathbb{Z}$ uchun (7) ko'rinishdagi optimal kvadratur formulaning koefitsiyentlari quyidagi ko'rinishga ega:

$$d_0[0] = h \left(\frac{K_{\omega,1} e^{2\pi i \omega h}}{e^{2\pi i \omega h} - 1} - \frac{1}{2\pi i \omega h} \right),$$

$$d_0[\beta] = h K_{\omega,1} e^{2\pi i \omega h \beta}, \quad \beta = \overline{1, N-1},$$

$$d_0[N] = h \left(\frac{K_{\omega,1} e^{2\pi i \omega}}{1 - e^{2\pi i \omega h}} + \frac{e^{2\pi i \omega}}{2\pi i \omega h} \right),$$

$$d_1[0] = h^{-1} \left(F_2(h, \omega) - F_2(0, \omega) + \frac{h}{2} g_2(\omega) \right),$$

$$d_1[\beta] = h^{-1} \left(F_2(h(\beta-1), \omega) - 2F_2(h\beta, \omega) + F_2(h(\beta+1), \omega) \right), \quad \beta = \overline{1, N-1},$$

$$d_1[N] = h^{-1} \left(F_2((1-h), \omega) - F_2(1, \omega) + \frac{h}{2} g_2(\omega) \right),$$

bu yerda $F_2(h\beta, \omega)$ va $g_2(\omega)$ lar ma'lum kattaliklar.

Endi $\omega h \in \mathbf{Z}$ va $\omega \neq 0$ bo'lganda quyidagi natijani olamiz.

3-teorema. Sobolevning $L_2^{(2)}(0,1)$ fazosida $\omega h \in \mathbf{Z}$ va $\omega \neq 0$ uchun (7) ko'rinishdagi optimal kvadratur formulaning koeffitsiyentlari quyidagi ko'rinishga ega:

$$\begin{aligned} d_\alpha[0] &= \frac{(-1)^{\alpha+1}}{(2\pi i \omega)^{\alpha+1}}, \\ d_\alpha[\beta] &= 0, \quad \beta = \overline{1, N-1}, \\ d_\alpha[N] &= \frac{(-1)^\alpha}{(2\pi i \omega)^{\alpha+1}}, \quad \alpha = 0, 1. \end{aligned} \tag{13}$$

Xatolik funksionali normasi uchun quyidagi teorema o'rinni.

4-teorema. Sobolevning $L_2^{(2)}(0,1)$ fazosida (13) koeffitsiyentlar bilan (7) optimal kvadratur formulaning (8) xatolik funksionali normasining kvadrati quyidagi ko'rinishga ega:

$$\|\ell\|_{L_2^{(2)*}}^2 = \frac{1}{16\pi^4 \omega^4}$$

bu yerda $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $\omega h \in \mathbf{Z}$, $\omega \neq 0$.

Endi (2) kvadratur formulada $L_2^{(3)}(0,1)$ fazosida quyidagi kvadratur formulani qaraymiz

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{\alpha=0}^2 \sum_{\beta=0}^N d_\alpha[\beta] \varphi^{(\alpha)}(h\beta), \tag{14}$$

bu kvadratur formula optimal koeffitsiyentlarni $\omega \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ va $\omega h \notin \mathbb{N}$, hamda $\omega h \in \mathbf{Z}$ va $\omega \neq 0$ bo'lganda analitik ko'rinishlari topilgan, buning uchun quyidagi teoremlar o'rinni.

5-teorema. Sobolevning $L_2^{(3)}(0,1)$ fazosida $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ va $\omega h \notin \mathbb{Z}$ uchun (14) ko‘rinishdagi optimal kvadratur formulaning koeffitsiyentlari quyidagi ko‘rinishga ega:

$$d_2[0] = h^{-1} \left[V_3(h) - V_3(0) + \frac{h}{4} \left(q_3(\omega) - \sum_{\gamma=0}^N \left(d_0[\gamma](h\gamma)^2 + 2d_1[\gamma](h\gamma) \right) \right) \right],$$

$$d_2[\beta] = h^{-1} \left[V_3(h(\beta-1)) - 2V_3(h\beta) + V_3(h(\beta+1)) \right], \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1.$$

$$d_2[N] = h^{-1} \left[V_3(1-h) - V_3(1) + \frac{h}{4} \left(q_3(\omega) - \sum_{\gamma=0}^N \left(d_0[\gamma](h\gamma)^2 + 2d_1[\gamma](h\gamma) \right) \right) \right].$$

bu yerda $V_3(h\beta)$, $q_3(\omega)$, $d_0[\gamma]$ va $d_1[\gamma]$ lar ma’lum kattaliklar.

Endi $\omega h \in \mathbb{Z}$, $\omega \neq 0$ bo‘lganda $L_2^{(3)}(0,1)$ fazosida optimal koeffitsiyentlarning oshkor ko‘rinishi uchun quyidagi teorema o‘rinli.

6-teorema. Sobolevning $L_2^{(3)}(0,1)$ fazosida $\omega h \in \mathbb{Z}$ va $\omega \neq 0$ uchun (14) ko‘rinishdagi kvadratur formulaning optimal koeffitsiyentlari quyidagi ko‘rinishga ega:

$$d_\alpha[0] = \frac{(-1)^{\alpha+1}}{(2\pi i \omega)^{\alpha+1}},$$

$$d_\alpha[\beta] = 0, \quad \beta = 1, N-1,$$

$$d_\alpha[N] = \frac{(-1)^\alpha}{(2\pi i \omega)^{\alpha+1}}, \quad \alpha = 0, 1, 2.$$

Dissertatsiyaning “**Gilbertning $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazosida eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalar qurish**” deb nomlangan uchinchi bobida $W_2^{(2,1)}$ Gilbert fazosida optimal kvadratur formulalar qurishga bag‘ishlangan.

Faraz qilaylik, $\varphi(x)$ funksiyalar birinchi tartibli hosilasi absolyut uzluksiz, ikkinchi tartibli hosilasi kvadrati bilan integrallanuvchi, haqiqiy argumentli kompleks qiymatli funksiyalar bo‘lsin. Bu funksiyalar to‘plami Gilbert fazosi $W_2^{(2,1)}(0,1)$ ni tashkil qiladi. Bu fazoda ikkita φ va ψ funksiyalarning skalyar ko‘paytmasi

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 (\varphi''(x) + \varphi'(x)) (\overline{\psi''(x)} + \overline{\psi'(x)}) dx$$

tenglik bilan aniqlanadi, bunda $\overline{\psi}$ bu ψ funksiyaga kompleks qo‘shma funksiya. Bu fazoda φ funksiyaning normasi esa mos ravishda

$$\|\varphi\|_{W_2^{(2,1)}(0,1)}^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle = \int_0^1 (\varphi''(x) + \varphi'(x)) (\overline{\varphi''(x)} + \overline{\varphi'(x)}) dx$$

formula bilan aniqlanadi.

Ushbu fazoda quyidagi ko‘rinishdagi vaznli, hosilali kvadratur formulani qaraymiz

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \varphi(h\beta) + \sum_{\beta=0}^N d_{1,W}[\beta] \varphi'(h\beta), \quad (15)$$

bu yerda $e^{2\pi i \omega x}$ - vazn funksiyasi, $h=1/N$, N - natural son, $i^2 = -1$, $\omega \in \mathbb{R}$, $d_0[\beta]$, $d_{1,W}[\beta]$ esa (15) kvadratur formulaning ko‘effitsiyentlari, ya’ni $d_0[\beta]$ – ma’lum ko‘effitsiyentlar, $d_{1,W}[\beta]$ – noma’lum ko‘effitsiyentlar.

Integral va kvadratur yig‘indi orasidagi quyidagi

$$(\ell_W, \varphi) = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \varphi(h\beta) - \sum_{\beta=0}^N d_{1,W}[\beta] \varphi'(h\beta)$$

ayirmaga (15) kvadratur formulaning xatoligi deyiladi. Bu xatolikka quyidagi xatolik funksionali mos keladi:

$$\ell_W(x) = e^{2\pi i \omega x} \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \delta(x - h\beta) + \sum_{\beta=0}^N d_{1,W}[\beta] \delta'(x - h\beta), \quad (16)$$

bu yerda ℓ_W xatolik funksionali

$$(\ell_W, 1) = 0, \quad (\ell_W, e^{-x}) = 0 \quad (17)$$

shartlarni qanoatlantiradi.

Bizga ma’lumki, Koshi-Shvars tengsizligiga asosan (15) kvadratur formula xatoligining absolyut qiymati φ funksiyaning va ℓ_W xatolik funksionalining normalarni ko‘paytmasi yordamida yuqoridan baholanadi, ya’ni

$$|(\ell_W, \varphi)| \leq \|\ell_W\|_{W_2^{(2,1)*}(0,1)} \cdot \|\varphi\|_{W_2^{(2,1)}(0,1)}.$$

Bu bobning asosiy maqsadi S.L.Sobolev metodidan foydalanib, $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazosida (15) ko‘rinishdagi kvadratur formulalar qurishdan iborat, ya’ni berilgan $d_0[\beta]$ ko‘effitsiyentlar uchun quyidagi

$$\|\ell_W\|_{W_2^{(2,1)*}(0,1)}$$

kattalikni minimumga erishtiruvchi $d_{1,W}[\beta]$ ko‘effitsiyentlarni (agar mavjud bo‘lsa) topishdir.

Shinung uchun $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazosida (15) ko‘rinishdagi optimal kvadratur formulalarni qurish uchun ushbu ishning I bobida keltirilgan, ya’ni Sobolevning $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida qo‘yilgan 1 va 2 masalalarni $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazosida yechishimiz kerak. Buning uchun biz (16) xatolik funksionalining ekstremal funksiyasidan foydalanib, uning normasining kvadratini $W_2^{(2,1)*}(0,1)$ fazosida hisoblaymiz.

Bu yerda $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazosida ℓ_W xatolik funksionaliga mos keluvchi ψ_{ℓ_W} ekstremal funksiya quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\psi_{\ell_W}(x) = \overline{\ell_W}(x) * G_2(x) + P_0 + P_1 e^{-x}$$

bu yerda P_0, P_1 – kompleks sonlar,

$$G_2(x) = \frac{\text{sign} x}{2} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x \right),$$

$\overline{\ell_w}$ bu ℓ_w funksionalga kompleks qo'shma funksional.

ℓ_w ning normasi uchun quyidagi o'rinli.

7-teorema. $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazosidagi (15) kvadratur formulaning (16) xatolik funksionali normasining kvadrati uchun quyidagi formula o'rinli:

$$\begin{aligned} & \left\| \ell_w(x) | W_2^{(2,1)*}(0,1) \right\|^2 = \\ & = - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N \left(d_{1,w}^R[\beta] d_{1,w}^R[\gamma] + d_{1,w}^I[\beta] d_{1,w}^I[\gamma] \right) \frac{\text{sign}(h\beta - h\gamma)}{2} \left(\frac{e^{h\beta - h\gamma} - e^{-(h\beta - h\gamma)}}{2} \right) + \\ & + 2 \sum_{\beta=0}^N \int_0^1 \left(d_{1,w}^R[\beta] \cos 2\pi\omega x + d_{1,w}^I[\beta] \sin 2\pi\omega x \right) \frac{\text{sign}(x - h\beta)}{2} \left(\frac{e^{x - h\beta} + e^{-(x - h\beta)}}{2} - 1 \right) dx + \\ & + 2 \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N \left(\left(d_{1,w}^R[\beta] d_0^R[\gamma] + d_{1,w}^I[\beta] d_0^I[\gamma] \right) \frac{\text{sign}(h\beta - h\gamma)}{2} \left(\frac{e^{h\beta - h\gamma} + e^{-(h\beta - h\gamma)}}{2} - 1 \right) + \right. \\ & + \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N \left(d_0^R[\beta] d_0^R[\gamma] + d_0^I[\beta] d_0^I[\gamma] \right) \frac{\text{sign}(h\beta - h\gamma)}{2} \left(\frac{e^{h\beta - h\gamma} - e^{-(h\beta - h\gamma)}}{2} - (h\beta - h\gamma) \right) - \\ & - 2 \sum_{\beta=0}^N \int_0^1 \left(d_0^R[\beta] \cos 2\pi\omega x + d_0^I[\beta] \sin 2\pi\omega x \right) \frac{\text{sign}(x - h\beta)}{2} \left(\frac{e^{x - h\beta} - e^{-(x - h\beta)}}{2} - (x - h\beta) \right) dx + \\ & \left. + \int_0^1 \int_0^1 \cos(2\pi\omega(x - y)) \frac{\text{sign}(x - y)}{2} \left(\frac{e^{x - y} - e^{-(x - y)}}{2} - (x - y) \right) dx dy \right). \end{aligned}$$

ℓ_w xatolik funksionali normasining kvadratiga (17) shartlarda minimum beradigan $d_{1,w}[\beta]$ koeffitsiyentlar uchun quyidagi sistema olingan

$$\sum_{\gamma=0}^N d_{1,w}[\gamma] G_1(h\beta - h\gamma) + \lambda e^{-h\beta} = F_{2,w}(h\beta, \omega), \quad \beta = 0, 1, \dots, N,$$

$$\sum_{\gamma=0}^N d_{1,w}[\gamma] e^{-h\gamma} = \mu_2(\omega),$$

$$\text{bu yerda } G_1(h\beta) = \frac{\text{sign}(h\beta)}{2} \left(\frac{e^{h\beta} - e^{-h\beta}}{2} \right),$$

$$F_{2,w}(h\beta, \omega) = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \cdot \frac{\text{sign}(x - h\beta)}{2} \left(\frac{e^{x - h\beta} + e^{-(x - h\beta)}}{2} - 1 \right) dx +$$

$$+ \sum_{\gamma=0}^N d_0[\gamma] \cdot \frac{\text{sign}(h\beta - h\gamma)}{2} \left(\frac{e^{h\beta - h\gamma} + e^{-(h\beta - h\gamma)}}{2} - 1 \right),$$

$$\mu_2(\omega) = - \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \cdot e^{-x} dx + \sum_{\gamma=0}^N d_0[\gamma] \cdot e^{-h\gamma}.$$

Bu bobning asosiy natijalari $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazosida (15) ko‘rinishdagi optimal kvadratur formulalar koeffitsiyentlari va optimal kvadratur formulalarning xatoligi haqidagi teoremlardir.

Quyidagilar o‘rinli.

8-teorema. Gilbertning $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazosida $\omega \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ va $\omega h \notin \mathbb{Z}$ uchun (15) ko‘rinishdagi optimal kvadratur formulaning koeffitsiyentlari quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\begin{aligned} d_0[0] &= h \left(\frac{K_{\omega,1} e^{2\pi i \omega h}}{e^{2\pi i \omega h} - 1} - \frac{1}{2\pi i \omega h} \right), \\ d_0[\beta] &= h K_{\omega,1} e^{2\pi i \omega h \beta}, \quad \beta = \overline{1, N-1}, \\ d_0[N] &= h \left(\frac{K_{\omega,1} e^{2\pi i \omega}}{1 - e^{2\pi i \omega h}} + \frac{e^{2\pi i \omega}}{2\pi i \omega h} \right), \\ d_{1,w}[0] &= \frac{\mu_2(\omega)}{2} + \frac{F_{2,w}(h\beta, \omega) - e^{-h} F_{2,w}(0, \omega)}{\text{sh}(h)}, \\ d_{1,w}[\beta] &= \frac{F_{2,w}(h\beta + h, \omega) + F_{2,w}(h\beta - h, \omega)}{\text{sh}(h)} - 2 \text{cth}(h) F_{2,w}(h\beta, \omega), \quad \beta = \overline{1, N-1}, \\ d_{1,w}[N] &= \frac{e\mu_2(\omega)}{2} + \frac{F_{2,w}(1-h, \omega) - e^h F_{2,w}(1, \omega)}{\text{sh}(h)}, \end{aligned}$$

bu yerda $F_{2,w}(h\beta, \omega)$ va $\mu_2(\omega)$ lar ma’lum kattaliklar.

9-teorema. Gilbertning $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazosida $\omega h \in \mathbb{Z}$ va $\omega \neq 0$ bo‘lganda (15) ko‘rinishdagi optimal kvadratur formulaning koeffitsiyentlari quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\begin{aligned} d_0[0] &= -\frac{1}{2\pi i \omega}, \\ d_0[\beta] &= 0, \quad \beta = \overline{1, N-1}, \\ d_0[N] &= \frac{1}{2\pi i \omega}, \\ d_{1,w}[0] &= \frac{1}{2\pi i \omega(2\pi i \omega - 1)} + \frac{1}{\pi i \omega(4\pi^2 \omega^2 + 1)(e^h + 1)}, \\ d_{1,w}[\beta] &= \frac{1 - e^h}{\pi i \omega(4\pi^2 \omega^2 + 1)(e^h + 1)}, \quad \beta = \overline{1, N-1}, \\ d_{1,w}[N] &= -\frac{1}{2\pi i \omega(2\pi i \omega - 1)} - \frac{e^h}{\pi i \omega(4\pi^2 \omega^2 + 1)(e^h + 1)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Bu yerda (15) formulaga mos keluvchi (16) xatolik funksionallari normasining kvadrati uchun $\omega h \in \mathbb{Z}$, $\omega \neq 0$ bo‘lganda quyidagi teorema o‘rinli.

10-teorema. Gilbertning $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazosida (18) koeffitsiyentlar bilan (15) optimal kvadratur formulaning (16) xatolik funksionali normasining kvadrati quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\|\ell_w\|_{W_2^{(2,1)*}}^2 = \frac{1}{2\pi^2\omega^2(4\pi^2\omega^2+1)} \left(\frac{1}{2} - \frac{(e^h-1)N}{(4\pi^2\omega^2+1)(e^h+1)} \right),$$

bu yerda $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $\omega h \in \mathbb{Z}$, $\omega \neq 0$ va $\omega = kN$.

XULOSA

Ushbu dissertatsiya ishida eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalarni qurish masalasi qaralgan. Bunda S.L.Sobolev tomonidan taklif etilgan usuldan foydalanib haqiqiy argumentli kompleks qiymatli uzluksiz funksiyalar fazosida eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalar qurildi va uni topilgan koeffitsiyentlarning analitik formulalaridan foydalanib xatoligining aniq yuqori bahosi olindi.

Dissertatsiya ishida quyidagi asosiy natijalar olindi:

1. $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida eksponensial vaznli Ermit tipidagi optimal kvadratur formulaning xatoligi yuqoridan xatolik funksionali normasi bilan chegaralanganligi sababli, ekstremal funksiyadan foydalanib xatolik funksionali normasi kvadrating analitik ko‘rinishi topilgan.

2. Eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalar koeffitsiyentlari uchun Viner-Xopf tipidagi diskret sistema olingan.

3. $L_2^{(m)}(0,1)$ fazosida optimal kvadratur formulalar koeffitsiyentlari uchun ixtiyoriy m da algoritm berilgan.

4. $L_2^{(2)}(0,1)$ va $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazolarida $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ va $\omega h \notin \mathbb{R}$, hamda $\omega h \in \mathbb{Z}$ va $\omega \neq 0$ bo‘lgan hollar uchun eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalar koeffitsiyentlarining oshkor ko‘rinishi topilgan.

5. $L_2^{(2)}(0,1)$ va $W_2^{(2,1)}(0,1)$ fazolarida $\omega h \in \mathbb{Z}$, $\omega \neq 0$ bo‘lganda eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalar xatolik funksionallari normasining kvadrati hisoblangan.

6. $L_2^{(3)}(0,1)$ fazosida $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\omega h \notin \mathbb{R}$ va $\omega h \in \mathbb{Z}$, $\omega \neq 0$ bo‘lgan hollar uchun eksponensial vaznli, hosilali optimal kvadratur formulalar koeffitsiyentlarining analitik formulalari olingan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
НАЦИОНАЛЬНОМ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И.РОМАНОВСКОГО

ДАВЛАТОВА ФАТИМА ИСРАИЛОВНА

**ОПТИМАЛЬНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ИНТЕГРАЛОВ ФУРЬЕ В
ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ**

**01.01.03 – Вычислительная и дискретная математика
(физико-математические науки)**

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Ташкент – 2025

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан за №B2024.4.PhD/FM1182.

Диссертация выполнена в институте математики имени В.И.Романовского АНРУз.

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещен на веб-странице Научного совета (<http://ik-fizmat.nuu.uz/>) и на Информационно-образовательном портале «Ziynet» (www.ziynet.uz)

Научный руководитель:

Шадиметов Халматвай Махкамбаевич
доктор физико-математических наук, профессор

Официальные оппоненты:

Нормуродов Чори Бегалиевич
доктор физико-математических наук, профессор

Болтаев Азиз Кузиевич
доктор философ по физико-математические науки (PhD), доцент

Ведущая организация:

Каракалпакский государственный университет

Защита диссертации состоится «___» _____ 2025 года в ___ часов на заседании Научного совета DSc.03/30.12.2019.FM.01.02 при Национальном университете Узбекистана. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871)227-12-24, факс: (+99871) 246-53-21, e-mail: наука@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана (зарегистрирована за№____). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: (+99871) 246-02-24).

Автореферат диссертации разослан «___» _____ 2025 года.
(протокол рассылки №_____ от «___» _____ 2025 года).

М.М. Арипов

Председатель Научного совета по
присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор

З.Р. Рахмонов

Ученый секретарь Научного совета
по присуждению ученых степеней,
д.ф.-м.н., профессор

Р.Д. Алоев

Председатель научного семинара
при Научном совете по
присуждению ученой степени
доктора наук, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (аннотация к диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и необходимость темы диссертации. В результате многочисленных научных и практических исследований, проводимых в мире, построение оптимальных квадратурных формул с экспоненциальным весом и производной в пространстве комплекснозначных непрерывных функций с действительными аргументами, приближенное вычисление и применение определенных интегралов является одним из ведущих направлений. Теория квадратурных и кубатурных формул служит основным инструментом при численном вычислении сильно осциллирующих интегралов во всем мире. Эти формулы требуют численного решения дифференциальных и интегральных уравнений, особенно в таких областях, как квантовая химия, анализ изображений, электродинамика, компьютерная томография, механика жидкости, математическая физика, электронная инженерия и электромагнитное излучение, и их реализации на практике. В этом отношении важным считается исследование производных, экспоненциально весовых, оптимальных квадратурных формул, точных для экспоненциальных функций на классе дифференцируемых функций, использование оценки погрешности формул, построенных на определенных Гильбертовых пространствах.

В мире ведутся исследования и разработки, направленные на построение экспоненциально весовых, производных, оптимальных квадратных формул с высокой точностью в Гильбертовых пространствах. В этом отношении особое внимание уделяется численному решению дифференциальных и интегральных уравнений, которые формируются во многих областях, таких как анализ изображений, электродинамика, компьютерная томография, механика жидкостей и электромагнитное излучение, построению экспоненциально весовых производных оптимальных квадратных формул в различных классах функций с использованием существующих методов и созданию методов, позволяющих с достаточной точностью вычислять решения математических задач.

В нашей республике проводятся комплексные меры по построению экспоненциально весовых, производных оптимальных квадратурных, кубатурных, интерполяционных формул, имеющих научное и практическое применение в фундаментальных науках и оценке их погрешностей в некоторых Гильбертовых пространствах, а также по разработке методов численно-аналитического решения задач анализа изображений и компьютерной томографии и достигаются определенные результаты. В Республике Узбекистан в 2020-2023 годах поставлены важные задачи по улучшению качества образования в области математических наук, повышению эффективности и практической значимости научных исследований, в том числе «Функциональный анализ, алгебра, дифференциальные уравнения, математическая физика, математическое моделирование, теория вероятностей, математическая статистика,

вычислительная математика и дискретная математика»². В реализации этих задач, в том числе по построению экспоненциально взвешенных, производных оптимальных квадратурных формул в некоторых пространствах Гилберта, большое значение имеет вычисление квадрата норм их функционалов погрешности.

Данное диссертационное исследование в определенной степени служит решению задач, обозначенных в Указе Президента Республики Узбекистан УП – № 4947 от 07 февраля 2017 года «О стратегии действия по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», УП-№60 от 28 января 2022 года «О стратегии развития Нового Узбекистана на 2022-2026 годы», в постановлениях ПП – № 2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управления и финансирования научно-исследовательской деятельности», ПП – № 2909 от 20 апреля 2017 года «О мерах по дальнейшему развитию системы высшего образования», ПП – № 3682 от 27 апреля 2018 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию системы практического внедрения инновационных идей, технологий и проектов», ПП-№ 4708 от 07 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также в других нормативно-правовых актах, относящихся к данной области деятельности.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Как известно, многие задачи в науке и технике, особенно связанные с сильно осциллирующими функциями, приводят к вычислению специальных интегралов, в частности, к определению таких математических выражений, как коэффициенты Фурье и интегралы Фурье. Разработан ряд специальных методов и алгоритмов для аппроксимации интегралов этого типа, которые играют важную роль в вычислительной математике. Примерами таких методов являются метод Файлеона, методы асимптотического распространения, метод коллокации Левина, метод наискорейшего спуска, а также такие подходы, как оптимальные квадратурные и кубатурные формулы. Метод Файлона был первоначально предложен на основе кусочной аппроксимации функции на интервале интегрирования, и этот метод широко признан эффективным подходом для вычисления сильно осциллирующих интегралов. В последние годы в этой области достигнут значительный прогресс и разработан ряд новых методов приближенного вычисления интегралов с различными сильно осциллирующими функциями. К ним относятся формулы типа Файлена, формулы типа Кленшоу-Куртиса-Файлена, методы типа Левина, улучшенные

² Постановление Президента Республики Узбекистан № ПП–4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики» от 07 мая 2020 года.

методы Кленшоу-Куртиса и обобщенные квадратурные формулы. Эти методы позволили не только повысить точность расчета, но и существенно улучшить эффективность процесса расчета. В последние десятилетия в этой области ведутся активные исследования. В частности, обширные исследования по разработке и применению этих методов проведены в таких научных работах, как Abbas S. K., Sohrabi S., Ranjbar H., Shivaram K.T., Prakasha H.T., Lovetskiy K.P., Sevastianov L.A., Hnatič M., Kulyabov D.S., He G., Liu Y., Zaman S., Suliman, Siraj-ul-Islam., Yunyun Ma Yuesheng Xu, Jing Gao, Iserles A., Deaño A., Huybrechs D., Wang Y., Xiang Sh., Huybrechs D., Kuijlaars A., Lejon N. Их работа направлена на изучение формул численного интегрирования и их аппроксимационных свойств в различных пространствах функций с использованием методов Файлона, асимптотического разложения, коллокации Левина и наискорейшего спуска, а также на расширение их применения к практическим задачам. Кроме того, заслуживают внимания исследования методов асимптотического разложения. Такие учёные, как Iserles A., Nørsett S.P., Frank W., Olver J., Stein E.M., Xiang S., Beylkin G. и Monzon L., добились важных результатов в разработке асимптотических методов и их применении к вычислению сильно осциллирующих интегралов. Эти исследования не только имеют теоретическое значение, но и предоставляют решения, которые широко используются в практических областях, таких как квантовая физика, акустика, электромагнитное излучение и обработка изображений. Эти методы и исследования вносят значительный вклад в развитие вычислительной математики и открывают новые возможности для решения более сложных задач в будущем. Стоит отметить, что в последние годы такие ученые, как Шадиметов Х.М., Милованович Г.В., Хаётов А.Р., С.-О. Lee, S. Jeon, Болтаев Н.Д., Бабаев С.С., Бозаров Б.И. и Хайриев У.Н. провели глубокие научные исследования по проблемам приближенного вычисления сильно осциллирующих интегралов в пространствах Гильберта $L_2^{(m)}$ и $W_2^{(m,m-1)}$. Их главной целью было построение оптимальных квадратурных формул и применение этих формул для решения различных практических задач. Эти исследования не только принесли важные теоретические новшества, но и привели к значительному прогрессу в практических областях. В частности, создана возможность воспроизведения изображений технологий компьютерной томографии в высоком разрешении в лабораторных условиях в промышленной и медицинской сферах. Эти достижения особенно важны в таких областях, как диагностика и контроль качества.

Связь темы диссертации с научно-исследовательской работой высшего учебного заведения, в котором выполняется диссертация. Диссертационное исследование выполнено в рамках календарного плана лаборатории вычислительной математики Института математики им. В.И. Романовского Академия Наук Республики Узбекистан по теме “Построение оптимальных квадратурных, интерполяционных, разностных формул в Гильбертовых пространствах и их приложения к решению интегральных уравнений”.

Целью исследования является построение экспоненциально весовых оптимальных квадратурных формул с производными в пространстве комплекснозначных непрерывных функций с действительными аргументами в пространствах Гильберта и вычисление норм их функционалов погрешности.

Задачи исследования:

найти аналитическое представление нормы функционала погрешности экспоненциально весовых оптимальной квадратурной формулы с производными в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$;

получить систему линейных уравнений для коэффициентов с действительными аргументами комплекснозначных экспоненциально весовых оптимальных квадратурных формул с производными в пространстве Гильберта $W_2^{(2,1)}(0,1)$;

нахождение явных формул для коэффициентов, дающих минимальные значения нормы функционалов погрешности экспоненциально весовых оптимальных квадратурных формул с производными в пространствах Гильберта $L_2^{(2)}$ и $W_2^{(2,1)}$ комплекснозначных функций с действительными аргументами;

оценка погрешности экспоненциально весовых оптимальных квадратурных формул с производными в пространствах Гильберта $L_2^{(2)}$ и $W_2^{(2,1)}$;

нахождение аналитических формул для оптимальных коэффициентов в пространстве Соболева $L_2^{(3)}$.

Объектом исследования являются пространства Гильберта, формулы численного интегрирования, функции дискретного аргумента, линейные функционалы и системы линейных уравнений.

Предметом исследования являются экспоненциально весовая оптимальная квадратурная формула с производным, функционал погрешности, экстремальная функция, дискретный аналог дифференциального оператора, дискретная система уравнений Винера-Хопфа, оптимальные коэффициенты и норма функционала погрешности.

Методы исследования. В работе использованы методы вычислительной математики, функционального анализа, а также теории дифференциальных уравнений, обобщенных функций и теории функций с дискретными аргументами.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

найдена аналитическая представления нормы функционала погрешности экспоненциально весовых оптимальной квадратурной формулы с производным в пространстве Соболева $L_2^{(m)}(0,1)$;

получена система линейных уравнений для коэффициентов действительным аргументом комплексным значением экспоненциально

весовых оптимальной квадратурной формулы с производным в пространстве Гильберта $W_2^{(2,1)}(0,1)$;

найжены явные формулы комплекснозначных функций с действительными аргументами для коэффициентов, дающих минимальные значения норм функционалов погрешности действительным аргументом, комплексным значением, весовой оптимальной квадратурной формулы с производным в пространствах Гильберта $L_2^{(2)}$ и $W_2^{(2,1)}$;

оценена погрешность экспоненциально весовой оптимальной квадратурной формулы с производным с помощью оптимальных коэффициентов в пространствах Гильберта $L_2^{(2)}$ и $W_2^{(2,1)}$;

найжены аналитические формулы оптимальных коэффициентов с использованием дискретных операторов в пространстве Соболева $L_2^{(3)}$.

Практические результаты исследования заключаются в следующем:

построенные экспоненциально весовые квадратурные формулы с производными были использованы для обоснования экспоненциальных, мультипликативных и степенных оценок двумерной функции надежности в правосторонней модели случайного цензурирования;

для аппроксимации интегральных соотношений для эффективных моделей имитации газовых сетей были использованы экспоненциально весовые оптимальные квадратурные формулы с производной.

Достоверность результатов исследования основана на использовании методов теории квадратурных формул, вычислительной математики, функционального анализа и теории функций с дискретными аргументами, а также строгости математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость результатов исследования определяется алгоритмом построения весовых оптимальных квадратурных формул с производными, для приближенного вычисления коэффициентов Фурье в определенных пространствах Гильберта и высокой скоростью сходимости построенных формул.

Практическая значимость результатов исследования состоит в том, что оптимальные квадратурные формулы, на основе которых они построены, служат для приближенного решения задач квантовой химии, анализа изображений, электродинамики, компьютерной томографии, механики жидкости, математической физики, электронной техники, акустики и электромагнитного излучения с использованием сильных осциллирующих интегралов.

Внедрение результатов исследований. На основе научных результатов, полученных по экспоненциально весовым оптимальным квадратурным формулам с производным:

В 2021-2023 годах оптимальная квадратурная формула, построенная в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$, была использована в практическом проекте UZB-Ind-2021-97 на тему "Прикладные статистические задачи для зависимых

неполных многомерных данных" на кафедре "Прикладная математика и информатика" Ташкентского филиала Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова. В результате стало возможным основывать экспоненциальные, мультипликативные и степенные оценки на двумерной функции надежности в правосторонней модели случайного цензурирования (Ташкентский филиал Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, номер справки 01-01-73 от 02 мая 2025 г.);

Построенная оптимальная формула численного расчета интегралов Фурье была использована при реализации инновационного проекта IL-5321091543 «Создание и моделирование топологической модели газовых сетей», выполняемого в Ташкентском университете информационных технологий в 2022-2023 годах, то есть в проекте «Создание и моделирование топологической модели газовых сетей». В результате удалось аппроксимировать интегральные соотношения для эффективных моделей моделирования газовых сетей (Ташкентский университет информационных технологий, номер справки 305/05-2 от 27 января 2025 года).

Апробация результатов исследования. Результаты данного исследования обсуждались на 14 научно-практических конференциях, в том числе на 9 международных и 5 республиканских научно-практических конференциях.

Публикация результатов исследований. По теме диссертации опубликовано 21 научная работа, из них 7 статей опубликованы в научных изданиях, рекомендованных к публикации Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан по основным научным результатам докторских диссертаций, в том числе 2 в зарубежных и 5 в республиканских журналах, а также получено свидетельство об официальной регистрации программы для электронных вычислительных машин.

Объём и структура диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и списка литературы. Объём диссертации составляет 107 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении подчеркивается актуальность и необходимость темы диссертации, а также соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий в республике. Приводится краткий обзор зарубежных научных исследований по теме диссертации и уровень изученности проблемы, формулируются цели и задачи исследования, указываются его объект и цель, описываются практические результаты и научная новизна исследования, раскрывается теоретическая и практическая значимость полученных результатов, приводятся сведения о применении результатов исследования, структуре диссертации, опубликованных научных трудах.

Первая глава диссертации, озаглавленная **«Построение экспоненциально весовых оптимальных квадратурных формул**

Эрмитова типа», носит вводной характер. В первом параграфе главы рассматриваются научные исследования, проведённые по построению экспоненциально весовых оптимальных квадратурных формул с производным в пространстве комплекснозначных непрерывных функций с сильно осциллирующими действительными аргументами. Второй параграф первой главы посвящен исследованию оптимальных квадратурных формул эрмитова типа в общем виде, данная диссертационная работа посвящена построению оптимальных квадратурных формул с весом $p(x) = e^{2\pi i \omega x}$.

Рассмотрим квадратурную формулу вида

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{i=0}^{\alpha} \sum_{\beta=0}^N C_i[\beta] \varphi^{(i)}(x_{\beta}), \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-1. \quad (1)$$

При этом возникает задача построения оптимальных квадратурных формул с производными вида (1) в различных линейных пространствах, в частности, в пространствах Гилберта. Эта задача является новой и интересной с точки зрения вычислительной математики. Первоначально решим эту задачу в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$. Это пространство определяется следующим образом:

$$L_2^{(m)}(0,1) = \{ \varphi : [0,1] \rightarrow \mathbb{C} \mid \varphi^{(m-1)} - \text{абсолютно непрерывно, } \varphi^{(m)} \in L_2(0,1) \}.$$

В этом пространстве скалярное произведение двух функций φ и ψ определяется уравнением

$$\langle \varphi, \psi \rangle_{L_2^{(m)}} = \int_0^1 \varphi^{(m)}(x) \overline{\psi^{(m)}}(x) dx,$$

где функция $\overline{\psi}$ комплексно сопряженная функции ψ . В этом пространстве норма функции φ определяется по формуле

$$\| \varphi \|_{L_2^{(m)}(0,1)} = \langle \varphi, \varphi \rangle_{L_2^{(m)}}^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 \varphi^{(m)}(x) \overline{\varphi^{(m)}}(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

соответственно.

В этом пространстве мы рассмотрим следующую весовую квадратурную формулу с производным

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^N d_{\alpha}[\beta] \varphi^{(\alpha)}(h\beta), \quad (2)$$

где $e^{2\pi i \omega x}$ - весовая функция, $h=1/N$, N - натуральное число, $i^2 = -1$, $d_{\alpha}[\beta]$ - коэффициенты квадратурной формулы (2), $\omega \in \mathbb{R}$.

Следующая разность между интегралом и квадратурной суммой называется погрешностью квадратурной формулы (2)

$$(\ell, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \varphi(x) dx = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^N d_{\alpha}[\beta] \varphi^{(\alpha)}(h\beta). \quad (3)$$

Функционал погрешности, соответствующей этой разности, выглядит следующим образом:

$$\ell(x) = e^{2\pi i \omega x} \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^N (-1)^\alpha d_\alpha[\beta] \delta^{(\alpha)}(x - h\beta), \quad (4)$$

где $\varepsilon_{[0,1]}(x)$ – характеристическая функция отрезка $[0,1]$, $\delta(x)$ – дельта-функция Дирака.

Поскольку выше указанная функционал погрешности $\ell(x)$ определена в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, должны быть выполнены следующие условия

$$(\ell, x^\alpha) = 0, \quad \alpha = 0, 1, \dots, m-1. \quad (5)$$

Эти равенства гарантируют точность квадратной формулы (2) для всех алгебраических многочленов, степень которых не превосходит $m-1$.

На основании неравенства Коши-Шварца получаем следующее

$$|(\ell, \varphi)| \leq \| \ell \|_{L_2^{(m)*}(0,1)} \cdot \| \varphi \|_{L_2^{(m)}(0,1)}.$$

Это означает, что абсолютная величина погрешности (3) оценивается сверху с использованием нормы функционала погрешности $\ell(x)$.

Это приводит к следующей задаче.

Задача 1. Найти вид нормы функционала погрешности $\ell(x)$ квадратурной формулы вида (2) в пространстве $L_2^{(m)*}(0,1)$.

В этом случае функционал погрешности зависит от коэффициентов $d_\alpha[\beta]$. При построении оптимальной квадратурной формулы узлы предполагаются фиксированными и ищутся коэффициенты, дающие наименьшее значение нормы. Это приводит к следующей задаче.

Задача 2. Найти коэффициенты $d_\alpha[\beta]$, дающие наименьшее значение нормы функционала погрешности $\ell(x)$.

Найденные коэффициенты $d_\alpha[\beta]$ называются оптимальными коэффициентами квадратурной формулы (2) и обозначаются как $\dot{d}_\alpha[\beta]$. Квадратурная формула (2) такими коэффициентами называется оптимальной квадратурной формулой.

Для решения задачи 1 воспользуемся понятием экстремальной функции, введённым С.Л. Соболевым.

Определение 1. *Экстремальной функцией* функционала ℓ называется функция ψ_ℓ , удовлетворяющую равенству

$$(\ell, \psi_\ell) = \| \ell \|_{L_2^{(m)*}(0,1)} \cdot \| \psi_\ell \|_{L_2^{(m)}(0,1)}.$$

Используя теорему Рисса об общем виде линейно непрерывного функционала в пространстве Гильберта, для любого линейно непрерывного функционала, определенного в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$, существует единственный элемент ψ_ℓ в этом пространстве, причем равенства

$$(\ell, \varphi) = \langle \psi_\ell, \varphi \rangle_{L_2^{(m)}} \quad \text{и} \quad \| \ell \|_{L_2^{(m)*}} = \| \psi_\ell \|_{L_2^{(m)}}$$

выполняются для всех $\varphi(x) \in L_2^{(m)}(0,1)$. На основании приведенного выше определения и теоремы Рисса имеем следующее равенство

$$\|\ell | L_2^{(m)*}(0,1)\|^2 = (\ell, \psi_\ell).$$

Экстремальная функция ψ_ℓ , соответствующая функционалу погрешности $\ell(x)$ в пространстве $L_2^{(m)}$, была определена С.Л. Соболевым и имеет следующий вид

$$\psi_\ell(x) = (-1)^m \bar{\ell}(x) * G_m(x) + P_{m-1}(x),$$

где функция $G_m(x)$ фундаментальное решение дифференциального оператора $\frac{d^{2m}}{dx^{2m}}$.

Из этого следует следующая теорема.

Теорема 1. Для квадрата нормы функционала погрешности (4) квадратурной формулы (2) в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned} & \|\ell(x) | L_2^{(m)*}(0,1)\|^2 = \\ & (-1)^m \left[\sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N (-1)^\alpha (d_p^R[\beta] d_\alpha^R[\gamma] + d_p^I[\beta] d_\alpha^I[\gamma]) \frac{(h\beta - h\gamma)^{2m-1-\alpha-p} \operatorname{sign}(h\beta - h\gamma)}{2(2m-1-\alpha-p)!} - \right. \\ & \quad - 2 \sum_{\alpha=0}^{m-1} \sum_{\beta=0}^N (-1)^\alpha \int_0^1 (d_\alpha^R[\beta] \cos 2\pi\omega x + d_\alpha^I[\beta] \sin 2\pi\omega x) \frac{(x - h\beta)^{2m-1-\alpha} \operatorname{sign}(x - h\beta)}{2(2m-1-\alpha)!} dx + \\ & \quad \left. + \int_0^1 \int_0^1 \cos[2\pi\omega(x-y)] \frac{(x-y)^{2m-1} \operatorname{sign}(x-y)}{2(2m-1)!} dx dy \right], \end{aligned} \quad (6)$$

где $d_\alpha[\beta] = d_\alpha^R[\beta] + id_\alpha^I[\beta]$, $\alpha = \overline{0, m-1}$.

Задача 1 решена в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$. В следующем параграфе приведен алгоритм решения задачи 2.

Вторая глава диссертации под названием «**Построение экспоненциально весовых оптимальных квадратурных формул с производной в пространстве Соболева**» посвящена построению экспоненциально весовых, оптимальных квадратурных формул с производной в пространстве комплекснозначных непрерывных функций с действительными аргументами и вычислению норм их функционалов погрешности.

В этом случае мы исходим из квадратурной формулы (2) при $\alpha=1$. В этом случае мы рассматриваем следующую квадратурную формулу в пространстве $L_2^{(2)}(0,1)$

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \varphi(h\beta) + \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \varphi'(h\beta), \quad (7)$$

где $e^{2\pi i \omega x}$ - весовая функция, $d_0[\beta]$ - известные коэффициенты, $d_1[\beta]$ - неизвестные коэффициенты, $h=1/N$, N - натуральное число, $i^2 = -1$, $\forall \omega \in \square$, $\varphi(x) \in L_2^{(2)}(0,1)$.

Следующий функционал погрешности соответствует квадратурной формуле (7), приведённой выше

$$\ell(x) = e^{2\pi i \omega x} \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \delta(x - h\beta) + \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \delta'(x - h\beta). \quad (8)$$

Так как следующая разность представляет собой погрешность квадратурной формулы (7)

$$(\ell, \varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} \ell(x) \varphi(x) dx = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \varphi(h\beta) - \sum_{\beta=0}^N d_1[\beta] \varphi'(h\beta).$$

В этом случае функционал погрешности ℓ удовлетворяет условию

$$(\ell, x) = 0. \quad (9)$$

Квадрат нормы функционала погрешности (8), соответствующий квадратурной формуле (7), получается из выражения (6) при $m=2$. Чтобы найти коэффициенты $d_1^R[\beta]$ и $d_1^I[\beta]$, дающие минимальное значение полученным выражением $\|\ell\|^2$ при условии (9), построим следующую функцию Лагранжа

$$\begin{aligned} \Psi(d_1^R[0], d_1^R[1], \dots, d_1^R[N], d_1^I[0], d_1^I[1], \dots, d_1^I[N], \lambda^R, \lambda^I) = \\ = \|\ell\|^2 - 2\lambda^R \left(\int_0^1 \cos 2\pi \omega x \cdot x dx - \sum_{\beta=0}^N d_0^R[\beta] \cdot (h\beta) - \sum_{\beta=0}^N d_1^R[\beta] \right) - \\ - 2\lambda^I \left(\int_0^1 \sin 2\pi \omega x \cdot x dx - \sum_{\beta=0}^N d_0^I[\beta] \cdot (h\beta) - \sum_{\beta=0}^N d_1^I[\beta] \right). \end{aligned} \quad (10)$$

Находя частные производные от функции Лагранжа по коэффициентам $d_1^R[\beta]$, $d_1^I[\beta]$, ($\beta=0, \dots, N$), λ^R и λ^I , приравняв их к нулю соответственно и используя обозначения $d_1[\beta] = d_1^R[\beta] + i d_1^I[\beta]$ и $\lambda = \lambda^R + i \lambda^I$, получим следующую систему линейных уравнений относительно коэффициентов квадратурной формулы (7):

$$\sum_{\gamma=0}^N d_1[\gamma] \frac{(h\beta - h\gamma) \text{sign}(h\beta - h\gamma)}{2} - \lambda = F_2(h\beta, \omega), \quad \beta = 0, 1, \dots, N, \quad (11)$$

$$\sum_{\gamma=0}^N d_1[\gamma] = g_2(\omega), \quad (12)$$

где $F_2(h\beta, \omega)$ и $g_2(\omega)$ известные величины.

Для оптимальных коэффициентов, являющихся решениями системы (11) и (12), доказаны следующие теоремы.

Теорема 2. Коэффициенты оптимальной квадратурной формулы (7) для $\omega \in \square \setminus \{0\}$ и $\omega h \notin \square$ в пространстве Соболева $L_2^{(2)}(0,1)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} d_0[0] &= h \left(\frac{K_{\omega,1} e^{2\pi i \omega h}}{e^{2\pi i \omega h} - 1} - \frac{1}{2\pi i \omega h} \right), \\ d_0[\beta] &= h K_{\omega,1} e^{2\pi i \omega h \beta}, \quad \beta = \overline{1, N-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_0[N] &= h \left(\frac{K_{\omega,1} e^{2\pi i \omega}}{1 - e^{2\pi i \omega h}} + \frac{e^{2\pi i \omega}}{2\pi i \omega h} \right), \\
d_1[0] &= h^{-1} \left(F_2(h, \omega) - F_2(0, \omega) + \frac{h}{2} g_2(\omega) \right), \\
d_1[\beta] &= h^{-1} \left(F_2(h(\beta-1), \omega) - 2F_2(h\beta, \omega) + F_2(h(\beta+1), \omega) \right), \quad \beta = \overline{1, N-1}, \\
d_1[N] &= h^{-1} \left(F_2((1-h), \omega) - F_2(1, \omega) + \frac{h}{2} g_2(\omega) \right),
\end{aligned}$$

где $F_2(h\beta, \omega)$ и $g_2(\omega)$ известные величины.

Теперь, когда $\omega h \in \mathbf{Z}$ и $\omega \neq 0$, мы получим следующий результат

Теорема 3. Коэффициенты оптимальной квадратурной формулы (7) для $\omega h \in \mathbf{Z}$ и $\omega \neq 0$ в пространстве Соболева $L_2^{(2)}(0,1)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
d_\alpha[0] &= \frac{(-1)^{\alpha+1}}{(2\pi i \omega)^{\alpha+1}}, \\
d_\alpha[\beta] &= 0, \quad \beta = \overline{1, N-1}, \\
d_\alpha[N] &= \frac{(-1)^\alpha}{(2\pi i \omega)^{\alpha+1}}, \quad \alpha = 0, 1.
\end{aligned} \tag{13}$$

Для нормы функционала погрешности справедлива следующая теорема:

Теорема 4. Квадрат нормы функционала погрешности (8) оптимальной квадратурной формулы (7) с коэффициентами (13) в пространстве Соболева $L_2^{(2)}(0,1)$ имеет следующий вид:

$$\|\ell\|_{L_2^{(2)*}}^2 = \frac{1}{16\pi^4 \omega^4}$$

где $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $\omega h \in \mathbf{Z}$, $\omega \neq 0$.

Теперь в квадратурной формуле (2) рассмотрим следующую квадратурную формулу в пространстве $L_2^{(3)}(0,1)$

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{\alpha=0}^2 \sum_{\beta=0}^N d_\alpha[\beta] \varphi^{(\alpha)}(h\beta), \tag{14}$$

Эта квадратурная формула имеет аналитические выражения для оптимальных коэффициентов $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\omega h \notin \mathbb{Z}$, а также $\omega h \in \mathbf{Z}$ и $\omega \neq 0$, для которых справедливы следующие теоремы.

Теорема 5. Коэффициенты оптимальной квадратурной формулы (14) для $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\omega h \notin \mathbb{Z}$ в пространстве Соболева $L_2^{(3)}(0,1)$ имеют следующий вид:

$$d_2[0] = h^{-1} \left[V_3(h) - V_3(0) + \frac{h}{4} \left(q_3(\omega) - \sum_{\gamma=0}^N \left(d_0[\gamma] (h\gamma)^2 + 2d_1[\gamma] (h\gamma) \right) \right) \right].$$

$$d_2[\beta] = h^{-1} [V_3(h(\beta-1)) - 2V_3(h\beta) + V_3(h(\beta+1))], \quad \beta = 1, 2, \dots, N-1.$$

$$d_2[N] = h^{-1} \left[V_3(1-h) - V_3(1) + \frac{h}{4} \left(q_3(\omega) - \sum_{\gamma=0}^N (d_0[\gamma](h\gamma)^2 + 2d_1[\gamma](h\gamma)) \right) \right].$$

где $V_3(h\beta)$, $q_3(\omega)$, $d_0[\gamma]$ и $d_1[\gamma]$ известные величины.

Теперь для явного вида оптимальных коэффициентов в пространстве $L_2^{(3)}(0,1)$ при $\omega h \in \square$, $\omega \neq 0$ справедлива следующая теорема.

Теорема 6. В пространстве Соболева $L_2^{(3)}(0,1)$ оптимальные коэффициенты квадратурной формулы (14) для $\omega h \in \mathbf{Z}$ и $\omega \neq 0$ имеют следующий вид:

$$d_\alpha[0] = \frac{(-1)^{\alpha+1}}{(2\pi i \omega)^{\alpha+1}},$$

$$d_\alpha[\beta] = 0, \quad \beta = \overline{1, N-1},$$

$$d_\alpha[N] = \frac{(-1)^\alpha}{(2\pi i \omega)^{\alpha+1}}, \quad \alpha = 0, 1, 2.$$

Третья глава диссертации под названием «**Построение экспоненциально весовых оптимальных квадратурных формул с производными в пространстве Гильберта $W_2^{(2,1)}(0,1)$** » посвящена построению оптимальных квадратурных формул в пространстве Гильберта $W_2^{(2,1)}$.

Пусть функции $\varphi(x)$ комплекснозначные функции с действительными аргументами, первая производная которых абсолютно непрерывна, а вторая интегрируема с квадратом. Множество этих функций образует Гильбертово пространство $W_2^{(2,1)}(0,1)$. В этом пространстве скалярное произведение двух функций φ и ψ определяется равенством

$$\langle \varphi, \psi \rangle = \int_0^1 (\varphi''(x) + \varphi'(x)) (\overline{\psi''(x)} + \overline{\psi'(x)}) dx,$$

где функция $\overline{\psi}$ комплексно сопряженная функция функции ψ . В этом пространстве норма функции φ определяется по формуле

$$\|\varphi\|_{W_2^{(2,1)}(0,1)}^2 = \langle \varphi, \varphi \rangle = \int_0^1 (\varphi''(x) + \varphi'(x)) (\overline{\varphi''(x)} + \overline{\varphi'(x)}) dx$$

соответственно.

В этом пространстве мы рассмотрим следующую весовую квадратурную формулу с производными

$$\int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx \cong \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \varphi(h\beta) + \sum_{\beta=0}^N d_{1,w}[\beta] \varphi'(h\beta), \quad (15)$$

где $e^{2\pi i \omega x}$ - весовая функция, $h = 1/N$, N - натуральное число, $i^2 = -1$, $\omega \in \square$, $d_0[\beta]$, $d_{1,w}[\beta]$ - коэффициенты квадратурной формулы (15), т.е. $d_0[\beta]$ - известные коэффициенты, $d_{1,w}[\beta]$ - неизвестные коэффициенты.

Разность между интегралом и квадратурной суммой

$$(\ell_w, \varphi) = \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \varphi(x) dx - \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \varphi(h\beta) - \sum_{\beta=0}^N d_{1,w}[\beta] \varphi'(h\beta)$$

называется погрешностью квадратурной формулы (15). Ей соответствует следующий функционал погрешности:

$$\ell_w(x) = e^{2\pi i \omega x} \varepsilon_{[0,1]}(x) - \sum_{\beta=0}^N d_0[\beta] \delta(x - h\beta) + \sum_{\beta=0}^N d_{1,w}[\beta] \delta'(x - h\beta), \quad (16)$$

здесь функционал погрешности ℓ_w удовлетворяет условию

$$(\ell_w, 1) = 0, \quad (\ell_w, e^{-x}) = 0. \quad (17)$$

Как известно, согласно неравенству Коши-Шварца, абсолютная величина погрешности квадратурной формулы (15) оценивается сверху через произведение норм функции φ и функционала погрешности ℓ , т.е.

$$|(\ell_w, \varphi)| \leq \|\ell_w\|_{W_2^{(2,1)*}(0,1)} \cdot \|\varphi\|_{W_2^{(2,1)}(0,1)}.$$

Основной целью данной работы является построения квадратурных формул вида (15) в пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$ методом С.Л. Соболева, то есть нахождение коэффициентов $d_{1,w}[\beta]$ (если таковые имеются), достигающих минимума при заданных коэффициентах $d_0[\beta]$ следующей величины

$$\|\ell_w\|_{W_2^{(2,1)*}(0,1)}.$$

Для построения оптимальных квадратурных формул вида (15) в пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$ необходимо решить поставленные задачи 1 и 2 в пространстве Соболева $L_2^{(2)}(0,1)$ из главы I настоящей работы в пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$. Для этого мы вычисляем квадрат нормы в пространстве $W_2^{(2,1)*}(0,1)$, используя экстремальную функцию функционала погрешности (16).

Здесь экстремальная функция, соответствующая функционалу погрешности в пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$, имеет следующий вид:

$$\psi_{\ell_w}(x) = \overline{\ell_w}(x) * G_2(x) + P_0 + P_1 e^{-x}$$

где P_0, P_1 – комплексные числа,

$$G_2(x) = \frac{\text{sign} x}{2} \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x \right),$$

$\overline{\ell_w}$ – комплексный сопряженный функционал к функционалу ℓ_w .

Для нормы ℓ_w справедливо следующее.

Теорема 7. Для квадрата нормы функционала погрешности квадратурной формулы (16) в пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$ справедлива следующая формула:

$$\begin{aligned} & \|\ell_w(x)\|_{W_2^{(2,1)*}(0,1)}^2 = \\ & = - \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N \left(d_{1,w}^R[\beta] d_{1,w}^R[\gamma] + d_{1,w}^I[\beta] d_{1,w}^I[\gamma] \right) \frac{\text{sign}(h\beta - h\gamma)}{2} \left(\frac{e^{h\beta - h\gamma} - e^{-(h\beta - h\gamma)}}{2} \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum_{\beta=0}^N \int_0^1 \left(d_{1,W}^R[\beta] \cos 2\pi\omega x + d_{1,W}^I[\beta] \sin 2\pi\omega x \right) \frac{\text{sign}(x-h\beta)}{2} \left(\frac{e^{x-h\beta} + e^{-(x-h\beta)}}{2} - 1 \right) dx + \\
& + 2 \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N \left(\left(d_{1,W}^R[\beta] d_0^R[\gamma] + d_{1,W}^I[\beta] d_0^I[\gamma] \right) \frac{\text{sign}(h\beta-h\gamma)}{2} \left(\frac{e^{h\beta-h\gamma} + e^{-(h\beta-h\gamma)}}{2} - 1 \right) + \right. \\
& + \sum_{\beta=0}^N \sum_{\gamma=0}^N \left(d_0^R[\beta] d_0^R[\gamma] + d_0^I[\beta] d_0^I[\gamma] \right) \frac{\text{sign}(h\beta-h\gamma)}{2} \left(\frac{e^{h\beta-h\gamma} - e^{-(h\beta-h\gamma)}}{2} - (h\beta-h\gamma) \right) - \\
& - 2 \sum_{\beta=0}^N \int_0^1 \left(d_0^R[\beta] \cos 2\pi\omega x + d_0^I[\beta] \sin 2\pi\omega x \right) \frac{\text{sign}(x-h\beta)}{2} \left(\frac{e^{x-h\beta} - e^{-(x-h\beta)}}{2} - (x-h\beta) \right) dx + \\
& \quad \left. + \int_0^1 \int_0^1 \cos(2\pi\omega(x-y)) \frac{\text{sign}(x-y)}{2} \left(\frac{e^{x-y} - e^{-(x-y)}}{2} - (x-y) \right) dx dy \right).
\end{aligned}$$

Получена следующая система для коэффициентов $d_{1,W}[\beta]$, дающих минимум при условиях (17) квадрату нормы функционала погрешности ℓ_w

$$\sum_{\gamma=0}^N d_{1,W}[\gamma] G_1(h\beta-h\gamma) + \lambda e^{-h\beta} = F_{2,W}(h\beta, \omega), \quad \beta = 0, 1, \dots, N,$$

$$\sum_{\gamma=0}^N d_{1,W}[\gamma] e^{-h\gamma} = \mu_2(\omega),$$

$$\text{где } G_1(h\beta) = \frac{\text{sign}(h\beta)}{2} \left(\frac{e^{h\beta} - e^{-h\beta}}{2} \right),$$

$$\begin{aligned}
F_{2,W}(h\beta, \omega) = & \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \cdot \frac{\text{sign}(x-h\beta)}{2} \left(\frac{e^{x-h\beta} + e^{-(x-h\beta)}}{2} - 1 \right) dx + \\
& + \sum_{\gamma=0}^N d_0[\gamma] \cdot \frac{\text{sign}(h\beta-h\gamma)}{2} \left(\frac{e^{h\beta-h\gamma} + e^{-(h\beta-h\gamma)}}{2} - 1 \right),
\end{aligned}$$

$$\mu_2(\omega) = - \int_0^1 e^{2\pi i \omega x} \cdot e^{-x} dx + \sum_{\gamma=0}^N d_0[\gamma] \cdot e^{-h\gamma}.$$

Основными результатами данной главы являются теоремы о коэффициентах оптимальных квадратурных формул вида (15) в пространстве $W_2^{(2,1)}(0,1)$ и о погрешности оптимальных квадратурных формул.

Справедливы следующие.

Теорема 8. Коэффициенты оптимальной квадратурной формулы (15) в пространстве Гильберта $W_2^{(2,1)}(0,1)$ для $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ и $\omega h \notin \mathbb{Z}$ имеют вид:

$$\begin{aligned}
d_0[0] &= h \left(\frac{K_{\omega,1} e^{2\pi i \omega h}}{e^{2\pi i \omega h} - 1} - \frac{1}{2\pi i \omega h} \right), \\
d_0[\beta] &= h K_{\omega,1} e^{2\pi i \omega h \beta}, \quad \beta = 1, N-1,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_0[N] &= h \left(\frac{K_{\omega,1} e^{2\pi i \omega}}{1 - e^{2\pi i \omega h}} + \frac{e^{2\pi i \omega}}{2\pi i \omega h} \right), \\
d_{1,W}[0] &= \frac{\mu_2(\omega)}{2} + \frac{F_{2,W}(h\beta, \omega) - e^{-h} F_{2,W}(0, \omega)}{\text{sh}(h)}, \\
d_{1,W}[\beta] &= \frac{F_{2,W}(h\beta + h, \omega) + F_{2,W}(h\beta - h, \omega)}{\text{sh}(h)} - 2 \text{cth}(h) F_{2,W}(h\beta, \omega), \quad \beta = \overline{1, N-1}, \\
d_{1,W}[N] &= \frac{e\mu_2(\omega)}{2} + \frac{F_{2,W}(1-h, \omega) - e^h F_{2,W}(1, \omega)}{\text{sh}(h)},
\end{aligned}$$

где $F_{2,W}(h\beta, \omega)$ и $\mu_2(\omega)$ известные величины.

Теорема 9. При $\omega h \in \mathbf{Z}$ и $\omega \neq 0$ коэффициенты оптимальной квадратурной формулы (15) в пространстве Гильберта $W_2^{(2,1)}(0,1)$ имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}
d_0[0] &= -\frac{1}{2\pi i \omega}, \\
d_0[\beta] &= 0, \quad \beta = \overline{1, N-1}, \\
d_0[N] &= \frac{1}{2\pi i \omega}, \\
d_{1,W}[0] &= \frac{1}{2\pi i \omega(2\pi i \omega - 1)} + \frac{1}{\pi i \omega(4\pi^2 \omega^2 + 1)(e^h + 1)}, \\
d_{1,W}[\beta] &= \frac{1 - e^h}{\pi i \omega(4\pi^2 \omega^2 + 1)(e^h + 1)}, \quad \beta = \overline{1, N-1}, \\
d_{1,W}[N] &= -\frac{1}{2\pi i \omega(2\pi i \omega - 1)} - \frac{e^h}{\pi i \omega(4\pi^2 \omega^2 + 1)(e^h + 1)}. \tag{18}
\end{aligned}$$

Здесь для квадрата нормы функционалов погрешности (16), соответствующей формуле (15), справедлива следующая теорема при $\omega h \in \mathbf{Z}$, $\omega \neq 0$.

Теорема 10. Квадрат нормы функционала погрешности (16) оптимальной квадратурной формулы (15) с коэффициентами (18) в пространстве Гильберта $W_2^{(2,1)}(0,1)$ имеет следующий вид:

$$\|\ell_W\|_{W_2^{(2,1)*}}^2 = \frac{1}{2\pi^2 \omega^2 (4\pi^2 \omega^2 + 1)} \left(\frac{1}{2} - \frac{(e^h - 1)N}{(4\pi^2 \omega^2 + 1)(e^h + 1)} \right),$$

где $h = \frac{1}{N}$, $N \in \mathbb{N}$, $\omega h \in \mathbf{Z}$, $\omega \neq 0$ и $\omega = kN$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной диссертации рассматривается вопрос построения экспоненциально весовых оптимальных квадратурных формул с производными. В данном случае с помощью метода, предложенного С.Л.Соболевым, построены экспоненциально весовых оптимальных квадратурных формул с производными в пространстве комплекснозначных непрерывных функций с действительными аргументами и с использованием аналитических формул найденных коэффициентов получена точная верхняя оценка погрешности.

В диссертационной работе получены следующие основные результаты:

1. Поскольку погрешность оптимальной квадратурной формулы Эрмита типа с экспоненциальным весом в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ ограничена сверху нормой функционала погрешности, поэтому с помощью экстремальной функции найдено аналитическое представление квадрата нормы функционала погрешности.

2. Получена дискретная система типа Винера-Хопфа для коэффициентов экспоненциально весовых оптимальных квадратурных формул с производными.

3. Приведен алгоритм нахождения коэффициентов оптимальных квадратурных формул в пространстве $L_2^{(m)}(0,1)$ в произвольном m .

4. Найдено явный вид для коэффициентов при $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\omega h \notin \mathbb{Z}$ и $\omega h \in \mathbb{Z}$, $\omega \neq 0$ экспоненциально весовых оптимальных квадратурных формул с производными в пространствах $L_2^{(2)}(0,1)$ и $W_2^{(2,1)}(0,1)$.

5. Вычислена квадрат нормы функционалов погрешности экспоненциально весовых оптимальных квадратурных формул с производными в пространствах $L_2^{(2)}(0,1)$ и $W_2^{(2,1)}(0,1)$ при $\omega h \in \mathbb{Z}$, $\omega \neq 0$.

6. Получены аналитические формулы для коэффициентов при $\omega \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\omega h \notin \mathbb{Z}$ и $\omega h \in \mathbb{Z}$, $\omega \neq 0$ экспоненциально весовых оптимальной квадратурной формулы с производным в пространстве $L_2^{(3)}(0,1)$.

**SCIENTIFIC COUNCIL DSc.03/30.12.2019.FM.01.02
FOR THE AWARD OF ACADEMIC DEGREES AT THE
NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN**

V.I.ROMANOVSKIY INSTITUTE OF MATHEMATICS

DAVLATOVA FATIMA ISRAILOVNA

**OPTIMAL APPROXIMATION OF FOURIER INTEGRALS
IN HILBERT SPACES**

01.01.03 – Computational and discrete mathematics

**ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF
PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES**

Tashkent – 2025

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the Ministry of Higher Education, Science and Innovation of the Republic of Uzbekistan under number №B2024.4.PhD/FM1182.

Dissertation has been prepared at V.I.Romanovskiy Institute of Mathematics, Uzbekistan Academy of Sciences.

Abstract of dissertation is posted in three languages (Uzbek, Russian and English (resume)) on the website <http://ik-fizmat.nuu.uz/> and the «ZiyoNet» Information and educational portal <http://www.ziynet.uz/>.

Scientific supervisor:

Shadimetov Kholmatvay Makhkambaevich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor

Official opponents:

Normurodov Chori Begalievich
Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor
Boltaev Aziz Kuzievich
Doctor of Philosophy in Physical and Mathematical sciences (PhD), Associate professor

Leading organization:

Karakalpak State University

Defense will take place «___» _____2025 at _____ at the meeting of Scientific Council number DSc/03/30/12/2019/FM.01.02 at National University of Uzbekistan. (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 227-12-24, fax: (+99871) 246-53-21, 246-02-24, e-mail: nauka@nuu.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource centre at National University of Uzbekistan (is registered №____) (Address: 100174, Uzbekistan, Tashkent city, Almazar district, University str. 4, Ph.: (+99871) 246-02-24.)

Abstract of dissertation sent out on «___» _____2025 year
(Mailing report № _____ on «___» _____2025 year)

M.M. Aripov

Chairman of Scientific Council
on award of scientific degrees, D.F.-
M.S., Professor

Z.R. Rakhmonov

Scientific Secretary of Scientific
Council on award of scientific
degrees,
D.F.-M.S., Professor

R.D. Aloev

Chairman of Scientific Seminar under
Scientific Council on award of
scientific degrees, D.F.-M.S.,
Professor

INTRODUCTION (abstract of doctoral dissertation)

The purpose of the study it consists in constructing exponential weighted, derivative, optimal quadrature formulas in the space of continuous complex-valued functions with real arguments in Hilbert spaces, calculating the norms of their error functionals.

The object of the study it consists of Hilbert spaces, numerical integration formulas, discrete-argument functions, linear functionals, and systems of linear equations.

The scientific novelty of the research work is as follows:

An analytical representation of the norm of the error functional of an exponentially weighted optimal quadrature formula with a derivative in Sobolev space $L_2^{(m)}(0,1)$ was found;

A system of linear equations was obtained for the coefficients with a real argument and a complex value of an exponentially weighted optimal quadrature formula with a derivative in Hilbert space $W_2^{(2,1)}(0,1)$;

Explicit formulas of coefficients giving a minimum value to the norms of the error functionals of exponential weighted, derivative, optimal quadrature formulas in the Hilbert spaces $L_2^{(2)}$ and $W_2^{(2,1)}$ of complex-valued functions of real arguments have been found;

In the Hilbert spaces $L_2^{(2)}$ and $W_2^{(2,1)}$, the error of exponential weighted, derivative, and optimal quadrature formulas using the optimal coefficients was estimated;

Analytical formulas of optimal coefficients using the discrete operators in the Sobolev space $L_2^{(3)}$ have been found.

Implementation of the research results. Based on the scientific results obtained using exponential weighted, derivative, optimal quadrature formulas:

In 2021-2023, the optimal quadrature formula constructed in the space was used in the practical project UZB-Ind-2021-97 "Applied statistical problems for dependent incomplete multidimensional data" at the Department of "Applied Mathematics and Informatics" of the Tashkent branch of Moscow State University named after M.V. Lomonosov. As a result, it was possible to base exponential, multiplicative, and exponential estimates on the two-dimensional reliability function in the right-sided random censoring model (Tashkent branch of M.V. Lomonosov Moscow State University, certificate No. 01-01-73 dated May 02, 2025);

The constructed optimal formula for the numerical calculation of Fourier integrals was used in the implementation of the innovative project IL-5321091543 "Creating and Modeling a Topological Model of Gas Networks," carried out at the Tashkent University of Information Technologies in 2022-2023, i.e., in the project "Creating and Modeling a Topological Model of Gas Networks." As a result, it was possible to approximate integral relations for effective models of gas network modeling (Tashkent University of Information Technologies, reference No 305/05-2 dated January 27, 2025).

Approbation of the research results. The results of this study were discussed at 14 scientific and practical conferences, including 9 international and 5 republican scientific and practical conferences.

Publication of the research results. A total of 21 scientific papers have been published on the topic of the dissertation, including 7 articles in scientific publications recommended by the Higher Attestation Commission of the Republic of Uzbekistan for the publication of the main scientific results of doctoral dissertations, including 2 in foreign and 5 in republican journals, and a certificate of official registration of the program for electronic computers has been obtained.

The structure and volume of the thesis. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion and a list of references. The volume of the dissertation is 107 pages.

E'LON QILINGAN ISHLAR RO'YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo'lim (I часть; Part I)

1.Kh.M. Shadimetov, F.I. Davlatova, The norm of the error functional for optimal approximate integration formula for computing Fourier integrals. // Uzbek Mathematical Journal 2022, Volume 66, Issue 3, pp.122-130. (01.00.00; №6)

2.Ф.И.Давлатова, Оптимальная квадратурная формула для приближенного вычисления интегралов Фурье. // Проблемы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, 2022, №5/1(44), стр.73-83. (01.00.00; №9)

3.Х.М. Шадиметов, Ф.И. Давлатова, Весовая оптимальная квадратурная формула типа Сарда в пространстве // Бюллетень Института Математики, Ташкент, 2023 6(1) стр. 131-137. (01.00.00; №17)

4.Х.М. Шадиметов, Ф.И. Давлатова, Оптимизация приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функций. // Проблемы вычислительной и прикладной математики, Ташкент, 2023, №2/1(48), стр. 180-186. (01.00.00; №9)

5.Kh.M. Shadimetov, F.I. Davlatova, On an Optimal Formula for Approximate Integration. // AIP Conference Proceedings, 3004, 060023, 2024, pp. 1-10. DOI: <https://doi.org/10.1063/5.0199935>. (3. Scopus, IF: 0,5)

6.Kh.M. Shadimetov, F.I. Davlatova, N.H. Mamatova, Optimal Quadrature Formulas with Derivative for Calculating Integrals of Strongly Oscillating Functions. // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2024, Vol. 45, No. 10, pp. 5254-5263. ISSN 1995-0802, (3. Scopus, IF: 0,971)

7.Х.М. Шадиметов, Ф.И. Давлатова, Оптимальная квадратурная формула с производными с экспоненциальным весом. // Доклады Академии наук Республики Узбекистан, 1-2025, стрю 14-18. (01.00.00; №7)

II bo'lim (II часть; Part II)

8.Х.М. Шадиметов, Ф.И. Давлатова, Оптимальные формулы приближенного интегрирования для вычисления интегралов Фурье. // “Теоретические основы и прикладные задачи современной математики II” Сборник материалов Республиканской научно-практической конференции. Андижан, 28 марта 2022 года. стр.301-302.

9.Х.М. Шадиметов, Ф.И. Давлатова, Оптимизация приближенного вычисления интегралов от быстроосциллирующих функции. // Материалы международной научно-практической конференции “Современные проблемы прикладной математики и информационных технологий”. Бухара, 11-12 май 2022 года. стр.176-178.

10. Х.М. Шадиметов, Ф.И. Давлатова, Норма функционала погрешности оптимальной формулы приближенного интегрирования для интегралов Фурье. // Узбекско-Малайзийская международная конференция

Вычислительные модели и технологии, ташкент, 2022 г., 16-17 сентября, стр. 62-63.

11.Ф.И. Давлатова, А.Х. Ёкубов, А.А. Хайталиев, Оптимизация приближенного вычисления интегралов Фурье. // Сборник материалов республиканской научно-практической конференции “Актуальные вопросы алгебры и анализа”, часть I, Термез, 18-19 ноября 2022 г., стр. 266-268.

12.Х.М. Шадиметов, Ф.И. Давлатова, Оптимальные формулы приближенного интегрирования для быстро осциллирующих функций // Тезисы международной научно-практической конференции “Актуальные задачи математического моделирования и информационных технологий”. Нукус, 2-3 май, 2023, стр. 346-348.

13.Kh.M. Shadimetov, F.I. Davlatova, Optimization of the approximate calculation of integrals from rapidly oscillating functions. // Abstracts of the 8th international conference “Actual problems of applied mathematics and information technologies” - Al-Khwarizmi 2023, Samarkand, September 25-26, 2023. pp. 141.

14.Х.М. Шадиметов, Ф.И. Давлатова, Весовые оптимальные квадратурные формулы в пространстве // “Современные проблемы дифференциальных уравнений и их приложения” международная научная конференция тезисы докладов. Часть II. Ташкент, 23-25 ноября, 2023, стр. 200-201.

15.Ф.И. Давлатова, Оптимальные квадратурные формулы приближенное интегрирование для коэффициентов Фурье. // Республиканской научно-практической конференции на тему “Современные проблемы и перспективы прикладной математики” Карши, 24-25 мая 2024, стр. 300-302.

16.Х.М. Шадиметов, Ф.И. Давлатова, Коэффициенты оптимальных квадратурных формул. // Международная научно-практическая конференция “Современные проблемы математики и её преподавания” Худжанд, 21-22 июня 2024, стр. 161-164.

17.F.I. Davlatova, Coefficients of the optimal formulas for approximate computation of Fourier. // Abstracts of the IX international scientific conference “Actual problems of applied mathematics and information technologies Al-Khwarizmi 2024”, Tashkent, 22-23 october, 2024.

18.Ф.И. Давлатова, Об одной системе для определения оптимальных коэффициентов квадратурных формул. // Международная научная конференция “Неклассические уравнения математической физики и их приложения”. Ташкент, 24–26 октября, 2024 года, стр. 142.

19.Х.М. Шадиметов, Ф.И. Давлатова, Коэффициенты квадратурных формул для быстроосциллирующих интегралов. // Республиканская научная конференция “Современные методы математической физики и их приложения” Ташкент, 22–24 апреля, 2025 года, стр. 319-320.

20.Х.М. Шадиметов, Ф.И. Давлатова, Оптимизация методы квадратур. // Республиканская научная конференция “Современные проблемы дифференциальных уравнений и смежных разделов математики” Фергана, 16–17 май, 2025 года, стр. 237-239.

21.Х.М. Шадиметов, Ф.И. Давлатова, Оптимальные квадратурные формулы для приближенного вычисления интегралов Фурье. // International scientific and theoretical conference “Current problems of physics, mathematics and artificial intelligence technologies”, Bukhara, 2025, may 16-17, pp.196-197.

22. Х.М. Шадиметов, Ф.И. Давлатова, Furiye integrallarni hisoblash uchun vaznli optimal kvadratur formula dasturi. // O‘zbekiston Respublikasi adliya vazirligi, Toshkent, № DGU 45249, 16.11.2024.

Avtoreferat «Public Publish Printing» nashriyotda tahrirdan o'tkazildi

Bosishga ruxsat etildi: 03.11.2025-yil
Bichimi 60x84 $\frac{1}{16}$, «Times New Roman»
garniturada raqamli bosma usulida bosildi.
Shartli bosma tabog'i 3,0. Adadi: 100. Buyurtma: № 96.

«Public Publish Printing» MChJ
bosmaxonasida chop etildi.
Toshkent, M. Ulug'bek tum., Moylisoy, 22.