V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI

TUXTAYEV ERKIN EGAMBERDIYEVICH

DISKRET VAQTLI VA DISPERSIYASI CHEKSIZ BO‘LGAN TARMOQLANUVCHI TASODIFIY JARAYONLARNING ASIMPTOTIK STRUKTURASI

01.01.05 – Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI BO‘YICHA FALSAFA DOKTORI (PhD) DISSERTATSIYASI AVTOREFERATI

Toshkent–2025

UDK: 519.218.2

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Оглавление автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of dissertation abstract of doctor of philosophy (PhD) on physical-mathematical sciences

.

V.I.ROMANOVSKIY NOMIDAGI MATEMATIKA INSTITUTI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

QARSHI DAVLAT UNIVERSITETI

TUXTAYEV ERKIN EGAMBERDIYEVICH

DISKRET VAQTLI VA DISPERSIYASI CHEKSIZ BO‘LGAN TARMOQLANUVCHI TASODIFIY JARAYONLARNING ASIMPTOTIK STRUKTURASI

01.01.05 – Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika

FIZIKA-MATEMATIKA FANLARI
bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

Toshkent–2025

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, Fan va Innovatsiyalar Vazirligi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2025.3.PhD/FM1343 raqam bilan ro‘yxatga olingan.

Dissertatsiya Qarshi davlat universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o‘zbek, rus, ingliz (rezyume)) Ilmiy kengash veb-sahifasi (https://kengash.mathinst.uz) va “ZiyoNet” ta’lim portalida (http://www.ziyonet.uz) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Imomov A’zam Abduraximovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
Rasmiy opponentlar:	**Miraxmedov Sherzod Adilovich** fizika-matematika fanlari doktori, professor
	Azimov Jahongir Baxramovich fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent
Yetakchi tashkilot:	**Toshkent davlat iqtisodiyot universiteti**

Dissertatsiya himoyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti huzuridagi DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 raqamli Ilmiy kengashning 2025-yil « 16 » dekabr kuni soat 17:00 dagi majlisida bo‘lib o‘tadi. (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 9-uy. Tel.: (+998 71) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertatsiya bilan V.I. Romanovskiy nomidagi Matematika institutining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (№218-raqami bilan ro‘yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko‘chasi, 9-uy. Tel.: (+998 71) 207-91-40.

Dissertatsiya avtoreferati 2025-yil « 02 » dekabr kuni tarqatildi.
(2025-yil « 02 » dekabrdagi 2-raqamli reestr bayonnomasi).

U.A. Rozikov
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash raisi, f.-m.f.d., akademik

J.K. Adashev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash ilmiy kotibi, f.-m.f.d., katta ilmiy xodim

Y.M. Xusanbayev
Ilmiy darajalar beruvchi Ilmiy kengash huzuridagi Ilmiy seminar rais o‘rinbosari, f.-m.f.d., dotsent

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Dunyo miqyosida fundamental fanlar sohasida olib borilayotgan koʻpgina ilmiy-amaliy tadqiqotlar tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarni tatbiq qilishga keltiriladi. Tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasi – bu matematikaning keng doiradagi nazariy va amaliy qoʻllanmalariga ega boʻlgan boʻlimi boʻlib, u biror taqsimot qonuni boʻyicha rivojlanayotgan zarrachalar populyatsiyasining evolyutsiya qonuniyatlarini oʻrganadi. XX asrning 40-yillarida alohida ilmiy yoʻnalish sifatida paydo boʻlgan bu nazariya oʻzi oʻrganayotgan muammolar va hodisalarning amaliy va vizual tabiati tufayli hanuzgacha zamonaviy ehtimollar nazariyasining faol rivojlanayotgan sohasi boʻlib, u nazariy fizika, molekulyar biologiya, kimyo, demografiya va tibbiyotning koʻpgina muammolari boʻyicha tadqiqot mavzusi boʻlib qolmoqda.

Tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlar nazariyasini qoʻllash doirasini kengaytirish uning nazariy qiziqishlari va amaliy qoʻllanilishi bilan bogʻliq. Hozirgi vaqtda ushbu qoʻllanmalar doirasi, xususan, turli biologik populyatsiyalar evolyutsiyasi qonunlarini tavsiflash, ommaviy xizmat koʻrsatish nazariyasi muammolarini oʻrganish va zarrachalar populyatsiyasining evolyutsiyasi bilan bogʻliq boʻlgan tabiiy va texnik hodisalarning boshqa koʻplab muammolarini qamrab oladi. Ushbu nazariyaning rivojlanishi, bir tomondan, klassik modellarni chuqur oʻrganish talabi bilan bogʻliq boʻlsa, ikkinchi tomondan, oʻrganilayotgan real hodisalarning mohiyatini chuqur va aniq tasvirlaydigan zarrachalar hosil boʻlishining yangi sxemalarini kashf qilish bilan tavsiflanadi. Shu munosabat bilan, mavjud natijalarni klassik modellar va obyektiv sharoitlarga eng mos keladigan yangi natijalarni aniqlashga qaratilgan tadqiqotlar doirasida bosqichma-bosqich takomillashtirish dolzarb vazifadir.

Mamlakatimizda amaliy ahamiyatga ega boʻlgan fundamental fanlarga alohida e’tibor qaratilmoqda. Zamonaviy ilm-fan oldida fundamental tadqiqotlarni amaliyotga yaqinlashtirishdek muhim vazifa turibdi. Ushbu muammoni hal qilishda tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasi yetakchi oʻrinlardan birini egallashi mumkin. Bir qator sohalardagi dolzarb muammolarni hal qilishga qaratilgan ushbu nazariyani tatbiq etish doirasida sezilarli natijalarga erishildi. Vazirlar Mahkamasining qarorida matematika fanlarining ustuvor yoʻnalishlari, xususan, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika boʻyicha xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqotlar olib borish ilmiy tadqiqotning asosiy vazifalari va yoʻnalishlari ekanligi qayd etildi. Mazkur qaror ijrosini ta’minlashda[1] tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlar nazariyasi boʻyicha keyingi tadqiqotlarni rivojlantirish muhim ahamiyat kasb etadi.

Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi PF-4947-son “Oʻzbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish boʻyicha Harakatlar strategiyasi

---

[1] Oʻzbekiston Respublikasi Prezidentining 2019-yil 9-iyuldagi “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qoʻllab-quvvatlash shuningdek, Oʻzbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari toʻgʻrisida”gi № PQ-4387-son qarori

to‘g‘risida”gi Farmoni, 2019-yil 9-iyuldagi PQ-4387-son “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi va 2020-yil 7-maydagi PQ-4708-son “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi Qarorlari hamda mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan vazifalarni amalga oshirishda ushbu dissertatsiya ishi muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning Respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Mazkur tadqiqot Respublika fan va texnologiyalar rivojlanishining IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarni o‘rganish bo‘yicha dastlabki tadqiqotlar X.Vatson, F.Galton, A.Kolmogorov, N.Dmitriyev, B.Sevastyanov, R.Bellman, T.Xarris, V.Zolotarev, A.Skoroxod, A.Zubkov va boshqalar tomonidan olib borilgan. Diskret vaqtli tarmoqlanuvchi jarayonlari davom etish ehtimolligining asimptotik holati bo‘yicha dastlabki natijalar A. Kolmogorov, uzluksiz vaqtli Markov tarmoqlanuvchi jarayonlari uchun esa B. Sevastyanov ishlarida olingan. Ushbu olingan natijalar V.Zolotarev, V.Chistyakov, S.Nagayev, A.Nagayev, I.Badalbayev, S.Xitkot, E.Seneta, D.Vir-Jonslarning ishlarida takomillashtirilgan.

A.Kolmogorov tomonidan tarmoqlanuvchi jarayonlar davom etish ehtimolligining asimptotikasi uchun bosh hadlar aniqlashtirilgan. Hozirgi vaqtda birinchilardan bo‘lib jarayonning so‘nmaslik sharti ostida zarrachalar sonining taqsimoti uchun limit teoremalar A.Yaglom, T.Xarris, Lamperti va P.Ney, B.Sevastyanov ishlarida o‘rganilgan. Jarayon kritik holatda, ya’ni, bitta zarracha avlodlari taqsimotining o‘rtacha soni 1 ga teng bo‘lganda, A.Yaglom jarayonning ayni vaqtda so‘nmaganlik sharti ostidagi taqsimoti ko‘rsatkichli qonunga yaqinlishishini ko‘rsatadi. V.Chistyakov tomonidan 1957 yilda e’lon qilingan ishda birinchilardan bo‘lib, uzluksiz vaqtli markov tarmoqlanuvchi jarayonlari uchun lokal limit teorema isbotlangan. Bu teoremaning Galton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayoni uchun analogi G.Kesten, P.Ney va F.Spitserlarning ishida keltirilgan va isbotlangan. Tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasida Karamata ma’nosida regulyar o‘zgaruvchi funksiyalar nazariyasining tatbiqlari ayniqsa muhimdir. Aynan shu nazariyadan foydalanib, 1957 yilda V.Zolotarev uzluksiz vaqtli tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarda bitta zarracha qoldiradigan avlodlar soni taqsimotining ikkinchi tartibli momenti chekli bo‘lmagan holda lokal limit teoremalar oldi. Keyinroq, 1968 yilda R.Slack o‘z ishlarida Galton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayoni uchun Zolotarev tomonidan olingan natijalarning analoglarini o‘rnatdi.

Uzluksiz vaqtli immigratsiyali tarmoqlanuvchi jarayonlar dastlab 1957 yilda B.Sevastyanovning ishida qaralgan bo‘lsa, bu modelning diskret holati S.Xitkotning ishlarida o‘rganilgan. E.Senetaning ishida immigratsiyali Galton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonining invariant o‘lchovini hosil qiluvchi funksiyasi uchun funksional tenglamalar topilgan. A. Peyksning ishlarida bu jarayonlar uchun lokal limit teoremalar isbotlab berildi va ma’lum shartlar bajarilganda jarayonning o‘tish ehtimoli cheksizlikda regulyar o‘zgaruvchilik xossasiga ega ekanligi aniqlandi. XX asrning 90-yillarida I.Badalbayev va I.Rahimovlar tomonidan immigratsiyasi bir jinsli bo‘lmagan tarmoqlanuvchi jarayonlarni o‘rganishga kirishildi. Shuningdek, 2001 yilda Sh.Formanov va J.Azimovlar tomonidan holatga bog‘liq immigratsiyali Markov tarmoqlanuvchi jarayonlari o‘rganildi. Y.Xusanboyevning ishlarida deterministik jarayonlarga sust yaqinlashishni tadqiq qilindi va immigratsiyali tarmoqlanuvchi jarayonlarining tebranishlari uchun bir qator limit teoremalar isbotlandi. A.Kolmogorov tomonidan tarmoqlanuvchi jarayonlar davom etish ehtimolligining asimptotikasi uchun bosh hadlar aniqlashtirilgan.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim yoki ilmiy-tadqiqot muassasasining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘liqligi. Dissertatsiya tadqiqoti Qarshi davlat universiteti “Algebra va geometriya” kafedrasining “**Stoxastik analiz va aktuar matematika**” (2020-2025 yillar) mavzusidagi ilmiy-tadqiqot yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Tadqiqotning maqsadi ikkinchi tartibli chekli momenti mavjud bo‘lmagan oddiy va immigratsiyali kritik Galton-Vatson tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarning asimptotik tuzilishini o‘rganish va ular uchun limit teoremalar olishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

sekin o‘zgaruvchi funksiyalarning xossalaridan foydalanib, dispersiyasi cheksiz bo‘lgan kritik tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarning o‘tish ehtimolliklari uchun limit teoremalar isbotlangan;

bitta zarrachadan boshlanuvchi va dispersiyasi cheksiz bo‘lgan kritik tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlar asosiy lemmasining analoglarini olish;

immigratsiya qonuni cheksiz birinchi momentga va aborigen zarrachalar o‘zgarish qonuni cheksiz dispersiyaga ega bo‘lgan immigratsiyali kritik diskret vaqtli tarmoqlanuvchi jarayonlarining ergodiklik xususiyatini o‘rganish;

immigratsiyali tarmoqlanuvchi jarayonlarda invariant o‘lchovlarga yaqinlashish tezligini baholash.

Tadqiqotning obyekti: Diskret vaqtli tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlar, immigratsiyali tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlar.

Tadqiqotning predmeti: hosil qiluvchi funksiyalar, sekin o‘zgaruvchi funksiyalar, regulyar o‘zgaruvchi funksiyalar, tarmoqlanuvchi jarayonlarning momentlari, markov zanjiri, o‘tish ehtimolliklari, invariant o‘lchovlar.

Tadqiqotning usullari: Dissertatsiya ishida ehtimolliklar nazariyasi usullari, hosil qiluvchi funksiyalarning analitik usullari va asimptotik analiz usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

sekin o‘zgaruvchi funksiyalarning xossalaridan foydalanib, dispersiyasi cheksiz bo‘lgan kritik tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarning o‘tish ehtimolliklari uchun limit teoremalar isbotlangan;

dispersiyasi cheksiz bo‘lgan kritik Galton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasining asosiy lemmasi analoglari isbotlangan;

immigratsiya qonuni cheksiz birinchi momentga va aborigen zarrachalar o‘zgarish qonuni cheksiz dispersiyaga ega bo‘lgan immigratsiyali kritik diskret vaqtli tarmoqlanuvchi jarayonlarining ergodiklik xususiyati aniqlangan, unga doir yangi teoremalar isbotlangan;

immigratsiyali Galton-Vatson tarmoqlanuvchi jarayonlarida invariant o‘lchovlarga yaqinlashish tezligi baholangan.

Tadqiqotning amaliy natijalari. Dissertatsiya natijalari va tadqiqot usullari populyatsiya jarayonlarida ehtimollik usullarini qo‘llash bilan bog‘liq vazifalar doirasini kengaytirish imkonini beradi.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi ehtimolliklar nazariyasining ma’lum nazariy va analitik usullaridan foydalanish, sekin o‘zgaruvchi funksiyalar nazariyasi va asimptotik analizning fundamental natijalarini qo‘llash orqali qat’iy matematik mulohazalar ketma-ketligi bilan asoslanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqot natijalarining ilmiy ahamiyati olingan natijalardan zarrachalar taqsimotining dispersiyasi cheksiz bo‘lgan immigratsiyali tarmoqlanuvchi jarayonlarni o‘rganishda qo‘llanilishi mumkin.

Tadqiqot natijalarining amaliy ahamiyati zarrachalar populyatsiyasi evolyutsiyasi to‘g‘risida xulosalar chiqarish, olingan limit teoremalar biologiya, tibbiyot, kimyo kabi sohalarning ba’zi masalalarini yechish imkonini berishi mumkinligi bilan izohlanadi.

Tadqiqot natijalarining joriy qilinishi. Diskret vaqtli va dispersiyasi cheksiz bo‘lgan tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarning asimptotik strukturasi bo‘yicha olingan natijalar asosida:

diskret tipdagi kritik tarmoqlanuvchi jarayonlarida dispersiyasi cheksiz bo‘lganda, davom etish ehtimolligi uchun asimptotik yoyilmalardan STEM-22-226 raqamli “Favqulodda vaziyatlarda transport yo'nalishlarini rejalashtirish uchun fazaviy ehtimollik modeli” mavzusidagi xorijiy loyihada limit teoremalarni isbotlash va ba’zi bir populyatsiya jarayonining xulosasini qurishda foydalanilgan (Ivan Jakashivili nomidagi Tbilisi davlat universitetining 2024 yil 7 oktabrdagi № 21/28-02-sonli ma’lumotnomasi). Ilmiy natijani qo‘llanilishi yo‘lga bog‘liq bo‘lgan Broun funksiyalarining stoxastik integral ko‘rinishlarini qurish imkonini bergan;

immigratsiyali tarmoqlanuvchi jarayonlar avlodlari ketma-ketligining rekurrentlik xossalaridan va qoldiq hadli Karamata funksiyalari orqali ifodalangan hosil qiluvchi funksyalarning xossalaridan xorijiy ilmiy jurnaldagi maqolalarda Puasson tipidagi immigratsiyali tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlari o‘tish ehtimolliklarini asimptotik tavsiflashda hamda tasodifiy miqdorlar yig‘indilari uchun limit teoremalarni isbotlashda foydalanilgan (Stochastic models, 2025, 41(4); Mathematical communication, 2025, 30(2), 231-241; Stochastic Analysis and Applications, 2024, 42(4), 828-841). Ilmiy natijalarning qo‘llanilishi Puasson immigratsiyali tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarda limit taqsimotlar uchun yangi teoremalarni isbotlashni va tasodifiy miqdorlar yig‘indilarining limit taqsimotini baholash imkonini bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Tadqiqotning asosiy natijalari 7 ta xalqaro va 6 ta respublika ilmiy-amaliy anjumanlarida muhokamadan o‘tkazilgan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Tadqiqot mavzusi bo‘yicha jami 21 ta ilmiy ish chop etilgan bo‘lib, shundan O‘zbekiston Respublikasi Oliy Attestatsiya Komissiyasining dissertatsiyalar asosiy ilmiy natijalarini chop etish tavsiya etilgan ilmiy nashrlarda 8 ta maqola, jumladan, 5 tasi xorijiy va 3 tasi respublika jurnallarida nashr etilgan.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya ishi kirish, uchta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan bo‘lib, uning umumiy hajmi 117 betdan iborat.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asosli ravishda tahlil qilingan bo‘lib, tadqiqotning Respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlari bilan bog‘liqligi ko‘rsatilgan, muammoning o‘rganilganlik darajasi keltirilgan, tadqiqot maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti tavsiflangan. Shuningdek, tadqiqotning ilmiy yangiligi va amaliy natijalari bayon qilingan, olingan natijalarning nazariy va amaliy ahamiyati ochib berilgan, tadqiqot natijalarining amaliy joriy qilinishi, nashr etilgan ishlar va dissertatsiya tuzilishi haqida ham batafsil ma’lumotlar taqdim etilgan.

Dissertatsiyaning **“Diskret vaqtli markov tarmoqlanuvchi tasodifiy jaryonlari”** deb nomlangan birinchi bobida Markov zanjiri, Galton–Vatson (GV) tarmoqlanuvchi jarayonlari, immigratsiyali Galton–Vatson tarmoqlanuvchi jarayonlari tasnifi, hosil qiluvchi funksiyasi, sonli xarakteristikalari uchun formulalar hamda bu jarayonlarning xossalarini ifodalovchi mavjud natijalar, teoremalar va faktlar keltirilgan.

Birinchi bobning birinchi paragrafida Markov zanjirining ta’rifi, holatlar klassifikatsiyasi, Kolmogorov-Chepmen tenglamasi, zanjirning qaytuvchi bo‘lish shartini ifodalovchi tasdiq, invariant o‘lchov, zanjirning ergodik bo‘lishining asosiy sharti keltirilgan.

Birinchi bobning ikkinchi paragrafida Galton-Vatson immigratsiyli (GVI) tarmoqlanuvchi jarayonlarining strukturasi va hosil qiluvchi funksiyasiga doir ma’lumotlar berilgan, GVI tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasidagi asosiy faktlar keltirilgan. Vaqtning ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}_0$, bu yerda $\mathbb{N}_0 = \{0\} \bigcup \mathbb{N}$ va $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, momentida tizimdagi zarrachalar soni X_n quyidagi rekurrent munosabat orqali aniqlansin:

$$X_0 = i,\ X_{n+1} = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \cdots + \xi_{nX_n} + \eta_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0,$$

bu yerda $\{\xi_{nk}\}$ – bir xil taqsimlangan o‘zaro bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo‘lib, u bevosita n-avlod k-zarrachasining avlodlari sifatida talqin qilinadi, η_n esa n-vaqtda kirib keluvchi ξ_{nk} dan bog‘liqsiz bo‘lgan bir xil taqsimlangan o‘zaro bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar. Ushbu $f(s) := \sum_{j\in\mathbb{N}_0} p_j s^j$ va $h(s) := \sum_{j\in\mathbb{N}_0} h_j s^j$, $s \in [0,1]$, hosil qiluvchi funksiyalarni kiritamiz, bunda $\mathsf{P}\left(\xi_{nk} = j\right) = p_j$ hamda $\mathsf{P}\left(\eta_n = j\right) = h_j$. Bunda immigratsiyali Galton-Vatson tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonining hosil qiluvchi funksiyasi

$$\mathcal{P}_n^{(i)}(s) = \left[f_n(s)\right]^i \prod_{k=0}^{n-1} h\left(f_k(s)\right),$$

ko‘rinishda bo‘ladi, bu yerda $f_n(s)$ hosil qiluvchi funksiya $f(s)$ ning n-karrali iteratsiyasi, ya’ni ushbu $f_n(s) = f_{n-1}\left(f(s)\right) = f\left(f_{n-1}(s)\right)$ munosabat o‘rinli.

Birinchi bobning uchinchi paragrafida G-V tarmoqlanuvchi jarayonlarining tasnifi va asimptotik xossalari bayon qilingan.

Birinchi bobning to‘rtinchi paragrafida esa immigratsiyali Galton-Vatson jarayonlarining asimptotik strukturasi, ergodiklik xossalari va invariant o‘lchovlar o‘rganilgan. Shuningdek, superkritik GVI tarmoqlanuvchi jarayoni holatlari fazosining $\lambda = \lambda_{\mathcal{S}}$ parchalanish parametri qiymatini topilgan va uning musbat qaytuvchi ekanligi isbotlangan.

Dissertatsiyaning **“Regulyar o‘zgaruvchi funksiyalar va ularning tatbiqlari”** deb nomlangan ikkinchi bobida regulyar o‘zgaruvchi funksiyalar nazariyasining fundamental teoremalari, Karamataning integral teoremalari deb ataluvchi teoremalar qaralgan. Shuningdek, regulyar o‘zgarish xossasi bilan tarmoqlanish qonunlari orasidagi bog‘liqlik o‘rganilgan. Kritik tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonning reproduktiv qonunining dispersiyasi cheksiz bo‘lgan hol uchun asosiy lemmaning analogi keltirilgan va isbotlangan.

Ikkinchi bobning birinchi paragrafida regulyar o‘zgaruvchi funksiyaning asosiy ta’rifi va unga oid tushunchalar, regulyar o‘zgaruvchi funksiyalar nazariyasining fundamental teoremalari keltirilgan.

Biror $[a,\infty) \subset \mathbb{R}_+$, bu yerda $\mathbb{R}_+ := [0,\infty)$ yarim o‘qda aniqlangan musbat va o‘lchovli $L(x)$ funksiya cheksizlikda (Karamata ma’nosida) *sekin o‘zgaruvchi* funksiya deyiladi, agarda ixtiyoriy $\lambda \in \mathbb{R}_+$ uchun

$$\lim_{x\to\infty} \frac{L\left(\lambda x\right)}{L(x)} = 1$$

munosabat bajarilsa.

Cheksizlikda sekin o‘zgaruvchi funksiyalar sinfini $\mathcal{S}_\infty$ bilan belgilaymiz.

Biror $[a,\infty) \subset \mathbb{R}_+$ yarim o‘qda aniqlangan musbat va o‘lchovli $R(x)$ funksiya cheksizlikda *regulyar o‘zgaruvchi* funksiya deyiladi, agarda u quyidagi ko‘rinishda ifodalanishi mumkin bo‘lsa:

$$R(x) = x^{\rho} L(x),$$

bu yerda $L(x) \in \mathcal{S}_{\infty}$ va $\rho \in \mathbb{R}_{+}$ parametr $R(x)$ funksiyaning regulyar o‘zgarish tartibi deb ataladi.

Ikkinchi bobning ikkinchi paragrafida cheksizlikda regulyar o‘zgaruvchi funksiyalar xosmas integrallarining asimptotik xossalari o‘rganilgan bo‘lib, Karamataning integral teoremalari keltirilgan va isbotlangan.

Ikkinchi bobning uchinchi paragrafida qoldiq hadli sekin o‘zgaruvchi funksiyaning tavsifi va xossalari qaralgan bo‘lib, bu funksiya uchun teoremalar olingan va isbotlangan.

Biror $r(x)$ funksiya $x \in \mathbb{R}_{+}$ qiymatlarda aniqlangan bo‘lib, $r(x) \in \mathbb{R}_{+}$ va $x \to \infty$ da $r(x) \downarrow 0$ bo‘lsin. U holda $L(x)$ funksiya $r(x)$ *qoldiq hadli sekin o‘zgaruvchi funksiya* deyiladi, agarda u ixtiyoriy $\lambda \in \mathbb{R}_{+}$ uchun quyida keltirilgan shartlarning birini qanoatlantirsa :

SR1. $\omega_{\lambda}(x) = \mathcal{O}\big(r(x)\big),\ x \to \infty$;

SR2. $\omega_{\lambda}(x) \sim const(\lambda) r(x),\ x \to \infty$;

SR3. $\omega_{\lambda}(x) = o\big(r(x)\big),\ x \to \infty$.

Qoldiq hadi $r(x) = \mathcal{O}\Big(L(x)\big/x^{\sigma}\Big)$, $\sigma \in \mathbb{R}_{+}$ bo‘lgan va **SR1 – SR3** shartlardan birini qanoatlantiruvchi qoldiq hadli sekin o‘zgaruvchi funksiyalar sinfini $\mathcal{S}_{\infty}(\omega)$ orqali belgilanadi.

1-teorema. *Agar* $L(x) \in \mathcal{S}_{\infty}(\omega)$ *bo‘lsa, u holda* $C_L := \lim_{x\to\infty} L(x)$ *musbat va chekli. Bundan tashqari,* ***SR1*** *shart uchun quyidagi asimptotik munosabatlar o‘rinli bo‘ladi:*

$$\eta(x) = C_{\eta} + \mathcal{O}\Big(1\big/x^{\sigma}\Big), \quad x \to \infty \tag{a}$$

$$\varepsilon(x) = \mathcal{O}\Big(1\big/x^{\sigma}\Big), \quad x \to \infty \tag{b}$$

$$L(x) = C_L + \mathcal{O}\Big(1\big/x^{\sigma}\Big), \quad x \to \infty \tag{c}$$

Aksincha, agar biror $\big[a,\infty\big) \subset \mathbb{R}_{+}$ *yarim o‘qda aniqlangan musbat va o‘lchovli* $L(x)$ *funksiya uchun teorema tasdig‘ida keltirilgan (c) asimptotik munosabat bajarilsa,* $L(x) \in \mathcal{S}_{\infty}(\omega)$ *bo‘ladi.*

2-teorema. *Biror differensiallanuvchi* $L(x) \in \mathcal{S}_{\infty}(\omega)$ *funksiya uchun qoldiq* $\omega_{\lambda}(x) = \mathcal{O}\Big(L(x)\big/x^{\sigma}\Big)$, $\sigma \in \mathbb{R}_{+}$, *bo‘lsin. U holda* $R(x) = x^{\rho} L(x) \in \mathcal{R}_{\infty}^{\rho}$ *funksiya uchun quyidagi asimptotik munosabat o‘rinli bo‘ladi:*

$$\frac{xR'(x)}{R(x)} = \rho + \mathcal{O}^*\left(1\big/x^{\sigma}\right), \quad x \to \infty .$$

3-teorema. *Biror* $L(x) \in \mathcal{S}_{\infty}(\omega)$ *funksiya biror* $\left[a, \infty\right) \subset \mathbb{R}_{+}$ *to'plamda lokal chegaralangan bo'lib, uning uchun* $\omega_{\lambda}(x) = \mathcal{O}\left(L(x)\big/x^{\sigma}\right)$, $\sigma \in \mathbb{R}_{+}$ *bo'lsin. U holda barcha* $\alpha \in \left(-1, \infty\right)$ *sonlar uchun* $x \to \infty$ *da*

$$\int_a^x t^{\alpha} L(t)dt = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} L(x)\left(1 + \mathcal{O}\left(1\big/x^{\beta}\right)\right),$$

bu yerda $\beta = \min\left(\sigma, \alpha+1\right)$.

4-teorema. *Har qanday* $L(x) \in \mathcal{S}_{\infty}$ *funksiya va barcha* $\alpha \in \left(-\infty, -1\right)$ *sonlar uchun* $\int_a^x t^{\alpha} L(t)dt$ *integral yaqinlashadi va* $L_0(t)\big/L(t) = 1 + \mathcal{O}\left(\varepsilon(t)\right)$, $t \to \infty$ *xossa bilan aniqlanuvchi shunday* $L_0(x)$ *mavjudki,* $\int_a^x t^{\alpha} L(t)dt = \frac{1}{\left|\alpha+1\right|}\left[\frac{1}{a^{\left|\alpha+1\right|}} L_0(a) - \frac{1}{x^{\left|\alpha+1\right|}} L_0(x)\right]$ *tenglik o'rinli bo'ladi.*

Bu teoremadan, qo'shimcha shartlarda, quyidagi natija kelib chiqadi.

5-teorema. *Berilgan* $L(x) \in \mathcal{S}_{\infty}(\omega)$ *funksiyaning qoldiq hadi* $\omega_{\lambda}(x) = \mathcal{O}\left(L(x)\big/x^{\sigma}\right)$, $\sigma \in \mathbb{R}_{+}$, *ko'rinishda bo'lsin. U holda barcha* $\alpha \in \left(-\infty, -1\right)$ *qiymatlarda* $x \to \infty$ *da ushbu*

$$\int_x^{\infty} t^{\alpha} L(t)dt = \frac{1}{\left|\alpha+1\right|} \frac{1}{x^{\left|\alpha+1\right|}} L(x)\left(1 + \mathcal{O}^*\left(1\big/x^{\sigma}\right)\right)$$

asimptotik baho o'rinli bo'ladi.

Ikkinchi bobning to'rtinchi paragrafi regulyar o'zgaruvchi funksiyalarning tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlar nazariyasidagi tatbiqlariga bag'ishlangan.

Tarmoqlanish qonuni bilan berilgan jarayonning hosil qiluvchi funksiyasi ushbu

$$f(s) = s + \left(1-s\right)^{1+\nu} \mathcal{L}\left(\frac{1}{1-s}\right) \qquad [f_{\nu}]$$

ko'rinishda bo'lgan $\left\{Z_n, n \in \mathbb{N}_0\right\}$ G-V tarmoqlanuvchi jarayonini qaraylik, bunda $\nu \in (0,1]$ va $\mathcal{L}(\cdot) \in \mathcal{S}_{\infty}$. Bu shart tarmoqlanish qonunining dispersiyasi cheksiz bo'lishi mumkin bo'lgan kritik G-V jarayonini ifodalaydi.

Endi $\left\{Z_n\right\}$ jarayonning ushbu $\mathsf{p}_j(n) = \mathsf{P}\left(Z_n = j \middle| Z_0 = 1\right)$ o'tish ehtimolliklariga mos hosil qiluvchi funksiyani qaraymiz: $f_n(s) = \sum_{j \in \mathcal{S}_0} \mathsf{p}_j(n) s^j$, бунда $\mathcal{S}_0 = \left\{0\right\} \cup \mathcal{S}$ ва $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$. Quyidagi $R_n(s) := 1 - f_n(s)$ funksiyaning asimptorik yoyilmasini beruvchi lemma kritik tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasi Asosiy Lemmasining analogidir:

1-lemma. *Hosil qiluvchi funksiyasi* $[f_\nu]$ *ko'rinishda berilgan kritik tarmoqlanuvchi jarayonlar uchun quyidagi asimptotik munosabat o'rinli:*

$$R_n(s) = \frac{\mathcal{N}(n)}{(\nu n)^{1/\nu}}\left[1 - \frac{\mathcal{U}_n(s)}{\nu n}\right],$$

bu yerda $\mathcal{N}(\cdot) \in \mathcal{S}_\infty$ *va* $\mathcal{N}(n)\mathcal{L}^{1/\nu}\left(\frac{(\nu n)^{1/\nu}}{\mathcal{N}(n)}\right) \to 1, \quad n \to \infty$ *hamda* $\mathcal{U}_n(s)$ *funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:*

1. $\mathcal{U}_n(s) \to U(s)$, $n \to \infty$ *va* $U(f(s)) = U(s) + 1$;
2. *barcha tayinlangan* $n \in \mathbb{N}$ *qiymatlar uchun* $\lim_{s\uparrow 1} \mathcal{U}_n(s) = \nu n$;
3. *barcha tayinlangan* $n \in \mathbb{N}$ *qiymatlar uchun* $\mathcal{U}_n(0) = 0$.

Dissertatsiyaning **"Kritik tarmoqlanuvchi Galton-Vatson jarayonlari uchun limit teoremalar"** deb nomlangan uchinchi bobida kritik G-V tarmoqlanuvchi jarayonlari qaralgan. Kritik jarayonlar o'tish ehtimolliklari hosil qiluvchi funksiyasining asimptotik yoyilmasini ifodalovchi tasdiqning minimal shartlardagi yangi analoglari topilgan. Bu tasdiq klassik adabiyotlarda kritik jarayonlar nazariyasining Asosiy Lemmasi deb nomlanadi. Olingan natija mazkur bobning asosiy natijalarini isbotlashda markaziy o'rin tutadi.

Suningdek, ushbu bob doirasidagi tadqiqotlarda G-V jarayonlarini holatlar fazosi o'tish ehtimolliklarining invariantlik xossalari muhim ahamiyat kasb etadi. Invariant o'lchovlar G-V jarayonlarining asimptotik xususiyatlarini tahlil qilishda kuchli vositadir. Ularni o'rganish tarmoqlanish qonuniga ega bo'lgan murakkab tizimlarni yanada chuqurroq tushunish imkoniyatlarini beradi.

Uchinchi bobning birinchi paragrafida klassik adabiyotlarda kritik tarmoqlanuvchi jarayonlar nazariyasining Asosiy Lemmasi deb nomlanuvchi, kritik jarayonlar hosil qiluvchi funksiyasining asimptotik yoyilmasini ifodalovchi tasdiqning minimal shartlardagi yangi analoglarini topildi.

Mazkur bob davomida quyidagi asosiy shart qabul qilinadi: $\mathcal{L}(\cdot)$ qoldiq hadli sekin o'zgaruvchi funksiya, ya'ni $\mathcal{L}(\cdot) \in \mathcal{S}_\infty(\omega)$ va qoldiq hadi ko'rinishi $\omega_\lambda(x) = o\left(x^{-\nu}\mathcal{L}(x)\right), \quad x \to \infty$.

Biz hosil qiluvchi funksiyasi $[f_\nu]$ ko'rinishda bo'lgan $\left\{Z_n, n \in \mathbb{N}_0\right\}$ kritik tarmoqlanuvchi G-V jarayonini qaraymiz. Ushbu $\Lambda(y) := y^\nu \mathcal{L}\left(1/y\right)$ funksiya yordamida $[f_\nu]$ shartni ushbu

$$f(s) = s + (1-s)\Lambda(1-s) \qquad [\Lambda_\nu]$$

ko'rinishda yozib olamiz. Ta'rifga ko'ra $\Lambda(y)$ funksiya $y \in (0{,}1]$ qiymatlarda musbat aniqlangan regulyar o'zgaruvchi funksiyadir. Bu funksiya, $y \downarrow 0$ da nolga intiladi va aniqlanish sohasida monoton hosilaga ega bo‘lib, $y \downarrow 0$ da $y\Lambda'(y) / \Lambda(y) \to \nu$.

Asosiy Lemmaning takomillashtirilgan analogi bo‘lgan quyidagi natijani isbotlandi.

2-lemma. *Kritik G-V jarayon* $[\Lambda_\nu]$ *shart bilan berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy* $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *uchun* $\omega_\lambda(x) := \mathcal{L}(\lambda x) / \mathcal{L}(x) - 1$ *funksiya uchun ushbu* $\omega_\lambda(x) = o\left(x^{-\nu}\mathcal{L}(x)\right)$, $x \to \infty$ *asimptotik baho bajarilsa, u holda quyidagi asimptotik munosabat o‘rinli bo’ladi*:

$$\frac{1}{\Lambda\left(R_n(s)\right)} - \frac{1}{\Lambda(1-s)} = \nu n + \frac{1+\nu}{2} \cdot \ln\left[\lambda_n(s)\right] + \rho_n(s),$$

bunda $\lambda_n(s) = \Lambda\left(1-s\right)\nu n + 1$ *va* $\rho_n(s) = o\left(\ln n\right) + \sigma_n(s)$ *hamda barcha* $s \in [0,1)$ *qiymatlar uchun* $\sigma(s) := \lim_{n\to\infty} \sigma_n(s) < \infty$.

Lemmada keltirilgan asimptotik formula tarmoqlanish qonuni uchinchi tartibli faktorial momenti $f'''(1-)$ chekli bo‘lgan jarayonlar uchun T.Xarrisning “Теория ветвящихся случайных процессов”(**1966**) monografiyasidagi natijani shu ma’noda kuchaytiradiki, ushbu monografiyada lemma tasdig‘i bo‘lgan asimptotik formula $\Lambda(y) \equiv y$ bo‘lgan holda va tenglikning o‘ng tomoni $\frac{1}{2} f''(1-)n + \mathcal{O}\left(\ln n\right)$ ko‘rinishda topilgan.

Uchinchi bobning ikkinchi paragrafida tarmoqlanish qonuni $[\Lambda_\nu]$ ko‘rinishdagi hosil qiluvchi funksiya bilan berilgan kritik tarmoqlanuvchi G-V jarayonlar hosil qiluvchi funksiyasining asimptotikasini va ular uchun invariant o‘lchovlar mavjudligi masalasi o‘rganilgan.

Ushbu $u_n(s) = \dfrac{f_n(s) - f_n(0)}{f_n(0) - f_{n-1}(0)}$ Slack funksiyasini $[\Lambda_\nu]$ shartga ko‘ra ushbu $U_n(s) = \dfrac{1}{\Lambda\left(Q_n\right)}\left[1 - \dfrac{R_n(s)}{Q_n}\right]$ ko‘rinishda yozib olamiz. Ikkinchi bobning 4-paragrafida aytib o‘tilganidek, barcha $s \in [0,1)$ qiymatlar uchun $U(s) := \lim_{n\to\infty} U_n(s)$ limit funksiya mavjud, va u $U(f(s)) = U(s) + 1$ Abel tenglamasini qanoatlantiradi. Bu funksiyani $U(s) = \sum_j u_j s^j$ darajali qator ko‘rinishda ifodalasak, Abel tenglamasidan ushbu $u_j = \sum_i u_i P_{ij}(n)$ tenglama kelib chiqadi, bunda $P_{ij}(n) = \mathsf{P}\left(Z_n = j \middle| Z_0 = i\right)$. Bu tenglama $\left\{u_j\right\}$ sonlarning $P_{ij}(\cdot)$ ehtimolliklariga nisbatan invariantlik xossasini ifodalaydi.

Quyidagi teorema invariant o‘lchovning hosil qiluvchi $U(s)$ funksiyasining ko‘rinishi haqida ma’lumot beradi.

6-teorema. *Kritik tarmoqlanuvchi G-V jarayonlarining hosil qiluvchi funksiyasi* $[\Lambda_\nu]$ *ko'rinishda bo'lib,* $\omega_\lambda(x) = o\left(x^{-\nu}\mathcal{L}(x)\right)$ *bo'lsin. U holda* $\left\{u_j\right\}$ *invariant o'lchovning hosil qiluvchi funksiyasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:*

$$U(s) = \int_0^s \frac{\psi(y)}{(1-y)\Lambda(1-y)}\,dy,$$

bunda $\psi(s)$ *funksiya* $s \in [0,1)$ *qiymatlarda uzluksiz va* $f'(s) \le \psi(s) \le 1$.

Uchinchi bobning uchinchi paragrafida immigratsiyali kritik tarmoqlanuvchi jarayonlarning asimptotik va invariantlik xossalari o'rganilgan.

Dastlab $f(s)$ va $h(s)$ funksiyalar, mos ravishda,

$$f(s) = s + \left(1-s\right)^{1+\nu}\mathcal{L}\left(\frac{1}{1-s}\right) \qquad [f_\nu]$$

va

$$1 - h(s) = \left(1-s\right)^{\delta}\ell\left(\frac{1}{1-s}\right) \qquad [h_\delta]$$

ko'rinishga ega bo'lsin, bunda $\nu, \delta \in (0,1)$ va $\mathcal{L}(\cdot), \ell(\cdot) \in \mathcal{S}_\infty$. Ushbu paragrafda $\delta > \nu$ hol, ya'ni holatlar fazosi $\mathcal{S}$ – ergodik bo'lgan hol qaralgan.

Keyingi mulohazalarda $\mathcal{L}(\cdot) \in \mathcal{S}_\infty$ va $\ell(\cdot) \in \mathcal{S}_\infty$ funksiyalar uchun quyidagi qo'shimcha shartlarni qabul qilamiz.

$$\mathcal{L}(\cdot) \in \mathcal{S}_\infty(\omega) \quad \text{va} \quad \omega(x) = o\left(\frac{\mathcal{L}(x)}{x^\nu}\right), \quad x \to \infty; \qquad [\mathcal{L}_\omega]$$

$$\ell(\cdot) \in \mathcal{S}_\infty(\sigma) \quad \text{va} \quad \sigma(x) = o\left(\frac{\ell(x)}{x^\delta}\right), \quad x \to \infty. \qquad [\ell_\sigma]$$

Bu shartlarda, $\mathcal{L}(\cdot) \in \mathcal{S}_\infty(\omega)$ va $\ell(\cdot) \in \mathcal{S}_\infty(\sigma)$ funksiyalar quyidagi xossalarga ega.

3-lemma. *Agar* $[f_\nu]$ *va* $[h_\delta]$ *hosil qiluvchi funksiyalar bilan aniqlangan GVI jarayoni ergodik zanjir tashkil etsa hamda* $[\mathcal{L}_\omega]$ *va* $[\ell_\sigma]$ *shartlar bajarilsa,* $C_\mathcal{L} = \lim_{x\to\infty}\mathcal{L}(x) < \infty$ *va* $C_\ell = \lim_{x\to\infty}\ell(x) < \infty$ *bo'lib,* $x \to \infty$ *bo'lganda ushbu*

$\mathcal{L}(x) = C_\mathcal{L} + o\left(x^{-\nu}\right)$ *va* $\ell(x) = C_\ell + o\left(x^{-\delta}\right)$ *yoyilmalar o'rinli bo'ladi.*

Belgilash kiritamiz: $\mathcal{P}_n(s) := \mathcal{P}_n^{(0)}(s)$.

7-teorema. *Kritik GVI jarayonlari* $[f_\nu]$ *va* $[h_\delta]$ *ko'rinishdagi hosil qiluvchi funksiyalar bilan aniqlangan bo'lsin. U holda*

1) *agar* $[\mathcal{L}_\omega]$ *shart bajarilsa,*

$$\mathcal{P}_n(s) = \Delta_n(s)\exp\left\{\int_s^{f_n(s)}\frac{\psi(y)\ln h(y)}{(1-y)\Lambda(1-y)}\,dy\right\},$$

bunda $\Lambda(y)=y^{\nu}\mathcal{L}\left(1/y\right)$, $\dfrac{h(s)}{h(f_n(s))}\le\Delta_n(s)\le 1$ *va* $\psi(s)$ *funksiya Teorema 6 da aniqlangan.*

2) *agar, qo'shimcha ravishda,* $[h_\delta]$ *shart bajarilib,* $\delta>\nu$ *bo'lsa,*

$$\mathcal{P}_n(s)=\beta_n(s)\Delta_n(s)\exp\left\{-\int_s^{f_n(s)}\frac{1-h(y)}{(1-y)\Lambda(1-y)}\psi(y)dy\right\},$$

bunda $\exp\left\{-\dfrac{1}{h(s)}\displaystyle\int_s^{f_n(s)}\frac{[1-h(y)]^2}{(1-y)\Lambda(1-y)}dy\right\}\le\beta_n(s)\le 1$.

Quyidagi tasdiq $p_{00}^{(n)}$ lokal ehtimollik uchun Peyksning ishidagi natijani yaxshilaydi.

8-teorema. *Kritik GVI jarayonlari* $[f_\nu]$ *va* $[h_\delta]$ *ko'rinishdagi hosil qiluvchi funksiyalar bilan aniqlangan bo'lsin va* $\gamma:=\delta-\nu>0$. *U holda shunday* $\mathsf{L}_\gamma(\cdot)\in\mathcal{S}_\infty$ *funksiya topiladiki,* $n\to\infty$ *bo'lganda* $\mathsf{L}_\gamma(n)\sim\mathsf{L}(n)\mathcal{L}^{-\gamma/\nu}(n)$ *va*

$$p_{00}^{(n)}=A\exp\left\{-\mathcal{J}+\frac{1}{\gamma}\frac{1}{(\nu n)^{\gamma/\nu}}\mathsf{L}_\gamma\left(n^{1/\nu}\right)\left(1+o(1)\right)\right\},$$

bunda $A=\lim_{n\to\infty}\beta_n(0)\Delta_n(0)\le 1$ *va* $\mathcal{J}=\int_1^{\infty}y^{-(1+\gamma)}\mathsf{L}(y)dy<\infty$. *Agar* $[\mathcal{L}_\omega]$ *va* $[\ell_\sigma]$ *shartlar bajarilsa,* $\mathsf{L}_\gamma(n)\to C_\gamma$, *bunda* $C_\gamma=C_\ell C_{\mathcal{L}}^{-\delta/\nu}$ *bo'lib,* $C_{\mathcal{L}}$ *va* C_ℓ *o'zgarmaslar Lemma 3 da aniqlangan.*

Ushbu teoremada $\mathcal{P}_n(s)$ funksiyaning $\pi(s):=\lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{P}_n(s)$ limit funksiyaga yaqinlashish tezligini baholangan.

9-teorema. *Kritik GVI jarayonlari* $[f_\nu]$ *va* $[h_\delta]$ *hosil qiluvchi funksiyalar bilan aniqlangan bo'lsin va* $\gamma:=\delta-\nu>0$. *U holda barcha* $s\in[0,d]$, $d<1$, *qiymatlarda* $\mathcal{P}_n(s)$ *funksiya* $\pi(s)$ *funksiyaga yaqinlashadi. Shuningdek,* $\pi(s):=\sum_{j\in\mathcal{S}}\pi_j s^j$ *darajali qatordagi* $\{\pi_j\}$ sonlar $p_{ij}^{(n)}$ *o'tish ehtimoliklariga nisbatan limit-invariant taqsimot yaratadi. Agar* $[\mathcal{L}_\omega]$ *va* $[\ell_\sigma]$ *shartlar bajarilsa,*

$$\mathcal{P}_n(s)=\pi(s)\left(1+C_\gamma\cdot\Theta_n(s)\right),$$

munosabat o'rinli, bunda C_γ *o'zgarmas son Teorema 8 da aniqlangan va*

$$\Theta_n(s)=\frac{1}{\gamma}\frac{1}{\left(\nu_n(s)\right)^{\gamma/\nu}}\left(1+\mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right),\quad n\to\infty,\text{bunda } \nu_n(s)=\nu n+\Lambda^{-1}(1-s).$$

Quyidagi teoremaning tasdig'i $\pi(s)$ hosil qiluvchi funksiyaning $s=1$ nuqta atrofidagi asimptotik ko'rinishini ifodalaydi.

10-teorema. *Kritik GVI jarayonlari* $[f_\nu]$ *va* $[h_\delta]$ *hosil qiluvchi funksiyalar bilan aniqlangan va* $\gamma := \delta - \nu > 0$ *bo'lsin. Agar* $[\mathcal{L}_\omega]$ *va* $[\ell_\sigma]$ *shartlar bajarilsa,*

$$-\ln \pi(s) = \mathsf{CL}\,\frac{1}{\gamma}(1-s)^\gamma\Big(1+o(1)\Big), \qquad s \uparrow 1,$$

bunda $\mathsf{CL} = \mathsf{L}(\infty)$ *o'zgarmas son Lemma 3 dan kelib chiqadi.*

XULOSA

Ushbu dissertatsiya ishida dispersiyasi cheksiz bo‘lgan diskret vaqtli tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarning asimptotik tuzilishi va ular uchun limit teoremalar olingan. Umuman olganda, olingan natijalar ushbu ishda maqsadga erishilganidan dalolat beradi. O‘z navbatida, olingan barcha natijalar yangi va ushbu natijalar orqali tasodifiy jarayonlar nazariyasi, tibbiyot, demografiya va matematik modellashtirish sohalariga ma’lum hissa qo‘shish mumkin.

Tadqiqotning asosiy natijalari quyidagilardan iborat:

- cheksizlikda regulyar o‘zgaruvchi funksiyalar xosmas integrallarining asimptotik xossalarini ifodalovchi teoremalar keltirilgan va isbotlangan;
- kritik tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonning reproduktiv qonunining dispersiyasi cheksiz bo‘lgan hol uchun asosiy lemmaning analoglari keltirilgan va isbotlangan;
- ma’lum shartlar bajarilganda kritik Galton-Vatson immigratsiyali tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlari hosil qiluvchi funksiyasining ko‘rinishi topilgan;
- Galton-Vatson immigratsiyali tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonining boshlang‘ich holatga qaytish ehtimolligining asimptotikasi aniqlangan;
- Galton-Vatson immigratsiyali tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlari hosil qiluvchi funksiyasini o‘zining limit funksiyasiga yaqinlashish tezligi baholangan;
- invariant o‘lchov tashkil etuvchi hosil qiluvchi funksiyaning 1 nuqta atrofidagi asimptotik ko‘rinishi topilgan.

**НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.02/30.12.2019.FM.86.01
ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ
ИНСТИТУТЕ МАТЕМАТИКИ ИМЕНИ В.И. РОМАНОВСКОГО**

КАРШИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ТУХТАЕВ ЭРКИН ЭГАМБЕРДИЕВИЧ

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ВЕТВЯЩИХСЯ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ С ДИСКРЕТНЫМ ВРЕМЕНЕМ И БЕСКОНЕЧНОЙ ДИСПЕРСИЕЙ

01.01.05 – Теория вероятностей и математическая статистика

**АВТОРЕФЕРАТ ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ**

Ташкент–2025

Тема диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Министерстве Высшего образования, Науки и Инноваций Республики Узбекистан за B2025.3.PhD/FM1343

Диссертация выполнена в Каршинского государственного университета

Автореферат диссертации на трех языках (узбекский, русский, английский (резюме)) размещён на веб-странице Научного совета по адресу (http://kengash.mathinst.uz) и на Информационно-образовательном портале «ZiyoNet» (http://www.ziyonet.uz).

Научный руководитель:	**Имомов Аъзам Абдурахимович** доктор физико-математических наук, профессор
Официальные оппоненты:	**Мирахмедов Шерзод Адилович** доктор физико-математических наук, профессор
	Азимов Жахонгир Бахрамович кандидат физико-математических наук, доцент
Ведущая организация:	**Ташкентский государственный университет экономики**

Защита диссертации состоится « 16 » декабря 2025 г. в 17:00 часов на заседании Научного совета DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 при Институте Математики имени В.И. Романовского. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Института Математики имени В.И.Романовского (зарегистрирована за № 218). (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 9.Тел.: (+99871) 207-91-40).

Автореферат диссертации разослан « 02 » декабря 2025 г.
(протокол рассылки № 2 от « 02 » декабря 2025 г.).

У.А. Розиков
Председателя Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., академик

Ж.К. Адашев
Ученый секретарь Научного совета по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., старший научный сотрудник

Я.М. Хусанбаев
Заместитель председателя Научного семинара при Научном совете по присуждению ученых степеней, д.ф.-м.н., доцент

ВВЕДЕНИЕ (аннотация диссертации доктора философии (PhD))

Актуальность и востребованность темы диссертации. Во всем мире значительная часть современных научно-практических исследований в области фундаментальных наук сводится к применению теории ветвящихся случайных процессов. Теория ветвящихся процессов представляет собой раздел математики, обладающий широким спектром теоретических и прикладных применений, изучающий закономерности эволюции популяций частиц, развивающихся согласно некоторому закону распределения. Возникнув в 1940-х годах XX века как самостоятельное научное направление, данная теория благодаря прикладной и наглядной природе изучаемых ею явлений и задач продолжает оставаться активно развивающейся областью современной теории вероятностей. Она до сих пор является предметом исследований по многим вопросам теоретической физики, молекулярной биологии, химии, демографии и медицины.

Расширение области применения теории ветвящихся случайных процессов связано как с её теоретическим интересом, так и с практической значимостью. В настоящее время данная теория используется, в частности, для описания законов эволюции различных биологических популяций, решения задач теории массового обслуживания, а также исследования множества других природных и технических явлений, связанных с эволюцией популяций частиц. Развитие теории обусловлено, с одной стороны, необходимостью глубокого изучения классических моделей, а с другой — поиском новых схем рождения частиц, которые более точно отражают сущность изучаемых реальных явлений. В связи с этим актуальной задачей является поэтапное совершенствование существующих результатов, направленных на уточнение классических моделей и получение новых результатов, наиболее адекватных объективным условиям.

В нашей стране уделяется особое внимание фундаментальным наукам, имеющим прикладное значение. Перед современной наукой стоит важная задача — сближение фундаментальных исследований с практикой. В решении данной проблемы теория ветвящихся процессов может занять одно из ведущих мест. В рамках её применения к решению актуальных задач различных областей уже достигнуты значительные результаты. В постановлении Кабинета Министров отмечено, что к числу приоритетных направлений математических наук относятся исследования в области теории вероятностей и математической статистики на уровне международных стандартов, что определено как одна из главных задач и направлений научной деятельности. В этом контексте развитие дальнейших исследований[1] по теории ветвящихся случайных процессов имеет важное значение для реализации данного решения.

---

[1] Постановление Президента Республики Узбекистан, от 09.07.2019 г. № ПП-4387 «О мерах государственной поддержки дальнейшего развития математического образования и науки, а также коренного совершенствования деятельности института Математики имени В.И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан»

Диссертационная работа выполняется в соответствии с Указом Президента Республики Узбекистан от 7 февраля 2017 года № ПФ–4947 «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», Постановлением Президента от 9 июля 2019 года № ПҚ–4387 «О мерах по дальнейшей поддержке и развитию математического образования и науки, а также по коренному совершенствованию деятельности Института математики имени В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан» и Постановлением от 7 мая 2020 года № ПҚ–4708 «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также другими нормативно-правовыми документами, регулирующими данную сферу. Таким образом, результаты настоящего исследования в определённой степени способствуют реализации поставленных задач.

Соответствие исследования приоритетным направлениям развития науки и технологий республики. Данное исследование выполнено в соответствии с приоритетным направлением развития науки и технологий в Республике Узбекистан IV. «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Первые исследования, посвящённые изучению ветвящихся случайных процессов, были проведены Х.Ватсоном, Ф.Гальтоном, А. Н. Колмогоровым, Н. В. Дмитриевым, Б. А. Севастьяновым, Р. Беллманом, Т. Харрисом, В. М. Золотарёвым, А. В. Скороходом, А. М. Зубковым и другими учёными. Начальные результаты, касающиеся асимптотического поведения вероятности продолжения дискретно-временных ветвящихся процессов, были получены А. Н. Колмогоровым, а для непрерывно-временных марковских ветвящихся процессов — Б.А.Севастьяновым. Полученные ими результаты были впоследствии усовершенствованы в работах В.М.Золотарёва, В.П.Чистякова, С.В.Нагаева, А.В.Нагаева, И.Бадалбаева, С.Хиткота, Е.Сенеты и Д.Вир-Джонса. А.Н.Колмогоровом были уточнены главные члены асимптотики для вероятности выживания ветвящегося процесса. В то же время первыми, кто исследовал предельные теоремы для распределения числа частиц при условии невымирания процесса, были А.Яглом, Т.Харрис, Дж.Ламперти, П.Ней и Б.А.Севастьянов.

В критическом случае, когда среднее число потомков одной частицы равно единице, А.Яглом показал, что распределение процесса при условии невымирания стремится к экспоненциальному закону. В работе В.П.Чистякова, опубликованной в 1957 году, впервые была доказана локальная предельная теорема для непрерывно временных марковских ветвящихся процессов. Аналогичная теорема для процесса Гальтона–Ватсона была получена и доказана Г.Кестеном, П.Неем и Ф.Спицером. Особое значение в теории ветвящихся процессов имеют приложения теории регулярно меняющихся функций в смысле Караматы. Именно используя данную теорию, В.М.Золотарёв в 1957 году получил локальные предельные теоремы для непрерывновременных ветвящихся случайных процессов в случае, когда второй момент числа потомков одной частицы бесконечен. Позднее, в 1968 году, Р.Слэк установил аналоги результатов Золотарёва для ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона.

Непрерывно временные ветвящиеся процессы с иммиграцией впервые были рассмотрены Б.А.Севастьяновым в 1957 году, а дискретные аналоги этой модели были изучены С.Хиткотом. В работе Е.Сенеты найдены функциональные уравнения для порождающих функций, формирующих инвариантную меру для ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона с иммиграцией. В исследованиях А.Пейкса были доказаны локальные предельные теоремы для этих процессов, а также показано, что при выполнении определённых условий переходная вероятность процесса на бесконечности обладает свойством регулярной изменчивости. В 1990-х годах XX века И.Бадалбаев и И.Рахимов начали исследования неоднородных по иммиграции ветвящихся процессов. В 2001 году Ш.Форманов и Ж.Азимов изучили марковские ветвящиеся процессы с зависящей от состояния иммиграцией. В работах Я.Хусанбоева исследовалось слабое сближение таких процессов с детерминированными и были доказаны ряд предельных теорем для колебаний ветвящихся процессов с иммиграцией.

А.Н.Колмогоров уточнил главные члены асимптотики вероятности продолжения ветвящегося процесса.

Связь темы диссертации с научно-исследовательской работой научного исследовательского учреждения, где выполнялась диссертация. Диссертационная работа выполнено в рамках научно-исследовательского направления кафедры «Алгебра и геометрия» Каршинского государственного университета по теме «Стохастический анализ и актуарная математика» на 2020–2025 годы.

Цель исследования заключается в изучении асимптотической структуры простых и с иммиграцией критических ветвящихся случайных процессов Гальтона–Ватсона при отсутствии конечного второго момента и в получении для них соответствующих предельных теорем.

Задачи исследования:

используя свойства медленно меняющихся функций, исследовать критические ветвящиеся случайные процессы с бесконечной дисперсией;

получить аналоги основной леммы теории критических ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона, начинающихся с одной частицы и обладающих бесконечной дисперсией;

изучить эргодические свойства дискретновременных ветвящихся процессов с иммиграцией, в которых закон иммиграции имеет бесконечный первый момент, а закон изменения аборигенных частиц обладает бесконечной дисперсией;

оценить скорость сходимости к инвариантным мерам в ветвящихся процессах с иммиграцией.

Объект исследования: дискретно-временные ветвящиеся случайные процессы и ветвящиеся процессы с иммиграцией.

Предмет исследования: производящие функции, медленно меняющиеся функции, регулярно меняющиеся функции, моменты ветвящихся процессов, марковские цепи, переходные вероятности и инвариантные меры.

Методы исследования. В диссертации применяются методы теории вероятностей, аналитические методы исследования производящих функций и методы асимптотического анализа.

Научная новизна исследования заключается в следующем:

с использованием свойств медленно меняющихся функций были доказаны предельные теоремы для переходных вероятностей критических ветвящихся стохастических процессов с бесконечной дисперсией;

доказаны аналоги основной леммы теории критических ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона с бесконечной дисперсией;

установлены эргодические свойства дискретновременных ветвящихся процессов с иммиграцией, в которых закон иммиграции имеет бесконечный первый момент, а закон изменения аборигенных частиц обладает бесконечной дисперсией а также доказаны новые теоремы, описывающие указанные эргодические свойства;

получены оценки скорости сходимости к инвариантным мерам для ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона с иммиграцией.

Практические результаты исследования. Полученные в диссертации результаты и применённые методы исследования позволяют расширить круг задач, связанных с применением вероятностных методов в моделировании популяционных процессов.

Достоверность результатов исследования обеспечивается использованием известных теоретических и аналитических методов теории вероятностей, применением фундаментальных результатов теории медленно меняющихся функций и асимптотического анализа, а также строгой последовательностью математических рассуждений.

Научная и практическая значимость результатов исследования.

Научная значимость заключается в том, что полученные в работе результаты могут быть использованы при изучении ветвящихся процессов с иммиграцией, распределение числа частиц которых имеет бесконечную дисперсию.

Практическая значимость состоит в возможности применения установленных предельных теорем для получения выводов об эволюции популяций частиц, а также при решении некоторых задач биологии, медицины и химии, где аналогичные стохастические механизмы описывают реальные процессы воспроизводства или распада.

Внедрение результатов исследования. На основе полученных результатов по асимптотической структуре дискретных по времени ветвящихся случайных процессов с бесконечной дисперсией:

В критических дискретных ветвящихся процессах с бесконечной дисперсией асимптотические распределения для вероятности продолжения были использованы при доказательстве предельных теорем и построении выводов для некоторого популяционного процесса в рамках зарубежного проекта № STEM-22-226 «Фазово-вероятностная модель планирования транспортных маршрутов в зонах бедствий» (справка № 21/28-02 от 7 октября 2024 года Тбилисского государственного университета имени Ивана Джакашвили). Применение данного научного результата позволило построить стохастические интегральные представления броуновских функций, зависящих от траектории;

Используя рекуррентные свойства последовательностей поколений иммиграционных ветвящихся процессов и свойства производящих функций, выраженных через караматовские функции с остаточным членом, в статьях зарубежных научных журналов были применены полученные результаты для асимптотического описания переходных вероятностей пуассоновских иммиграционных ветвящихся случайных процессов, а также для доказательства предельных теорем для сумм случайных величин (Stochastic Models, 2025, 41(4); Mathematical Communication, 2025, 30(2), 231–241; Stochastic Analysis and Applications, 2024, 42(4), 828–841). Применение научных результатов позволило доказать новые теоремы для предельных распределений в пуассоновских иммиграционных ветвящихся случайных процессах и дать оценки предельного распределения сумм случайных величин.

Апробация результатов исследования. Основные результаты диссертационной работы были обсуждены на 7 международных и 6 республиканских научно-практических конференциях.

Публикации результатов исследования. По теме исследования опубликовано в общей сложности 21 научная работа, из них 8 статей — в изданиях, рекомендованных Высшей аттестационной комиссией Республики Узбекистан для публикации основных научных результатов диссертаций. Среди них 5 статей опубликованы в зарубежных, а 3 — в республиканских научных журналах.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения, списка использованной литературы и приложений. Общий объем диссертации 117 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении диссертации обоснованно проанализирована актуальность и необходимость выбранной темы, показана связь исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий в Республике, приведен обзор степени изученности проблемы, описаны цель, задачи, объект и предмет исследования. Кроме того, изложена научная новизна и практические результаты исследования, раскрыта теоретическая и практическая значимость полученных результатов, представлена информация о практическом внедрении результатов исследования, опубликованных работах и структуре диссертации.

В первой главе диссертации, озаглавленной **«Дискретные марковские ветвящиеся случайные процессы»**, приведены определения цепи Маркова, ветвящихся процессов Галтон–Ватсона (ГВ), иммиграционных ветвящихся процессов Галтон–Ватсона, формула порождающей функции, формулы для числовых характеристик, а также существующие результаты, теоремы и факты, описывающие свойства этих процессов.

В первом параграфе первой главы представлены определение цепи Маркова, классификация состояний, уравнение Колмогорова–Чепмена, утверждение, выражающее условие возвратности цепи, инвариантная мера, а также основное условие эргодичности цепи.

Во втором параграфе первой главы приведены сведения о структуре и производящей функции процесса Галтона-Ватсона с иммиграцией (ГВИ), а также основные факты теории ветвящихся процессов ГВИ. Пусть в произвольный момент времени $n \in \mathbb{N}_0$, где $\mathbb{N}_0 = \{0\} \bigcup \mathbb{N}$ и $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$, число частиц X_n в системе определяется следующим рекуррентным соотношением:

$$X_0 = i,\ X_{n+1} = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \cdots + \xi_{nX_n} + \eta_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

где $\left\{\xi_{nk}\right\}$— это последовательность одинаково распределённых независимых случайных величин, рассматриваемых как потомки k-й частицы n-го поколения, а η_n— это последовательность одинаково распределённых независимых случайных величин, независимых от ξ_{nk}, представляющих иммигрантов, вошедших в систему в момент времени n. Введём соответствующие производящие функции для $f(s) := \sum_{j \in \mathbb{N}_0} p_j s^j$ и $h(s) := \sum_{j \in \mathbb{N}_0} h_j s^j$, $s \in [0,1]$, тогда производящая функция иммиграционного процесса Галтона–Ватсона имеет вид:

$$\mathcal{P}_n^{(i)}(s) = \left[f_n(s)\right]^i \prod_{k=0}^{n-1} h\left(f_k(s)\right),$$

где производящая функция $f_n(s)$ $n-$кратная итерация функции $f(s)$, а $f_n(s) = f_{n-1}\left(f(s)\right) = f\left(f_{n-1}(s)\right)$. Данное соотношение корректно описывает эволюцию процесса.

В третьем параграфе первой главы изложена классификация ветвящихся процессов Галтона–Ватсона и их асимптотические свойства.

В четвёртом параграфе первой главы изучены асимптотическая структура иммиграционных процессов Галтона–Ватсона, их эргодические свойства и инвариантные меры. Кроме того, для супер критического ГВИ-процесса найдены значения параметра разложения пространства состояний, и доказано, что он положительно возвращаемый.

Во второй главе диссертации под названием **«Регулярно изменяющиеся функции и их приложения»** рассмотрены фундаментальные теоремы теории регулярно изменяющихся функций, а также теоремы, известные как интегральные теоремы Карамата. Исследована также связь между свойством регулярного изменения и законами ветвления. Приведен и доказан аналог основной леммы для случая критического ветвящегося случайного процесса с бесконечной дисперсией репродуктивного закона.

В первом параграфе второй главы приведено основное определение регулярно изменяющейся функции и соответствующие понятия, а также фундаментальные теоремы теории регулярно изменяющихся функций.

Пусть $L(x)$ положительная измеримая функция, определённая на полупрямой $[a,\infty)\subset\mathbb{R}_+$, называется *медленно меняющейся* функцией на бесконечности (в смысле Карамата), если для любого $\lambda\in\mathbb{R}_+$, где $\mathbb{R}_+=\left[0,\infty\right)$, выполняется соотношение

$$\lim_{x\to\infty}\frac{L\left(\lambda x\right)}{L(x)}=1.$$

Пусть $R(x)$ — положительная измеримая функция, определённая на полупрямой $[a,\infty)\subset\mathbb{R}_+$, называется *регулярно изменяющейся* на бесконечности функцией, если она может быть выражена в виде

$$R(x)=x^{\rho}L(x)$$

где $L(x)\in\mathcal{S}_\infty$ медленно меняющаяся функция на бесконечности, а $\rho\in\mathbb{R}_+$ порядок регулярного изменения функции.

Во втором параграфе второй главы изучены асимптотические свойства несобственных интегралов функций, регулярно изменяющихся на бесконечности, приведены и доказаны интегральные теоремы Карамата.

В третьем параграфе второй главы рассмотрены определения и свойства функций с остаточным членом медленного изменения; для таких функций получены и доказаны соответствующие теоремы.

Пусть $r(x)$— функция, определённая на множестве значений $x\in\mathbb{R}_+$ и пусть $r(x)\downarrow 0$, $x\to\infty$. Функция $L(x)$ называется *остаточно медленно меняющейся*, если она удовлетворяет одному из следующих условий для любого $\lambda\in\mathbb{R}_+$:

SR1. $\omega_\lambda(x)=\mathcal{O}\left(r(x)\right),\quad x\to\infty;$

SR2. $\omega_\lambda(x) \sim const(\lambda) r(x), \quad x \to \infty$;

SR3. $\omega_\lambda(x) = o\left(r(x)\right), \quad x \to \infty$.

Класс медленно изменяющихся функций с остаточным членом $r(x) = \mathcal{O}\left(L(x)\big/x^\sigma\right)$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, удовлетворяющих одному из условий **SR1 – SR3**, обозначается через $\mathcal{S}_\infty(\omega)$.

Теорема 1. *Если* $L(x) \in \mathcal{S}_\infty(\omega)$, *то* $C_L := \lim_{x\to\infty} L(x)$*) положительна и ограничена. Кроме того условие **SR1** выполняются следующие асимптотические соотношения:*

$$\eta(x) = C_\eta + \mathcal{O}\left(1\big/x^\sigma\right), \quad x \to \infty \tag{a}$$

$$\varepsilon(x) = \mathcal{O}\left(1\big/x^\sigma\right), \quad x \to \infty \tag{b}$$

$$L(x) = C_L + \mathcal{O}\left(1\big/x^\sigma\right), \quad x \to \infty \tag{c}$$

Обратно, если для положительной измеримой функции $L(x)$, *определённой на полупрямой* $\left[a, \infty\right) \subset \mathbb{R}_+$, *выполняются вышеуказанные асимптотические соотношения, то выполняется утверждение теоремы.*

Из теоремы 1 следует следующий результат.

Теорема 2. *Для дифференцируемой функции* $L(x) \in \mathcal{S}_\infty(\omega)$ *с остаточным членом* $\omega_\lambda(x) = \mathcal{O}\left(L(x)\big/x^\sigma\right)$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$, *выполняется следующее асимптотическое соотношение для функции* $R(x) = x^\rho L(x) \in \mathcal{R}_\infty^\rho$:

$$\frac{xR'(x)}{R(x)} = \rho + \mathcal{O}^*\left(1\big/x^\sigma\right), \quad x \to \infty.$$

Теорема 3. *Для функции* $L(x) \in \mathcal{S}_\infty(\omega)$, *локально ограниченной на множестве* $\left[a, \infty\right) \subset \mathbb{R}_+$, *с остаточным членом* $\omega_\lambda(x) = \mathcal{O}\left(L(x)\big/x^\sigma\right)$, $\sigma \in \mathbb{R}_+$ *выполняется для всех* $\alpha \in \left(-1, \infty\right)$

$$\int_a^x t^\alpha L(t)dt = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} L(x)\left(1 + \mathcal{O}\left(1\big/x^\beta\right)\right),$$

где $\beta = \min\left(\sigma, \alpha+1\right)$.

Теорема 4. *Для любой функции* $L(x) \in \mathcal{S}_\infty$ *и всех значений* $\alpha \in \left(-\infty, -1\right)$ *интеграл аппроксимируется функцией* $\int_a^x t^\alpha L(t)dt$, *и* *существует такое* $L_0(x)$ *с* $L_0(t)\big/L(t) = 1 + \mathcal{O}\Big(\varepsilon(t)\Big)$, $t \to \infty$, *что выполняется равенство* $\int_a^x t^{\alpha} L(t)dt = \dfrac{1}{\left|\alpha+1\right|}\left[\dfrac{1}{a^{\left|\alpha+1\right|}} L_0(a) - \dfrac{1}{x^{\left|\alpha+1\right|}} L_0(x)\right]$.

Из этой теоремы, при дополнительных условиях, следует следующий результат.

Теорема 5. *Для данной функции* $L(x) \in \mathcal{S}_{\infty}(\omega)$, *если выполнено условие SR1 и её остаточный член имеет вид* $\omega_{\lambda}(x) = \mathcal{O}\Big(L(x)\big/x^{\sigma}\Big)$, $\sigma \in \mathbb{R}_{+}$, *то для всех значений* $\alpha \in \Big(-\infty, -1\Big)$ *выполняется асимптотическая оценка:*

$$\int_x^{\infty} t^{\alpha} L(t)dt = \frac{1}{\left|\alpha+1\right|}\frac{1}{x^{\left|\alpha+1\right|}} L(x)\Big(1 + \mathcal{O}^{*}\Big(1\big/x^{\sigma}\Big)\Big).$$

Четвёртый параграф второй главы посвящён приложениям регулярно изменяющихся функций в теории ветвящихся случайных процессов.

Рассмотрим ветвящийся процесс Гальтона–Ватсона (Г-В) $\Big\{Z_n, n \in \mathbb{N}_0\Big\}$, для которого производящая функция закон ветвления имеет вид

$$f(s) = s + \Big(1-s\Big)^{1+\nu}\mathcal{L}\left(\frac{1}{1-s}\right), \qquad [f_{\nu}]$$

где $\nu \in (0{,}1]$ и $\mathcal{L}(\cdot) \in \mathcal{S}_{\infty}$. Это условие описывает критический Г-В процесс, у которого дисперсия закона ветвления может быть бесконечной.

Пусть вероятности перехода процесса $P_{ij}(n) = \mathsf{P}\Big(Z_n = j \Big| Z_0 = i\Big)$ и $\mathsf{p}_j(n) := \mathsf{P}\Big(Z_n = j\Big)$. Рассмотрим производящую функцию, соответствующую этим вероятностям перехода: $f_n(s) = \sum_{j \in \mathcal{S}_0} \mathsf{p}_j(n) s^j$, где $\mathcal{S}_0 = \Big\{0\Big\} \cup \mathcal{S}$ и $\mathcal{S} \subset \mathbb{N}$. В следующей лемме мы находим асимптотическое разложение функции $R_n(s) := 1 - f_n(s)$. Эта лемма является аналогом Основной Леммы теории критических ветвящихся процессов:

Лемма 1. *Для критического ветвящегося процесса с производящей функцией вида* $[f_{\nu}]$ *выполняется следующее асимптотическое соотношение:*

$$R_n(s) = \frac{\mathcal{N}(n)}{(\nu n)^{1/\nu}}\left[1 - \frac{\mathcal{U}_n(s)}{\nu n}\right],$$

где $\mathcal{N}(\cdot) \in \mathcal{S}_{\infty}$ *va* $\mathcal{N}(n)\mathcal{L}^{1/\nu}\left(\dfrac{(\nu n)^{1/\nu}}{\mathcal{N}(n)}\right) \to 1$, $n \to \infty$ *и* $\mathcal{U}_n(s)$ *удовлетворяют следующим условиям:*

1. $\mathcal{U}_n(s) \to U(s)$, $n \to \infty$ *и* $U(f(s)) = U(s) + 1$;
2. *для всех заданных значений* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется* $\lim_{s \uparrow 1} \mathcal{U}_n(s) = \nu n$;

3. *для всех заданных значений* $n \in \mathbb{N}$ *выполняется* $\mathcal{U}_n(0) = 0$.

В третьей главе диссертации рассматриваются предельные теоремы для критических ветвящихся процессов Гальтона–Ватсона. Найдены новые аналоги утверждения с минимальными условиями, выражающего асимптотическое разложение производящей функции вероятностей перехода критических процессов. В классической литературе это утверждение известно как Основная Лемма теории критических процессов. Полученный результат играет центральную роль при доказательстве основных результатов этой главы.

Таким образом, в исследованиях, проводимых в рамках этой главы, важное значение имеют инвариантные свойства вероятностей перехода в пространстве состояний Г-В процессов. Инвариантные меры являются мощным инструментом для анализа асимптотических свойств Г-В процессов. Их изучение открывает возможности для более глубокого понимания сложных систем, эволюционирующих в соответствии с законом ветвления.

В первом параграфе третьей главы мы нашли новые аналоги утверждения с минимальными условиями, выражающего асимптотическое разложение производящей функции критических процессов, известного в классической литературе как Основная Лемма теории критических ветвящихся процессов.

В ходе данной главы мы принимаем следующее основное условие: функция с остаточным членом медленного изменения, то есть $\mathcal{L}(\cdot) \in \mathcal{S}_\infty(\omega)$ и вид её остаточного члена $\omega_\lambda(x) = o\left(x^{-\nu}\mathcal{L}(x)\right), \quad x \to \infty$.

Рассмотрим критический ветвящийся процесс Г-В $\left\{Z_n, n \in \mathbb{N}_0\right\}$. С помощью функции $\Lambda(y) := y^\nu \mathcal{L}\left(1/y\right)$ условие $[f_\nu]$ записываем в виде

$$f(s) = s + (1-s)\Lambda(1-s). \qquad [\Lambda_\nu]$$

По определению, функция $\Lambda(y)$ является положительной регулярно изменяющейся функцией на множестве значений $y \in (0,1]$. Эта функция стремится к нулю при $y \downarrow 0$ и обладает монотонной производной на области определения, при $y \downarrow 0$ равна $y\Lambda'(y) / \Lambda(y) \to \nu$.

Была доказана следующая результат, являющийся улучшенным аналогом Основной Леммы.

Лемма 2. *Если для критических процессов Г-В выполняются условия* $[\Lambda_\nu]$, $\mathcal{L}(\lambda x) / \mathcal{L}(x) - 1 = \omega_\lambda(x)$ *для любого* $\lambda \in \mathbb{R}_+$ *и* $\omega_\lambda(x) = o\left(x^{-\nu}\mathcal{L}(x)\right)$, *одновременно, то справедливо следующее асимптотическое соотношение:*

$$\frac{1}{\Lambda\left(R_n(s)\right)} - \frac{1}{\Lambda(1-s)} = \nu n + \frac{1+\nu}{2} \cdot \ln\left[\lambda_n(s)\right] + \rho_n(s)$$

где $\lambda_n(s) = \Lambda\Big(1-s\Big)\nu n + 1$ *и* $\rho_n(s) = o\Big(\ln n\Big) + \sigma_n(s)$, *а также для всех значений* $s \in [0,1)$ *выполняется* $\sigma(s) := \lim_{n\to\infty} \sigma_n(s) < \infty$.

Асимптотическая формула, приведённая в лемме, усиливает в этом смысле результат Т. Харриса из монографии «Теория ветвящихся случайных процессов» (1966) для процессов, у которых третий факториальный момент порядка $f'''(1-)$ конечен. В указанной монографии асимптотическая формула, служащая подтверждением леммы, получена при условии $\Lambda(y) \equiv y$, и правая часть равенства найдена в виде $\dfrac{1}{2} f''(1-)n + \mathcal{O}\Big(\ln n\Big)$.

Во втором параграфе третьей главы изучается асимптотика производящей функции критических ветвящихся процессов Галтона–Ватсона (Г-В), заданной законом ветвления в виде $[\Lambda_\nu]$, а также вопрос существования для них инвариантной меры.

Функцию Слейка $u_n(s) = \dfrac{f_n(s) - f_n(0)}{f_n(0) - f_{n-1}(0)}$ записываем в виде $U_n(s) = \dfrac{1}{\Lambda\Big(Q_n\Big)}\left[1 - \dfrac{R_n(s)}{Q_n}\right]$ в соответствии с условием $[\Lambda_\nu]$. Как было отмечено в четвертом параграфе второй главы, для всех значений $s \in [0,1)$ существует предельная функция $U(s) := \lim_{n\to\infty} U_n(s)$, которая удовлетворяет уравнению Абеля $U(f(s)) = U(s) + 1$. Если представить эту функцию в виде степенного ряда $U(s) = \sum_j u_j s^j$, то из уравнения Абеля следует уравнение $u_j = \sum_i u_i P_{ij}(\cdot)$. Это уравнение выражает инвариантность коэффициентов $\left\{u_j\right\}$ относительно вероятностей переходов $P_{ij}(\cdot)$.

Следующая теорема даёт информацию о виде производящей функции инвариантной меры.

Теорема 6. *Пусть производящая функция критических ветвящихся Г-В процессов задана в виде* $[\Lambda_\nu]$ *при условии* $\omega_\lambda(x) = o\Big(x^{-\nu}\mathcal{L}(x)\Big)$. *Тогда производящая функция инвариантной меры имеет вид*

$$U(s) = \int_0^s \frac{\psi(y)}{(1-y)\Lambda(1-y)}\,dy,$$

здесь функция $\psi(s)$ *непрерывна на* $s \in [0,1)$ *и* $f'(s) \le \psi(s) \le 1$*;*

В третьем параграфе третьей главы изучаются асимптотические и инвариантные свойства критических ветвящихся процессов с иммиграцией.

Пусть функции $f(s)$ и $h(s)$ имеют соответственно вид

$$f(s) = s + \Big(1-s\Big)^{1+\nu}\mathcal{L}\left(\frac{1}{1-s}\right) \qquad [f_\nu]$$

и

$$1-h(s)=\left(1-s\right)^{\delta}\ell\left(\frac{1}{1-s}\right) \qquad [h_\delta]$$

где $\nu,\delta\in(0,1)$ и $\mathcal{L}(\cdot),\ell(\cdot)\in\mathcal{S}_\infty$. В этом параграфе рассматривается случай $\delta>\nu$, то есть ситуация, когда фазовое пространство $\mathcal{S}$ является эргодическим.

В последующих рассуждениях для функций $\mathcal{L}(\cdot)\in\mathcal{S}_\infty$ и $\ell(\cdot)\in\mathcal{S}_\infty$ принимаются следующие дополнительные условия:

$$\mathcal{L}(\cdot)\in\mathcal{S}_\infty(\omega) \quad \text{и} \quad \omega(x)=o\left(\frac{\mathcal{L}(x)}{x^{\nu}}\right), \quad x\to\infty; \qquad [\mathcal{L}_\omega]$$

$$\ell(\cdot)\in\mathcal{S}_\infty(\sigma) \quad \text{и} \quad \sigma(x)=o\left(\frac{\ell(x)}{x^{\delta}}\right), \quad x\to\infty. \qquad [\ell_\sigma]$$

При этих условиях функции $\mathcal{L}(\cdot)\in\mathcal{S}_\infty(\omega)$ va $\ell(\cdot)\in\mathcal{S}_\infty(\sigma)$ обладают следующими свойствами:

Лемма 3. *Если процесс ГВИ, определённый производящими функциями $[f_\nu]$ va $[h_\delta]$, образует эргодическую цепь и выполняются условия $[\mathcal{L}_\omega]$ и $[\ell_\sigma]$, то при $x\to\infty$ выполняются асимптотические разложения $\mathcal{L}(x)=C_{\mathcal{L}}+o\left(x^{-\nu}\right)$ и $\ell(x)=C_\ell+o\left(x^{-\delta}\right)$.*

Введём обозначение: $\mathcal{P}_n(s):=\mathcal{P}_n^{(0)}(s)$.

Теорема 7. *Пусть критические процессы ГВИ определены производящими функциями вида $[f_\nu]$ и $[h_\delta]$. Тогда:*

1. *Если выполнено условие $[\mathcal{L}_\omega]$, то*

$$\mathcal{P}_n(s)=\Delta_n(s)\exp\left\{\int_s^{f_n(s)}\frac{\psi(y)\ln h(y)}{(1-y)\Lambda(1-y)}dy\right\}$$

где функции $\Lambda(y)=y^{\nu}\mathcal{L}\left(1/y\right)$, $\dfrac{h(s)}{h(f_n(s))}\le\Delta_n(s)\le 1$ и $\psi(s)$ определены в Теореме 6;

2. *Если дополнительно выполнено условие $[h_\delta]$ и $\delta>\nu$ b, то*

$$\mathcal{P}_n(s)=\beta_n(s)\Delta_n(s)\exp\left\{-\int_s^{f_n(s)}\frac{1-h(y)}{(1-y)\Lambda(1-y)}\psi(y)dy\right\},$$

где $\exp\left\{-\dfrac{1}{h(s)}\displaystyle\int_s^{f_n(s)}\frac{[1-h(y)]^2}{(1-y)\Lambda(1-y)}dy\right\}\le\beta_n(s)\le 1$.

Рассмотрим асимптотическое поведение локальных вероятностей $p_{00}^{(n)}$. Следующее утверждение улучшает результаты Пейкса для этих вероятностей.

Теорема 8. *Пусть критические процессы ГВИ определены производящими функциями вида* $[f_\nu]$ *и* $[h_\delta]$ *и* $\gamma := \delta - \nu > 0$. *Тогда существует функция* $\mathsf{L}_\gamma(\cdot) \in \mathcal{S}_\infty$, *такая что при* $n \to \infty$ *выполняются условия* $\mathsf{L}_\gamma(n) \sim \mathsf{L}(n)\mathcal{L}^{-\gamma/\nu}(n)$ *и*

$$p_{00}^{(n)} = A\exp\left\{-\mathcal{J} + \frac{1}{\gamma}\frac{1}{(\nu n)^{\gamma/\nu}}\mathsf{L}_\gamma\left(n^{1/\nu}\right)\left(1+o(1)\right)\right\},$$

где $A = \lim_{n\to\infty}\beta_n(0)\Delta_n(0) \le 1$ *и* $\mathcal{J} = \int_1^\infty y^{-(1+\gamma)}\mathsf{L}(y)dy < \infty$. *Если выполняются условия* $[\mathcal{L}_\omega]$ *и* $[\ell_\sigma]$, *то* $\mathsf{L}_\gamma(n) \to C_\gamma$, *где* $C_\gamma = C_\ell C_{\mathcal{L}}^{-\delta/\nu}$, *а* $C_{\mathcal{L}}$ *и* C_ℓ *— константы, определённые в Лемме 3.*

В этой теореме оценивается скорость сходимости функции $\mathcal{P}_n(s)$ к предельной функции $\pi(s) := \lim\limits_{n\to\infty}\mathcal{P}_n(s)$.

Теорема 9. *Пусть критические процессы ГВИ определены производящими функциями* $[f_\nu]$ *и* $[h_\delta]$ *и* $\gamma := \delta - \nu > 0$. *Тогда для всех значений* $s \in [0, d]$, $d < 1$ *функция* $\mathcal{P}_n(s)$ *приближается к функции* $\pi(s)$. *Кроме того, коэффициенты* $\{\pi_j\}$ *в степенном ряде* $\pi(s) := \sum_{j\in\mathcal{S}}\pi_j s^j$ *создают предельное инвариантное распределение относительно вероятностей переходов* $p_{ij}^{(n)}$. *Если выполняются условия* $[\mathcal{L}_\omega]$ *и* $[\ell_\sigma]$, *то выполняется соотношение*

$$\mathcal{P}_n(s) = \pi(s)\left(1 + C_\gamma \cdot \Theta_n(s)\right),$$

где C_γ *— постоянная, определённая в Теореме 8, и выполняется*

$$\Theta_n(s) = \frac{1}{\gamma}\frac{1}{\left(\nu_n(s)\right)^{\gamma/\nu}}\left(1 + \mathcal{O}\left(\frac{\ln n}{n}\right)\right), \quad n \to \infty, \text{ где } \nu_n(s) = \nu n + \Lambda^{-1}(1-s).$$

Следующее доказательство теоремы выражает асимптотический вид производящей функции $\pi(s)$ около точки $s = 1$.

Теорема 10. *Пусть критические процессы ГВИ определены производящими функциями* $[f_\nu]$ *и* $[h_\delta]$ *и* $\gamma := \delta - \nu > 0$. *Если выполняются условия* $[\mathcal{L}_\omega]$ *и* $[\ell_\sigma]$, *то*

$$-\ln\pi(s) = \mathsf{CL}\,\frac{1}{\gamma}(1-s)^\gamma\left(1+o(1)\right), \qquad s \uparrow 1,$$

где константа $\mathsf{CL} = \mathsf{L}(\infty)$ *вытекает из Леммы 3.*

Заключение

В данной диссертационной работе исследована асимптотическая структура дискретных ветвящихся случайных процессов с бесконечной дисперсией и получены соответствующие предельные теоремы. В целом, полученные результаты свидетельствуют о достижении целей работы. В свою очередь, все полученные результаты являются новыми и могут внести вклад в теорию случайных процессов, а также в прикладные области, такие как медицина, демография и математическое моделирование.

Основные результаты исследования заключаются в следующем:

- Представлены и доказаны теоремы, описывающие асимптотические свойства сумм интегралов регулярно изменяющихся функций на бесконечности;
- Получены и доказаны аналоги основной леммы для случая, когда дисперсия закона воспроизводства критического ветвящегося случайного процесса бесконечна;
- Определена форма производящей функции критических процессов Галтона–Ватсона с иммиграцией при выполнении определённых условий;
- Определено асимптотическое поведение локальных вероятностей;
- Оценена скорость сходимости производящей функции процессов Галтона–Ватсона с иммиграцией к её предельной функции;
- Установлена асимптотическая форма производящей функции, формирующей инвариантную меру, в окрестности точки 1.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING OF THE SCIENTIFIC DEGREES DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 INSTITUTE OF MATHEMATICS NAMED AFTER V.I. ROMANOVSKIY

KARSHI STATE UNIVERSITY

TUKHTAEV ERKIN EGAMBERDIEVICH

ASYMPTOTIC STRUCTURE OF DISCRETE TIME STOCHASTIC BRANCHING PROCESSES WITH INFINITE VARIANCE

01.01.05 – Probability theory and mathematical statistics

ABSTRACT OF THESIS OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent–2025

The theme of dissertation of doctor of philosophy (PhD) on physical and mathematical sciences was registered at the Supreme Attestation Commission at the of Ministers of Higher education, Science and Innovations of the Republic of Uzbekistan under number № B2025.3.PhD/FM1343.

Thesis has been prepared at Karshi state university.

The abstract of the thesis is posted in three languages (Uzbek, Russian, English (summary)) on the website http://kengash.mathinst.uz and in the website of "ZiyoNet" Information and educational portal http://www.ziyonet.uz/.

Scientific supervisor:	**Imomov Azam Abdurakhimovich** doctor of physical and mathematical sciences, professor
Official opponents:	**Mirakhmedov Sherzod Adilovich** doctor of physical and mathematical sciences, professor
	Azimov Jahongir Bakhramovich candidate of physical and mathematical sciences, docent
Leading organization:	**Tashkent state university of economics**

Defense will take place « 16 » December 2025 at 17:00 the meeting of Scientific Council number DSc.02/30.12.2019.FM.86.01 at Institute of Mathematics named after V.I.Romanovskiy (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871) 207-91-40, e-mail: uzbmath@umail.uz, Website: www.mathinst.uz).

Dissertation is possible to review in Information-resource center at Institute of Mathematics named after V.I. Romanovskiy (is registered № 218). (Address: University str. 9, Almazar area, Tashkent city, 100174, Uzbekistan, Ph.: (99871)-207-91-40).

Abstract of dissertation sent out on « 02 » December 2025 year

(mailing report № 2 on « 02 » December 2025 year).

U.A. Rozikov
Chairman of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S., Academician

J.K. Adashev
Scientific secretary of Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S., Senior researcher

Y.M. Xusanbayev
Deputy chairman of Scientific seminar under Scientific Council on award of scientific degrees, D.F.M.S., Docent

INTRODUCTION (abstract of the PhD thesis)

The aim of the research is to study the asymptotic structure of ordinary and immigration critical Galton–Watson branching stochastic processes that do not have a finite second-order moment, and to establish limit theorems for these processes.

The object of the research discrete-time branching stochastic processes and branching stochastic processes with immigration.

The scientific novelty of the research consists of the following:

using the properties of slowly varying functions, limit theorems for the transition probabilities of critical branching stochastic processes with infinite variance have been proved;

analogues of the main lemma in the theory of critical Galton–Watson branching processes with infinite variance have been established;

the ergodic property of critical discrete-time branching processes with immigration where the immigration law has an infinite first moment and the reproduction law of the aboriginal particles has infinite variance has been identified, and new theorems related to this property have been proved;

the rate of convergence to invariant measures in Galton–Watson branching processes with immigration has been estimated.

Implementation of the research results. Based on the results obtained on the asymptotic structure of discrete-time branching random processes with infinite variance:

In discrete-type critical branching processes with infinite variance, asymptotic distributions for the survival probability were used in proving limit theorems and constructing conclusions for a certain population process within the foreign project № STEM-22-226 titled "Phase-probability model for planning transport routes in disaster areas" (reference letter № 21/28-02 dated October 7, 2024, from Ivan Jakhashvili Tbilisi State University). The application of this scientific result made it possible to construct stochastic integral representations of Brownian functions depending on the path;

Based on the recurrence properties of the generation sequences of immigration branching processes and the properties of generating functions expressed through remainder-type Karamata functions, the obtained results have been used in articles published in international scientific journals to provide asymptotic descriptions of transition probabilities for Poisson-type immigration branching random processes and to prove limit theorems for sums of random variables (Stochastic Models, 2025, 41(4); Mathematical Communication, 2025, 30(2), 231–241; Stochastic Analysis and Applications, 2024, 42(4), 828–841). The application of these scientific results has made it possible to prove new theorems for limit distributions in Poisson immigration branching random processes and to estimate the limit distribution of sums of random variables.

Structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, a conclusion, and a list of references. The total volume of the dissertation is 117 pages.

E’LON QILINGAN ILMIY ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (часть I; part I)

1. Imomov A.A., Tukhtaev E.E. On application of slowly varying functions with remainder in the theory of Galton–Watson Branching Process. // *Journal of Siberian Federal University: Math. and Physics*, 12(1), pp. 51-57, 2019. (3. Scopus. IF=0,32).
2. Imomov A.A., Tukhtaev E.E. On asymptotic structure of critical Galton-Watson branching processes allowing immigration with infinite variance. *Stochastic Models.* 39(1), pp. 118-140, 2023. (3. Scopus. IF=0,39).
3. Imomov A.A., Tukhtaev E.E., Sztrik J. On Properties of Karamata Slowly Varying Functions with Remainder and Their Applications. // *MDPI, Mathematics, 12*(20), 3266. 2024. (3. Scopus. IF=0,50).
4. Imomov A.A, To‘xtayev E.E.,Nuraliyeva N. On invariant properties of critical Galton-Watson Branching Processes with infinite variance. *V Intern. Workshop “Applied Methods of Statistical Analysis”*, September 18–20, Novosibirsk, Russia, pp. 461-468, 2021. (3. Scopus).
5. Imomov A.A., Tukhtaev E.E. On Asymptotic Structure of the Critical Galton–Watson Branching Processes with Infinite Variance and Allowing Immigration. // *Applied Modeling Techniques and Data Analysis 2: Financial, Demographic, Stochastic and Statistical Models and Methods.* 8, chapter 13, pp. 185-194, 2021. (3. Scopus).
6. Tukhtaev E.E., Berdiyeva M.I. Asymptotic properties of long-surviving discret time stochastic branching process. // *QarDU xabarlari,* 6(3), 4-11 betlar, 2023.
7. Тухтаев Э.Э. О применении метода Стейна-Тихомирова в теории ветвящихся случайных процессов. // *QarDU xabarlari,* 3(2), 66-74 betlar, 2024.
8. Tukhtaev E.E. Nokritik immigratsiyali Galton-Vatson tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlarining ergodiklik xossalari va invariant o‘lchovlar. // *Buxoro davlat universiteti ilmiy axboroti,* 10(1), 3-10 betlar, 2024.

II bo‘lim (часть II; part II)

9. Imomov A.A, Tukhtaev E.E. Remarks on Galton-Watson Branching Processes with infinite variance and Immigration component. // *18-Intern. Conf. “Inform. Technol. and Math. modelling” – ITMM’2019,* June 26–30, 2019, Tomsk, pp. 305–309.
10. Imomov A.A, Tukhtaev E.E. On the basic lemma of the theory of critical Galton-Watson branching processes with possibly infinite variance. // *V Межд. kонфер. «Актуалние проблеми математики и информатики»,* April 18–20, 2019, Yelets, pp. 31–33.
11. Imomov A.A, Tukhtaev E.E. Further Results on the Theory of Galton-Watson Branching Processes Allowing Immigration without Finite Variances. //

International Conference"Mathematical Physics, Dynamical Systems and Infinite-Dimensional Analysis", June 30 – Jule 9, 2021, Dolgoprudny, Moscow Region, pp. 65–70.

12. Imomov A.A, Tukhtaev E.E. Further results on the theory of discrete-time branching processes allowing immigration and without finite variances // *Stoxastik tahlilning dolzarb muammolari" nomli ilmiy konferensiya*, 20–21 fevral, 2021, Toshkent, 49–52-betlar.
13. Imomov A.A, Tukhtaev E.E. Local limit theorem for the Galton-Watson Branching-Immigration System without finite variances. // *ITMM-2021 PROCEEDINGS of the 20th International Conference named after A. F. Terpugov,* December 1–5, 2021, Tomsk, pp. 295–299.
14. Имомов А.А, Тухтаев Э.Э., Абдирахмонов А.А. Об одном критерии сходимости к экспоненциональному закону. // *XX Международная конференция ИТММ-2021,* 1–5 декабря, 2021, стр. 353–358.
15. Imomov A.A, Tukhtaev E.E. Limit theorems for the critical Galton-Watson Branching Immigration systems in a transient case. // *International Conference Limit theorems of probability theory and mathematical statistics,* September 26–28, 2022, Tashkent, pp. 49–50.
16. Тухтаев Э.Э., Xazratqulov S. Асимптотическая нормальность полного числа потомков в ветвящемся процессе с иммиграцией. // *VI Международная научная конфереция Статистика и ее применения ,* 19–22 октября, 2022, Наманган, стр. 237–242.
17. To‘xtayev E.E., Murtazayev M.S. Sekin o‘zgaruvchi funksiyaning kritik tarmoqlanuvchi tasodifiy jarayonlardagi ba’zi bir tatbiqlari. // *Analizning zamonaviy muammolari nomli Respublika ilmiy anjumani,* 2–3 iyun, 2023, Qarshi, 275–277-betlar.
18. To‘xtayev E.E. Immigratsiyali Galton-Vatson jarayonlari uchun momentlar. // *“Amaliy matematikaning zamonaviy muammolari va istiqbollari” Respublika ilmiy-amaliy konferensiyasi,* 24–25 may, 2024, Qarshi, 496–498-betlar.
19. Имомов А.А., Тухтаев Э.Э., Хуррамов А.Х. Об одном применения Тауберовой теоремы для производящих функций. // *«Анализнинг долзарб муаммолари» номли халқаро конференция,* 22-23 апрель, 2016, Қарши, 314–317-бетлар.
20. Тухтаев Э.Э., Нуралиева Н. Об асимптотических свойствах полного числа потомков в субкритических ветвящихся процессах. // “*Таҳлилнинг долзарб муаммолари ва татбиқлари” номли Республика илмий-амали анжумани,* 22-23 апрель, 2019, Қарши, 310–314-бетлар.
21. Imomov A.A, Tukhtaev E.E. Slowly varying functions with remainder in the theory of discrete-time stochastic branching processes without finite variance. // *Modern problems of stochastic analysis, Республиканская конференция*, September 21–22, 2020, Ташкент, стр. 52–57.

Avtoreferat “QarDu xabarlari” tahririyatida
2025 yil 24-noyabrda tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi
matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

Bosmaxona litsenziyasi:

9338

Bichimi: 84x60 $^{1}/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i: 2,25. Adadi 100 dona. Buyurtma № 40/25.

Guvohnoma № 851684.
«Tipograff» MCHJ bosmaxonasida chop etilgan.
Bosmaxona manzili: 100011, Toshkent sh., Beruniy ko‘chasi, 83-uy.