MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

BAZARBAYEV SARDOR URINBOYEVICH

KO‘P KOMPLEKS O‘ZGARUVCHILI KO‘PHADSIMON AKSLANTIRISHLARNING KATTA ENTROPIYALI O‘LCHOVLARI

01.01.01 — Matematik analiz

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

TOSHKENT — 2025

УДК: 517.55+517.57

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi avtoreferati mundarijasi

Содержание автореферата диссертации доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам

Contents of the abstract of the dissertation for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) in Physical and Mathematical Sciences

MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI HUZURIDAGI ILMIY DARAJALAR BERUVCHI DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 RAQAMLI ILMIY KENGASH

O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

BAZARBAYEV SARDOR URINBOYEVICH

KO‘P KOMPLEKS O‘ZGARUVCHILI KO‘PHADSIMON AKSLANTIRISHLARNING KATTA ENTROPIYALI O‘LCHOVLARI

01.01.01 — Matematik analiz

Fizika-matematika fanlari bo‘yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi
AVTOREFERATI

TOSHKENT — 2025

Fizika-matematika fanlari bo'yicha falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi mavzusi O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Oliy attestatsiya komissiyasida B2025.4.PhD/FM1390 raqam bilan ro'yxatga olingan.

Doktorlik dissertatsiya Mirzo Ulug'bek nomidagi O'zbekiston Milliy universitetida bajarilgan.

Dissertatsiya avtoreferati uch tilda (o'zbek, rus, ingliz(rezyume)) Ilmiy kengashning veb-sahifasida (http://ik-fizmat.nuu.uz) va "ZiyoNet" Axborot ta'lim portalida (http://www.ziyonet.uz/) joylashtirilgan.

Ilmiy rahbar:	**Raximov Karim Xoshimovich** Fizika-matematika fanlari doktori, Katta ilmiy xodim
Ilmiy maslahatchi:	**Fabrizio Bianchi** Italiyaning Piza universiteti professori
Rasmiy opponentlar:	**Roziqov O'tkir Abdulloyevich** Fizika-matematika fanlari doktori, akademik
	Duc Viet Vu Germaniyaning Köln universiteti professori
Yetakchi tashkilot:	**Urganch davlat universiteti**

Dissertatsiya himoyasi O'zbekiston Milliy universiteti huzuridagi DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 raqamli ilmiy kengashning 2025-yil 11-dekabr soat 16:00 dagi majlisida bo'lib o'tadi (Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel: +998-71-227-12-24, faks: +998-71-246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz)

Dissertatsiya bilan O'zbekiston Milliy universitetining Axborot-resurs markazida tanishish mumkin (219-raqam bilan ro'yxatga olingan). Manzil: 100174, Toshkent sh., Olmazor tumani, Universitet ko'chasi, 4-uy. Tel: +998-71-246-02-24.

Dissertatsiya avtoreferati 2025-yil 5-dekabr kuni tarqatildi.
(2025-yil 5-dekabrdagi 2-raqamli reestr bayonnomasi)

O.S. Zikirov
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash raisi,

R.M.Jo'rayev
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash kotibi,
f.-m.f.f.d (PhD)

R.N.Ganixodjayev
Ilmiy darajalar beruvchi
Ilmiy kengash huzuridagi
Ilmiy seminar raisi,
f.-m.f.d., professor

KIRISH (falsafa doktori (PhD) dissertatsiyasi annotatsiyasi)

Dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati. Dissertatsiya koʻp kompleks oʻzgaruvchili koʻphadsimon akslantirishlarning dinamik xossalarini oʻrganishga bagʻishlangan va yangi yoʻnalishlardan biri. Koʻp oʻzgaruvchili kompleks dinamik sistemalarni oʻrganish zamonaviy matematikada markaziy mavzulardan biriga aylandi. Bu sohaga boʻlgan qiziqish geometriya, ehtimollar nazariyasi, ergodiklik nazariya va nazariy fizika bilan chuqur aloqadorligi bilan izohlanadi. Ushbu yoʻnalishdagi asosiy tushunchalardan biri *entropiya* boʻlib, u xaotik dinamik harakatning murakkabligi va oldindan aytib boʻlmasligini miqdoriy ifodalaydi.

Kompleks dinamikadagi klassik va fundamental muammolardan biri bu — kompleks proyektiv fazolarning golomorf endomorfizmlarini ularning Julia va Fatou toʻplami tuzilishi orqali tadqiq etishdir. Bir kompleks oʻzgaruvchili holatida ushbu nazariya yaxshi rivojlangan boʻlib, ushbu holda Riman teoremasi muhim rol oʻynaydi. (Pierre Fatou, Gaston Julia, Jean-Christophe Yoccoz, Mikhail Lyubich, Mitsuhiro Shishikura, Adrien Douady, John H. Hubbard, John Milnor, Nessim Sibony, B. Mandelbrot, Denis Sullivan, McMullen va boshqalar). Biroq, yuqori oʻlchamli holatlarda Riman teoremasi amal qilmaydi. Bunday vaziyatda asosiy vosita pluripotensiallar nazariya hisoblanadi, chunki u zarur analitik va geometrik asosni taʼminlaydi. Koʻphadsimon akslantirishlar dinamikasini oʻrganish shu sababli endomorfizmlar dinamikasidan murakkab hisoblanadi hamda zamonaviy matematikada dolzarb masalalarni hal qilishda muhim ahamiyatga ega hisoblanadi.

Koʻp kompleks oʻzgaruvchili koʻphadsimon akslantirishlarning katta entropiyali oʻlchovlarining xossalarini koʻp kompleks oʻzgaruvchili dinamik sistemalardagi dolzarb masalalarni yechishga tadbiq qilishga alohida eʼtibor qaratilmoqda. Aytaylik, $f:\mathbb{P}^k\to\mathbb{P}^k$ algebraik darajasi $d\geq 2$ boʻlgan golomorf endomorfizm boʻlsin. Shunda f -invariant boʻlgan, *Grin oqimi* deb ataluvchi musbat yopiq $(1,1)$-oqim T mavjud boʻlib $d^{-n}(f^n)^*\omega_0\to T$ kuchsiz yaqinlashish oʻrinli boʻladi, bu yerda ω_0 massasi 1 boʻlgan silliq, musbat, yopiq $(1,1)$-forma. Yuqorida aniqlangan T oqim oʻziga xos geometrik xossalarga ega, jumladan, u Gyolder uzluksiz potensialga ega boʻladi. Natijada, $\mu:=T^{\wedge k}$ tashqi koʻpaytma yaxshi aniqlangan boʻlib, f uchun entopiyasi maksimal $k\ln d$ boʻlgan yagona oʻlchov boʻladi. Uning havzasi f ning *Julia toʻplami* deyiladi. Bundan tashqari, de Thélin va Dinh natijasiga koʻra, entropiyasi $(k-1)\ln d$ dan qatʼiy katta boʻlgan har qanday ergodik oʻlchov aynan shu Julia toʻplamida yotadi. Ushbu natijaning isboti asosan Grin oqimini qurishga va uning ketma-ket oʻzaro tashqi koʻpaytmalari $T^{\wedge j}$ ga oid nozik induksiyaga tayangan. Bunday usullarni noalgebraik holatlarga kengaytirish sezilarli qiyinchiliklarni keltirib chiqaradi, chunki umumiy holda yaʼni noalgebraik holatlarda dinamik Green oqimi mavjud boʻlavermaydi. Mazkur dissertatsiyada biz ushbu muammoni *dominant topologik darajaga ega boʻlgan koʻphadsimon akslantirishlar* doirasida koʻrib chiqamiz. Bizning yondashuvimiz nafaqat ushbu kengroq kontekstda yechim beradi, balki Grin oqimiga tayanmasdan de Thélin–Dinh teoremasining muqobil isbotini ham taqdim etadi.

Xulosa qilib aytganda, ushbu dissertatsiyaning *dolzarbligi* ko‘p kompleks o‘zgaruvchili dinamik sistemalarni anglashga qo‘shgan fundamental hissasida namoyon bo‘ladi, uning *zaruriyligi* esa entropiya nazariyasini algebraik dinamikaning doirasidan tashqariga kengaytirishdagi hal etilmagan muammolar va entropiya markaziy rol o‘ynaydigan keng qamrovli fanlararo qo‘llanilish sohasi bilan belgilanadi.

Mamlakatimizda, ayniqsa, oxirgi yillarda fundamental fanlar, xususan, matematika va fizika, ular bilan bir qatorda tibbiy va geologik tomografiya masalalarida ilmiy ahamiyatga ega bo‘lgan dolzarb yo‘nalishlarga e’tibor kuchaydi. Jumladan, so‘nggi yillarda funksiyalar nazariyasi, ko‘p o‘lchovli kompleks analiz, plyuripotensiallar nazariyasi, approksimatsiyalar nazariyasi va kompleks dinamik sistemalar nazariyasiga alohida e’tibor qaratilmoqda. Bularning barchasi qaralayotgan masalalarning naqadar dolzarbligi va zarurligini ko‘rsatadi. Bugungi kunda ko‘p kompleks o‘zgaruvchili ko‘phadsimon akslantirishlarni tadqiq qilishda salmoqli ilmiy natijalarga erishildi. “Haqiqiy o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi” va “Kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi” fanlarining ustuvor yo‘nalishlarida xalqaro standartlar darajasida ilmiy tadqiqot ishlari ko‘lamini kengaytirish, ularning natijadorligi va amaliy ahamiyatini oshirish matematika fanining faoliyat yo‘nalishlari va muhim vazifalari sifatida belgilab berilgan.[1] Ushbu vazifalarni amalga oshirishda, xususan optimallashtirish masalalarining yechimlari bo‘lgan Grin funksiyasi, ehtimollik o‘lchov funksiyalari va Dirixle masalalarining yechimga egaligini o‘rganishda ko‘p kompleks o‘zgaruvchili akslantirishlar nazariyasi bo‘yicha ilmiy tadqiqotlar olib borish mazkur qaror ijrosini ta’minlashda muhim ahamiyatga ega hisoblanadi. Ushbu dissertatsiya ishida olib borilgan tadqiqotlar O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017-yil 7-fevraldagi “O‘zbekiston Respublikasini yanada rivojlantirish bo‘yicha harakatlar strategiyasi to‘g‘risida”gi PF-4947 sonli Farmoni, 2017-yil 17-fevraldagi “Fanlar akademiyasi faoliyati, ilmiy-tadqiqot ishlarini tashkil etish, boshqarish va moliyalashtirishni yanada takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-2789 sonli va 2020-yil 7-maydagi “Matematika sohasidagi ta’lim sifatini oshirish va ilmiy-tadqiqotlarni rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ-4708-sonli Qarorlarida, shuningdek, mazkur faoliyatga tegishli boshqa normativ-huquqiy hujjatlarda belgilangan masalalarni hal etishga muayyan darajada xizmat qiladi.

Tadqiqotning respublika fan va texnologiyalari rivojlanishining ustuvor yo‘nalishlariga mosligi. Ushbu tadqiqot O‘zbekiston Respublikasining fan va texnologiyalarni rivojlantirishning IV. “Matematika, mexanika va informatika” ustuvor yo‘nalishi doirasida bajarilgan.

Muammoning o‘rganilganlik darajasi. Ko‘phadsimon akslantirishlar — bu $f:U\to V$ ko‘rinishdagi golomorf akslantirishlar bo‘lib, bu yerda $U\Subset V$ — $\mathbb{C}^k$ ning ochiq qism to‘plamlari va V esa chegaralangan qavariq soha hisoblanadi. Ta’rifga ko‘ra, har bir ko‘phadsimon akslantirish tarmoqlanuvchi qoplama aniqlaydi va f

[1] O‘zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasining 2017-yil 18-maydagi “O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining yangidan tashkil etilgan ilmiy-tadqiqot muassasalari faoliyatini tashkil etish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi 292-sonli qarori.

yaxshi aniqlangan *topologik daraja* d_t ga ega bo‘ladi. Har bir $0 \le p \le k$ uchun quyudagi ko‘rinishda *dinamik darajalar*ni aniqlash mumkin:

$$d_p = d_p(f) := \limsup_{n\to\infty} \sup_S \|(f^n)_*(S)\|_U^{1/n},$$

bu yerda supremum U dagi massasi 1 dan katta bo‘lmagan barcha musbat yopiq $(k-p,k-p)$-oqimlar bilan olinadi. Shuni qayd etamizki, har doim $d_0 = 1$ va $d_k = d_t$ tengliklari o‘rinli. Bianchi–Dinh–Raximov teoremasiga ko‘ra, $\{d_p\}_{0\le p\le k}$ ketma-ketlik o‘suvchi bo‘ladi. Shunday qilib, xususan, $\max_{0\le p\le k-1} d_p = d_{k-1}$ ga egamiz. Agar $d_{k-1} < d_t$ bo‘lsa, f akslantirish *dominant topologik darajaga ega* deymiz. Qayd etish joizki, bu holda har doim $d_t \ge 2$ bo‘ladi. Dominant topologik darajaga ega bo‘lgan ko‘phadsimon akslantirishlar endomorfizmlarning ko‘plab dinamik xossalariga ega (biroq, ularni o‘rganish odatda texnik jihatdan murakkabroq bo‘ladi, chunki tabiiy tarzda aniqlangan Grin oqimi mavjud emas). Xususan, har bir bunday f uchun entropiyasi $\log d_t$ bo‘lgan maksimal entropiyali yagona μ o‘lchov va shunday xos analitik $\mathcal{E} \subset V$ to‘plam mavjud bo‘lib quyidagi o‘rinli bo‘ladi:

$$d_t^{-n}(f^n)^*\delta_a \to \mu, \quad \forall a \in V \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} f^j(\mathcal{E}). \tag{*}$$

Shuni ta’kidlash kerakki, $\mathbb{P}^k$ golomorf endomorfizmlari holatidan farqli o‘laroq, bu yerda $\mathcal{E}$ to‘plam f-invariant bo‘lmasligi mumkin va $\cup_{j=0}^{\infty} f^j(\mathcal{E})$ analitik to‘plam bo‘lishi shart emas. Biz μ ning havzasi J_f ni f ning Julia to‘plami deb ataymiz. Mazkur dissertatsiyaning asosiy maqsadlaridan biri (*) dagi yaqinlashish tezligini o‘rganishdir. Dinh–Sibony natijasiga ko‘ra, $0 < \gamma < 1$ shartni qanoatlantiruvchi shunday o‘zgarmas son mavjud bo‘lib V da aniqlangan plurigarmonik funksiyalarning ixtiyoriy kompakt oilasi $\mathcal{F}$ dagi har bir ψ funksiyasi uchun

$$|d_t^{-n}(f^n)_*\psi - \langle\mu,\psi\rangle| \le C_{\gamma,\mathcal{F}}\gamma^n \tag{**}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi, bu yerda $C_{\gamma,\mathcal{F}}$ doimiy γ va $\mathcal{F}$ oilaga bog‘liq, ammo ψ funksiyaning o‘ziga bog‘liq emas. Biz $\gamma_0 = \gamma_0(f)$ orqali (**) bajariladigan γ larning infimumini belgilaymiz. Mazkur dissertatsiyada biz γ_0 uchun yuqori baho keltiramiz. Yuqorida ta’kidlaganimizdek, maksimal entropiyaga ega μ o‘lchovning havzasi f uchun Julia to‘plami hisoblanadi. Mazkur dissertatsiyaning asosiy maqsadlaridan biri katta entropiyali o‘lchovlar ya’ni $h_\nu(f) > \log\max\{d_{k-1}, \gamma_0 d_t\}$ shartni qanoatlantiruvchi o‘lchovlarning havzalarini o‘rganish va ushbu natijani qo‘llab Julia to‘plamini Xausdoff o‘lchamini quyidan baholash.

2023-yildan boshlab O‘zMU “Matematik analiz” kafedrasi va O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi V.I.Romanovskiy nomidagi Matematika institutida kompleks dinamik sistemalar bo‘yicha jadal ilmiy tadqiqot ishlari olib borilmoqda.

Dissertatsiya tadqiqotining dissertatsiya bajarilgan oliy ta’lim muassasasisining ilmiy-tadqiqot ishlari rejalari bilan bog‘likligi. Tadqiqot O‘zbekiston Respublikasi Oliy ta’lim, fan va innovatsiyalar vazirligining ilmiy-tadqiqot granti IL-5421101746 raqamli rejalashtirilgan mavzuga muvofiq ravishda, Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetida amalga oshirildi.

Tadqiqotning maqsadi — ko‘phadsimon akslantirishlar uchun katta entropiyali o‘lchovlarni o‘rganish va maksimal entropiyali o‘lchovning havzasiga nisbatan teng taqsimlanishning yaqinlashish tezligini tahlil qilishdan iborat.

Tadqiqotning vazifalari:

ko‘phadsimon akslantirishlar uchun maksimal entropiyali o‘lchovning havzasiga nisbatan teng taqsimlanishning yaqinlashish tezligini isbotlash;

maksimal entropiyali o‘lchovning havzasiga nisbatan teng taqsimlanishning yaqinlashish tezligining yuqori chegarasini topish;

ko‘phadsimon akslantirishlar uchun katta entropiyali o‘lchovlarning havzasini o‘rganish va ularning havzasi Julia to‘plamida yotishini isbotlash;

ko‘phadsimon akslantirishlarning Julia to‘plamining Hausdorff o‘lchami uchun quyi chegarani topish.

Tadqiqot obyekti. Dominant topologik darajaga ega ko‘phadsimon akslantirishlar, ko‘phadsimon akslantirishlar uchun katta entropiyali o‘lchovlar, stabil ko‘phadsimon akslantirishlar oilasi, ko‘phadsimon akslantirishlarning Julia to‘plami.

Tadqiqot predmeti. Kompleks analiz, pluripotensiallar nazariya, ergodiklik nazariya, kompleks dinamik sistemalar, o‘lchovlar nazariyasi.

Tadqiqot usullari. Tadqiqotda zamonaviy kompleks analiz, ergodiklik nazariya, kompleks dinamik sistemalar, klassik potensiallar nazariya va pluripotensiallar nazariya usullaridan foydalanilgan.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi quyidagilardan iborat:

ko‘phadsimon akslantirishlar uchun katta entropiyali o‘lchovlarning havzasi Julia to‘plamida joylashishi isbotlangan;

ko‘phadsimon akslantirishlar uchun maksimal entropiyali o‘lchovning havzasiga nisbatan teng taqsimlanishning yaqinlashish tezligi aniqlangan;

maksimal entropiyali o‘lchovning havzasiga nisbatan teng taqsimlanishning yaqinlashish tezligida ixtiyoriy $\gamma > \sqrt{\frac{d_{k-1}}{d_t}}$ asos ekanligi isbotlangan;

ko‘phadsimon akslantirishlarning Julia to‘plami uchun Hausdorff o‘lchamining quyi chegarasi topilgan.

Tadqiqotning amaliy natijalari. Ushbu dissertatsiyada keltirilgan natijalar va metodologiyalar oliy ta’lim muassasalarida magistratura va doktorantura talabalariga mo‘ljallangan maxsus kurslarga tatbiq etilishi mumkin.

Ko‘p kompleks o‘zgaruvchili ko‘phadsimon akslantirishlarning katta entropoiyali o‘lchovlarininh xossalairni isbotlashda yaratilgan metod fundamental bo‘lib, boshqa turdagi akslantirishlar uchun ham qo‘llash mumkin.

Tadqiqot natijalarining ishonchliligi. Natijalar zamonaviy kompleks analiz, ergodiklik nazariya, kompleks dinamik sistemalar va pluripotensiallar nazariyasi usullaridan foydalanib olingan. Olingan barcha natijalar matematik jihatdan to‘g‘ri hisoblanadi.

Tadqiqot natijalarining ilmiy va amaliy ahamiyati. Tadqiqotning ilmiy ahamiyati shundan iboratki, ko‘phadsimon akslantirishlar uchun katta entropiyali o‘lchovlarning havzasi Julia to‘plamida joylashishi isbotlandi va maksimal entropiyali o‘lchovning havzasiga nisbatan teng taqsimlanishning yaqinlashish tezligi aniqlab berildi.

Ushbu natijalar ko‘phadsimon akslantirishlarning tuzilishi va dinamikasini chuqurroq anglashga yordam beradi va texnik, fizik hamda biologik jarayonlarning matematik modellashtirilishida foydali bo‘lishi mumkin.

Tadqiqot natijalarini joriy qilinishi. Tadqiqot davomida olingan ilmiy natijalar asosida:

maksimal entropiyali o‘lchovning havzasiga nisbatan yaqinlashish tezligi FA-F-4-002 “Subgarmonik funksiyalar va ularning kalibrlangan geometriyadagi minimal sirtlarga tatbiqlari” fundamental ilmiy loyiha doirasida qo‘llanilgan (O‘zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasining 2021-yil 30-sentabrdagi 2/1255-2687-sonli ma’lumotnomasi). Ushbu ilmiy natijaning tatbiqi bizga subgarmonik funksiyalar singari funksiyalarni aniqlash va kalibrlangan geometriyada potensial nazariyani qurish imkonini bergan;

Grin funksiyalari va ularning regulyarligiga oid olingan natijalar UT-OT-2020-1 “Monj–Amper tenglamasi va ekstremal plurisubgarmonik funksiyalar” fundamental ilmiy loyiha doirasida, ya’ni singulyar to‘plamlarda subgarmonik funksiyalarni aniqlash masalalarida qo‘llanilgan (Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetining 2021-yil 4-oktabrdagi 04/11-6015-sonli ma’lumotnomasi). Ushbu ilmiy natijaning tatbiqi kompakt to‘plamlarning polyar qobig‘ini aniqlash va funksiyalarning singulyar to‘plamlarda subgarmoniklik xossasini tekshirishga imkon bergan.

Tadqiqot natijalarining aprobatsiyasi. Tadqiqotning asosiy natijalari 5 ta xalqaro ilmiy konferensiyalarda muhokama qilingan.

Tadqiqot natijalarining e’lon qilinganligi. Dissertatsiya mavzusi bo‘yicha 11 ta ilmiy maqola ilmiy jurnallarda chop etilgan bo‘lib, ulardan 6 tasi O‘zbekiston Respublikasi Oliy attestatsiya komissiyasi tomonidan PhD dissertatsiyasini himoya qilish uchun tavsiya etilgan jurnallar ro‘yxatiga kiritilgan, 2 tasi xalqaro va 4 tasi milliy matematik jurnallarda chop etilgan. Ulardan 1 tasi SCOPUS axborot bazasiga kiritilgan va 5 ta tezis mavjud.

Dissertatsiyaning tuzilishi va hajmi. Dissertatsiya kirish qismidan, 15 ta paragrafga bo‘lingan to‘rtta bob, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro‘yxatidan tashkil topgan. Dissertatsiyaning umumiy hajmi 73 betni tashkil etadi.

DISSERTATSIYANING ASOSIY MAZMUNI

Kirish qismida dissertatsiya mavzusining dolzarbligi va zarurati asoslab berilgan va tahlil qilingan. Tadqiqotning respublikada fan va texnologiyalarni rivojlantirishning ustuvor yo‘nalishlariga muvofiqligi ko‘rsatilgan hamda muammoning o‘rganilganlik darajasi yoritilgan. Tadqiqotning maqsadi, vazifalari, obyekti va predmeti belgilab berilgan. Tadqiqotda olingan natijalarning ilmiy yangiligi va amaliy ahamiyati tasvirlangan, ularning nazariy va amaliy ahamiyati ko‘rsatib o‘tilgan. Bundan tashqari, tadqiqot natijalarining joriy etilishi, chop etilgan ishlar va dissertatsiyaning tuzilishi haqida batafsil ma’lumot berilgan.

Dissertatsiyaning birinchi bobida asosan keyingi boblarda ishlatiladigan asosiy va muhim tushunchalarning sharhi keltiriladi: musbat yopiq oqimlar, kohomologiya, topologik va metrik entropiya, kompleks proyektiv fazolarning endomorfizmlari dinamikasi. Shuningdek, ushbu bobda dissertatsiya mavzusi bo‘yicha ilgari isbotlangan asosiy teoremalarga to‘xtalib o‘tiladi. Bundan tashqari, ushbu bobda endomorfizmlarning katta entropiyali o‘lchovlarining havzasi haqidagi de Thélin va Dinh natijasining yangi isboti ham keltiriladi.

Biz $\mathbb{P}^k$ orqali o‘lchami k bo‘lgan kompleks proyektiv fazoni belgilaymiz.

Ta’rif 1.3.4 $\mathbb{P}^k$ ning *golomorf endomorfizmi* deb, darajalari bir xil $d \geq 1$ bo‘lgan hamda $\mathbb{P}^k$ ning biror nuqtasida bir vaqtda nolga teng bo‘lmaydigan bir jinsli $f_0, \ldots, f_k$ ko‘phadlar orqali berilgan

$$f[z_0 : \ldots : z_k] = [f_0(z_0, \ldots, z_k) : \ldots : f_k(z_0, \ldots, z_k)]$$

$f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ *morfizmga aytiladi.*

Yuqorida aniqlangan d soni f ning *algebraik darajasi* deb ataladi. Aytaylik $f : \mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ algebraik darajasi $d \geq 2$ bo‘lgan endomorfizm bo‘lsin.

Teorema 1.3.8 (Dinh–Sibony) *Faraz qilaylik,* S $\mathbb{P}^k$ *da massasi* 1 *bo‘lgan musbat yopiq* $(1,1)$*-oqim bo‘lsin. Agar* S *ning lokal potensiallari chegaralangan bo‘lsa, unda* $d^{-n}\left(f^n\right)^*(S)$ *ketma-ketlik massasi* 1 *bo‘lgan musbat yopiq shunday* $(1,1)$*-oqim* T_f *ga zaif yaqinlashadiki, bunda*

1. T_f *ning potensiallari Gyolder uzluksizdir va u* S *ga bog‘liq emas, ya’ni shunday Gyolder uzluksiz* g *funksiya mavjud bo‘lib*

$$T_f = \omega_{FS} + dd^c g$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

2. T_f *to‘la invariant bo‘ladi, ya’ni* $f^*(T_f) = dT_f$ *va* $f_*(T_f) = d^{k-1}T_f$.

T_f ning potensiallari Gyolder uzluksiz bo‘lganligi uchun, har qanday $1 \leq p \leq k$ uchun $T_f^p = T_f \wedge T_f \wedge \ldots \wedge T_f$ (p marta) tashqi ko‘paytma yaxshi aniqlangan. Xususan, $\mu := T_f^k$ - $\mathbb{P}^k$ da ehtimollik o‘lchovini aniqlaydi.

T_f^p ning havzasi J_p – f *ning* p*-tartibli Julia to‘plami* deb ataladi. Ravshanki, quyidagi doim o‘rinli bo‘ladi:

$$J_1 \supset J_2 \supset \ldots \supset J_k.$$

Eng kichik to‘plam J_k – f *ning Julia to‘plami* deb ataladi va J_f orqali belgilanadi.

Teorema 1.3.9 (Dinh–Sibony) *Aytaylik* f *darajasi* $d \geq 2$ *bo‘lgan endomorfizm bo‘lsin. U holda quyidagilar o‘rinli:*

1. f *ning topologik entropiyasi* $k \log d$ *ga teng, ya’ni* $h_t(f, \mathbb{P}^k) = k \log d$;

2. $\mu = T_f^k$ – f*-invariant ergodik ehtimollik o‘lchovidir. Xususan, u entropiyasi* $k \log d$ *bo‘lgan yagona maksimal entropiyali o‘lchov bo‘ladi;*

3. μ *aralashtiruvchi o‘lcho‘v.*

Biz μ ni f ning *Grin o‘lchovi* yoki *muvozanat o‘lchovi* deb ataymiz.

Dissertatsiyaning birinchi bobi oxirida dastlab de Thélin va Dinh tomonidan isbotlangan quyidagi teoremaning yangi isboti keltirilgan.

Teorema 1.3.11 *f algebraik darajasi $d \geq 2$ bo'lgan golomorf endomorfizm bo'lsin. Agar ν f-invariant o'lchov bo'lib, $h_\nu(f) > (k-1)\log d$ shart bajarilsa, unda ν ning havzasi Julia to'plamida yotadi.*

Ikkinchi bobda $\mathbb{C}^k$ da ko'phadsimon akslantirishlar dinamikasi xususan tekis taqsimlangan o'lchovga nisbatan yaqinlashish tezligi isbotlandi. Aytaylik chegaralangan V soha $\mathbb{C}^k$ ning qavariq qismi bo'lib $U \Subset V$ unda kompakt yotgan biror ochiq to'plam bo'lsin.

Ta'rif 2.1.1 *Xos, golomorf $f: U \to V$ akslantirishga ko'phadsimon akslantirish deyiladi.*

Ta'rifga ko'ra, $f: U \to V$ ko'phadsimon akslantirish V to'plamining tarmoqlangan qoplamasi bo'ladi. Ushbu qoplamaning darajasi d_t odatda f ning *topologik darajasi* deb ataladi va u ixtiyoriy $a \in V \setminus f(C_f)$ uchun $f^{-1}(a)$ dagi nuqtalar soniga teng bo'ladi, bu yerda C_f – f akslantirishning kritik nuqtalari to'plami.

Topologik darajasi $d_t \geq 2$ bo'lgan biror $f: U \to V$ ko'phadsimon akslantirishni fiksirlab olamiz. $f^n := f \circ \cdots \circ f$ (n marta kompozitsiya) f ning n-chi iteratsiyasi deb ataladi. Umuman olganda, f ning iteratsiyasini U dagi har bir nuqtada aniqlab bo'lmaydi. Masalan, $a \in U$ nuqta uchun agar $f(a) \in V \setminus U$ bo'lsa, u holda a ning ikkinchi iteratsiyasi mavjud emas. Xuddi shuningdek, $f^{-n}(V \setminus U)$ da joylashgan nuqtalar uchun $(n+1)$-chi iteratsiyani aniqlab bo'lmaydi.

Ravshanki, f^n ochiq $U_{-n} := f^{-n}(V)$ to'plamda aniqlangan. (U_{-n}) ketma-ketlik ichma-ich joylashgan va kamayuvchi bo'ladi, ya'ni

$$U_{-n-1} = f^{-1}(U_{-n}) \Subset U_{-n}.$$

Quyidagi

$$K_f := \bigcap_{n \geq 0} U_{-n}$$

to'plamga f ning *to'ldirilgan Julia to'plami* deyiladi. Bu bo'sh bo'lmagan, kompakt va to'la invariant to'plamdir, ya'ni $f^{-1}(K_f) = K_f = f(K_f)$ tenglik bajariladi. Barcha $z \in K_f$ nuqtalar uchun $z, f(z), f^2(z), \ldots$ iteratsiyalar aniqlangan, shu bilan birga $f^{-n}(z)$ to'plam sifatida barcha $z \in V$ va barcha $n \geq 0$ uchun aniqlanadi. Shunday qilib, $f|_{K_f}: K_f \to K_f$ dinamik sistema hosil qiladi.

Teorema 2.1.7 (Dinh–Sibony) *Aytaylik $f: U \to V$ topologik darajasi $d_t \geq 2$ bo'lgan ko'phadsimon akslantirish bo'lsin. U holda shunday μ ehtimollik o'lchovi va V ning shunday xos analitik qism to'plami $\mathcal{E}$ mavjud bo'lib, agar a nuqta $\mathcal{E}$ ning orbitasida bo'lmasa, u holda*

$$\lim_{n\to\infty} d_t^{-n} \left(f^n\right)^* (\delta_a) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d_t^n} \sum_{f^n(z)=a} \delta_z = \mu \qquad (2.1.1)$$

bo'ladi.

Yuqoridagi teoremada aniqlangan μ o'lchov a nuqtaning tanlanishiga bog'liq emas. Bundan tashqari, μ ning havzasi to'ldirilgan Julia to'plami K_f ning chegarasida yotadi va u to‘la invariantdir, ya’ni $d_t^{-1} f^*(\mu) = f_*(\mu) = \mu$ tenglik bajariladi.

Aytaylik $0 \le p \le k$ bo‘lsin. Quyidagi

$$d_p = d_p(f) := \lim_{n\to\infty} \sup \sup_S \| (f^n)_*(S) \|_U^{1/n}$$

qiymatga f ning $p-$ *dinamik darajasi* deyiladi, bu yerda supremum U dagi massasi 1 dan katta bo‘lmagan barcha musbat yopiq $(k-p, k-p)$-oqimlar bo‘yicha olinadi. Shuni qayd etish lozimki, har doim $d_0 = 1$ va $d_k = d_t$ tengliklar bajariladi. Bianchi–Dinh–Raximov teoremasiga ko‘ra, $\{d_p\}_{0\le p\le k}$ ketma-ketlik o‘suvchi bo‘ladi. Xususan, $\max_{0\le p\le k-1} d_p = d_{k-1}$ tengligi o‘rinli bo‘ladi.

Agar $d_{k-1} < d_t$ bo‘lsa, biz f ko‘phadsimon akslantirish *dominant topologik darajaga ega* deymiz. Shuni kuzatish mumkinki, bu holda doimo $d_t \ge 2$ bo‘ladi.

Aytaylik $f: U \to V$ topologik darajasi $d_t \ge 2$ bo‘lgan ko‘phadsimon akslantirish bo‘lsin. Dinh–Sibony natijasiga ko‘ra, shunday $0 < \gamma < 1$ mavjud bo‘lib, V da aniqlangan plurigarmonik funksiyalarning berilgan ixtiyoriy kompakt oilasi $\mathcal{F}$ dagi har bir ψ funksiyasi uchun

$$| d_t^{-n} (f^n)_* \psi - \langle \mu, \psi \rangle | \le C_{\gamma,\mathcal{F}} \gamma^n \tag{2.2.1}$$

tengsizlik bajariladi, bu yerda $C_{\gamma,\mathcal{F}}$ doimiy γ va $\mathcal{F}$ oilasiga bog‘liq lekin ψ funksiyaning o‘ziga bog‘liq bo‘lmagan doimiy.

Biz $\gamma_0 = \gamma_0(f)$ orqali (2.2.1) bajariladigan γ larning infimumini belgilaymiz. Aytaylik, endi f dominant topologik darajaga ega bo‘lsin. Quyidagi

$$\beta = \beta(f) := \max\{d_{k-1}, \gamma_0 d_t\} \tag{2.2.2}$$

qiymatni aniqlaymiz.

$\mathbb{P}^k$ ning golomorf endomorfizmlari holatida har bir plurigarmonik funksiya doimiy bo‘ladi. U holda (2.2.1) trivial bo‘lib, $\beta = d_{k-1} = d^{k-1}$ bo‘ladi, bu yerda d golomorf endomorfizmning algebraik darajasi. Bizning holimizda esa β uchun quyidagi tengsizlikni isbotlaymiz.

Lemma 2.2.1 *Aytaylik $f: U \to V$ dominant topologik darajali ko‘phadsimon akslantirish bo‘lsin. U holda $\beta(f) \le \sqrt{d_{k-1} d_t}$ bo‘ladi.*

Quyidagi natija ikkinchi bobning asosiy teoremasidir.

Teorema 2.2.2 *Aytaylik $f: U \to V$ dominant topologik darajali ko‘phadsimon akslantirish va μ uning muvozanat o‘lchovi hamda β (2.2.2) dagidek aniqlangan bo‘lsin. Aytaylik λ soni $\beta < \lambda < d_t$ shartni qaonatlantiruvchi son bo‘lsin. U holda $u_\lambda < -1$ shartni qanoatlantiruvchi plyurisubgarmonik funksiya u_λ mavjud bo‘lib, har bir $a \in U$, $\psi \in \mathcal{C}^2(U)$ va $n \in \mathbb{N}$ uchun quyidagi tengsizlik bajariladi*

$$\left| \langle d_t^{-n} (f^n)^* \delta_a - \mu, \psi \rangle \right| \le A \|\psi\|_{\mathcal{C}^2(U)} \left(\frac{\lambda}{d_t} \right)^n |u_\lambda(a)|, \tag{2.2.3}$$

bu yerda A faqatgina λ ga bog‘liq bo‘lgan, ammo a, ψ va n ga bog‘liq bo‘lmagan doimiydir.

Quyidagi natija 2.2.2-teoremasining bevosita natijasi bo‘lib, keyingi bobning asosiy teoremasini isbotlashda qo‘llaniladi.

Natija 2.2.4 *Aytaylik* $f:U\to V$ *dominant topologik darajali ko‘phadsimon akslantirish va* μ *uning muvozanat o‘lchovi hamda* β *(2.2.2) dagidek aniqlangan bo‘lsin.* $K_f\subseteq U'\subseteq U$ *shartni qanoatlantiruvchi ochiq* U' *sohani tanlaymiz va* U' *da silliq ehtimollik o‘lchovi* ω_0 *bo‘lsin. Har qanday* $\beta<\lambda<d_t$ *uchun* $u_\lambda<-1$ *shartni qanoatlantiruvchi shunday plyurisubgarmonik funksiya* u_λ *mavjud bo‘lib, har bir* $\psi\in\mathcal{C}^2(U)$ *va* $n\in\mathbb{N}$ *uchun quyidagi tengsizlik*

$$\left|\left\langle d_t^{-n}(f^n)^*\omega_0-\mu,\psi\right\rangle\right|\le A\|\psi\|_{\mathcal{C}^2(U)}\left(\frac{\lambda}{d_t}\right)^n\int_{U'}|u_\lambda|\omega_0, \qquad (2.2.8)$$

bajariladi, bu yerda A, ω_0, ψ, U' *va* n *ga bog‘liq bo‘lmagan doimiydir.*

Uchinchi bobda biz entropiyasi $\log\sqrt{d_{k-1}d_t}$ dan qat’iy katta bo‘lgan har bir ergodik o‘lchovning havzasi Julia to‘plamida, ya’ni maksimal entropiyali μ o‘lchovning havzasida joylashishini ko‘rsatamiz.

Biz ko‘phadsimon $f:U\to V$ akslantirish uchun quyidagi

$$M=M(f):=\max_{1\le l\le k}\ \max_{z\in f^{-1}(U)}\|\nabla f_l(z)\|, \qquad (3.1.1)$$

doimiyni aniqlab olamiz, bu yerda f_l lar f ning koordinatalari bo‘lib, $\nabla f_l(z)=\left(\frac{\partial f_l(z)}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial f_l(z)}{\partial z_k}\right)$ kabi aniqlanadi.

Har bir $m\in\mathbb{N}$ va $1\le i,j\le k$ uchun quyidagi

$$\alpha_{i,j}^{(m)}:=\sum_{l=1}^{k}\frac{\partial f_l^m}{\partial z_i}\frac{\partial\overline{f}_l^m}{\partial\overline{z}_j},$$

funksiyani aniqlaymiz, bu yerda f_l^m lar f^m ning koordinatalarini bildiradi. Shuni kuzatish mumkinki, $\alpha_{i,j}^{(m)}$ lar $f^{-m}(V)$ da silliq funksiyalar bo‘ladi va har bir $N\ge m$ uchun quyidagi

$$(f^m)^*\omega\big|_{f^{-N}(U)}=\sum_{1\le i,j\le k}\alpha_{i,j}^{(m)}dz_i\wedge d\overline{z}_j \qquad (3.1.2)$$

bajariladi, bu yerda $\omega=dd^c|z|^2$.

$|\alpha_{i,j}^{(m)}|_{f^{-N}(U)}$ uchun quyidagi yuqori chegarani olamiz.

Lemma 3.1.1 *Har bir* $1\le m\le N-1$ *uchun quyidagi tengsizlik o‘rinli:*

$$|\alpha_{i,j}^{(m)}|_{f^{-N}(U)}\le k^{2m-1}M^{2m}.$$

Endilikda, soddalik uchun, $m_1\le\ldots\le m_k\in\mathbb{N}$ bo‘lsa, quyidagi belgilashdan foydalanamiz:

$$\Omega_{m_1,\dots,m_k}:=(f^{m_1})^*\omega\wedge\ldots\wedge(f^{m_k})^*\omega. \qquad (3.1.4)$$

Shuni kuzatish mumkinki, $\Omega_{m_1,\dots,m_k}$ forma $f^{-m_k}(V)$ da silliq o‘lchov aniqlaydi. Shuningdek, biz $\varphi_{m_1,\dots,m_k}$ orqali $\Omega_{m_1,\dots,m_k}$ ning ω^k ga nisbatan Radon–Nikodim zichligini belgilaymiz, ya’ni

$$\Omega_{m_1,\dots,m_k}=\varphi_{m_1,\dots,m_k}\omega^k.$$

$\varphi_{m_1,\dots,m_k}$ funksiya $f^{-m_k}(V)$ da manfiy bo‘lmagan silliq funksiyadir. Quyida $\varphi_{m_1,\dots,m_k}$ uchun yuqoir chegarani bevosita 3.1.1-lemmadan foydalanib hosil qilamiz.

Natija 3.1.2 *Shunday C doimiy mavjudki, har bir $0 \le m_1 \le \dots \le m_k \le n \le N-1$ uchun $f^{-N}(U)$ da quyidagi*

$$\varphi_{m_1,\dots,m_k} \le C(kM)^{2kn}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Quyida asosiy natijani isbotlash uchun muhim rol o‘ynaydigan qator lemmalarni isbotlab o‘tamiz.

Lemma 3.1.3 *Quyidagi*

$$\limsup_{n\to\infty} \eta(n)^{1/n} = 1$$

shartni qanoatlantiruvchi shunday o‘suvchi $\eta:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ funksiya mavjud bo‘lib, har bir $1 \le m_1' \le \dots \le m_{k-1}' \le N-1$ uchun

$$\int_{f^{-N}(V)} \Omega_{0,m_1',\dots,m_{k-1}'} \le \eta(N)(d_{k-1})^N \tag{3.1.5}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Lemma 3.1.4 *Aytaylik u funksiya V da manfiy plyurisubgarmonik funksiya bo‘lsin. U holda u ga bog‘liq bo‘lgan shunday musbat doimiy A_1 mavjud bo‘lib, har bir $0 \le m_1 \le \dots \le m_k \le N \in \mathbb{N}$ uchun quyidagi*

$$\int_{f^{-N}(U)} |u|\,\Omega_{m_1,\dots,m_k} \le A_1 + m_k^2 \int_{f^{-N}(U)} \Omega_{m_1,\dots,m_k}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Quyidagi teorema ushbu bobning asosiy natijasidir.

Teorema 3.2.1 *Aytaylik $f:U\to V$ dominant topologik darajali ko‘phadsimon akslantirish va β (2.2.2) dagidek aniqlangan bo‘lsin. U holda $h_\nu(f) > \log\beta$ shartni qanoatlantiruvchi har qanday ergodik o‘lchov ν ning havzasi Julia to‘plami J_f da yotadi.*

Natija 3.2.2 *Aytaylik $f:U\to V$ dominant topologik darajali ko‘phadsimon akslantirish hamda β (2.2.2) dagidek aniqlangan bo‘lsin. Agar ν ergodik o‘lchovning entropiyasi $h_\nu(f) > \log\sqrt{d_{k-1}d_t}$ shartni qanoatlantirsa, u holda uning havzasi Julia to‘plamida yotadi.*

4-bobda 3-bobdagi asosiy natijani tadbiqlari hamda sohaga oid ayrim muhim natijalar isbotlangan. Aytaylik $f:U\to V$ dominant topologik darajali ko‘phadsimon akslantirish hamda β (2.2.2) dagidek aniqlangan va ν ergodik ehtimollik o‘lchov bo‘lsin. Oseledets teoremasiga ko‘ra, ν karralarini hisbolagan holda k ta *Lyapunov eksponentalari*ga ega. Ularni quyidagicha belgilaymiz:

$$-\infty \le L_k(\nu) \le L_{k-1}(\nu) \le \dots \le L_1(\nu)$$

Endi faraz qilaylik $h_\nu(f) > \log\beta$ bo‘lsin. U holda Bianchi–Raximov teoremasiga ko‘ra $0 < L_k(\nu)$ bo‘ladi, ya’ni barcha Lyapunov eksponentalari musbat bo‘ladi. Quyida biz, endomorfizmlar uchun Dupont tomonidan isbotlangan quyidagi natijani ko‘phadsimon akslantirish uchun isbotlaymiz.

Teorema 4.1.1 *f, ν va $1 \le j \le k$ uchun $L_j(\nu)$ lar yuqoridagi aniqlangan* *bo'lsin. U holda* ν *ga nisbatan deyarli barcha* $z \in V$ *uchun quyidagi o'rinli bo'ladi:*

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\log \nu(B(z,r))}{\log r} \geq \frac{\log d_{k-1}}{L_1(\nu)} + \frac{h_\nu(f) - \log d_{k-1}}{L_k(\nu)},$$

bu yerda $B(z,r)$ *markazi* z *da va radiusi* $r > 0$ *bo'lgan shar. Xususan,* $\nu(E) > 0$ *bo'lgan har qanday Borel* $E \subset V$ *to'plam uchun* E *ning Hausdorff o'lchami* $\dim_H E$ *uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:*

$$\dim_H E \geq \frac{\log d_{k-1}}{L_1(\nu)} + \frac{h_\nu(f) - \log d_{k-1}}{L_k(\nu)}.$$

Quyidagi teorema f ning Julia to'plami J_f uchun Hausdorff o'lchamining quyi chegarasini beradi.

Natija 4.1.2 *Entropiyasi* $h_\nu(f) > \log \beta$ *shartni qanoatlantiruvchi har bir ergodik o'lchov* ν *uchun quyidagi tengsizlik o'rinli:*

$$\dim_{\mathcal{H}} J \geq \frac{\log d_{k-1}}{L_1(\nu)} + \frac{h_\nu(f) - \log d_{k-1}}{L_k(\nu)}.$$

Keyingi natijani berishdan oldin, ko'phadsimon akslantirishlarning golomorf oilasining ta'rifini eslab o'tamiz.

Ta'rif 4.2.1 *Aytaylik* M *kompleks ko'phillik va* $\mathcal{U}$, $\mathcal{V}$ $M \times \mathbb{C}^k$ *ning bog'lamli ochiq qism to'plamlari bo'lib* $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ *bo'lsin. Faraz qilaylik* $\pi_M : M \times \mathbb{C}^k \to M$ *standart proyeksiya bo'lsin. Har bir* $\tau \in M$ *uchun* $\varnothing \neq U_\tau \Subset V_\tau \Subset \mathbb{C}^k$ *bo'lsin, bunda* U_τ *bog'lamli,* V_τ *qavariq bo'lib,* $U_\tau := \mathcal{U} \cap \pi_M^{-1}(\tau)$ *va* $V_\tau := \mathcal{V} \cap \pi_M^{-1}(\tau)$ *tarzida belgilanadi. Shuningdek,* U_τ *va* V_τ τ *ga uzluksiz bog'liq bo'lsin.* $(\tau, z) \mapsto (\tau, f_\tau(z))$ ko'rinishda berilgan $f : \mathcal{U} \to \mathcal{V}$ golomorf akslantirishga *ko'phadsimon akslantirishlarning golomorf oilasi* deb aytiladi.

Natija 4.2.3 M *bir bog'lamli kompleks ko'phillik bo'lsin hamda* $(f_\tau)_{\tau \in M}$ *dominant topologik darajaga ega bo'lgan stabil ko'phadsimon akslantirishlar oilasi bo'lsin. Fiksirlangan* $\tau_0 \in M$ *uchun* $\beta\left(f_{\tau_0}\right)$ *miqdor (2.2.2) dagidek bo'lsin. U holda shunday* $\mathcal{L}$ *dinamik laminatsiya mavjudki,* $h_\nu\left(f_{\tau_0}\right) > \log \beta\left(f_{\tau_0}\right)$ *shartni qanoatlantiruvchi har bir ergodik* f_{τ_0}*-invariant ehtimollik o'lchovi* ν *uchun*

$$\nu(\{\gamma(\tau_0) : \gamma \in \mathcal{L}\}) = 1$$

tenglik bajariladi.

Teorema 4.4.6 *Aytaylik* $K_t \subset \mathbb{C}^n, t \in M$ *regulyar polinomial-qavariq kompakt to'plam bo'lsin va uning* $V(z, K_t)$ *Grin funksiyasi* t_0 *atrofida* t *ga nisbatan uzluksiz bo'lsin. Faraz qilaylik,* t_0 *atrofida* $u(\mathrm{dist}(z, K_t)) \leq V(z, K_t)$ *va* $u(0) = 0$ *shartlar bajaruvchi* $u : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *qat'iy o'suvchi funksiya mavjud bo'lsin. U holda* K_t *kompaktlar oilasi Hausdoff ma'nosida* t_0 *da uzluksiz bo'ladi*

XULOSA.

Birinchi bobda oqimlar nazariyasi, ergodiklik nazariyasining ayrim tushunchalari, $\mathbb{C}$ dagi ko‘phadlarning dinamikasi va $\mathbb{P}^k$ dagi endomorfizmlarning dinamikasi yoritildi. Bundan tashqari, biz katta entropiyali o‘lchovlarning havzasi haqidagi de Thélin–Dinh teoremasining yangicha isbotini keltirdik.

Ikkinchi bobda biz ko‘phadsimon akslantirishlarni o‘rgandik. Xususan, bir nechta ko‘phadsimon akslantirish misollarini keltirdik va $\mathbb{P}^k$ endomorfizmlarining lifti $\mathbb{C}^{k+1}$ ning mos sohalarida ko‘phadsimon akslantirishlarni hosil qilishini ko‘rsatdik. Shuningdek, ko‘phadsimon akslantirishlar uchun Grin o‘lchovi va dinamik darajalar tushunchalarini o‘rgandik. Bundan tashqari, dominant topologik darajaga ega ko‘phadsimon akslantirishlar uchun maksimal entropiyali o‘lchovga nisbatan yaqinlashish tezligini aniqladik. Aniqroq qilib aytganda, biz endomorfizmlar uchun maksimal entropiyali o‘lchovga nisbatan yaqinlashish tezligi haqidagi Dinh–Sibony teoremasining ko‘phadsimon akslantirishlar uchun analogini isbotladik.

Shuningdek, maksimal entropiyali o‘lchovga nisbatan yaqinlashish tezligidagi asos $\sqrt{\frac{d_{k-1}}{d_t}}$ dan katta emasligini ko‘rsatdik.

Uchinchi bobda, II-bob natijalarini qo‘llagan holda, biz dominant topologik darajaga ega ko‘phadsimon akslantirishlarning har bir ergodik o‘lchovi, agar uning entropiyasi $\log\beta$ dan qat’iy katta bo‘lsa, Julia to‘plamida, ya’ni yagona maksimal entropiyali μ o‘lchovining havzasida yotishini isbotladik (bu yerda β (2.2.2) dagi kabi aniqlanadi). Xususan, entropiyasi $\log\sqrt{d_{k-1}d_t}$ dan qat’iy katta bo‘lgan har qanday ergodik o‘lchov havzasi Julia to‘plamida yotishini ko‘rsatdik. Bundan tashqari, biz ushbu natijani qo‘llab, dominant topologik darajalarga ega ko‘phadsimon akslantirishlarning Julia to‘plami uchun Hausdorff o‘lchamining quyi chegarasini oldik. Shuningdek, asosiy natijalarimiz o‘lchovlar ularning entropiyasi bo‘yicha kuchliroq chegarani qanoatlantirsa Bianchi–Raximov natijasidagi o‘lchov havzasiga qo‘yilgan shartni olib tashlash imkonini berdi.

Shuningdek, biz stabil ko‘phadsimon akslantirishlar oilasida barcha uzluksiz funksiyalar parametr bo‘yicha uzluksiz harakatlansa, Julia to‘plamlari golomorf tarzda siljishini isbotladik. Bundan tashqari, regulyar kompakt to‘plamlarning uzluksizligi bilan ularning Grin funksiyalari orasidagi bog‘liqlikni ham o‘rgandik.

НАУЧНЫЙ СОВЕТ DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 ПО ПРИСУЖДЕНИЮ УЧЕНЫХ СТЕПЕНЕЙ ПРИ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТЕ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА

НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ УЗБЕКИСТАНА ИМЕНИ МИРЗО УЛУГБЕКА

БАЗАРБАЕВ САРДОР УРИНБОЕВИЧ

МЕРЫ БОЛЬШОЙ ЭНТРОПИИ ДЛЯ ПОЛИНОМИАЛЬНО-ПОДОБНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ НЕСКОЛЬКИХ КОМПЛЕКСНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

01.01.01 — Математический анализ

АВТОРЕФЕРАТ
ДИССЕРТАЦИИ ДОКТОРА ФИЛОСОФИИ (PhD)
ПО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИМ НАУКАМ

Ташкент — 2025

Тема диссертации на соискание ученой степени доктора философии (PhD) по физико-математическим наукам зарегистрирована в Высшей аттестационной комиссии при Кабинете Министров Республики Узбекистан под номером B2025.4.PhD/FM1390.

Диссертация выполнена в Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека.

Автореферат диссертации размещен на трех языках (узбекском, русском и английском — резюме) на веб-сайте ученого совета (http://ik-fizmat.nuu.uz) и в образовательной информационной сети «ZiyoNet» (http://www.ziyonet.uz/).

Научный руководитель:	**Рахимов Карим Хошимович** Доктор физико-математических наук
Научный консультант:	**Фабрицио Бьянки** профессор Университета Пизы (Италия)
Официальные оппоненты:	**Розиков Уткир Абдуллоевич** Доктор физико-математических наук, академик
	Дук Виет Ву (Германия) профессор Кёльнского университета (Германия)
Ведущая организация:	**Ургенчский государственный университет**

Защита диссертации состоится на заседании Научного совета № DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 при Национальном университете Узбекистана имени Мирзо Улугбека 11 декабря 2025 года в 16:00 часов. (Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: +998-71-227-12-24, факс: +998-71-246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

С диссертацией можно ознакомиться в Информационно-ресурсном центре Национального университета Узбекистана имени Мирзо Улугбека (зарегистрирована под № 219). ***Адрес: 100174, г. Ташкент, Алмазарский район, ул. Университетская, 4. Тел.: +998-71-246-02-24.***

Автореферат диссертации распространён 5 декабря 2025 года.

(Протокол реестра № 2 от 5 декабря 2025 года).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI • MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

О. С. Зикиров
Председатель Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

Р. М. Жураев
Ученый секретарь Научного
совета по присуждению ученых
степеней, д.ф.ф.-м.н. (PhD)

Р. Н. Ганиходжаев
Председатель научного семинара
при Научном совете по присуждению ученых
степеней, д.ф.-м.н., профессор

ВВЕДЕНИЕ (автореферат диссертации доктора философии (PhD)

Актуальность и востребованность темы диссертации. Исследование динамических систем в нескольких комплексных переменных стало центральной темой современной математики благодаря глубоким связям с геометрией, теорией вероятностей, эргодической теорией и теоретической физикой. Ключевым понятием здесь является *энтропия*, количественно характеризующая сложность и непредсказуемость динамики. В частности, меры максимальной или большой энтропии выступают каноническими объектами, описывающими хаотические режимы в голоморфной динамике.

Классической и фундаментальной задачей комплексной динамики является изучение голоморфных эндоморфизмов комплексных проективных пространств, особенно через структуру их множеств Жюлиа и Фату. В одной комплексной переменной эта теория хорошо развита; теорема Римана об отображениях и компьютерные методы играют решающую роль. В старших размерностях теорема Римана уже неприменима, а вычислительные методы встречают серьёзные ограничения. Центральным инструментом становится плюрипотенциальная теория, задающая адекватный аналитико-геометрический каркас. Исследование динамики полиномиально-подобных отображений является более сложным по сравнению с динамикой эндоморфизмов и имеет важное значение при решении актуальных задач современной математики.

Особое внимание уделяется применению свойств мер с большой энтропией для полиномиально-подобных отображений нескольких комплексных переменных к решению актуальных проблем в динамических системах многомерного комплексного анализа.

Пусть $f:\mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ — эндоморфизм алгебраической степени $d \geq 2$. Существует канонический положительный замкнутый $(1,1)$-поток T, инвариантный относительно f^*, называемый *потоком Грина* отображения f. Он характеризуется сходимостью

$$d^{-n}(f^n)^* \omega_0 \to T,$$

для любой гладкой положительной замкнутой $(1,1)$-формы ω_0 массы 1. Поток T обладает замечательными геометрическими свойствами, в частности, существует потенциал с гёльдеровой регулярностью. Вследствие этого внешнее произведение $\mu := T^{\wedge k}$ корректно определено и задаёт единственную меру максимальной энтропии $k \ln d$ для f. Её носитель совпадает с множеством Жюлиа отображения f. Кроме того, согласно результату де Теляна и Диня носитель любой эргодической меры с энтропией, строго больше $(k-1)\ln d$ обязательно лежит на этом множестве Жюлиа.

Доказательство этого факта существенно опирается на построение потока Грина и тонкую индукцию по его последовательным самопересечениям $T^{\wedge j}$. Перенос подобных рассуждений на неалгебраические ситуации встречает серьёзные трудности, поскольку динамический поток Грина в общем случае отсутствует. В диссертации эта проблема рассматривается в рамках *полиномиально подобные отображений с доминирующей топологической степенью*. Наш подход не только решает задачу в более широком контексте, но и даёт альтернативное доказательство теоремы де Теляна и Диня без обращения к потоку Грина.

Итак, *актуальность* диссертации заключается в существенном вкладе в понимание динамических систем в нескольких комплексных переменных, а *востребованность* обусловлена нерешёнными проблемами расширения энтропийной теории за пределы алгебраической динамики и широким спектром междисциплинарных приложений, где энтропия играет ключевую роль.

В аучные исследования на уровне международных стандартов по таким приоретитным направлением, как «теория функций действительного переменного, теория функций комплексного переменного» [1] определены как основные задачи и направления деятельности математики. Исследования, выполненные в настоящей диссертационной работе, в определённой степени служат решению задач, предусмотренных Указом Президента Республики Узбекистан № ПФ-4947 от 7 февраля 2017 года «О Стратегии действий по дальнейшему развитию Республики Узбекистан», Постановлением Президента № ПҚ-2789 от 17 февраля 2017 года «О мерах по дальнейшему совершенствованию деятельности Академии наук, организации, управлению и финансированию научно-исследовательских работ» и Постановлением Президента № ПҚ-4708 от 7 мая 2020 года «О мерах по повышению качества образования и развитию научных исследований в области математики», а также другими нормативно-правовыми актами, регулирующими данную сферу деятельности.

Связь исследования с приоритетными направлениями развития науки и технологий Республики. Работа выполнена в соответствии с приоритетным направлением IV науки и технологий Республики Узбекистан: «Математика, механика и информатика».

Степень изученности проблемы. Полиномиально подобные отображения — это собственные голоморфные отображения $f:U\to V$, где $U\Subset V$ — открытые подмножества $\mathbb{C}^k$, а V выпукло. По определению каждое такое отображение задаёт разветрённое накрытие $U\to V$, и *топологическая степень* d_t корректно определена. Для каждого $0\le p\le k$ определяются *динамические степени*

$$d_p=d_p(f):=\limsup_{n\to\infty}\sup_S\|(f^n)_*(S)\|_U^{1/n},$$

где супремум берётся по всем положительным замкнутым $(k-p,k-p)$ -потокам на U массы ≤ 1. Всегда $d_0=1$ и $d_k=d_t$. По теореме Бьянки–Диня–Рахимова последовательность $\{d_p\}_{0\le p\le k}$ возрастающая по p (монотонна неубывающе). Следовательно, в частности, $\max_{0\le p\le k-1}d_p=d_{k-1}$. Говорят, что f

---

[1] Постановление Кабинета Министров Республики Узбекистан №292 от 18 мая 2017 года «Об организации вновь созданных научно-исследовательских институтов Академии наук Республики Узбекистан».

имеет *доминирующую топологическую степень*, если $d_{k-1} < d_t$. В этом случае всегда $d_t \geq 2$.

Отображения, полиномиально подобные, с доминирующей топологической степенью обладают многими динамическими свойствами эндоморфизмов (однако их изучение технически сложнее из-за отсутствия естественно определённой функции Грина). В частности, для каждого такого f существует единственная мера μ максимальной энтропии $\log d_t$ и непустое собственное аналитическое подмножество $\mathcal{E} \subset V$ такое, что

$$d_t^{-n}(f^n)^* \delta_a \to \mu \quad \text{для всех} \quad a \in V \setminus \bigcup_{j=0}^{\infty} f^j(\mathcal{E}). \qquad (*)$$

Заметим, что в отличие от случая эндоморфизмов $\mathbb{P}^k$ здесь множество $\mathcal{E}$ может не быть f-инвариантным, и потому объединение $\cup_{j=0}^{\infty} f^j(\mathcal{E})$ не обязано быть аналитическим. Носитель μ мы называем множеством Жюлиа J_f отображения f. Одной из основных целей работы является исследование скорости сходимости в (*).

По результату Диня–Сибони существует константа $0 < \gamma < 1$, такая что

$$| d_t^{-n}(f^n)_* \psi - \langle \mu, \psi \rangle | \leq C_{\gamma,\mathcal{F}} \gamma^n \qquad (**)$$

для каждой функции ψ из заданного компактного семейства $\mathcal{F}$ плюригармонических функций на V, где константа $C_{\gamma,\mathcal{F}}$ зависит от γ и семейства $\mathcal{F}$, но не от конкретной функции $\psi \in \mathcal{F}$. Обозначим через $\gamma_0 = \gamma_0(f)$ инфимум тех γ, для которых (**) верно (с подходящей константой). В диссертации получена верхняя оценка для γ_0.

Как отмечалось, носитель меры максимальной энтропии μ — это множество Жюлиа отображения f. Одна из главных задач — изучить носители мер большой энтропии, т.е. мер с $h_\nu(f) > \log \max\{d_{k-1}, \gamma_0 d_t\}$.

Связь темы диссертации с научно-исследовательскими работами вуза, где выполняется диссертация. Исследования проводились по плановой теме научно-исследовательского гранта № IL-5421101746 Министерства высшего образования, науки и инноваций Республики Узбекистан в Мирзо Улугбекском Национальном университете Узбекистана.

Цель исследования — изучение мер большой энтропии для полиномиально подобные отображений и анализ скорости эквидистрибуционной сходимости к мере максимальной энтропии.

Задачи исследования:

— доказать скорость эквидистрибуционной сходимости к мере максимальной энтропии для полиномиально подобные отображений;

— найти верхнюю оценку для основания в скорости эквидистрибуционной сходимости к мере максимальной энтропии;

— изучить носитель мер большой энтропии для полиномиально подобные отображений и доказать, что он лежит в множестве Жюлиа;

— найти нижнюю оценку хаусдорфовой размерности множества Жюлиа полиномиально подобные отображений.

Объект исследования. Полиномиально подобные отображения с доминирующими топологическими степенями; меры большой энтропии для таких отображений; устойчивая семья подобных отображений; множества Жюлиа для подобных отображений.

Предмет исследования. Комплексный анализ, плюрипотенциальная теория, эргодическая теория, динамические системы в комплексной среде, теория меры.

Методы исследования. Используются методы современного комплексного анализа, эргодической теории, теории динамических систем, классической потенциальной теории и плюрипотенциальной теории.

Научная новизна состоит в следующем:

— доказано, что носитель мер большой энтропии для полиномиально подобные отображений содержится в множестве Жюлиа;

— установлена скорость эквидистрибуционной сходимости к мере максимальной энтропии для подобных отображений;

— доказано, что основание в скорости эквидистрибуционной сходимости к мере максимальной энтропии не превосходит $\sqrt{\frac{d_{k-1}}{d_t}}$;

— получена нижняя оценка хаусдорфовой размерности множества Жюлиа для подобных отображений.

Практические результаты. Полученные результаты и методики могут быть включены в курсы магистратуры и аспирантуры в учреждениях высшего образования.

Достоверность результатов. Результаты получены методами современного комплексного анализа, эргодической теории, теории динамических систем и плюрипотенциальной теории. Все результаты математически корректны.

Научная и практическая значимость. Научная значимость состоит в доказательстве того, что носитель мер большой энтропии для полиномиально подобные отображений лежит в множестве Жюлиа, и в установлении скорости эквидистрибуционной сходимости к мере максимальной энтропии. Эти результаты углубляют понимание структуры и динамики подобных отображений и могут быть полезны в смежных областях, например, при математическом моделировании технических, физических и биологических процессов.

Внедрение результатов. Научные результаты, полученные в диссертации, внедрены в следующих проектах: — скорость сходимости к мере максимальной энтропии использована в фундаментальном проекте FA-F-4-002 «Субгармонические функции и их приложения к калиброванной геометрии» по минимальным поверхностям в калиброванной геометрии (Справка Академии наук Республики Узбекистан № 2/1255-2687 от 30.09.2021). Применение результата позволило ввести субгармоникоподобные функции и построить потенциалъную теорию в калиброванной геометрии; — результаты о функциях Грина и их регулярности использованы в фундаментальном проекте UT-OT-2020-1 «Уравнение Монжа–Ампера и экстремальные плюрисубгармонические функции» по определению субгармонических функций на сингулярных множествах (Справка МУУ им. Мирзо Улугбека № 04/11-6015 от 04.10.2021). Применение результата позволило определить полярные оболочки компактных множеств и проверять субгармоничность функций на сингулярных множествах.

Апробация результатов. Основные результаты обсуждены на 5 международных и 3 национальных научных конференциях.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 11 научных работ в журналах, из них 6 включены в перечень ВАК Республики Узбекистан для защиты диссертаций PhD; 2 работы опубликованы в международных и 4 — в национальных математических журналах. Одна работа индексируется в базе SCOPUS, также опубликовано 5 тезисов.

Структура и объём диссертации. Диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения и библиографии. Общий объём — 73 страниц.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении обосновываются и анализируются актуальность и необходимость темы; демонстрируется соответствие исследования приоритетам развития науки и технологий в республике; представляется степень изученности проблемы; формулируются цели, задачи, объект и предмет исследования; описываются научная новизна и практическая значимость полученных результатов, их теоретическая и практическая ценность; приводятся сведения о внедрении, публикациях и структуре работы.

Первая глава представляет в основном обзор базовых понятий, используемых далее: положительные замкнутые потоки, когомологии, топологическая и метрическая энтропии, динамика эндоморфизмов комплексных проективных пространств. Также приводятся основные ранее доказанные теоремы по теме диссертации. Кроме того, в конце главы дано новое доказательство результата де Теляна и Диня о носителе мер большой энтропии для эндоморфизмов.

Мы обозначаем через $\mathbb{P}^k$ комплексное проективное пространство размерности k.

Определение 1.3.4 *Эндоморфизмом* $\mathbb{P}^k$ *называется морфизм* $f:\mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$, *заданный однородными многочленами одной и той же степени* $d \geq 1$*:* $f_0,\ldots,f_k$, *так что*

$$f[z_0:\ldots:z_k] = [f_0(z_0,\ldots,z_k):\ldots:f_k(z_0,\ldots,z_k)].$$

Многочлены f_i *не должны одновременно обращаться в нуль ни в одной точке* $\mathbb{P}^k$. *Число* d *называется алгебраической степенью* f.

Фиксируем эндоморфизм $f:\mathbb{P}^k \to \mathbb{P}^k$ алгебраической степени $d \geq 2$.

Теорема 1.3.8 (Динх–Сибони) *Пусть* S — *положительный замкнутый* $(1,1)$ *-поток массы* 1 *на* $\mathbb{P}^k$. *Предположим, что у* S *ограниченные локальные потенциалы. Тогда* $d^{-n}\left(f^n\right)^*(S)$ *слабо сходится к* *положительному замкнутому* $(1,1)$*-потоку* T_f *массы* 1*, причём*

1. T_f *имеет локальные потенциалы гёльдеровой регулярности и не зависит от выбора* S*, то есть существует гёльдерова функция* $g:\mathbb{P}^k \to \mathbb{R}$ *такая, что*

$$T_f = \omega_{FS} + dd^c g;$$

2. T_f *полностью инвариантен:* $f^*(T_f) = dT_f$ *и* $f_*(T_f) = d^{k-1}T_f$.

Так как T_f имеет локальные потенциалы класса Гёльдера, то для каждого $1 \le p \le k$ поток $T_f^p = T_f \wedge \cdots \wedge T_f$ (p раз) корректно определён. В частности, $\mu := T_f^k$ задаёт вероятностную меру на $\mathbb{P}^k$. Носитель T_f^p обозначим J_p и назовём *множеством Жюлиа порядка* p:

$$J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_k.$$

Наименьшее из них J_k называется *множеством Жюлиа* отображения f и обозначается J_f.

Теорема 1.3.9 (Динх–Сибони) *Пусть* f *— эндоморфизм* $\mathbb{P}^k$ *степени* $d \ge 2$*. Тогда:*

1. *топологическая энтропия* f *равна* $k \log d$*, то есть* $h_t(f, \mathbb{P}^k) = k \log d$*;*

2. $\mu = T_f^k$ *— эргодическая* f*-инвариантная вероятностная мера на* $\mathbb{P}^k$*; в частности, это единственная мера максимальной энтропии* $k \log d$*;*

3. μ *обладает свойством перемешивания.*

Меру μ будем называть *мерой Грина* или *равновесной мерой* отображения f.

В конце первой главы приводится новое доказательство следующей теоремы, изначально установленной де Теляна и Диня.

Теорема 1.3.11 *Пусть* f *— голоморфный эндоморфизм* $\mathbb{P}^k$ *алгебраической степени* $d \ge 2$*. Если* ν *—* f*-инвариантная мера и* $h_\nu(f) > (k-1)\log d$*, то носитель* ν *содержится в множестве Жюлиа* J.

Во второй главе Во второй главе доказана скорость сходимости относительно равномерно распределённой меры для динамики многочленоподобных отображений в пространстве $\mathbb{C}^k$.

Пусть V — выпуклое открытое подмножество $\mathbb{C}^k$, а $U \Subset V$ — открытое множество, относительно компактное в V.

Определение 2.1.1 *Пусть* $f: U \to V$ *— голоморфное отображение. Если* f *— собственное, то мы называем его полиномиально подобные.*

По определению полиномиально подобное отображение $f: U \to V$ индуцирует разветрённое накрытие множества V. Его степень d_t, называемая *топологической степенью*, равна числу точек в $f^{-1}(a)$ для $a \in V \setminus f(C_f)$, где C_f — критическое множество f.

Зафиксируем полиномиально подобное отображение $f: U \to V$

топологической степени $d_t \geq 2$. Обозначим $f^n := f \circ \cdots \circ f$ (n раз) — n-ю итерацию f. В общем случае динамика f определена не во всякой точке U: например, для $a \in U$ с $f(a) \in V \setminus U$ вторая итерация не существует; аналогично, для точек из $f^{-n}(V \setminus U)$ нельзя определить $(n+1)$-ю итерацию.

Легко видеть, что f^n определено на открытом множестве $U_{-n} := f^{-n}(V)$, причём

$$U_{-n-1} = f^{-1}(U_{-n}) \Subset U_{-n}.$$

Заполненное множество Жюлиа f определим как

$$K_f := \bigcap_{n \geq 0} U_{-n}.$$

Это непустое, компактное и полностью инвариантное множество: $f^{-1}(K_f) = K_f$, следовательно, $f(K_f) = K_f$. Бесконечная прямая орбита $z, f(z), f^2(z), \ldots$ определена для всех $z \in K_f$, тогда как прообразы $f^{-n}(z)$ определены для любого $z \in V$ и любого $n \geq 0$. Следовательно, $f|_{K_f} : K_f \to K_f$ —динамическая система.

Теорема 2.1.7 (Динх–Сибони) *Пусть* $f: U \to V$ *— полиномиально подобное отображение, как выше. Тогда существует вероятностная мера* μ *и собственное аналитическое подмножество* $\mathcal{E} \subset V$ *такое, что если а не принадлежит орбите* $\mathcal{E}$*, то*

$$\lim_{n\to\infty} d_t^{-n} \left(f^n\right)^* (\delta_a) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{d_t^n} \sum_{f^n(z)=a} \delta_z = \mu. \tag{2.1.1}$$

Мера μ *не зависит от выбора* a*. Кроме того, её носитель лежит на границе* K_f*, и она полностью инвариантна:* $d_t^{-1} f^*(\mu) = f_*(\mu) = \mu$.

Для каждого $0 \leq p \leq k$ определяются *динамические степени*

$$d_p = d_p(f) := \limsup_{n\to\infty} \sup_S \| (f^n)_*(S) \|_U^{1/n},$$

где супремум — по положительным замкнутым $(k-p, k-p)$-потокам массы ≤ 1 на U. Отметим, что $d_0 = 1$, $d_k = d_t$. По теореме Бьянки–Диня–Рахимова последовательность $\{d_p\}$ неубывающая; следовательно, $\max_{0 \leq p \leq k-1} d_p = d_{k-1}$. Если $d_{k-1} < d_t$, то говорят, что f имеет *доминирующую топологическую степень* ($d_t \geq 2$).

Зафиксируем полиномиально подобное отображение $f: U \to V$ с $d_t \geq 2$. По Диню–Сибони существует константа $0 < \gamma < 1$, такая что

$$| d_t^{-n} (f^n)_* \psi - \langle \mu, \psi \rangle | \leq C_{\gamma,\mathcal{F}} \gamma^n \tag{2.2.1}$$

для любой ψ из заданного компактного семейства $\mathcal{F}$ плюригармонических функций на V, где $C_{\gamma,\mathcal{F}}$ зависит от γ и $\mathcal{F}$, но не от ψ. Обозначим через $\gamma_0 = \gamma_0(f)$ инфимум таких γ, для которых (2.2.1) выполняется (с подходящей константой). Если f имеет доминирующую топологическую степень, положим

$$\beta = \beta(f) := \max\{d_{k-1}, \gamma_0 d_t\}. \tag{2.2.2}$$

В случае эндоморфизмов $\mathbb{P}^k$ всякая плюригармоническая функция постоянна; потому (2.2.1) тривиальна и можно взять $\beta = d_{k-1} = d^{k-1}$, где d — алгебраическая степень эндоморфизма. Более общо, в компактной ситуации можно брать $\beta = d_{k-1}$. В нашем случае имеем более слабую оценку.

Лемма 2.2.1 *Пусть $f: U \to V$ — подобное отображение с доминирующей топологической степенью d_t. Тогда $\beta(f) \le \sqrt{d_{k-1} d_t}$.*

Основной результат второй главы:

Теорема 2.2.2 *Пусть $f: U \to V$ — полиномиально подобное отображение с доминирующей топологической степенью d_t, а μ — его равновесная мера. Пусть β определено как в (2.2.2) и выбрано λ так, что $\beta < \lambda < d_t$. Тогда существует плюрисубгармоническая функция u_λ с $u_\lambda < -1$, такая что для любых $a \in U$, $\psi \in \mathcal{C}^2(U)$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнено*

$$|\langle d_t^{-n} (f^n)^* \delta_a - \mu, \psi \rangle| \le A \| \psi \|_{\mathcal{C}^2(U)} \left(\frac{\lambda}{d_t} \right)^n |u_\lambda(a)|, \tag{2.2.3}$$

где A — константа, зависящая лишь от λ и не зависящая от a, ψ и n.

Перед выводом следствия нам понадобится следующая лемма.

Лемма 2.2.3 *Пусть X — метрическое пространство, ν — вероятностная мера с компактным носителем в X. Пусть $X_j := \{x_1^j, x_2^j, \ldots, x_{l(j)}^j\}$ — последовательность конечных множеств, таких что*

1. *мощности $l(j)$ удовлетворяют $l(j+1) \ge l(j)$;*
2. *$L := \overline{\cup_j X_j}$ — компакт в X и $\mathrm{Supp}\nu \subseteq L$;*
3. *для любой подпоследовательности $\{X_{j_n}\}$ выполнено $\overline{\cup_n X_{j_n}} = L$.*

Тогда существуют наборы неотрицательных чисел $A_j := \{a_1^j, a_2^j, \ldots, a_{l(j)}^j\}$ со свойством $\sum_{m=1}^{l(j)} a_m^j = 1$, такие что

$$\nu_j := \sum_{m=1}^{l(j)} a_m^j \delta_{x_m^j} \to \nu, \tag{2.2.6}$$

где δ_x — мера Дирака в точке $x \in X$.

Следующее следствие теоремы 2.2.2 будет использовано при доказательстве основной теоремы следующей главы.

Следствие 2.2.4 *Пусть $f: U \to V$ — полиномиально подобное отображение с доминирующей топологической степенью d_t, а μ — его равновесная мера. Пусть β определено как в (2.2.2). Зафиксируем открытое U' с $K_f \subseteq U' \subseteq U$ и пусть ω_0 — гладкая вероятностная мера на U'. Для любого λ с $\beta < \lambda < d_t$ существует плюрисубгармоническая функция u_λ (с $u_\lambda < -1$), такая что для любых $\psi \in \mathcal{C}^2(U)$ и $n \in \mathbb{N}$ выполнено*

$$|\langle d_t^{-n} (f^n)^* \omega_0 - \mu, \psi \rangle| \le A \| \psi \|_{\mathcal{C}^2(U)} \left(\frac{\lambda}{d_t} \right)^n \int_{U'} |u_\lambda| \omega_0, \tag{2.2.8}$$

где A — константа, не зависящая от ω_0, ψ, U' и n.

В третьей главе показывается, что носитель любой эргодической меры, чья метрическая энтропия строго больше $\log\sqrt{d_{k-1}d_t}$, содержится в множестве Жюлиа; то есть в носителе единственной меры максимальной энтропии μ.

Фиксируем полиномиально подобное отображение $f:U\to V$ и константу

$$M = M(f) := \max_{1\le l\le k} \max_{z\in f^{-1}(U)} \|\nabla f_l(z)\|, \tag{3.1.1}$$

где f_l — компоненты f, а $\nabla f_l(z) = \left(\frac{\partial f_l}{\partial z_1},\dots,\frac{\partial f_l}{\partial z_k}\right)$. Напомним, что ω — стандартная форма Кёлера на $\mathbb{C}^k$. Для каждого $m\in\mathbb{N}$ и $1\le i,j\le k$ положим

$$\alpha_{i,j}^{(m)} := \sum_{l=1}^{k} \frac{\partial f_l^m}{\partial z_i}\frac{\partial \overline{f}_l^m}{\partial \overline{z}_j},$$

где f_l^m — компоненты f^m. Заметим, что $\alpha_{i,j}^{(m)}$ — гладкие функции на $f^{-m}(V)$ и для каждого $N\ge m$

$$(f^m)^*\omega\big|_{f^{-N}(U)} = \sum_{1\le i,j\le k} \alpha_{i,j}^{(m)} dz_i\wedge d\overline{z}_j. \tag{3.1.2}$$

Получаем следующую верхнюю оценку для $|\alpha_{i,j}^{(m)}|_{f^{-N}(U)}$.

Лемма 3.1.1 *Для каждого* $1\le m\le N-1$ *выполнено*

$$|\alpha_{i,j}^{(m)}|_{f^{-N}(U)} \le k^{2m-1}M^{2m}.$$

Далее, для простоты, при $m_1\le\ldots\le m_k\in\mathbb{N}$ введём обозначение

$$\Omega_{m_1,\ldots,m_k} := (f^{m_1})^*\omega\wedge\ldots\wedge(f^{m_k})^*\omega. \tag{3.1.4}$$

Заметим, что $\Omega_{m_1,\ldots,m_k}$ — гладкая мера на $f^{-m_k}(V)$. Радон–Никодимову плотность $\Omega_{m_1,\ldots,m_k}$ относительно ω^k обозначим через $\varphi_{m_1,\ldots,m_k}$, то есть

$$\Omega_{m_1,\ldots,m_k} = \varphi_{m_1,\ldots,m_k}\,\omega^k.$$

Функция $\varphi_{m_1,\ldots,m_k}$ — неотрицательная гладкая функция на $f^{-m_k}(V)$. Следующая оценка для $\varphi_{m_1,\ldots,m_k}$ непосредственно вытекает из леммы 3.1.1.

Следствие 3.1.2 *Существует константа* C *такая, что для любых* $0\le m_1\le\cdots\le m_k\le n\le N-1$ *верно*

$$\varphi_{m_1,\ldots,m_k} \le C(kM)^{2kn} \quad \text{на} \quad f^{-N}(U).$$

Лемма 3.1.3 *Существует неубывающая функция* $\eta:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ *такая, что* $\limsup_{n\to\infty}\eta(n)^{1/n}=1$, *и*

$$\int_{f^{-N}(V)} \Omega_{0,m_1',\ldots,m_{k-1}'} \le \eta(N)(d_{k-1})^N \tag{3.1.5}$$

для каждого $1\le m_1'\le\cdots\le m_{k-1}'\le N-1$.

Лемма 3.1.4 *Пусть* u *— отрицательная плюрисубгармоническая функция на* V. *Тогда существует положительная константа* A_1, *зависящая от* u, *такая что для любых* $0\le m_1\le\cdots\le m_k\le N\in\mathbb{N}$ *выполнено*

$$\int_{f^{-N}(U)} |u|\Omega_{m_1,\ldots,m_k} \le A_1 + m_k^2\int_{f^{-N}(U)} \Omega_{m_1,\ldots,m_k}.$$

Основной результат главы:

Теорема 3.2.1 *Пусть* $f: U \to V$ — *полиномиально подобное отображение с доминирующей топологической степенью, а* β *определено в (2.2.2). Тогда носитель всякая эргодическая мера* ν *с* $h_\nu(f) > \log\beta$ *лежит на множестве Жюлиа* J_f.

Следствие 3.2.2 *Пусть* $f: U \to V$ — *полиномиально подобное отображение с доминирующей топологической степенью. Тогда носитель всякая эргодическая мера* ν *с метрической энтропией* $h_\nu(f) > \log\sqrt{d_{k-1}d_t}$ *лежит на множестве Жюлиа* J_f.

В четвёртой главе приведены приложения основного результата третьей главы, а также доказаны некоторые важные результаты, относящиеся к данной области. Пусть $f: U \to V$ полиномиально подобное отображение с доминирующей топологической степенью. Пусть ν — эргодическая вероятностная мера. По теореме Оселедца у ν существуют k *экспонент Ляпунова* (с учётом кратностей и допускающих значение $-\infty$). Обозначим их

$$-\infty \le L_k(\nu) \le L_{k-1}(\nu) \le \ldots \le L_1(\nu).$$

Предположим теперь $h_\nu(f) > \log\beta$. Тогда по теореме Бьянки–Рахимова имеем $0 < L_k(\nu)$. Справедливо также следующее свойство, изначально доказанное Дюпоном для эндоморфизмов.

Теорема 4.1.2 *Пусть* f, ν *и* L_j *(*$1 \le j \le k$*) как выше. Тогда для* ν*-почти всех* $z \in V$ *верно*

$$\liminf_{r\to 0} \frac{\log\nu(B(z,r))}{\log r} \ge \frac{\log d_{k-1}}{L_1(\nu)} + \frac{h_\nu(f) - \log d_{k-1}}{L_k(\nu)},$$

где $B(z,r)$ — *шар радиуса* $r > 0$ *с центром в* z. *В частности, для любого борелевского множества* $E \subset V$ *с* $\nu(E) > 0$ *хаусдорфова размерность* $\dim_H E$ *удовлетворяет*

$$\dim_H E \ge \frac{\log d_{k-1}}{L_1(\nu)} + \frac{h_\nu(f) - \log d_{k-1}}{L_k(\nu)}.$$

Следствие теоремы 4.1.1 даёт нижнюю оценку хаусдорфовой размерности множества Жюлиа J отображения f.

Следствие 4.1.2 *Пусть* f *как выше, а* β *как в (2.2.2). Тогда для любой эргодической меры* ν *с* $h_\nu(f) > \log\beta$ *имеем*

$$\dim_{\mathcal{H}} J \ge \frac{\log d_{k-1}}{L_1(\nu)} + \frac{h_\nu(f) - \log d_{k-1}}{L_k(\nu)}.$$

Вспомним определение голоморфной семьи полиномиально подобные отображений.

Определение 4.2.1 *Пусть* M — *комплексное многообразие, а* $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ — *связные открытые подмножества* $M \times \mathbb{C}^k$ *такие, что* $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$. *Пусть* $\pi_M : M \times \mathbb{C}^k \to M$ — *стандартная проекция. Предположим, что для каждого* $\tau \in M$ *имеются непустые* $U_\tau \Subset V_\tau \Subset \mathbb{C}^k$ *(* U_τ *связно,* V_τ *выпукло), где* $U_\tau := \mathcal{U} \cap \pi_M^{-1}(\tau)$ *и* $V_\tau := \mathcal{V} \cap \pi_M^{-1}(\tau)$. *Предположим также, что* U_τ *и* V_τ

непрерывно зависят от τ. *Голоморфной семьёй полиномиально подобные отображений называется правильное голоморфное отображение* $f:\mathcal{U}\to\mathcal{V}$ *вида* $(\tau,z)\mapsto(\tau, f_\tau(z))$.

Следствие 4.2.3 *Пусть* M *— связное и односвязное комплексное многообразие, а* $(f_\tau)_{\tau\in M}$ *— устойчивая семья полиномиально подобные отображений с доминирующей топологической степенью. Зафиксируем* $\tau_0\in M$ *и пусть* $\beta(f_{\tau_0})$ *как в (2.2.2). Тогда существует динамическая ломинация* $\mathcal{L}$ *такая, что* $\nu(\{\gamma(\tau_0):\gamma\in\mathcal{L}\})=1$ *для каждой эргодической* f_{τ_0}*-инвариантной вероятностной меры* ν *с* $h_\nu(f_{\tau_0})>\log\beta(f_{\tau_0})$.

Теорема 4.4.6 *Пусть* $K_t\subset\mathbb{C}^n, t\in M$ *— регулярные полиномиально-выпуклые компакты и их функция Грина* $V(z,K_t)$ *непрерывна по* t *в окрестности* t_0. *Предположим, что существует строго возрастающая функция* $u:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ *такая, что* $u(\mathrm{dist}(z,K_t))\le V(z,K_t)$ *и* $u(0)=0$ *в окрестности* t_0. *Тогда* K_t *непрерывен в точке* t_0.

Заключение

В первой главе изложены теория потоков, некоторые понятия эргодической теории, динамика полиномиальных отображений на $\mathbb{C}$ и динамика эндоморфизмов на $\mathbb{P}^k$. Также дано новое доказательство теоремы де Тленена–Диня о носителе мер большой энтропии.

Во второй главе изучены полиномиально подобные отображения. В частности, приведены примеры таких отображений и показано, что подъёмы эндоморфизмов $\mathbb{P}^k$ порождают подобные отображения на подходящих подмножествах $\mathbb{C}^{k+1}$. Исследованы равновесная мера Грина и динамические степени для подобных отображений. Кроме того, установлена скорость эквидистрибуционной сходимости к мере максимальной энтропии для подобных отображений с доминирующей топологической степенью. Точнее, доказан аналог теоремы Диня–Сибони о скорости эквидистрибуционной сходимости к мере максимальной энтропии для эндоморфизмов в контексте подобных отображений.

Кроме того, показано, что основание скорости эквидистрибуционной сходимости к мере максимальной энтропии не превосходит $\sqrt{\dfrac{d_{k-1}}{d_t}}$.

В третьей главе, применяя результаты второй главы, доказано, что носитель всякой эргодической меры для полиномиально подобных отображений с доминирующей топологической степенью и метрической энтропией $>\log\beta$ содержится в множестве Жюлиа, то есть в носителе единственной меры максимальной энтропии μ, где β определено в (2.2.2). В частности, отсюда следует, что всякая эргодическая мера с $h_\nu(f)>\log\sqrt{d_{k-1}d_t}$ содержится в множестве Жюлиа.

В четвёртой главе, применяя результаты третьей главе получена нижняя оценка хаусдорфовой размерности множества Жюлиа для подобных отображений с доминирующими топологическими степенями. Также выведено ещё одно следствие основных результатов, позволяющее снять гипотезу о носителе меры в результате Бьянки–Рахимова при выполнении более сильной энтропийной оценки, как в теореме 3.2.1. Также показано, что в устойчивой семье подобных отображений, если все непрерывные функции зависят от параметра непрерывно, то множества Жюлиа движутся голоморфно. Изучена связь между непрерывностью регулярных компактных множеств и их функциями Грина.

SCIENTIFIC COUNCIL AWARDING SCIENTIFIC DEGREES
DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN

NATIONAL UNIVERSITY OF UZBEKISTAN NAMED AFTER
MIRZO ULUGBEK

BAZARBAEV SARDOR URINBAEVICH

MEASURES OF LARGE ENTROPY FOR POLYNOMIAL-LIKE MAPS IN SEVERAL COMPLEX VARIABLES

01.01.01 — MATHEMATICAL ANALYSIS

ABSTRACT OF DISSERTATION OF THE DOCTOR OF PHILOSOPHY (PhD) ON PHYSICAL AND MATHEMATICAL SCIENCES

Tashkent — 2025

The topic of the dissertation for the degree of Doctor of Philosophy (PhD) in Physical and Mathematical Sciences has been registered with the Higher Attestation Commission under the Cabinet of Ministers of the Republic of Uzbekistan under the number И2025.4.PhD/FM1390.

The dissertation has been carried out at the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek.

The abstract of the dissertation, prepared in three languages (Uzbek, Russian, and English – summary), has been posted on the official webpage of the Scientific Council (http://ik-fizmat.nuu.uz) and on the "ZiyoNet" educational information network (http://www.ziyonet.uz/).

Scientific supervisor:	**DSc Karim Rakhimov Khoshimovich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
Scientific consultant:	**Fabrizio Bianchi** Professor, University of Pisa, Italy
Official opponents:	**DSc Rozikov Utkir Abdulloevich** Doctor of Physical and Mathematical Sciences
	DSc Duc Viet Vu Professor at the University of Cologne, Germany
Leading organization:	**Urgench state University**

The defense will take place on December 11, 2025, at 16:00 at the meeting of Scientific Council No. DSc.03/30.12.2019.FM.01.01 under the National University of Uzbekistan. (Address: 100174, Tashkent, Almazar district, University Street 4. Tel.: +998-71-227-12-24, fax: +998-71-246-53-21, e-mail: nauka@nuu.uz).

The dissertation is available for review at the Information-Resource Center of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek (registered under №219). *Address: 100174, Tashkent, Almazar district, University Street 4. Tel.: +998-71-246-02-24.*

The abstract of the dissertation was distributed on December 5, 2025.
(Register Protocol No. 2 dated December 5, 2025).

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI * MIRZO ULUG'BEK NOMIDAGI O'ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI *

O.S. Zikirov
Chairman of the Scientific Council
on award of scientific degrees,
D.P-M.S., Professor

R. M. Juraev
Scientific secretary of the Scientific Council
on award of scientific degrees,
PhD in Math. And Physics

R. N. Ganikhodjaev
Chairman of the scientific seminar under
Scientific Council on award of scientific degrees,
D.P-M.S., Professor

INTRODUCTION (Abstract of PhD thesis)

The aim of research work is to study large entropy measures for polynomial-like maps and to examine the equidistribution speed of convergence towards the measure of maximal entropy.

The research object. Polynomial-like maps with dominant topological degrees, Measures of large entropy for polynomial-like maps, stable family of polynomial-like maps, Julia sets of polynomial-like maps.

Scientific novelty of the research work consists of the following:

it is proved that the support of the measures of large entropy for polynomial-like maps lies in the Julia set.

the equidistribution speed of convergence towards the measure of maximal entropy for polynomial-like maps is established.

it is proved that the base in the equidistribution speed of convergence towards the measure of maximal entropy is less than or equal to $\sqrt{\frac{d_{k-1}}{d_t}}$;

we have found a lower bound for the Hausdorff dimension of the Julia set of polynomial-like maps.

Implementation of the research results. The scientific results obtained during the research of the dissertation are implemented in the following research projects

the speed of convergence towards the measure of maximal entropy was used in the fundamental scientific project FA-F-4-002 "subharmonic functions and their applications to calibrated geometry" on minimum surfaces in calibrated geometry (Reference No. 2/1255-2687 of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan dated September 30, 2021). The application of the scientific result allowed us to define subharmonic functions like subharmonic functions and to build the potential theory in calibrated geometry; the obtained results on Green functions and their regularity were used in the fundamental scientific project UT-OT-2020-1 "Monge-Ampere equation and extremal plurisubharmonic functions" on defining subharmonic functions in singular sets (Reference No. 04/11-6015 of the National University of Uzbekistan named after Mirzo Ulugbek dated October 4, 2021). The application of the scientific result allowed determine the polar shells of compact sets and to check the functions for subharmonicity in singular sets.

The structure and volume of the dissertation. The dissertation consists of an introduction, three chapters, conclusions, and bibliography. The total volume of the dissertation is 73 pages.

E’LON QILINGAN ISHLAR RO‘YXATI
СПИСОК ОПУБЛИКОВАННЫХ РАБОТ
LIST OF PUBLISHED WORKS

I bo‘lim (1 часть; part 1)

1. **Sardor Bazarbaev**, Fabrizio Bianchi, Karim Rakhimov, “*On the support of measures of large entropy for polynomial-like maps.*” // Analysis and Mathematical Physics, **15**, 69 (2025). https://doi.org/10.1007/s13324-025-01071-9
2. **Sardor Bazarbaev**, *“On the support of measures with large entropy for endomorphisms.”* // Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, 2024, V5, 15-19 p.
3. **Sardor Bazarbaev**, Sobir Boymurodov. “*Holomorphic motion of Julia sets of polynomial-like maps, and continuity of compact sets and their Green functions.”* // Bulletin of National University of Uzbekistan: 2023. V6, I4, 194-201 p.
4. **Sardor Bazarbaev**, Shokhrukh Ibragimov. “*Hölder regularity of supper-attracting Fatou components for polynomial mappings of one complex variable.”* // Reports of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan. 2020, V6, 13-15 p.
5. **Sardor Bazarbaev**, Sobir Boymurodov. “*Contiunity of Green function by parameter”* // ACTA NUUz - 2023, V1, 125-129 p.
6. **Sardor Bazarbaev**, “*Large entropy measures and their supports”* // ACTA NUUz - 2025, V3, 125-129 p.

II bo‘lim (2 часть; part 2)

1. **Bazarbaev S.U.**, *On the support of measures of large for polynomial-like maps.* // Abstracts APAMIT-2024 - 22-23 October, 2024, Tashkent, Uzbekistan. 227-228 pages.
2. **Bazarbaev S.U**, Rakhimov K. Kh. *Equidistribution speed for polinomial-like maps.* // Abstracts of the International Scientific Conference "Current issues in modern geometry and topology" - 27-29 October, 2024, Tashkent, Uzbekistan. 30-31 pages.
3. **Bazarbaev S.U**., Boymurodov S.I. *Large entropy measures of Henon-like maps*. // Abstracts of the IX International Scientific Conference "Actual problems of Applied Mathematics and Information Technologies Al-Khwarizmi 2024" - 22-23 October, 2024, Tashkent, Uzbekistan. 226-227 pages.
4. **Bazarbaev S.U.**, Boymurodov S.I. *Large entropy measures of horizontal-like maps.* // Abstracts of the International Scientific Conference "Current issues in modern geometry and topology" - 27-29 October, 2024, Tashkent, Uzbekistan. 29-30 pages.
5. **Bazarbaev S.U.**, Atajanova Sh.U. *On the support of measures of large entropy for polynomial-like maps* // Abstracts of the international scientific conference "Actaul problems of algebra, analysis, topology and computational mathematics" - 30-31 may, 2025, Tashkent, Uzbekistan. 111-112 pages.

Avtoreferat «O‘zMU xabarlari» jurnali tahririyatida tahrirdan o‘tkazilib, o‘zbek, rus va ingliz tillaridagi matnlar o‘zaro muvofiqlashtirildi.

№ 10-3279

Bosishga ruxsat etildi: 05.12.2025.
Bichimi: 60x84 $^{1/16}$ «Times New Roman»
garniturada raqamli bosma usulda bosildi.
Shartli bosma tabog‘i 2,1. Adadi 100. Buyurtma: № 203
Tel: (99) 832 99 79; (77) 300 99 09
Guvohnoma reestr № 10-3279
“IMPRESS MEDIA” MChJ bosmaxonasida chop etildi.
Manzil: Toshkent sh., Yakkasaroy tumani, Qushbegi ko‘chasi, 6-uy.