

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
MAKTABGACHA VA MAKTAB TA'LIMI VAZIRLIGI**

**AJINIYOZ NOMIDAGI
NUKUS DAVLAT PEDAGOGIKA INSTITUTI**

B.Ya. Yavidov, M.M. Nishonov, A.S. Jalekeshov, D.G'. Xajibayev

**KVANT MEXANIKASIDA
OPERATORLAR QO'LLANILISHI**
(uslubiy qo'llanma)

NUKUS 2025

Tuzuvchilar:

B.Ya. Yavidov, M.M. Nishonov, A.S. Jalekeshov, D.G‘. Xajibayev

Uslubiy qo‘llanmada operatorlarning kvant mexanikasida qo‘llanilishi bayon etilgan. Dastlab mavzuga tegishli nazariy ma‘lumotlar keltirilgan. Operatorlarning qo‘llanilishiga doir masalalar yechimi keltirilgan. Keyin, mavzuga doir mustaqil yechish uchun masalalar berilgan.

Mas‘ul muharrir:

M.R.JUMAEV – Buxoro muhandislik-texnologiya instituti Aniq fanlar kafedrası professori, fizika-matematika fanlari doktori (DSc).

Taqrizchilar:

1. E.X. Karimbayev - Fundamental va amaliy tadqiqotlar instituti Ilmiy ishlar va innovatsiyalar bo‘yicha direktor o‘rinbosari, fizika-matematika fanlari doktori (DSc).

2. K. Turdanov - Ajiniyoz nomidagi Nukus davlat pedagogika instituti “Fizika” kafedrası dotsenti., fizika - matematika fanlari nomzodi.

**Uslubiy qo‘llanma Ajinyaz nomidagi Nukus davlat pedagogika instituti
Ilmiy kengashining (2025 yil 23 - sentyabrdagi №1-son) qarori bilan
nashrga tavsiya etilgan.**

KIRISH

Kvant mexanikasi XX asr boshlarida klassik fizikadan farqli, mikrojismlar – atom, elektron, proton, neytron va foton kabi zarralarning xatti-harakatini izohlashga qaratilgan fundamental nazariya sifatida shakllandi. Klassik mexanika qonunlari bu darajada kichik masshtabdagi jarayonlarni aniqlik bilan tasvirlay olmaganligi sababli, ilm-fan mutlaqo yangi matematik yondashuvga ehtiyoj sezdi. Ushbu ehtiyoj kvant nazariyasining paydo bo'lishiga olib keldi va bu nazariyada **operatorlar** tushunchasi markaziy o'rinni egalladi [1,2,3].

Operatorlar – bu fizikaviy miqdorlarni matematik obyektlar sifatida ifodalashda qo'llaniladigan vositadir. Masalan, klassik mexanikada zarraning koordinatasi yoki impulsi oddiy funktsiya bilan ifodalansa, kvant mexanikasida ular tegishli operatorlar orqali aks ettiriladi. Kvant mexanikasi formulalarida koordinata operatori, impuls operatori, energiya operatori (Hamiltonian), spin operatorlari kabilar alohida ahamiyatga ega bo'lib, ular kvant sistemasining to'liq tasvirini olishda foydalaniladi [1,4,5]. Kvant mexanikasida o'lchab bo'ladigan har qanday fizikaviy miqdorlarga¹ o'ziga mos operator mos qo'yiladi. Bu operatorlar maxsus Hilbert fazosida aniqlanadi va ularning xossalari, masalan, Hermitlik, spektr, xususiy qiymat² va xususiy funksiya³ kabi tushunchalar bilan chambarchas bog'liqdir [2,10,11]. Ayniqsa, Hermit operatorlar fizikada muhim ro'l o'ynaydi, chunki ular o'ziga xos qiymatlari haqiqiy sonlar bo'lib, bu fizik o'lchash natijalariga mos keladi [11].

Shredinger tenglamasi, kvant mexanikasining asosiy tenglamasi bo'lib, unda Hamilton operatori zarraning umumiy energiyasini ifodalaydi. Bu tenglamaning yechimlari sistemaning turg'un holatlarini va ularning

¹ eng. observable

² eng. eigenvalue

³ eng. eigen function

energiyalarini aniqlash imkonini beradi. Ushbu operatorlar yordamida mikroobyektlarning harakatlari, masalan, potensial o'radagi zarra, kvant tebranishlar, vodorod atomining energiya sathlari kabi holatlar tahlil qilinadi [3,5,7].

Operatorlar yordamida kvant sistemalarini o'rganish nafaqat nazariy asos, balki amaliy fizika sohalarida ham muhim ahamiyat kasb etadi. Misol uchun, impuls momenti operatorlari kvant zarralarning burchak momentini aniqlashda, spin operatorlari esa elektronlarning magnit maydon bilan o'zaro ta'sirini izohlashda qo'llaniladi [1,9]. Ayniqsa, Pauli matritsalari orqali spini $\frac{1}{2}$ bo'lgan zarralarning holatlari kvant mexanikasida juda nozik aniqlikda tavsiflanadi [10,11]. Bugungi kunda kvant mexanikasida operatorlar nafaqat klassik muammolarni yechishda, balki zamonaviy yo'nalishlarda — kvant kompyuterlar, kvant optika, kvant informatikasi va kvant xotira kabi sohalarida ham keng qo'llanilmoqda [13]. Shuningdek, operatorlar orqali noaniqlik munosabatlarini (Heisenberg prinsipini) qat'iy matematik tarzda isbotlash mumkin. Bu esa kvant mexanikasida aniqlik bilan ifodalab bo'lmaydigan, lekin statistik yondashuv orqali tasvirlanadigan fizikaviy hodisalarni chuqurroq tushunishga xizmat qiladi [2,3].

Ushbu metodik qo'llanma orqali biz operatorlarning nazariy asoslari, turli fizik kattaliklar uchun ifodalar, ularning algebraik xossalari, Shredinger tenglamasidagi roli va amaliy masalalardagi qo'llanishini bosqichma-bosqich o'rganamiz. Shuningdek, amaliy mashqlar yordamida talabalar operatorlar bilan mustaqil ishlash ko'nikmalariga ega bo'ladilar.

Qo'llanmaning mazmuni kvant mexanikasining klassik manbalaridan — Landau va Lifshits [3], Sakurai [2], Griffiths [1], Dirac [10], von Neumann [12] kabi mualliflarning asarlariga tayangan holda tayyorlangan. Shu bilan birga, mahalliy manbalar — Iridov [4], Qodirov [5], Salaev va Mamatkarimov [6], Amanov [7] hamda Shokirov [8] asarlaridan foydalanilgan.

1-&. OPERATORLAR NAZARIYASIGA KIRISH

Kvant mexanikasining matematik asoslarini to'g'ri anglash uchun, avvalo, operator tushunchasi va uning xossalarini chuqur o'rganish zarur. Operatorlar kvant mexanikasida markaziy tushunchalardan biri bo'lib, har qanday o'lchab bo'ladigan fizikaviy miqdor tegishli matematik operator orqali ifodalanadi [1,2]. Operatorlar nazariyasi orqali fizikaviy tizimning holati, o'zgarishlari va o'lchash natijalari kvant mexanikasi asosida tahlil qilinadi.

1.1. Operator tushunchasi

Matematik nuqtayi nazardan, operator – bu bir funksiyalar to'plamini boshqa funksiyalar to'plamiga aks ettiruvchi qonuniyatdir. Ya'ni, agar $\psi(x)$ funksiyaga $\hat{A}$ operator ta'sir etsa, natijada boshqa bir $\hat{A}\psi(x)$ funksiyaga o'tiladi [1,4]. Kvant mexanikasida operatorlar odatda Hilbert fazosida aniqlanadi. Bu fazo chekli yoki cheksiz o'lchamli, skalyar ko'paytma aniqlangan regular funksiyalarning⁴ chiziqli fazosi bo'lib, unda fizikaviy holatlar to'liq tasvirlanadi [11,12].

Misol uchun, bir o'lchamli impuls operatori quyidagicha aniqlanadi:

$$\hat{p} = -i\hbar \frac{d}{dx} \quad (1.1.1)$$

bu yerda $i = \sqrt{-1}$ – mavhum birlik, $\hbar$ – Plankning keltirilgan doimiysi⁵, $\frac{d}{dx}$ – differensial operator [1].

1.2. Operatorlarning asosiy turlari

Kvant mexanikasida quyidagi operatorlar keng qo'llaniladi:

Chiziqli operatorlar (linear operator) – bunday operator quyidagi xossa ega:

$$\hat{A}(a\psi + b\varphi) = a\hat{A}\psi + b\hat{A}\varphi \quad (1.2.1)$$

⁴ O'zlarining aniqlanish sohasida uzluksiz, differensialanuvchi $\int |\psi(x)|^2 dx$ integrali mavjud regular deyiladi.

⁵ Plank doimiysi aslida h orqali belgilanadi. Lekin kvant mexanikasidagi matematik ifodalarda u ko'pincha 2π ga bo'lingan shaklda uchraydi, shu sabab $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ belgilash kiritilgan. Bu esa matematik ifodalarni o'ta soddalashtiradi.

bunda a va b – o'zgarmas sonlar. Ushbu xossa kvant mexanikasidagi superpozitsiya prinsipiga mos keladi [1,2].

Hermit operatorlar (o'zi o'ziga qo'shma operator⁶) – qiymati tajribalarda o'lchanadigan fizikaviy miqdorlar ifodalanadigan operator bo'lib, uning xususiy qiymatlari haqiqiy sonlar bo'ladi⁷:

$$\langle \psi | \hat{A} \varphi \rangle = \langle \hat{A} \varphi | \psi \rangle \quad (1.2.2)$$

Hermit operatorlar sistemaning fizik xossalarini ifodalashda asosiy rol o'ynaydi (masalan, energiya operatori – Hamiltonian) [2,3,10].

Unitar operator – holatni saqlovchi operatorlar bo'lib, ular kvant sistemaning vaqt evolyutsiyasini ifodalaydi:

$$\hat{U}^\dagger \hat{U} = \hat{U} \hat{U}^\dagger = \hat{I} \quad (1.2.3)$$

bu yerda $\hat{I}$ – birlik operator. Unitar operatorlar kvant hisoblash (quantum computing) va kvant teleportatsiya singari sohalarda muhim [13].

Kommutator – ikkita operator o'zaro o'rin almashinishida qanday farq hosil bo'lishini ko'rsatadi:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (1.2.4)$$

Kommutatorlar Heisenberg noaniqlik prinsipining matematik ifodasini beradi [1,3].

1.3. Xususiy qiymatlar va xususiy funksiyalar

Quyidagi

$$\hat{A}\psi = a\psi \quad (1.3.1)$$

tenglama o'rinli bo'lsa, bu yerdagi a soni $\hat{A}$ operatorning xususiy qiymati, ψ esa shu operatorning a xususiy qiymatiga mos xususiy funksiyasi deyiladi.[1,2,11].

⁶ eng. self-adjoint

⁷ Bu yerda Dirakning $\langle bra | ket \rangle$ vektorlaridan foydalanilgan. Ular ifodalardagi integrallarni yozmaslikka imkon beradi, masalan $\psi(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalarning skalyar ko'paytmasi $\int \psi^*(x)\varphi(x)dx$ Dirak belgilashlarida soddagina $\langle \psi | \varphi \rangle$ shaklda yoziladi. $\hat{A}$ operatorining Hermit qo'shmasi $\hat{A}^\dagger$ ko'rinishida yoziladi. Hermit qo'shma olish amali ketma -ket bajariladigan ikkita amaldan iborat: birinchi amalda: $\hat{A}$ operatorining $\hat{A}^*$ kompleks qo'shmasi topiladi, ikkinchi amalda $\hat{A}^*$ kompleks qo'shma operator transponirlanadi: $(\hat{A}^*)^T$ va u $A^\dagger$ orqali belgilanadi, ya'ni $A^\dagger = (\hat{A}^*)^T$. (1.2.2) ta'rifdan, demak $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ xossali operator Hermit deyiladi.

Masalan, impuls operatorining xususiy funktsiyasi yassi to'liq bo'lib, u fizik jarayonlarda zarraning aniq impulsi borligini bildiradi:

$$\hat{p}_x e^{ip_x x/\hbar} = p_x e^{ip_x x/\hbar} \quad (1.3.2)$$

Bu tajribada fizikaviy miqdor qiymati o'lchanganda natija kvant mexanikasidagi xususiy qiymatga mos kelishini ko'rsatadi [1,9].

1.4. Hilbert fazosi va to'liqlik

Regulyar funktsiyalar fazosi - Hilbert fazosi deyiladi, u kvant mexanikasining matematik asosi hisoblanadi. Barcha holat funktsiyalari bu fazoda mavjud bo'ladi va ular ortonormal⁸ to'plam hosil qiladi. Har qanday Ψ holat funktsiyasi ushbu to'plam bo'yicha yoyilishi mumkin⁹:

$$\Psi = \sum_n c_n \psi_n \quad (1.4.1)$$

bu yerda ψ_n - ortonormal xususiy funktsiyalar [11,12].

Bu tushunchadan kvant tizimlarni, ayniqsa, kvant garmonik osillatorda yoki vodorod atomini to'liq matematik tasvirlashda foydalaniladi [3,9].

1.5. Kvant mexanikasidagi operatorlar algebrasi

Operatorlar orasidagi algebrik munosabatlar kvant nazariyasida o'ziga xos xulosalarga olib keladi. Misol uchun:

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \quad (1.5.1)$$

munosabat kvant mexanikasi asosida o'lchashlar noaniqligining asosi hisoblanadi va klassik mexanikadan farqni yaqqol ko'rsatadi [1,3,10].

Shuningdek, moment impulsi operatorlari orasidagi kommutatorlar, spin operatorlarining algebraik tuzilishi Pauli matritsalarini orqali ifodalanadi [10,11].

⁸ $\langle \psi_n | \psi_{n'} \rangle = \delta_{nn'}$ shart o'rinli bo'lgan ψ_n funktsiyalar ortonormal to'plamni hosil qiladi.

⁹ Agar ixtiyoriy ψ holat funktsiyasi (1.4.1) yig'indi ko'rinishida tasvirlansa, u holda ψ_n funktsiyalar to'liq to'plamni hosil qiladi.

2-&. ASOSIY FIZIKAVIY MIQDORLARNING OPERATORLARI

Kvant mexanikasidagi asosiy fizikaviy miqdorlar – koordinata, impuls, energiya, impuls momenti va spin – o‘zlarining operator ko‘rinishidagi matematik ifodaga ega. Klassik fizika formulalari bu sohada bevosita qo‘llanilmaydi, chunki kvant zarralarining harakati ehtimollik asosida tavsiflanadi. Shuning uchun bu miqdorlar maxsus operatorlar orqali ifodalanib, Shredinger tenglamasi va boshqa kvant qonunlarida asosiy elementlarga aylanadi [1,2,3].

2.1. Koordinata operatori

Koordinata operatorining kvant mexanikasidagi ifodasi klassik mexanikasidagi ifodaga juda o‘xshaydi. Bir o‘lchamli fazoda $\hat{x}$ koordinata operatori oddiy ko‘paytiuvchi amal sifatida kiritiladi:

$$\hat{x}\psi(x) = x \cdot \psi(x) \quad (2.1.1)$$

Ya’ni, koordinata operatori to‘lqin funksiyani to‘g‘ridan-to‘g‘ri koordinataga ko‘paytiradi [6,2].

Uch o‘lchamli fazoda, masalan, 3 o‘lchamli fazoda $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ koordinatalar operatorlari har bir o‘qda mos ravishda qo‘llaniladi. Bu operatorlar to‘liq ortonormal bazisga ega va Hermit operatorlar hisoblanadi, chunki ularning xususiy qiymatlari haqiqiy sonlardan iborat [3,11].

2.2. Impuls operatori

Impuls operatori kvant mexanikasida differensial operator shaklida aniqlanadi:

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{d}{dx} \quad (2.2.1)$$

Bu formuladan ko‘rinib turibdiki, impuls operatori to‘lqin funksiyasiga har doim differensial ta’sir ko‘rsatadi, bu esa uning zarra harakatidagi o‘rnini bildiradi [1,2]. Impuls operatori Hamiltonian (energiya operatori) tarkibida asosiy elementlardan biri sifatida qatnashadi.

Uch o'lchamli fazoda $\hat{p}$ to'liq impuls operatori $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$ komponentlar orqali

$$\hat{p} = \hat{p}_x \vec{e}_x + \hat{p}_y \vec{e}_y + \hat{p}_z \vec{e}_z \quad (2.2.2)$$

ko'rinishda aniqlanadi, bu yerda $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ –Dekart koordinatalar tizimidagi bazis vektorlar. Agar

$$\hat{p}_x = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}, \hat{p}_y = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}, \hat{p}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

va

$$\nabla = \vec{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

ekanligini hisobga olsak, (2.2.2) ifodani

$$\hat{p} = -i\hbar \nabla \quad (2.2.3)$$

shaklda yozish mumkin.

2.3. Energiya operatori

Energiya operatori yoki Hamiltonian operatori kvant tizimining umumiy energiyasini ifodalaydi. Shredinger tenglamasida u asosiy operator sifatida ishtirok etadi:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\vec{r}) \quad (2.3.1)$$

bunda $\hat{V}$ –potensial energiya operatori, $\hat{r} = \hat{x}\vec{e}_x + \hat{y}\vec{e}_y + \hat{z}\vec{e}_z$ –uch o'lchamli fazoda joy operatori (radius-vektor). Hamilton operatori (hamiltonian) yordamida kvant tizimning energiya sathlari (Hamilton operatorining xususiy qiymatlari) va ularga mos xususiy funksiyalari aniqlanadi [1,3,9]. Masalan, erkin zarraning hamiltoniani. ($\hat{V} = 0$)

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \quad (2.3.2)$$

ko'rinishiga ega. Bu operator ikkinchi tartibli differensial operator bo'lib, u orqali zarraning energiyasini (uzluksiz spektrini) aniqlash mumkin. Hamiltonian Hermit operator bo'lib, uning xususiy qiymatlari haqiqiy sonidir [10,11].

2.4. Impuls momenti operatori

Impuls momenti operatori (burchak momenti) kvant mexanikasida zarrani qo'zg'alma markaz atrofida aylanma harakatining xususiyatlarini tavsiflaydi. Uch o'lchamli fazoda u quyidagicha aniqlanadi:

$$\hat{L} = \vec{r} * \hat{p} = \hat{L}_x \vec{e}_x + \hat{L}_y \vec{e}_y + \hat{L}_z \vec{e}_z = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ i\hbar \frac{\partial}{\partial x} & i\hbar \frac{\partial}{\partial y} & i\hbar \frac{\partial}{\partial z} \end{vmatrix}. \quad (2.4.1)$$

Determinantni hisoblab, komponentlar uchun

$$\hat{L}_x = -i\hbar \left(y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \hat{L}_y = -i\hbar \left(z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad \hat{L}_z = -i\hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right)$$

ifodalarni olamiz.

2.5. Spin operatorlari

Spin – bu kvant zarrachalarning ichki burchak momentidir. U klassik fizikada mavjud bo'lmagan xossa bo'lib, operatorlar orqali ifodalanadi. Elektronning spini uchun Pauli matritsalarini qo'llaniladi:

$$\hat{S}_x = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_x, \quad \hat{S}_y = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_y, \quad \hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_z, \quad (2.5.1)$$

bu yerda $\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y, \hat{\sigma}_z$ – Pauli matritsalarini deyiladi, ular

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.5.2)$$

2×2 o'lchamli matritsalar orqali yoziladi. Spin operatorlari kvant zarraning magnit xossalari, shuningdek, kvant kompyuterlar va kvant informatikasida asosiy birlik (qubit) sifatida muhim ahamiyat kasb etadi [10,13]. Ko'pincha, Pauli matritsalarini qatoriga, $\hat{\sigma}_0$ orqali belgilanadigan, birlik matritsa kiritiladi:

$$\hat{\sigma}_0 = I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pauli matritsalarini quyidagi matematik xossalarga ega:

Hermit $\sigma_\alpha = \sigma_\alpha^\dagger$, ya'ni ularning xususiy qiymatlari haqiqiy sonlar;

unitar: $\sigma_\alpha^\dagger \sigma_\alpha = I$, teskarisi ularning Hermit qo'shmasiga teng;

izsiz: $\text{tr}(\sigma_\alpha) = 0$, ularning diagonal elementlari yig'indisi nolga teng;

$$\alpha = x, y, z \text{ uchun } \det(\sigma_\alpha) = -1;$$

har bir +1 va -1 xususiy qiymatga ega, bu “spin-yuqoriga” va “spin-pastga” yo‘nalganligiga mos keladi.

Yuqorida bayon etilgan barcha operatorlar – kvant mexanikasining fizikaviy mohiyatini aniqlashda tayanch matematik vositalar bo‘lib, ular fizikaviy miqdorlarning o‘lchash natijalarini, ehtimollik taqsimotlarini va dinamik rivojlanishini ifodalaydi. Har bir operatorning o‘ziga xos algebraik xossalari, xususiy qiymatlari va fizikaviy talqini mavjud bo‘lib, ular asosida kvant tizimlarning real holatlari chuqur o‘rganiladi [1,2,3,11].

3-&. KOMMUTATOR VA KOMMUTATIV OPERATORLAR

Kvant mexanikasi klassik fizikadan farqli ravishda fizikaviy miqdorlar operatorlarining o‘zaro o‘rin almashinuvi (kommutativlik) xossasiga ega bo‘lmagan tizimdir. Bu o‘ziga xoslik kvant olamining noaniqlik, ehtimollik va o‘zaro bog‘liqlik xususiyatlarining matematik negizini tashkil qiladi. Aynan shu sababli operatorlar o‘rin almashinuvi va kommutatorlar kvant mexanikasining markaziy tushunchalaridan biri hisoblanadi [1,2,3].

3.1. Kommutator tushunchasi

Matematik jihatdan kommutator ikkita $\hat{A}$ va $\hat{B}$ operatorlar o‘zaro o‘rin almashganda, ular orasidagi farqni aniqlovchi quyidagi ifoda orqali aniqlanadi:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} \quad (3.1.1)$$

Agar $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ bo‘lsa, $\hat{A}$ va $\hat{B}$ operatorlar **kommutativ** deyiladi, ular bir-biriga to‘sqinlik qilmasdan bajarilishi mumkin. Bunday hol klassik fizikada kuzatiladi. Ammo kvant mexanikasida aksariyat fizikaviy operatorlar o‘zaro kommutativ emas, ya‘ni $[\hat{A}, \hat{B}] \neq 0$ bo‘ladi. Bu esa ko‘pchilik fundamental fizikaviy miqdorlarni bir vaqtning o‘zida yuz foiz aniqlik bilan o‘lchab bo‘lmasligini bildiradi [1,3,10].

3.2. Heisenberg noaniqlik printsipli

Kommutatorlarning eng mashhur amaliy ko'rinishi bu — Heisenberg noaniqlik printsipidir. Masalan, koordinata $\hat{x}$ va impuls $\hat{p}_x$ operatorlari quyidagi kommutatorga ega:

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar \quad (3.2.1)$$

Bu munosabat asosida fizikaviy o'lchovlar orasidagi noaniqlik ifodalanadi:

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2} \quad (3.2.2)$$

bu yerda Δx -zarraning x koordinatasi va Δp_x — impulsi x —komponentasining tajribada o'lchash hatoligi. (3.2.2) ifoda Heisenberg noaniqlik prinsipi deyiladi, unga ko'ra, zarraning koordinatasi va impulsini bir vaqtda to'liq aniqlik bilan o'lchab bo'lmaydi. Bu kvant mexanikasining klassik fizikadan asosiy farqidir [1,2,3,10].

Impuls operatorining $\hat{p}_x, \hat{p}_y, \hat{p}_z$ komponentalari va koordinata operatorining ularga mos $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$ komponentalari bilan

$$[\hat{x}, \hat{p}_x] = [\hat{y}, \hat{p}_y] = [\hat{z}, \hat{p}_z] = i\hbar, \quad (3.3.3)$$

kommutatorlari kvant mexanikasining fundamental munosabatlari bo'lib xizmat qiladi. Ular Heisenberg noaniqlik prinsipining asosini tashkil qiladi [2,10,11]

3.3. Kommutator xossalari

Kommutatorlar kvant mexanikasida operatorlarining algebraik tuzilishini aniqlashda juda muhim vositadir. Quyidagi xossalar har qanday kommutatorlar uchun umumiy hisoblanadi [1,2,11]:

1. Antisimetriklik:

$$[\hat{A}, \hat{B}] = -[\hat{B}, \hat{A}].$$

1. Chiziqlilik:

$$[\hat{A}, \hat{B} + \hat{C}] = [\hat{A}, \hat{B}] + [\hat{A}, \hat{C}].$$

3. Jacobi ayniyati o'rinli:

$$[\hat{A}, [\hat{B}, \hat{C}]] + [\hat{B}, [\hat{C}, \hat{A}]] + [\hat{C}, [\hat{A}, \hat{B}]] = 0.$$

Ushbu algebraik xossalar operatorlar orasidagi bog'liqlikni aniqlashda qo'llaniladi va kvant guruh nazariyasida asosiy vosita bo'lib xizmat qiladi [10,11,12].

3.4. Impuls momenti operatorlarining kommutatorlari

Klassik fizikadagi impuls momentining kvant analogi — impuls momenti operatoridir. Impuls momenti operatorining komponentalari “kommutatsiya algebrasiga” ega

$$[\hat{L}_\alpha, \hat{L}_\beta] = i\hbar \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \hat{L}_\gamma \quad (3.4.1)$$

bu yerda $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ — Levi-Civita antisimmetrik belgisi:

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \begin{cases} +1, & \alpha, \beta, \gamma \text{ siklik o'rin almashsa;} \\ -1, & \alpha, \beta, \gamma \text{ nosiklik o'rin almashsa} \\ 0, & \text{hech bo'lmaganda ikkita indeks bir xil bo'lsa.} \end{cases}$$

(3.4.1) komutatorlar kvant tizimlarda burchak momenti komponentlarining bir-biriga bog'liqligini ko'rsatadi.

Bundan tashqari, moment impulsi operatorlari va Hamiltonian orasidagi kommutatorlar, sistemaning saqlanuvchi xossalarini tahlil qilishga imkon beradi. Masalan, agar $[\hat{L}_z, H] = 0$ bo'lsa, u holda $\hat{L}_z$ operatorning xususiy qiymati harakat integrali bo'lib, vaqtga bog'liq emas (saqlanuvchi miqdor) [3,10].

3.5. Spin operatorining kommutatorlari

$\hat{S}_\alpha = \frac{\hbar}{2} \hat{\sigma}_\alpha$ spin operatorlarining bir-biriga ko'paytirish qoidalari juda muhim. Bu kommutatsiya va antikommutatsiya xossalarida ko'rinadi:

Antikommutatsiya munosabati:

$$\{\sigma_\alpha, \sigma_\beta\} = \sigma_\alpha \sigma_\beta + \sigma_\beta \sigma_\alpha = 2\sigma_{\alpha\beta} I$$

bu yerda

$$\sigma_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Kroneker belgisi;

kommutatsiya munosabati:

$$[\sigma_\alpha \sigma_\beta] = \sigma_\alpha \sigma_\beta - \sigma_\beta \sigma_\alpha = 2i\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} \sigma_\gamma,$$

bu yerda $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}$ –avvalroq aniqlangan Levi-Civita belgisi. Ushbu munosabat uch o'lchamli fazoda aylanishlar fundamental algebrasi bo'lgan SU(2) Lie algebrasining bazisini tashkil etishini ko'rsatadi. Shu sabab ular $\frac{1}{2}$ spinli zarralar uchun aylanish generatorlari hisoblanadi.

2×2 o'lchamli ixtiyoriy M kompleks matritsa Pauli matritsalarini orqali tasvirlanishi mumkin:

$$M = a_0 I + a_x \sigma_x + a_y \sigma_y + a_z \sigma_z, \quad (3.5.1)$$

bu yerda a_0, a_x, a_y, a_z –qandaydir kompleks koeffitsientlar.

Bu munosabatlar spin $\frac{1}{2}$ zarralarning kvant holatlarini va magnit maydon bilan o'zaro ta'sirini ifodalashda muhim rol o'ynaydi [10,13].

3.6. Kommutatorlarning fizikaviy talqini

Kommutatorlar fizikaviy jihatdan miqdorlarlar orasidagi o'zaro ta'sir, to'liq aniqlikda o'lchab bo'lmaslik, va tizimdagi simmetriya buzilishi yoki saqlanishini bildiradi. Masalan, agar $[\hat{A}, \hat{H}] = 0$ (Hamilton operatori bilan kommutativ) bo'lsa, u holda $\hat{A}$ operator orqali tasvirlanayotgan fizikaviy miqdor vaqtga bog'liq emas, saqlanadi. Aksincha, agar $[\hat{A}, \hat{H}] \neq 0$ (Hamilton operatori bilan kommutativ bo'lmasa) $\hat{A}$ operator orqali tasvirlanayotgan fizikaviy miqdor vaqtga bog'liq holda o'zgaradi (saqlanuvchi miqdor emas) [1,2,10].

Kvant optikasi, zarralar fizikasi, kvant statistikasi va kvant informatikada kommutatorlar orqali turli tizimlar tahlil qilinadi.

4-&. OPERATORLAR YORDAMIDA SHREDINGER TENGLAMASINI IFODALASH

Kvant mexanikasida zarralar dinamikasi **Shredinger tenglamasi** orqali tasvirlanadi. Bu tenglama kvant sistemaning energiyasi va holat funksiyasi o'rtasidagi bog'liqlikni ifodalab, fizikaviy tizim holatini vaqt bo'yicha o'zgarish qonunini matematik ifodalashga imkon beradi [1,2,3]. Shredinger tenglamasida **operatorlar** markaziy rol o'ynaydi. Bunda impuls, energiya, koordinata va hokazolar o'ziga mos operatorlar orqali tenglamaga kiritiladi. Aynan operatorlar yordamida bu tenglama klassik fizikadagi differensial tenglamalarning kvant analogiga aylanadi [1,5,10].

4.1. Stasionar Shredinger tenglamasi

Kvant tizimning holati vaqtga bog'liq bo'lmasa, u **stasionar Shredinger tenglamasi** orqali ifodalanadi:

$$\hat{H}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \quad (4.1.1)$$

bu yerda $\vec{r}$ –zarraning radius-vektori, $\hat{H}$ – **Hamilton operatori**, $\psi(\vec{r})$ – kvant tizimning holatini tavsiflovchi **to'lqin funksiyasi**, E – Hamilton operatorining xususiy qiymati (kvant tizim energiyasi).

Hamilton operatori tizimning kinetik va potensial energiyalari yig'indisi orqali aniqlanadi:

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V}$$

Agar bir o'lchamli masala qaralayotgan bo'lsa, to'lqin funksiya faqat bitta koordinataga, odatda $\vec{r}$ radius - vektorning x komponentasiga bog'liq $\psi(x)$ ko'rinishida yoziladi, va (4.1.1) tenglama

$$\hat{H}\psi(x) = E\psi(x) \quad (4.1.2)$$

shaklga ega bo'ladi. Bunda Hamilton operatori

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

ko'rinishda yoziladi, m –kvant Zarra massasi, $-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$ –zarraning kinetik energiyasi (impuls operatorining kvadrati) operatori, $V(x)$ esa uning potensial energiyasi operatoridir [1,3,9]. Bunday yondashuv zarra harakat qilayotgan muhitni, unga ta'sir qilayotgan kuchlarni va kvant tizimning energetik holatini aniqlashga xizmat qiladi. Ayniqsa, vodorod atomi, kvant o'ra, osillator kabi model tizimlarda bu tenglama fundamental ahamiyatga ega [1,2,9].

4.2. Nostatsionar Shredinger tenglamasi

Kvant tizimning holati vaqtga bog'liq bo'lsa, u **nostatsionar Shredinger tenglamasi** orqali ifodalanadi:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = \hat{H} \psi(\vec{r}, t) \quad (4.2.1)$$

Bir o'lchamli fazoda bu tenglama

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(x, t) = \hat{H} \psi(x, t)$$

ko'rinishda yoziladi. Bunda yana Hamilton operatori asosiy rol o'ynaydi. U to'liq energiya operatori bo'lib, uning xususiy qiymati kvant tizimning holatini tavsiflovchi to'lqin funksiyani vaqt bo'yicha o'zgarishini aniqlaydi [1,3,10]. Shuni alohida ta'kidlash kerakki, bu tenglama deterministik bo'lsa-da, yechimlarning fizikaviy talqini ehtimoliy xususiyatga ega. Bu kvant olamning noaniqlik va ehtimollik tabiatini aks ettiradi [2,11].

4.3. Kvant garmonik oscillyator

Bir o'lchamli fazoda kvant garmonik oscillyator uchun Hamilton operatori

$$\hat{H} = \frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2 \quad (4.3.1)$$

ko'rinishda yoziladi, bu yerda ω –tebranish chastotasi. (4.3.1) operatorni $\psi(x)$

to'liqin funksiyaga ta'sir etkazib, (4.1.2) statsionar Shredinger tenglamasini yechsak, garmonik oscillyator uchun energiya sathlari

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \hbar \omega, n = 0, 1, 2 \quad (4.3.2)$$

ekanligini olamiz. Bu energiyalar **diskret** bo'lib, kvant tizimlarga xos xususiyatlardan biridir [1,3,9].

4.4. Fizikaviy miqdorlar operatorlari

Shredinger tenglamasida har bir fizikaviy miqdor uchun alohida operator mavjud bo'lib, ular quyidagilardir:

- **Koordinata operatori:** $\hat{\vec{r}} = \vec{r};$
- **Impuls operatori:** $\hat{\vec{p}}_x = -i\hbar\nabla;$
- **Energiya operatori:** $\hat{E} = -i\hbar\frac{\partial}{\partial t};$
- **Spin operatorlari:** $\hat{S}_i = \frac{\hbar}{2}\sigma_i, i = x, y, z,$

Ushbu operatorlar kvant tizimning ichki tuzilishini va tashqi muhit bilan o'zaro ta'sirini aniqlashda ishlatiladi [2,10,11].

4.5. Dirac $\langle bra|ket \rangle$ belgilashlari

Dirac $\langle bra|ket \rangle$ belgilashlari kvant mexanikasida holatlar va operatorlarni yozishning ixcham va bazis tanlashga nisbatan invariant usulidir. Bu belgilashda $|\psi\rangle$ holat vektori "ket" deb, unga qo'shma bo'lgan $\langle\psi|$ vektor esa "bra" deb ataladi.

Ket : $|\psi\rangle$ –bu $\mathcal{H}$ Hilbert fazosidagi vector.

Bra: $\langle\psi| = (|\psi\rangle)^\dagger$ –bu $\mathcal{H}$ Hilbert fazosidagi ket vektorlarga ta'sir qiluvchi chiziqli funksional.

Skalyar ko'paytma: $\langle\psi|\psi\rangle$ (kompleks son).

Norma: $\|\psi\|^2 = \langle\psi|\psi\rangle$, ortogonallik: $\langle\psi|\psi\rangle = 0$.

Operatorlar va ularning ta'siri. $\hat{A}$ chiziqli operator ket vektorga $\hat{A}|\psi\rangle$ kabi ta'sir qiladi. Uning $\hat{A}^\dagger$ Hermit qo'shmasi

$$\langle\phi|\hat{A}|\psi\rangle = \langle\phi|\hat{A}^\dagger|\psi\rangle^* = \langle\psi|\hat{A}^\dagger|\phi\rangle^*$$

orqali aniqlanadi. Tajribada o'lchanadigan fizikaviy miqdorga mos operator Hermitdir: $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$.

Birlik operator va proyeksiya. Agar $\{|n\rangle\}$ –ortonormal bazis bo'lsa, u holda

$$\sum_n |n\rangle\langle n| = \hat{I}$$

birlik operatorni beradi. Uzluksiz bazis uchun (masalan, $\hat{x}$ joy operatorining xususiy funksiyalari):

$$\int dx |x\rangle\langle x| = \hat{I}$$

xossaga ega va $\langle x|x'\rangle = \delta(x - x')$ ortonormirovka o'rinli.

Koordinata va impuls tasavvuri. Koordinata tasavvuridagi $\psi(x)$ to'lqin funksiya ket vektorni o'zining xususiy holat funksiyasiga proyeksiyasi sifatida aniqlanadi:

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle.$$

Impuls ko'rinishi esa quyidagicha:

$$\psi(p) = \langle p|\psi\rangle,$$

Fure almashtirishini qo'llasak:

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}.$$

Statsionar va nostatsionar Shredinger tenglamasi

Dirac $\langle bra|ket\rangle$ belgilashlarida statsionar va nostatsionar Shredinger tenglamasi quyidagicha yoziladi:

$$\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle, \quad i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle.$$

4.6. To'lqin funksiyaning fizikaviy talqini

Shredinger tenglamasi orqali sistemaning kvant holatlarini aniqlash mumkin. Bu holatlar **xususiy funksiya** shaklida bo'lib, ular ehtimollik zichligi sifatida talqin qilinadi:

$$|\psi(x, t)|^2$$

Ushbu miqdor zarrani vaqtning t onida $\vec{r}$ joyda topilish ehtimolini bildiradi. Kvant mexanikasida bu jihat to'liqin funksiya ma'nosining Born talqini deyiladi [2,9].

Masalalar

1. To'liqin funksiya $\psi(x) = e^{ikx}$ ko'rinishga ega. Unga $\hat{p}_x = i\hbar \frac{d}{dx}$ impuls operatori ta'sir etganda nima sodir bo'lishini ko'rsating, natijani izohlang.

Javobi. Impuls operatorining aniqlanishidan ko'rinib turibdiki, u to'liqin funksiya differensial ta'sir etadi. Birinchi qadamda to'liqin funksiya x bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{d}{dx} e^{ikx} = ik e^{ikx}.$$

Impuls operatori $\frac{d}{dx}$ differensiallash operatorini $-i\hbar$ koeffisientga ko'paytirilgani ekanligidan, yuqorida olingan natijani shu koeffisientga ko'paytirib, berilgan to'liqin funksiya $\hat{p}_x$ impuls operatorining ta'sirini olamiz:

$$\hat{p}_x \psi(x) = p_x \psi(x) \Rightarrow -i\hbar \frac{d}{dx} (e^{ikx}) = -i\hbar (ik) e^{ikx} = \hbar k e^{ikx}.$$

Bu yerda $i = \sqrt{-1}$ ekanligidan, $i * i = -1$ bo'lishi hisobga olindi.

Izoh: demak, $p_x = \hbar k$ ekan va u $\hat{p}_x$ operatorining xususiy qiymati, $\psi(x) = e^{ikx}$ to'liqin funksiya esa shu operatorning $\hbar k$ xususiy qiymatga mos xususiy funksiyasi deyiladi.

2. $\hat{x}$ koordinata operatorini $\psi(x)$ to'liqin funksiya ta'siri natijasi qanday bo'ladi?

Javobi. Koordinata operatorining aniqlanishidan $\hat{x} = x$ edi. U to'liqin funksiya x koordinata qiymatiga ko'paytiradi:

$$\hat{x} \psi(x) = x \psi(x)$$

Agar $\psi(x) = \sin x$ bo'lsa, unda $\hat{x}\psi(x) = x * \sin x$ natijani olamiz. Koordinata operatori - bu o'zining xususiy qiymatini to'lqin funksiyaga shunchaki ko'paytiradi.

3. $[\hat{p}_x, \hat{p}_x] = 0$ va $[\hat{x}, x] = 0$ ekanligini ko'rsating.

Javobi.

masala yechimi: Har qanday operator o'z-o'zi bilan kommutativ:

$$[\hat{A}, \hat{A}] = \hat{A}\hat{A} - \hat{A}\hat{A} = 0.$$

Demak,

$$[\hat{p}_x, \hat{p}_x] = \hat{p}_x\hat{p}_x - \hat{p}_x\hat{p}_x = 0.$$

va

$$[\hat{x}, \hat{x}] = \hat{x}\hat{x} - \hat{x}\hat{x} = 0.$$

4. Quyidagini isbotlang:

$$\left(\frac{d}{dx}x\right)^2 = x^2 \frac{d^2}{dx^2} + 3x \frac{d}{dx} + 1$$

Javobi. $\left(\frac{d}{dx}x\right)^2$ operatorni $\psi(x)$ to'lqin funksiyaga ta'sirini topamiz

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dx}x\right)^2 \psi(x) &= \left(\frac{d}{dx}x\right) \left(\frac{d}{dx}x\right) \psi(x) = \left(\frac{d}{dx}x\right) \left(\frac{d}{dx}(x\psi(x))\right) \\ &= \left(\frac{d}{dx}x\right) \left(\psi(x) \frac{dx}{dx} + x \frac{d\psi(x)}{dx}\right) = \left(\frac{d}{dx}x\right) \left(\psi(x) + x \frac{d\psi(x)}{dx}\right) \\ &= \frac{d}{dx}[x * \psi(x)] + \frac{d}{dx} \left[x^2 \frac{d\psi(x)}{dx} \right] \\ &= \psi(x) + x \frac{d\psi(x)}{dx} + \frac{d\psi(x)}{dx} x + x^2 \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \\ &= \psi(x) + x \frac{d\psi(x)}{dx} + 2x \frac{d\psi(x)}{dx} + x^2 \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} \\ &= \psi(x) + 3x \frac{d\psi(x)}{dx} + x^2 \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} = \left(1 + 3x \frac{d}{dx} + x^2 \frac{d^2}{dx^2}\right) \psi(x). \end{aligned}$$

Demak,

$$\left(\frac{d}{dx}x\right)^2 \psi(x) = \left(x^2 \frac{d^2}{dx^2} + 3x \frac{d}{dx} + 1\right) \psi(x)$$

ekan. Oxirgi ifodada tenglikning ikki tarafida $\psi(x)$ to'liqin funksiyani yozmasak (qisqartirsak), talab qilingan isbotni olamiz.

5.Quyidagini isbotlang:

$$\left(x + \frac{d}{dx}\right) \frac{d}{dx} = x \frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}$$

Javobi. $\left(x + \frac{d}{dx}\right) \frac{d}{dx}$ operatorni $\psi(x)$ to'liqin funksiyaga ta'sirini topamiz:

$$\left[\left(x + \frac{d}{dx}\right) \frac{d}{dx}\right] \psi(x) = \left(x + \frac{d}{dx}\right) \frac{d\psi(x)}{dx} = x \frac{d\psi(x)}{dx} + \frac{d^2\psi(x)}{dx^2},$$

ya'ni

$$\left[\left(x + \frac{d}{dx}\right) \frac{d}{dx}\right] \psi(x) = \left(x \frac{d}{dx} + \frac{d^2}{dx^2}\right) \psi(x)$$

ekan. To'liqin funksiyani yozmasak, talab qilingan isbotni olamiz.

6.Quyidagini isbotlang

$$\left(\frac{d}{dx} + x\right)^2 = \frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx} + x^2 + 1.$$

Javobi. $\left(\frac{d}{dx} + x\right)^2$ operatorni $\psi(x)$ to'liqin funksiyaga ta'sirini topamiz:

$$\begin{aligned} \left[\left(\frac{d}{dx} + x\right)^2\right] \psi(x) &= \left(\frac{d}{dx} + x\right) \left[\left(\frac{d}{dx} + x\right) \psi(x)\right] = \left(\frac{d}{dx} + x\right) \left(\frac{d\psi(x)}{dx} + x\psi(x)\right) \\ &= \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \frac{d}{dx}(x\psi(x)) + x \frac{d\psi(x)}{dx} + x^2\psi(x) \\ &= \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + x \frac{d\psi(x)}{dx} + \psi(x) \frac{dx}{dx} + x \frac{d\psi(x)}{dx} + x^2\psi(x) \\ &= \frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + 2x \frac{d\psi(x)}{dx} + x^2\psi(x) + \psi(x) \\ &= \left(\frac{d^2}{dx^2} + 2x \frac{d}{dx} + x^2 + 1\right) \psi(x) \end{aligned}$$

To'liqin funksiyani yozmasak, talab etilgan isbotni olamiz.

7. $\left[x; \frac{d}{dx}\right]$ komutatorni hisoblang.

Javobi. Kommutatorni $\psi(x)$ to'liqin funksiyaga ta'sir etkazamiz:

$$\left[x; \frac{d}{dx}\right] \psi(x) = \left(x \frac{d}{dx} - \frac{d}{dx} x\right) \psi(x) = x \frac{d\psi(x)}{dx} - \frac{d}{dx}(x\psi(x)).$$

Agar $\frac{d\psi(x)}{dx} = \varphi(x)$ desak, ya'ni to'liqin funksiyaning x bo'yicha hosilasi boshqa to'liqin funksiya bo'lishini nazarda tutsak, $\hat{x}\varphi(x) = x\varphi(x)$ xossadan foydalanib birinchi hadni $x\frac{d\psi(x)}{dx}$ ko'rinishda yozish mumkin. $\hat{x}\psi(x) = x\psi(x)$ ekanligidan va ko'paytmadan hosila olish qoidasidan

$$x\frac{d\psi(x)}{dx} - \frac{d}{dx}(x\psi(x)) = x\frac{d\psi(x)}{dx} - \psi(x)\frac{dx}{dx} - x\frac{d\psi(x)}{dx} = -\psi(x)$$

natijaga kelamiz. Demak

$$\left[x; \frac{d}{dx}\right]\psi(x) = -\psi(x)$$

ekan. Agar to'liqin funksiyaning yozmasak

$$\left[x; \frac{d}{dx}\right] = -1$$

ekanligini bilib olamiz.

5. $\left[\frac{d}{dx}; \frac{d^2}{dx^2}\right]$ kommutatorni hisoblang.

Javobi. Kommutatorni $\psi(x)$ to'liqin funksiya ta'sir etkazamiz:

$$\left[\frac{d}{dx}; \frac{d^2}{dx^2}\right]\psi(x) = \left(\frac{d}{dx} * \frac{d^2}{dx^2} - \frac{d^2}{dx^2} * \frac{d}{dx}\right)\psi(x)$$

Bunda $\frac{d}{dx}\frac{d^2}{dx^2} = \frac{d^3}{dx^3}$ va $\frac{d^2}{dx^2}\frac{d}{dx} = \frac{d^3}{dx^3}$ ekanligidan

$$\left[\frac{d}{dx}; \frac{d^2}{dx^2}\right]\psi(x) = \frac{d^3\psi(x)}{dx^3} - \frac{d^3\psi(x)}{dx^3} = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak

$$\left[\frac{d}{dx}; \frac{d^2}{dx^2}\right] = 0$$

ekan.

6. $[\hat{x}; \hat{P}_x]$ kommutatorni hisoblang, natijani izohlang.

Javobi. Bunda $\hat{p}_x = i\hbar \frac{d}{dx}$ ekanligini hisobga olamiz. Kommutatorni $\psi(x)$ to'liqin funksiya ta'sirini qaraylik:

$$[\hat{x}; \hat{P}_x]\psi(x) = (\hat{x}\hat{P}_x - \hat{P}_x\hat{x})\psi(x) = -i\hbar\hat{x}\frac{d\psi(x)}{dx} + i\hbar\frac{d}{dx}(\hat{x}\psi(x)).$$

$\hat{x}$ operator x ko'paytirish amalini anglatishini yodga olsak,

$$-i\hbar\left(x\frac{d\psi(x)}{dx} - \psi(x)\frac{dx}{dx} - x\frac{d\psi(x)}{dx}\right) = i\hbar\psi(x)$$

natijani olamiz. Demak,

$$[\hat{x}; \hat{P}_x]\psi(x) = i\hbar\psi(x)$$

ekan. bundan

$$[\hat{x}; \hat{P}_x] = i\hbar$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu natija zarraning x koordinatasini va impulsining x komponentasini tajribada bir paytda aniq o'lchab bo'lmasligini anglatadi.

10. $[\hat{x}^n; \hat{P}_x]$ kommutatorni hisoblang.

Javobi. Bunda $\hat{p}_x = i\hbar \frac{d}{dx}$ ekanligini hisobga olamiz. Kommutatorni $\psi(x)$ to'liq funksiyaga ta'sirini qaraylik:

$$[\hat{x}^n; \hat{P}_x]\Psi = (\hat{x}^n \hat{P}_x - \hat{P}_x \hat{x}^n)\Psi = i\hbar \hat{x}^n \frac{d\psi(x)}{dx} + i\hbar \frac{d}{dx}(\hat{x}\psi(x)).$$

Bunda $\hat{x}^n \psi(x) = x^n \psi(x)$ xossasini qo'llaymiz. Yuqoridagi ifodada birinchi had $-i\hbar \hat{x}^n \frac{d\psi(x)}{dx}$ ko'rinishda yoziladi. Ikkinchi had esa, ko'paytmadan hosila olish qoidasiga ko'ra

$$i\hbar \frac{d}{dx}(\hat{x}\psi(x)) = i\hbar(nx^{n-1}\psi(x) + x^n \frac{d\psi(x)}{dx})$$

bo'ladi. Barcha hadlarni yig'ib yozsak

$$[\hat{x}^n; \hat{P}_x]\psi(x) = i\hbar \left(x^n \frac{d\psi(x)}{dx} - nx^{n-1}\psi(x) - x^n \frac{d\psi(x)}{dx} \right) = i\hbar nx^{n-1}\psi(x)$$

natijani olamiz. Demak $[\hat{x}^n; \hat{P}_x] = i\hbar nx^{n-1}\psi(x)$ ekan.

11. $[\hat{L}; \hat{M}] = 1$ ekanligi ma'lum bo'lsa $[\hat{L}; \hat{M}^2] = 2\hat{M}$ bolishini ko'rsating.

Javobi. Berilganlardan

$$[\hat{L}; \hat{M}] = \hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L} = 1$$

quyidagini topamiz:

$$\hat{L}\hat{M} = \hat{M}\hat{L} + 1.$$

Qaralayotgan kommutatorni oshkor yozsak,

$$[\hat{L}; \hat{M}^2] = \hat{L}\hat{M}^2 - \hat{M}^2\hat{L} = \hat{L}\hat{M}\hat{M} - \hat{M}^2\hat{L} = (\hat{M}\hat{L} + 1)\hat{M} - \hat{M}^2\hat{L}.$$

Oxirgi ifodani quyidagicha yozamiz:

$$(\hat{M}\hat{L} + 1)\hat{M} - \hat{M}^2\hat{L} = \hat{M}\hat{L}\hat{M} + \hat{M} - \hat{M}^2\hat{L} = \hat{M}(\hat{M}\hat{L} + 1) + \hat{M} - \hat{M}^2\hat{L}$$

Bundan

$$\hat{M}(\hat{M}\hat{L} + 1) + \hat{M} - \hat{M}^2\hat{L} = \hat{M}^2\hat{L} + \hat{M} + \hat{M} - \hat{M}^2\hat{L} = 2\hat{M}$$

ekanligi kelib chiqadi.

12. $[\hat{L}; \hat{M}] = 1$ ekanligi ma'lum bo'lsa $[\hat{L}^2; \hat{M}^2] = 2(\hat{L}\hat{M} + \hat{M}\hat{L})$ bo'lishini ko'rsating.

Javobi. Komutatorning quyidagi xossalaridan foydalanamiz:

$$[\hat{A}, \hat{B}\hat{C}] = \hat{B}[\hat{A}, \hat{C}] + [\hat{A}, \hat{B}]\hat{C};$$

$$[\hat{A}^2; \hat{B}^2] = \hat{A}[\hat{A}, \hat{B}^2] + [\hat{A}, \hat{B}^2]\hat{A}$$

Birinchi xossadan

$$[\hat{L}; \hat{M}^2] = [\hat{L}, \hat{M}\hat{M}] = \hat{M}[\hat{L}, \hat{M}] + [\hat{L}, \hat{M}]\hat{M} = 2\hat{M}.$$

Ikkinchi xossadan

$$[\hat{L}^2; \hat{M}^2] = \hat{L}[\hat{L}, \hat{M}^2] + [\hat{L}, \hat{M}^2]\hat{L} = \hat{L} * 2\hat{M} + 2\hat{M} * \hat{L} = 2(\hat{L}\hat{M} + \hat{M}\hat{L}).$$

ekanligi ayon. Demak

$$[\hat{L}^2; \hat{M}^2] = 2(\hat{L}\hat{M} + \hat{M}\hat{L})$$

o'rinli. Bunda avvalgi masala natijasidan foydalanish ham mumkin edi.

10. $\frac{d^2}{dx^2} x^2$ operatorining $\psi(x) = \sin x$ funksiyasiga ta'sirini toping.

Javobi. Berilgan operatorni $\psi(x)$ funksiyaga ta'sir etkazamiz:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} (x^2 \psi(x)) &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} (x^2 \sin x) \right) = \frac{d}{dx} (2x \sin x + x^2 \cos x) \\ &= 2(\sin x + x \cos x) + (2x \cos x - x^2 \sin x) \\ &= 2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x. \end{aligned}$$

$\frac{d^2}{dx^2} x^2$ operatorini $\psi(x) = \sin x$ funksiyaga ta'sir etganda quyidagi yangi

funksiya hosil bo'lar ekan: $\frac{d^2}{dx^2} x^2 \psi(x) = 2 \sin x + 4x \cos x - x^2 \sin x.$

14. $\frac{d^2}{dx^2} x^2$ operatorini $\psi(x) = e^{2x}$ funksiyaga ta'sirini toping.

$$\begin{aligned}\frac{d^2}{dx^2} (x^2 e^{2x}) &= \frac{d}{dx} (2x e^{2x} + 2x^2 e^{2x}) = 2 \frac{d}{dx} (x e^{2x}) + 2 \frac{d}{dx} (x^2 e^{2x}) = \\ &= 2(e^{2x} + 2x e^{2x}) + 2(2x e^{2x} + 2x^2 e^{2x}) = 2e^{2x} + 4x e^{2x} + 4x e^{2x} + 4x^2 e^{2x} = \\ &= e^{2x} (2 + 8x + 4x^2) = 2e^{2x} (1 + 4x + 2x^2).\end{aligned}$$

Demak, $\frac{d^2}{dx^2} x^2$ operator $\psi(x) = e^{2x}$ funksiyaga ta'sir etsa

$$\frac{d^2}{dx^2} (x^2 e^{2x}) = 2e^{2x} (1 + 4x + 2x^2).$$

ko'rinishdagi yangi funksiya hosil bo'lar ekan.

15. $\hat{A} = \frac{d}{dx}$ operator uchun $e^{\alpha \hat{A}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n}$ operator tenglik o'rinli ekanligini ko'rsating, bunda α — ozgarmas son

Javobi. Operatorga bogliq funksiyaning Taylor qatoridan foydalanamiz:

$$f(\hat{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \hat{A}^n$$

Ushbu qatorni eksponensial funksiya uchun yozsak,

$$\begin{aligned}e^{\alpha \hat{A}} &= 1 + \alpha \hat{A} + \frac{\alpha^2}{2!} \hat{A}^2 + \dots + \frac{\alpha^n}{n!} \hat{A}^n + \dots = 1 + \alpha \frac{d}{dx} + \frac{\alpha^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} + \dots = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n}\end{aligned}$$

natijaga kelamiz.

16. $\hat{T}_a \psi(x) = \psi(x + a)$ parallel ko'chirish operatorini $\hat{P}_x$ impuls operatori orqali ifodalang.

Javobi. $\psi(x + a)$ funksiyani Taylor qatoriga yoyamiz:

$$\begin{aligned}\psi(x + a) &= \psi(x) + a \frac{d\psi(x)}{dx} + \frac{a^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} \psi(x) + \dots \\ &= \left(1 + a \frac{d}{dx} + \frac{a^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} + \dots \right) \psi(x) = \hat{T}_a \psi(x)\end{aligned}$$

Bundan

$$\hat{T}_a = 1 + a \frac{d}{dx} + \frac{a^2}{2!} \frac{d^2}{dx^2} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} = e^{a \frac{d}{dx}}$$

ekanligi ko'rinib turibdi. Agar $\hat{p}_x = i\hbar \frac{d}{dx}$ dan $\frac{d}{dx} = i \frac{\hat{p}_x}{\hbar}$ bo'lishini hisobga olsak,

$$\hat{T}_a = e^{\frac{i}{\hbar} a \hat{p}_x}$$

natijaga kelamiz.

17. $e^{nx \frac{d}{dx}}$ operatorining $\psi(x)$ funksiyaga ta'sirini aniqlang.

Javobi. Avvalgi masala natijasidan foydalanamiz, bunda $a = nx$:

$$e^{nx \frac{d}{dx}} \psi(x) = e^{\frac{i}{\hbar} nx p_x} \psi(x) = \psi(x + nx) = \psi([n + 1]).$$

18. Agar $\hat{A}$ va $\hat{B}$ operatorlar chiziqli bo'lsa, ularning $\hat{A} + \hat{B}$ yig'indisidan tashkil topgan operator ham chiziqli ekanini ko'rsating.

Javobi. Operatorning chiziqlilik shartini yodga olamiz. Agar

$$\hat{A}(C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2) = C_1 \hat{A} \Psi_1 + C_2 \hat{A} \Psi_2$$

Munosabat o'rinli bo'lsa, $\hat{A}$ operator chiziqli deyiladi. $\hat{B}$ operator ham chiziqli bo'lganligidan, quyidagi munosabat bajariladi:

$$\hat{B}(C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2) = C_1 \hat{B} \Psi_1 + C_2 \hat{B} \Psi_2$$

Agar $C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2$ ifodaga $\hat{A} + \hat{B}$ yig'indi operator bilan ta'sir etsak, yuqoridagi chiziqlilik xossasidan

$$(\hat{A} + \hat{B})(C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2) = C_1 (\hat{A} + \hat{B}) \Psi_1 + C_2 (\hat{A} + \hat{B}) \Psi_2$$

Ekanligi ko'rinib turibdi. Ya'ni $\hat{A} + \hat{B}$ yig'indi operator ham chiziqli.

19. $\hat{K} \Psi = \Psi^*$ kompleks qo'shma oluvchi $\hat{K}$ operator chiziqlimi?

Javobi. Qandaydir $\hat{A}$ operator chiziqli bo'lishi uchun

$$\hat{A}(C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2) = C_1 \hat{A} \Psi_1 + C_2 \hat{A} \Psi_2$$

munosabat o'rinli bo'lishi kerak. $\hat{K}$ kompleks qo'shma olish operatori bilan $C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2$ funksiyaga ta'sir etaylik:

$$\hat{K}(C_1 \Psi_1 + C_2 \Psi_2) = C_1^* \Psi_1^* + C_2^* \Psi_2^* = C_1 \hat{K} \Psi_1 + C_2 \hat{K} \Psi_2$$

$C_1 \neq C_1^*$ va $C_2 \neq C_2^*$ ekanligidan, chiziqlilik sharti bajarilmadi. Shu sabab kompleks qo'shma oluvchi operator chiziqli emas.

20. $\hat{K} \psi = \psi^*$ kompleks qo'shma oluvchi $\hat{K}$ operator Hermitmi?

Javobi. Aytaylik, $\hat{K}$ –to‘lqin funksiyalarning Hilbert fazosida kompleks qo‘shma oluvchi operator bo‘lsin:

$$(\hat{K}\psi)(x) = \psi^*(x)$$

1) $\hat{K}$ anti - chiziqli (chiziqli emas). Ixtiyoriy α kompleks son va ψ vektor uchun

$$\hat{K}(\alpha\psi) = \alpha^*\psi^* = \alpha^*\hat{K}\psi,$$

ya‘ni skalyar kompleks qo‘shmasiga aylanadi. Muhim hol, $\hat{K}\psi \neq 0$ bo‘lganda

$$\hat{K}(i\psi) = (i\psi)^* = -i\psi^* = -i\hat{K}\psi \neq i\hat{K}\psi$$

Bu xossa kompleks qo‘shma oluvchi $\hat{K}$ operator anti-chiziqli ekanligini ko‘rsatadi.

2) Ixtiyoriy Hermit operator chiziqli bo‘lishi zarur. $\hat{A} = \hat{A}^\dagger$ xossali $\hat{A}$ operator Hermit deyiladi. Har qanday α skalyarlar va ψ vektorlar uchun chiziqlilik quyidagicha aniqlanadi:

$$\hat{A}(\alpha\psi(x)) = \alpha\hat{A}\psi(x).$$

3) Xulosa: kompleks qo‘shma oluvchi $\hat{K}$ operator chiziqli emas, u o‘ziga qo‘shma Hermit operator ta‘rifini qanoatlantirmaydi. Demak, $\hat{K}$ Hermit operator emas.

Skalyar ko‘paytma misolida ham kompleks qo‘shma oluvchi operator Hermit emasligini ko‘rsatish mumkin. Agar $\hat{A}$ chiziqli Hermit operator bo‘lsa, ixtiyoriy ψ_1, ψ_2 vektorlar uchun

$$\int \psi_1^*(x)\hat{A}[\alpha\psi_2(x)]dx = \alpha \int \psi_1^*(x)\hat{A}[\psi_2(x)]dx$$

tenglik bajariladi. Lekin

$$\int \psi_1^*(x)\hat{K}[\alpha\psi_2(x)]dx = \int \psi_1(x)[\alpha\psi_2(x)]^*dx = \alpha^* \int \psi_1^*(x)\hat{K}[\psi_2(x)]dx$$

ifodada $\alpha \neq \alpha^*$. Bundan kompleks qo‘shma oluvchi operator Hermit emasligi kelib chiqadi.

Izoh. Kompleks qo'shma oluvchi $\hat{K}$ operator "anti-unitar" operatorga misol bo'lib, u fizikada vaqt ishorasini o'zgartirishda muhimdir. Lekin, anti-unitar operatorlar anti-chiziqli ekanligidan, ular Hermit operatorlar emas.

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MASALALAR

1. $\hat{A} = x^2 \frac{d^2}{dx^2}$ va $\hat{B} = x^3 \frac{d^2}{dx^2}$ bo'lsa, $[\hat{A}, \hat{B}]$ kommutatorni hisoblang.

2. $\hat{L}$ va $\hat{M}$ operatorlar Hermit bo'lsa, $\hat{F} = (\hat{L}\hat{M} + \hat{M}\hat{L})/2$ formula bilan aniqlangan $\hat{F}$ operator ham Hermit operator ekanligini ko'rsating.

3. $\hat{A} = x \frac{d}{dx}$ va $\hat{B} = xe^x \frac{d}{dx}$ bo'lsa, $[\hat{A}, \hat{B}]$ kommutatorni hisoblang.

4. $\left(\frac{d}{dx} + x\right)^3$ va $\left(x \frac{d}{dx} x\right)^3$ operatorlar qavslarini oching.

5. $\hat{L}$ va $\hat{M}$ operatorlar Hermit bo'lsa, $\hat{F} = (i/2)(\hat{L}\hat{M} - \hat{M}\hat{L})$ formula bilan aniqlangan $\hat{F}$ operator ham Hermit operator ekanligini ko'rsating.

6. $\hat{A} = \exp(-x) \frac{d}{dx}$ va $\hat{B} = \exp(x) \frac{d}{dx}$ bo'lsa, $\{\hat{A}, \hat{B}\}$ kommutatorni hisoblang.

7. $\hat{a} = (1/\sqrt{2\hbar\omega})(\omega\hat{q} + i\hat{p})$, $\hat{a}^\dagger = (1/\sqrt{2\hbar\omega})(\omega\hat{q} - i\hat{p})$ va $[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar$ bo'lsa, $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$ ni hisoblang.

8. $[\hat{A}, \hat{B}] = C$ bo'lsa, $\exp[\xi\hat{A}] \cdot \hat{B} \cdot \exp[-\xi\hat{A}] = \hat{B} + \xi C$ ekanligini ko'rsating.

Bunda C – oddiy son.

9. $\frac{i\hbar}{m} \hat{p} = \hat{r} \cdot \hat{H} - \hat{H} \cdot \hat{r}$ munosabat o'rinli bo'lishini isbotlang. Bunda

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(r).$$

10. Fononlarni yo'qotish va yaratish operatorlari orasidagi kommutator $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1$ va garmonik oscillator gamiltoniani $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger\hat{a} + 1/2)$

ekanini bilgan holda $\frac{d\hat{a}}{dt}$ va $\frac{d\hat{a}^\dagger}{dt}$ larni hisoblang.

11. $\frac{d}{dx} + x$ operatorini kvadratga ko'taring.

12. $\frac{d}{dx} + \frac{1}{x}$ operatorini kubga ko'taring.
13. $(x \frac{d}{dx})^2$ va $(\frac{d}{dx} x)^2$ operatorlarini taqqoslang.
14. $i\vec{k}\vec{V} + \vec{A}(\vec{r})$ operatorini kvadratga ko'taring.
15. $\frac{d}{dx} x - x \frac{d}{dx}$ komutatorini toping.
16. $\psi(x)$ ni $\psi(x + a)$ ga o'tkazadigan operatorini toping.
17. $\psi(\vec{r})$ ni $\psi(\vec{r} + \vec{a})$ ga o'tkazadigan operatorini toping.

XULOSA

Kvant mexanikasi — bu mikroolam qonuniyatlarini tushuntiruvchi, deterministik emas, balki ehtimollik asosida ishlovchi zamonaviy fizik nazariya bo'lib, u klassik fizika bilan ifodalanmaydigan ko'plab hodisalarni chuqur izohlashga imkon yaratadi. Ayniqsa, kvant mexanikasining matematik tuzilmasini tashkil etuvchi operatorlar nazariyasi fizik observablarni ifodalash, ularni o'lchash va analiz qilishda markaziy o'rinda turadi [6,7,8].

Ushbu metodik qo'llanmada kvant mexanikasida qo'llaniladigan asosiy operatorlar koordinata, impuls, energiya (Hamiltonian), impuls momenti, spin operatorlari ularning matematik ifodalari, fizikaviy mazmuni va amaliy qo'llanishi ketma-ket yoritildi. Shuningdek, operatorlarning kommutatsiya munosabatlari, Heisenberg noaniqlik printsipli, xususiy qiymatlar va xususiy funksiyalar nazariyasi, Hilbert fazosi kabi tushunchalar talaba va o'qituvchilarga mantiqiy ketma-ketlikda yetkazildi [6,8,11].

Operatorlar yordamida tuziladigan Shredinger tenglamasi kvant sistemalarning rivojlanishini ta'riflab beradi. Bu tenglama orqali kvant holatlar (to'lqin funksiyalar) va ularning fizikaviy mazmuni aniqlanadi. Talabalar bu tenglama bilan ishlashda impuls operatorining differensial ko'rinishini, Hamiltonian orqali energiya spektrini hisoblashni o'zlashtirishdi [6,7,9]. Shuningdek, metodik qo'llanmaning asosiy afzalliklaridan biri — amaliy mashqlar va misollar bilan boyitilganidir. Har bir operatorning qanday ishlashi, qanday algebraik xossalarga ega ekani, qanday natijalar berishi misollar orqali amaliy ko'rsatildi. Bu yondashuv talabalarda mustaqil fikrlash, operatorlar bilan ishlash va tahliliy yondashuv ko'nikmalarini shakllantiradi [3,6,10].

Operatorlar nazariyasi, shubhasiz, kvant mexanikasining ichki tuzilmasini anglashda kalit vosita bo'lib, u faqat fizikani emas, balki

matematika, kompyuter ilmlari, kvant kimyosi, kvant informatikani o'z ichiga oluvchi tarmoq fanlar bilan ham bevosita integratsiyada ishlaydi [7,10,12]. Shuning uchun ushbu mavzuni chuqur va puxta o'rganish talabalarni yuqori darajadagi kasbiy kompetensiyaga ega bo'lishiga xizmat qiladi.

Yuqoridagi barcha mulohazalar, misollar, grafiklar va formulalar orqali talabalar kvant operatorlarining nazariy asoslari bilan birga, ularning amaliyotdagi real qo'llanilishini ham to'laqonli tushunishadi. Bu esa ta'lim sifatini oshirish, o'quv dasturlarini zamonaviylashtirish va talabaning ilmiy dunyoqarashini shakllantirishga bevosita ta'sir qiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Griffiths D.J. – *Introduction to Quantum Mechanics*. Pearson, 2nd ed., 2004.
2. Sakurai J.J., Napolitano J. – *Modern Quantum Mechanics*. Cambridge Univ. Press, 2017.
3. Landau L.D., Lifshitz E.M. – *Quantum Mechanics: Non-Relativistic Theory*. Pergamon Press, 1977.
4. Iridov I.X. – *Kvant fizika kursi*. Toshkent: O'zMU, 2002.
5. Qodirov F.M. – *Kvant mexanikasi nazariyasi asoslari*. Toshkent: Fan, 2013.
6. Salaev F.A., Mamatkarimov O.H. – *Kvant mexanikasidan masalalar*. Toshkent: O'qituvchi, 2000.
7. Amanov M.T. – *Kvant mexanikasi*. Toshkent: Fan va texnologiya, 2010.
8. Shokirov F.H. – *Kvant mexanikasiga kirish*. Toshkent: O'zbekiston FA, 1995.
9. Messiah A. – *Quantum Mechanics*. Dover Publications, 1999.
10. Dirac P.A.M. – *The Principles of Quantum Mechanics*. Oxford Univ. Press, 1958.
11. Cohen-Tannoudji C., Diu B., Laloë F. – *Quantum Mechanics*. Wiley-VCH, 1977.
12. von Neumann J. – *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics*. Princeton Univ. Press, 1955
13. MIT OCW – *Quantum Physics I (8.04)*. <https://ocw.mit.edu>

Tavsiya qilingan adabiyotlar ro'yxati

1. О. Қодиров, А. Бойдедаев. Квант физика. Тошкент. Ўзбекистон Миллий Кутубхонаси. 2005.
2. Э.В.Шпольский. Атомная физика. 1- и 2- том. М.: Наука -1973
3. Д.И.Сивухин. Общий курс физики. Атомная и ядерная физика. Том 5, часть 1 и 2. М.: Наука, 1989
4. Э.А.Нерсесов. Основные законы атомной и ядерной физики. М.: Высшая школа, 1988
5. Л.Л.Голдин, Г.И.Новикова. Введение в квантовую физику. М.: Наука, 1988
6. А.Н.Матвеев. Атомная физика, М.: Высшая школа. 1989 г.
7. И.В.Савельев. Курс общей физики. Том 3. М.: 1989
8. О.Ахмаджанов. Физика курси. 3-том. Т.: «Ўқитувчи», 1987

9. Э.Н. Расулов. У.Ш.Бегимкулов. Ш.Х. Ахмаджанова. Ш.М. Адашбоев. Квант физикадан масалалар тўплами. Электрон ўқув кўлланма. 290 бет. 2005 й ТДПУ порталида: www.pedagog.uz
10. S.Flügge. Practical quantum mechanics. Springer-Verlag (Berlin) - 1994 (З.Флюгге. Задачи по квантовой механики. Т. 1 и 2, Москва “Мир” - 1974)
11. И.Е.Иродов. Сборник задач по атомной и ядерной физике. М.: 1966
12. Э.Расулов ва б. Квант физикасидан масалалар тўплами. Тошкент “Фан” - 2006
13. Р. Бобожонов. А. М. Худайбергенов, Г. А. Кочетков. Атом физикасидан масалалар ечиш учун кўлланма. Тошкент. Университет. 1993
14. I.M.Eshboltayev, R.Ya.Rasulov. Kvant mexanika. T., “Ilm-fan” nashriyoti, 2023. - 606 b.
15. M.M.Musaxanov, A.S.Rahmatov. Nazariy fizika kursi, 3- jild Kvant mexanikasi. T.: Tafakkur bo`stoni, 2011
16. Г.Х.Хошимов, Р.Я.Расулов, Н.Х. Йўлдошев. Квант механика асослари. Т., «Ўқитувчи», 1995
17. E.Rasulov , U.Begimqulov. Kvant fizikasi, 1- va 2- tomilar, T., “Fan va texnologiya”, 2009 y.
18. Л.Д. Ландау, Е.М.Лифшиц. Квантовая механика. 3- том, Нерелятивистская теория. М.: «Наука», 2004
19. Д.И.Блохинцев. Основы квантовой механики. М.: Лань, 2004
20. В.В.Мултановский, А.С.Василевский. Курс теоретической физики: Квантовая механика. М.: Просвещение, 1991
21. David J.Griffiths. Introduction to quantum mechanics. New Jersey, Prentice Hall, Inc., 1995
22. Alastair I. M. Rae. Quantum Mechanics. IOP Publishing, Bristol and Philadelphia, 2002. p. 310
23. А.С.Давыдов. Квантовая механика. М.: Наука, 1973
24. А.А. Соколов, Ю.М. Лоскутов, И.М. Тернов. Квантовая механика. М.: Уч.-пед. Издв МП РСФСР, 1962
25. И.В.Савельев. Основы теоретической физики. том 2 Квантовая механика, М.: Наука, 1977

26. П.С.Парфенов. Квантовая механика. Методическое пособие к практикуму по квантовой физике. - СПб: НИУ ИТМО, 2012. - 133 с.
27. Л.Г.Гречко и др. Сборник задач по теоретической физике. М., «Высшая школа». 1984
28. G.L.Squires. Problems in quantum mechanics with solutions. Cambridge.: Cambridge University Press, 2002
29. И. Е. Иродов. Сборник задач по квантовой физике. Москва. Энергоатомиздат. 1997.

Internet saytlari

1. www.tdpu.uz
2. www.pedagog.uz
3. www.ziyonet.uz
4. www.edu.uz
5. www.uzedu.uz
6. www.physicsworld.org
7. www.phys.org

MUNDARIJA

Kirish.....	3
1-&. Operatorlar nazariyasiga kirish.....	5
1.1.Operatorlar tushunchasi	5
1.2.Operatorlarning asosiy turlari	5
1.3.Xususiy qiymatlar va xususiy funksiyalar	6
1.4.Hilbert fazosi va to'liqlik	6
1.5.Kvant mexanikasida operatorlar algebrasi.....	7
2-&. Asosiy fizikaviy miqdorlarning operatorlari.....	8
2.1 Koordinata operatori.....	8
2.2 Impuls operatori	8
2.3 Energiya operatori	9
2.4 Impuls momenti operatori	10
2.5 Spin operatorlari	10
3-&. Kommutator va kommutativ operatorlar.....	11
3.1 Kommutator tushunchasi.....	11
3.2 Heisenberg noaniqlik printsipli	12
3.3 Kommutator xossalari	12
3.4 impuls momenti operatorining kommutatorlari	13
3.5 Spin operatorining kommutatorlari	13
3.6 Kommutatorning fizikaviy talqini	14
4-&. Schredinger tenglamasining operator ko'rinishi.....	15
4.1 statsionar Schredinger tenglamasi.....	15
4.2 Nostatsionar Shredinger tenglamasi	16
4.3 Kvant garmonik oscillyator.....	16
4.4 Fizikaviy miqdorlar operatorlari	17
4.5 Dirac $\langle bra ket \rangle$ belgilashlari	17
4.6 To'lqin funksiyaning fizikaviy talqini	18
5-&. Masalalar.....	19
6-&. Mustaqil yechish uchun masalalar.....	28
Xulosa.....	30
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.....	32
Mavzuga oid tavsiya qilingan adabiyotlar ro'yxati.....	32

Tuzuvchilar:

B.Ya. Yavidov – Ajiniyoz nomidagi Nukus davlat pedagogika instituti Aniq fanlar fakulteti “Fizika” kafedrası professori v.v.b., fizika-matematika fanlari doktori (DSc).

M.M. Nishonov – Mirzo Ulugʻbek nomidagi Oʻzbekiston Milliy universiteti, Fizika fakulteti, “Nazariy fizika” kafedrası dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi.

A.S. Jalekeshov – Ajiniyoz nomidagi Nukus davlat pedagogika instituti Aniq fanlar fakulteti “Fizika” kafedrası katta oʻqituvchisi, fizika-matematika fanlari boʻyicha falsafa doktori (PhD).

D.Gʻ. Xajibayev – Ajiniyoz nomidagi Nukus davlat pedagogika instituti Aniq fanlar fakulteti “Fizika” kafedrası assistent oʻqituvchisi, fizika-matematika fanlari boʻyicha falsafa doktori (PhD).

KVANT MEXANIKASIDA OPERATORLAR

QOʻLLANILISHI

(uslubiy qoʻllanma)

Bas redaktor: *K. M. Koshanov*

Tex. redaktor: *A. A. Tórebekova*

Korrektor: *A. T. Umirbekova*

Operator: *N. Nisanbaev*

Ájiniyaz atındađı NMPI redakciya-baspa bólimi
Ájiniyaz atındađı NMPI baspaxanasında basılđan. 2025-j.
Buyırtpa №0266. Nusqası 50 dana. Formatı 60x84., kólemi 2,25 b.t.
230105, Nókis qalası, P. Seyitov kóshesi. Reestr №083296