

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI**

**NIZOMIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT PEDAGOGIKA
UNIVERSITETI**

Qo'l yozma huquqida

UDK 51:371.3

Yodgorov Eldor Inoyatovich

**“TOPOLOGIK FAZOLARDA HARAKATLANAYOTGAN
KOVARIANT FUNKTORLARNING O'LCHAMLILIK VA SHEYPLIK
XOSSALARINI O'RGANISH”**

5A110101-Matematika o'qitish metodikasi

Magistrlik akademik darajasini
olish uchun yozilgan dissertatsiya

Himoyaga tavsiya etaman
Magistratura bo'lim boshlig'i

_____ **M.Esanov**

2014 y. «_____»

**“Matematika va uni o'qitish
metodikasi”** kafedrası mudiri

_____ **R.B.Beshimov**

Ilmiy rahbar _____

f.-m.f.n.,dots. T.F.Jo'rayev

Toshkent-2014

MUNDARIJA:

Kirish	3
I Bob. Topologik fazolar va kovariant funktorlar	8
1. Topologik fazolar. Misollar.....	8
2. Metrik fazolar. Misollar.....	20
Topologik fazolarda kovariant funktorlar.....	23
4. Chekli eltuvchili normal kovariant funktorlar.....	29
5. Extimol o'lchovli funktorlar va ularning qism funktorlari.....	32
6. Gomotopik grupp funktorlari.....	40
I bob bo'yicha umumiy xulosalar.....	43
II bob . Topologik fazolarning o'lchamlari va funktorlar	44
1. Topologik fazolarda <i>ind</i> o'lchami va xossalari.....	44
2. Topologik fazolarda <i>dim</i> o'lchami va xossalari.....	47
3. Qo'zg'almas nuqta haqida Brauer teoremasi va uning tadbiqu.....	49
4. Fazoning <i>ind</i> , <i>Ind</i> va <i>dim</i> o'lchamlarining o'zaro bog'liqliklari.....	58
5. R^n fazo va uning fazo ostilari o'lchami. Chiziq ta'rifi.....	62
II bob bo'yicha umumiy xulosalar.....	68
III bob. Topologik fazolarda sheyp tushunchasi va chekli eltuvchili kovariant funktorlar	69
1. Kompakt topologik fazoda retrakt tushunchasi.....	69
2. Kompakt topologik fazoda sheyp tushunchasi.....	75
3. Chekli eltuvchili kovariant funktorlar va kompaktning sheypi	80
4. Chekli darajali ochiq va yopiq kovariant funktorlarning ba'zi xossalari.....	90
III bob bo'yicha umumiy xulosalar.....	92
Umumiy xulosalar	93
Foydalanilgan adaboyotlar	95
GLOSSARIY	

Kirish.

Mavzuning dolzarbligi: Vatanimiz mustaqillikka erishgach, Prezidentimiz Islom Karimov rahnamoligida ta'lim tizimini tubdan takomillashtirish, yoshlarga jahon andozalari darajasida bilim berish, yuksak intellektual salohiyatli, boy dunyoqarashga ega barkamol avlodni tarbiyalash davlat siyosatining ustuvor yo'nalishiga aylandi.

Prezidentimiz ushbu sohada respublikamiz mustaqillikka erishish arafasidan e'tibor qaratdilar: "Fan mustahkam bazis negizidagina samarali rivojlanishi mumkin. Shu munosabat bilan sizlarning e'tiboringizni xalq ta'limi butun sistemasini, eng avvalo, oliy maktabni isloh qilish zarurligiga qaratmoqchiman"¹.

Prezidentimiz ta'limning jamiyat rivojidadagi o'rniga "Shuni unutmasligimiz kerakki, kelajagimiz poydevori bilim dargohlarida yaratiladi, boshqacha aytganda, xalqimizning ertangi kuni qanday bo'lishi farzandlarimizning bugun qanday ta'lim va tarbiya olishiga bog'liq"² deya baho berdilar.

Bosib o'tilgan 20 yil mobaynida ta'lim sohasida amalga oshirilayotgan islohotlar samaralari, to'plangan tajribalar bilan keng jamoatchilikni tanishtirish maqsadida 16-17 fevral kunlari Toshkentda "Yuksak bilimli va intellektual rivojlangan avlodni tarbiyalash – mamlakatni barqaror taraqqiy ettirish va modernizatsiya qilishning muhim sharti" mavzuidagi xalqaro konferensiya katta muvaffaqiyat bilan o'tdi. Prezidentimiz ushbu konferensiyada so'zlagan nutqlarida ta'lim sohasida amalga oshirilgan ishlar, qo'lga kiritilgan yutuqlarni ta'kidlab o'tar ekanlar, kelgusida amalga oshirilishi lozim bo'lgan vazifalarni ham belgilab berdilar.

Yoshlarning bilim olishlari uchun yaratilayotgan sharoit, katta e'tibor ularga katta mas'uliyat ham yuklaydi.

¹ Karimov I. O'zbekiston mustaqillikka erishish ostonasida. Toshkent. "O'zbekiston" - 2011., 440b.

² Karimov I. Yuksak ma'naviyat yengilmas kuch. Toshkent. "Ma'naviyat"- 2008., 175b.

Ta'lim O'zbekiston xalqi ma'naviyatiga yaratuvchilik faolligini baxsh etadi. O'sib kelayotgan avlodning barcha eng yaxshi imkoniyatlari unda namoyon bo'ladi, kasb-kori, mahorati, uzluksiz takomillashadi, katta avlodlarning dono tajribasi anglab olinadi va yosh avlodga o'tadi. Yoshlar, ularning iqtidorliligi va bilim olishga chanqoqligidan ta'lim va ma'naviyatni tushunib yetish boshlanadi.

“Ma'rifat – ma'naviyatga olib keladigan yo'l”. Bugun qilayotgan yaxshi ishlarimiz kelgusi avlod barkamolligi uchun xizmat qilishi shubhasiz. Bugun qanday ko'chat eksak, ertaga shunday meva olamiz. Yosh avlodni el-yurtga, Vatanga sadoqatli, iymon-e'tiqodli, mard va jasur, yuqori malakali, ma'naviyati yuksak insonlar qilib tarbiyalashda ta'lim o'choqlarining alohida o'rni bor

“Fazandlarimiz bizdan ko'ra bilimli, kuchli, dono va albatta baxtli bo'lishlari shart”. Takror aytaman: manashu ezgu maqsad bugungi kunda har birimizning hayotimiz mazmuniga aylanishi darkor ¹.

Ilmda hamjihatlik va hamkorlik, tug'ilgan yangi g'oyalarni vaqtida to'g'ri baholay bilish, eng maqbul va samarali g'oyalarni qo'llab-quvvatlash oliy fazilatdir. Bu - ijod kishisining nufuzini oshiradigan noyob imkoniyat .

Kadrlar tayyorlash tizimiga ilm-fanning uzviy ravishda kirib borishi uchun quyidagilar zarur:

- kadrlar tayyorlash milliy dasturini samarali tarzda bajarishni ta'minlash yuzasidan ilmiy-tadqiqot ishlarini olib borish;
- yuqori malakali kadrlar tayyorlash sifatini oshirish, yoshlarning ilmiy ijodiyotini har tomonlama qullab quvvatlash² .

O'zbekiston Respublikasining ta'lim tizimi quyidagilarni o'z ichiga oladi:

- davlat ta'lim standartlariga muvofiq ta'lim dasturlarini amalga oshiruvchi davlat va nodavlat ta'lim muassasalari;

¹ Karimov. I. Yangicha fikrlash va ishlash davr-talabi. Asarlar, 5-jild. Toshkent. “O'zbekiston” - 1997., 382b.

² O'zbekiston Respublikasi. “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” // Barkamol avlod //O'zbekiston taraqqiyotining poydevori. – T.:1998., 64b.

- ta'lim tizimining faoliyat ko'rsatishi va rivojlanishini ta'minlash uchun zarur bo'lgan tadqiqot ishlarini bajaruvchi ilmiy-pedagogik muassasalar;
- ta'lim sohasidagi davlat boshqaruv organlari, shuningdek ularga qarashli korxonalar, muassasalar va tashkilotlar.

O'zbekiston Respublikasining ta'lim tizimi yagona va uzluksizdir ¹.

Hozirgi zamon matematika fanlarining rivojlanishida topologiyaning qolaversa fizikada, biologiyada, ximiya va geografiya fanlaridagi tatbig'i keng qo'llanilmoqda.

Topologiya shunday fanki, u geometrik figuralarning sifatiy xossalarini faqat uch o'lchamli fazolarda emas, balki undan yuqori o'lchamli fazolarda ham o'rganishga yordam beradi.

Hozirgi kunga kelib topologiya matematik tadqiqotlarning mustahkam quroliga aylandi. Topologiyaning fizikada, mexanikada va boshqa fanlarda kompleks qo'llanilishi fakt bo'lib qoldi. Fizikada ba'zi real holatlarni topologiyasiz hal etib bo'lmaydi. Teskari holat ham uchrab turadi, ya'ni fizikadagi ba'zi muammolar topologiyaning rivojlanishiga ta'sir etmoqda.

Topologik fazolarning o'lchami, bazasi, zichligi, quvvati va fazolarda kovariant funktoirlar tushunchalari topologiya va geometriya fanida asosiy hisoblanadi. Yuqoridagi omillarni hisobga olib topologiya fani va topologik fazolardagi harakatlanyotgan kovariant funktoirlarning o'lchamlilik va sheyplik xossalarini o'rganishga bag'ishlangan ushbu magistrlik dissertatsiyasi ishi mavzusi dolzarb hisoblanadi.

Tadqiqot ob'ekti: Oliy ta'lim muassasalarida umumiy topologiya fanini o'rganish.

Tadqiqot predmeti: Topologik fazolarda harakatlanayotgan ba'zi kovariant funktoirlarning o'lchamlilik va sheyplik xossalarini o'rganish.

¹ O'zbekiston Respublikasi. "Ta'lim to'g'risidagi qonun" // Barkamol avlod – O'zbekiston taraqqiyotining poydevori. – T.:1998., 64b.

Magistrlik dissertatsiyasining maqsadi: Topologik fazolarni, topologik fazolarda harakatlanayotgan ba'zi kovariant funktoirlarning o'lchamlilik va sheyplik xossalari o'rganish nazariyasini ishlab chiqish.

Magistrlik dissertatsiyasining vazifalari: Tadqiqot maqsadidan kelib chiqqan holda quyidagi vazifalar belgilandi:

- Topologik fazolarda kovariant funktoirlarni tadqiqot qilish;
- Topologik fazolarni va ularning berilish usullarini taxlil qilish;
- Topologik fazolarda normal kovariant funktoirlar o'rganish;
- Topologik fazolarda ind o'lchami va xossalari umumlashtirish;
- Kompakt Topologik fazolarda retrakt tushunchasini o'rganish;
- Kompakt Topologik fazolarda sheyp tushunchasini o'rganish;

Mavzuning o'rganilganlik darajasi: P.S. Aleksandrov, P.S. Urison, M.Suslin, V.Komfort va bir qancha etuk olimlar ilmiy izlanishlar olib borgan. Bundan tashqari respublikamizdagi olimlardan SH.Ayupov, T.Jo'raev, R.Beshimov, D.Davletov, M.Madrimov, U.Toshmetov, A.Zaitovlar tomonidan olib borilgan bir qancha ilmiy ishlarda topologik fazolarda harakatlanayotgan ba'zi kovariant funktoirlarning o'lchamlilik va sheyplik xossalari o'rganilgan.

Tadqiqotning nazariy asoslari: O'zbekiston Respublikasi "Ta'lim to'g'risida"gi qonuni, "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi", O'zbekiston Respublikasi Prezidenti I.A. Karimovning kadrlar tayyorlash tizimini takomillashtirishga bag'ishlangan asarlari, farmonlari, O'zbekiston Respublikasi Vazirlar Mahkamasi tomonidan ta'limga oid, kadrlar tayyorlash muammolariga, kasb – hunar ta'limini takomillashtirish bo'yicha chiqarilgan qarorlari ijrosini ta'minlash maqsadida uzluksiz oliy ta'lim muassasalarida umumiy topologiya fanini o'rganish.

Tadqiqotning amaliy ahamiyati: Dissertatsiya bo'yicha olingan natijalar nazariy ahamiyatga ega bo'lib, ular umumiy topologiya bo'yicha kovariant funktoirlar bo'limida hamda OTMda kovariant funktoirlarni o'rganish jarayonida qo'llanilishi mumkin.

Tadqiqotning ilmiy yangiligi:

1. Topologik fazolarda harakatlanayotgan ba'zi kovariant funktorlarning o'lchamlilik va sheyplik xossalari jamlandi.
2. Topologik fazolarda harakatlanayotgan ba'zi kovariant funktorlarning o'lchamlilik va sheyplik xossalarini o'rganish nazariyasi sistematik ravishda bayon qilindi.
3. Topologik fazolarda o'lcham tushunchasini o'rganish nazariyasini ishlab chiqildi.

Kutilayotgan natijalar va muammo yechimlari: Topologik fazolar kovariant funktorlari va ularning xossalari jamlanadi, kovariant funktorlar va ularning xossalari nazariyasi sistematik ravishda bayon qilinadi. Ma'lum kovariant funktolar uchun kompakt fazolarning sheyplik va o'lchamlilik xossalarini isbotlash.

Magistrlik dissertatsiyasining strukturaviy tuzilishi:

Kirish, uch bob, xulosa, foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan tashkil topgan.

Tajriba-sinov maydonchasi:

Nizomiy nomidagi TDPU ning fizika-matematika fakulteti.

I bob Topologik fazolar va kovariant funktorlar

1. Topologik fazolar. Misollar

Ko'pgina matematik tushunchalar, ba'zida butun bir matematik nazariyalar vujudga kelishi bilan matematikadan tashqarida bir qancha vaqt davomida o'z tatbig'ini topmaydi. Jumboqli kompleks sonlar tarixi bunga yaqqol misol bo'ladi: ushbu sonlar bir necha yuz yillar mobaynida boshqa sohalarida qo'llanilmay, keyinchalik fizika va mexanikaga kirib keldi. Shunga o'xshab, matematikaning asosiy bo'g'ini bo'lmish geometriya fanini oladigan boisak, bu sohada noevklid (Lobachevskiy) geometriyaning asosiy obyektlari - Lobachevskiy tekisligi va fazosi (Lobachevskiy tekisligi modeli) ham bir necha o'n yillar davomida o'z tatbig'ini topmagan.

Shunga o'xshash sohalaridan yana biri **Evklid geometriyasi, Lobachevskiy geometriyasi, zamonamiz geometriyasi**, qolaversa, zamonaviy matematikaning bir bo'limi, hosilasi bo'lgan topologiya fanidir. Topologiya so'zining lug'aviy ma'nosi yunoncha $\tau\omicron\pi\zeta$ - joy (o'rin), $\lambda\omicron\gamma\omicron\varsigma$ - qonun so'zlaridan iborat.

Topologiya atamasini birinchi bo'lib Listing qo'llagan. Topologiya - matematikaning nisbatan "yosh" va muhim bo'limlaridan biridir. Topologiya fani geometriya va matematik analiz fanlarining qator fundamental faktlarini (tushunchalarini) umumiy nuqtai nazardan qayta ko'rib chiqish natijasida paydo bo'ldi.¹

Topologiya fan sifatida ilk marta XIX asrning oxirlarida buyuk fransuz matematigi Anri Puankare ishlarida shakllana boshlagan. U topologiyani "analysis situs" (lotinchadan tarjimasi -joy (o'rin) geometriyasi) tahlili deb nomlanadi. Bu atamani esa, matematikaga birinchi bo'lib Listing olib kirgan. Keyinchalik bu atamalar bir so'z bilan *topologiya* deb atala boshlandi.

A. Puankare topologiya to'g'risida shunday degan edi: "O'zimga keladigan bo'lsam, oldinma-ketin kirib chiqqan turfa yo'llar meni **"analysis**

¹ Jo'rayev T.F. Topologiyaga kirish. Funktorlar. O'lchamlar. Chiziqlar, T.Tafakkur- bo'stoni,2012.,240b

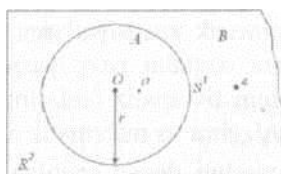
situs” tomon boshlab keldi”.

Bu o‘rinda mashhur fransuz matematigi Andre Veylning topologiya xususida aytgan quyidagi so‘zlari ham e‘tiborga loyiqdir: “Har bir matematikning qalbini zabt etish ustida topologiya farishtasi bilan mavhum algebra shaytoni kurash olib boradi. Bu orqali, birinchidan, topologiyaning ajoyib jozibasi va go‘zalligi namoyon bo‘lsa, ikkinchidan, barcha zamonaviy matematikaning g‘aroyib birikishi topologiya va algebraga eltishi ifoda etiladi”. Hozirgi zamon fanlarining rivojlanishida topologiyaning fizika, biologiya, ximiya va binobarin, geografiya fanlaridagi tatbig‘i qo‘llanilmoqda. Topologiyaning sehrli olamiga kirish mashaqqatlidir. Shu sababli topologiya fanining tushuncha, ta’rif va ma’lumotlarini puxta o‘zlashtirish muhim. Oddiy topologik tushunchalar bizni o‘rab turgan olamga nazar tashlaganda paydo bo‘la boshlaydi. O‘z-o‘zidan tushunarlik, figuralarning geometrik xossalariga figura o‘lchamlari, ularning joylashishi, burchaklarining ko‘rinishi va hokazolar kiradi. Bu geometrik xususiyatlardan tashqari, yana nimadir nazarimizdan chetda qolayotgandek tuyuladi. Masalan, geometrik chiziqlarning yopiq yoki yopiq emasligi, figuralarning “teshikli yoki teshiksiz , cho‘ziluvchan yoki cho‘ziluvchan emasligi, geometrik figuralarning zanjirsimonligi yoki yo‘qligi, bog‘lamli chiziqlarning bog‘ichli bo‘lishi yoki bo‘lmasligi, figuralarni yirtmasdan cho‘zish yoki cho‘zish mumkin emasligi kabi xossalarini inobatga oladigan bo‘lsak, Evklid geometriyasidan sal tashqariga chiqishga to‘g‘ri keladi. Aynan shu o‘rganish natijasida va shu kabi geometrik figuralarning xossalarini o‘rganuvchi topologiya fani elementlari kirib kela boshladi.

Puankare nuqtai nazariga ko‘ra, topologiya shunday fanki, u figuralarning sifatiy xossalarini faqat uch o‘lchamli fazoda emas balki undan yuqori o‘lchamli fazolarda ham o‘rganishga yordam beradi. Geometrik figuralarning sifatiy xossalari deganda, masalan, sferani rezina qobiq bilan qoplangan deb faraz qilib, uni yetarlicha siqishni yoki yetarlicha uzmasdan cho‘zishni tushunish mumkin. Sferani bunday almashtirishlar topologik gomeomorfizm deb yuritiladi. Gomeomorfizm natijasida hosil qilingan har xil geometrik figuralar o‘zaro

gomeomorf yoki topologik bir xil deyiladi. Figuralarning sifatiy xossalari bu figuraga o'zaro gomeomorf bo'lgan barcha geometrik figuralarga tegishli bo'ladi. Bunday xossalar bir so'z bilan topologik xossalar deb ataladi.[16]

Yuqoridagi misoldan ko'rinadiki, sferaning topologik xususiyati uning bir butunligi va bog'lamli ekanligidadir. Sferani chuqurroq o'rganishga, masalan, sfera bilan shar yoki doiraning harakati natijasida gomeomorfligini ko'rsatishga harakat qilsak, uning boshqa xususiyatlari ham ayon bo'ladi. Aslida bunday gomeomorfizm bo'lishi mumkin emas. Masalan, voleybol to'pi bilan velosiped kamerasi o'zaro topologik har xildir. Ko'rgazmali tasavvurlardan ma'lum bo'ladiki, doiraviy halqa doiraga gomeomorf emas. Chunonchi, figuralar teshiklari soni ham figuraning topologik xususiyatidir. Evklid tekisligi R^2 dagi markazi O nuqtada radiusi r bo'lgan aylanani S^1 bilan belgilaylik (1.1.1 -rasm).



1.1.1-rasm

U holda $R^2 \setminus S^1$ to'plam ikkita o'zaro bir-birini to'ldiruvchi (S^1 ga nisbatan) ochiq A va B to'plamlarga ajraladi, ya'ni $A \cup B = R^2 \setminus S^1$. S^1 ga nisbatan A - ichkarisi, B esa, tashqarisi desak, S^1 aylana A va B to'plamlar o'rtasida chegara - to'siq vazifasini o'tamoqda. A to'plamning ixtiyoriy $a \in A$ nuqtasi bilan B to'plamning ixtiyoriy $b \in B$ nuqtasi orasida S^1 aylana bilan kesishmaydigan sodda uzluksiz yo'l mavjudmi?

To'g'ri chiziqdagi $[0;1]$ kesmaning tekislikdagi gomeomorf obrazi (aksi) sodda uzluksiz yo'l deb ataladi. Yuqoridagi savolning javobi: yo'q. Haqiqatan ham, agar $p(x,y)$ bilan R^2 Evklid tekisligida ikki nuqta orasidagi masofani belgilasak, $\gamma(t): [0;1] \rightarrow R$ yo'l bo'lsa, bu yerda $\gamma(0) = a$ va $\gamma(1) = b$. U holda $f(t) = p(\gamma(t), 0)$ funksiya ham $\gamma(t)$ uzluksiz bo'lgani uchun uzluksizdir

va $f(0) < r$; $f(1) > r$. Funksiyaning xossalriga ko'ra , ya'ni $a \in A$;
 $f(0) = \rho(y(0), 0) < \rho(a, 0) < r$, $f(1) = \rho(y(1), 0) = \rho(b, 1) > r$, ya'ni $b \in B$.

Funksiyaning uzluksizligidan shunday t_0 nuqta topiladiki, bu nuqtada f funksiyaning qiymati r ga teng bo'ladi. Bundan esa, $y(t_0) \in S^1$. Demak, $\gamma([0,1]) \cap S^1 \neq \emptyset$. Ma'lum bo'ladiki, A va B to'plamlarni tutashtiruvchi S^1 bilan kesishmaydigan uzluksiz yo'l mavjud emas ekan. Agar S^1 ning gomeomorf obrazini G orqali belgilasak, bunday chiziq yopiq sodda chiziq deb yuritiladi.

Shunday savol tug'iladi: $\mathbb{R}^2 \setminus G$ to'plam o'zaro kesishmaydigan, chegaralari G dan iborat bo'lgan ochiq to'plamlarga ajraladimi? Topologiyaning chuqurroq tushunchalaridan foydalanib, Jordon bu savolga "ha" javobini beradi. Topologiyaning geometrik xususiyatlarga boy muhim yo'nalishlaridan yana biri qo'zg'almas nuqtalar nazariyasidir. Qo'zg'almas nuqtalar nazariyasi algebra va matematik analiz fanlarining asosiy masalalari bilan chambarchas bog'liqdir. Algebra va matematik analizda $f(x)=0$ (1) tenglamaning yechimlari mavjudmi degan savolga duch kelamiz. Bu yerda $f(x)$ ko'phad yoki boshqa biror funksiya (1) tenglamaga ekvivalent.

$$f(x) + x = x \quad (2)$$

Agar $F(x) = f(x) + x$ deb belgilash kiritsak, ekvivalent $F(x) = x$ (3) tenglamaga ega bo'lamiz. Bu (3) tenglamaning yechimlari F akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi deyiladi. Ushbu akslantirish birorta yopiq (Evklid fazosida), albatta, chegaralangan to'plamda qaralsa, qo'zg'amas nuqta mavjudligining mazmunli alomatlari hamda isbotlari bor.¹

Hozirgi kunga kelib topologiya matematik tadqiqotlarning mustahkam quroliga aylandi, uning tili esa, universal ahamiyat kasb etmoqda.

Topologiyaning fizikada, mexanikada va boshqa fanlarda kompleks

¹ Jo'rayev T.F. Topologiyaga kirish. Funktorlar. O'lchamlar. Chiziqlar, T.Tafakkur- bo'stoni, 2012., 240b

qo‘llanishi fakt bo‘lib qoldi. Fizikada ba’zi real holatlarni bayon qilishni topologiyasiz hal qilib bo‘lmaydi. Teskari holatlar ham uchrab turadi, ya’ni fizikadagi ba’zi muammolar topologiyaning rivojlanishiga ta’sir etmoqda.

Matematikaning ko‘p qo‘llaniladigan tushunchalaridan biri metrik fazo tushunchasidir. Bu tushuncha matematikaga birinchi bor fransuz matematigi M. Freshe tomonidan 1906-yilda kiritildi.

Ixtiyoriy “tabiatli” bo‘sh bo‘lmagan X to‘plam va $\tau = \{U_\alpha : U_\alpha \subseteq X, \alpha \in A\}$ sistema (shu X to‘plamning to‘plamostilardan tashkil topgan) berilgan bo‘lsin.[16]

1.1.1-ta’rif. Agar τ sistema(to‘plamostilar oilasi) quyidagi:

1) $\emptyset, X \in \tau$;

2) τ sistemaning ixtiyoriy sondagi elementlarining birlashmasi τ ga tegishli bo‘lsa, ya’ni $U_{\alpha'} \in \tau; \alpha' \in A; \bigcup_{\alpha'} U_{\alpha'} \in \tau$;

3) τ sistemaning ixtiyoriy chekli sondagi elementlari kesishmasi τ ga tegishli bo‘lsa, ya’ni $\forall \alpha_i \in A, i = \overline{1, s}, U_{\alpha_i} \in \tau, \bigcap_{i=1}^s U_{\alpha_i} \in \tau$, shartlarni qanoatlantirsa, τ

sistema X to‘plamdagi topologiya, $(X; \tau)$ juftlik esa, birgalikda topologik fazo deyiladi. $(X; \tau)$ topologik fazo tashkil qilsa, τ sistemaning elementlari ochiq to‘plamlar deb ataladi. Bu ta’rifdagi 1)-3)-shartlar topologiyaning yoki topologik fazoning aksiomalari deb yuritiladi. Ta’rifdan ma’lumki, X to‘plam qanday bo‘lishidan qat’i nazar, topologik fazodagi ochiq to‘plamlar turlicha bo‘lishi mumkin ekan. Ko‘p hollarda, agar $(X; \tau)$ topologik fazo bo‘lsa, τ sistema topologik struktura, X to‘plam esa, $(X; \tau)$ topologik fazoning yoki topologiyaning ifodalovchisi — eltuvchisi deb ataladi.

1.1.1-misol. Ikki a va b elementlardan iborat X to‘plam berilgan deylik. τ sistema sifatida bo‘sh to‘plam, X to‘plamning o‘zini va $\{a\}$ dan tashkil topgan

to'plamlar oilasini olamiz, ya'ni $\tau = \{\emptyset: \{a; b\}, \{a\}\}$. Bu τ sistema ta'rifdagi 1)-3)-shartlarni qanoatlantirishi ravshan. Demak, $(X; \tau)$ juftlik topologik fazodir. Bu fazo topologik sodda qurilganiga qaramasdan, muhim va qiziqarli jihatlarga ega bo'lganligi uchun maxsus nom bilan "bog'lamli ikki nuqta" deb yuritiladi.

1.1.1- misolda, agar τ ni $\tau = \{\emptyset: \{a; b\}, \{b\}\}$ ko'rinishida olsak ham, sistema τ topologiya tashkil qiladi.

Yuqoridagi misollardan ko'rinadiki, ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan to'plamga doimo turlicha topologiya kiritish, ya'ni aniqlash imkoni mavjuddir. Topologiyalarning aniqlanishidan ma'lum bo'lmoqdaki, ulardagi ochiq to'plamlar ham turlicha bo'lishi (topologiyaga qarab) mumkin ekan. Ya'ni, bir topologik strukturaga nisbatan ochiq bo'lgan to'pamlar strukturaga nisbatan ochiq bo'lmasligi mumkin.

1.1.2-misol. X to'plam sifatida R^2 Evklid tekisligini olaylik. Ochik to'plam sifatida R^2 ning ixtiyoriy nuqtasi va markazi shu nuqtada bo'lgan radiusi yetarlicha kichik bo'lgan ochik doiralarni (chegarasiga aylana nuqtalari kirmagan), bo'sh to'plamni qarasak, bu barcha ochik to'plamlar oilasi topologiya tashkil qiladi.

1.1.3-misol. Bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy X to'plam berilgan bo'sin. Topologiya sifatida X to'plamning jami to'plamostilarini olaylik, ya'ni

$\{U: U \subseteq X, U\text{-ixtiyoriy to'plamosti}\}$. Bu topologik struktura ham X da topologiya tashkil qiladi. Bu topologiya, τ_1 topologiya deb qabul qilingan. Bu (X, τ_1) topologik fazo diskret topologik fazo deyiladi.

Topologik fazoda yopiq to'plam, yakkaLANGAN nuqta tushunchalari aniqlangandan keyin bu tushunchalar bilan bevosita bog'liq bo'lgan to'plamning teginish nuqtasi, to'plamning yopig'i va to'plam ichi hamda ichki

nuqtalari tushunchalarini ham bilish lozim bo'ladi.¹

1.1.2-ta'rif. (X, τ) topologik fazoning $x_0 \in X$ nuqtasi berilgan bo'lib, agar bu nuqtaning ixtiyoriy U atrofi M to'plamning birorta nuqtasini o'zida saqlasa, ya'ni $U \cap M \neq \emptyset$. $M \subset X$ bo'lsa, u holda x_0 nuqta M to'plamning teginish nuqtasi deyiladi.

Topologik fazoda M to'plamning barcha teginish nuqtasidan tashkil topgan to'plam uning yopig'i deb ataladi va $\bar{M}$ ko'rinishda belgilanadi. To'plamning o'zidan yopig'i to'plamga o'tish amali to'plamning topologik yopig'ini olish amali deb yuritiladi. Ta'rifdan ko'rinadiki, to'plamning yopig'i uning o'zini o'z ichiga oladi: $\emptyset$ ning yopig'i o'ziga teng; butun X ning yopig'i fazoning o'ziga teng. Shuningdek, agar $M \subset N$ bo'lsa, u holda $\bar{M} \subset \bar{N}$ bo'ladi. Bu esa, mazkur amalning monotonlik xarakterga ega ekanligini ko'rsatadi. Yana shuni ta'kidlash lozimki, bu amali demponentdir, ya'ni $\bar{\bar{M}} = \bar{M}$ o'rinli bo'ladi.

1.1.1-teorema. Fazoning M to'plamostisi yopiq bo'lishi uchun u o'zining yopig'iga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

1.1.1-natija. Fazoning ixtiyoriy M to'plamostisi yopig'i $\bar{M}$ bu fazoda yopiq to'plamdir.

Shuni ta'kidlash kerakki, to'plam yopig'ini olish amali quyidagi xossalarga ega:

$$1^\circ. \overline{A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n} = \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \dots \cup \bar{A}_n$$

$$2^\circ. \bar{\bar{A}} = \bar{A}$$

$$3^\circ. A \subset \bar{A}$$

$$4^\circ. \bar{\emptyset} = \emptyset$$

1.1.3-ta'rif. Agar x_0 ning ixtiyoriy atrofida M to'plamning x_0 dan farqli elementi bo'lsa, X fazoning x_0 nuqtasi $M \subset X$ to'plamning limit nuqtasi

¹ Жўраев Т.Ф. Некоторые геометрические свойства функтора Р вероятностных мер и его подфункторов. Конд.диссер.МГУ.1989,с.90

deyiladi, ya'ni $U(x_n) \cap M \setminus \{x_n\} \neq \emptyset$.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, to'plamning limit nuqtasi uning teginish nuqtasi bo'lishi mumkin, lekin teginish nuqtasi yoki yakkaalangan nuqta doimo ham limit nuqtasi bo'lavermaydi. Shuni ta'kidlash mumkinki, $\text{int}(R^1 \setminus Q) = \emptyset$ $\overline{M} \setminus M$ ning har bir nuqtasi M to'plam uchun limit nuqta bo'ladi. To'plamning yopig'ini oladigan bo'lsak, bu to'plam teginish, limit va yakkaalangan nuqtalardan tashkil topgan ekan. To'plamning barcha limit nuqtalaridan tashkil topgan to'plamni uning hosila to'plami deb belgilanadi va M ning hosila to'plami M' ko'rinishda ifodalanadi. Hosila to'plam ta'rifidan ma'lumki, $\overline{M}$ o'rinli va M to'plam yopiq bo'lishi uchun $M' \subset M$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

1.1.4-ta'rif. Agar X fazoning M to'plami o'z-o'zining hosila to'plami bilan ustma-ust tushsa, mukammal to'plam deyiladi, ya'ni $M' = \overline{M}$. Bu ta'rifdan ma'lum bo'ladiki, mukammal to'plam, bir tomondan, yopiq to'plam, ikkinchi tomondan, yakkaalangan nuqtalarga ega emas ekan. Mukammal to'plamga misol sifatida to'g'ri chiziqda ixtiyoriy kesma, tekislikda yopiq doirani olishimiz mumkin. Yana shuni ta'kidlash mumkinki, fazoda yopiq to'plamlarning ixtiyoriy birlashmasi har doim ham yopiq bo'lavermaydi. Ba'zi hollarda yopiq to'plamlar birlashmasi ham yopiq bo'lishi mumkin.

1.1.5-ta'rif. Agar X to'plamning to'plamostilaridan tashkil topgan $S = \{A_\alpha : \alpha \in A\}$ jamlanma berilgan bo'lsa, X ning ixtiyoriy x_0 nuqtasi shunday U_0 atrofga ega bo'lsaki, bu atrof jamlanmaning chekli sondagi elementlari bilan kesishsa, u holda bu jamlanma lokal chekli deyiladi, ya'ni $U_0 \cap A_\alpha \neq \emptyset, \alpha \in A, |A| < \infty$ ¹

1.1.2-teorema. X topologik fazoning ixtiyoriy lokal chekli jamlanmasi $S = \{A_\alpha : \alpha \in A\}$ uchun $\overline{U_{\alpha \in A} A_\alpha} = U_{\alpha \in A} \overline{A_\alpha}$ munosabat (tenglik) o'rinli. Teoremadan quyidagi xulosani chiqarish mumkin.

Xulosa. Yopiq to'plamlarning lokal chekli jamlanmasi - birlashmasi

¹ 1.Jo'rayev T.F. Topologiyaga kirish. Funktorlar. O'lchamlar. Chiziqlar, T.Tafakkur- bo'stoni, 2012., 240b

yopiq to'plamdir.

Agar to'plamning yopig'ini olish amalini $ClM = \overline{M}$ bilan belgilasak va bu amalni birorta bo'sh bo'lmagan X to'plamda qo'llasak, shu to'plamda topologiya aniqlashning yana bir usuli kelib chiqadi. Bu usul, ya'ni to'plamning yopig'ini olish amali buyuk polyak topologi K. Kuratovskiy tomonidan yaratilgan.

1.1.3-teorema. (Topologiyani Kuratovskiy operatori orqali kiritish). Ixtiyoriy X to'plamda qo'llaniladigan ixtiyoriy Kuratovskiy operatori Cl shu to'plamda ma'lum bir τ topologiyaga asos soladi, aynan $\tau = \{U\}$ ning har bir U elementi uchun $Cl(X \setminus U) = X \setminus U$ tenglik o'rinli va ixtiyoriy $M \subset X$ to'plamosti uchun $\overline{M} = ClM$ tenglik o'rinli bo'ladi ¹.

1.1.4-misol. Ixtiyoriy sanoqsiz X to'plam berilgan bo'lsin. X to'plamda Cl to'plamning yopig'i amalini quyidagicha aniqlaymiz: ixtiyoriy sanoqlidan katta bo'lmagan M to'plam uchun $Cl(M) = M$, agar M sanoqsiz bo'lsa, $Cl(M) = X$ deb olamiz. Tekshirib ko'rish ko'rsatadiki, bunday aniqlangan amal to'plamning yopig'ini olishning hamma shartlarini qanoatlantirishini ko'rsatadi. Ya'ni:

- 1) $Cl(M \cup N) = Cl(M) \cup Cl(N)$;
- 2) $M \subset Cl(M)$;
- 3) $Cl(Cl(M)) = Cl(M)$;
- 4) $Cl(\emptyset) = \emptyset$ shartlar o'rinlidir.

Bu misolda X to'plamda yopiq to'plam sifatida faqat va faqat $Cl(M) = M$ tenglikni qanoatlantiruvchi to'plamlarni e'lon qilsak. Bu X da ma'lum bir topologiyani aniqlaydi.

1.1.6-ta'rif. X topologik fazoning x_0 nuqtasi uchun x_0 nuqtaning shunday ochiq atrofi U_0 topilsaki va bu atrof to'la M_0 to'plamda yotsa, u X fazo M to'plamostisining ichki nuqtasi deyiladi, ya'ni $U_0 \subset M$ bo'lsa, M to'plamning

¹ Коснёвски Ч.. Начальный курс алгебраической топологии. М. Мир, 1983, с.304.

barcha ichki nuqtalari tashkil topgan to'plam M ning ichi deyiladi va $\text{int}M$ ko'rinishda belgilanadi. Ta'rifdan va oldingi keltirilgan faktlardan ko'rinadiki, M to'plam ochiq to'plam bo'lishi uchun $\text{int}M = M$ tenglik yoki u o'zining ichiga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Yana shuni aytish mumkinki, M to'plamning ichi ochiq to'plam va $\text{int}M$ - bu M da yotgan ochiq to'plamlarning birlashmasidan iboratdir. To'plamning ichi int quyidagi xossalarga ega:

- 1) agar $M \subset N$ bo'lsa, u holda $\text{int}M \subset \text{int}N$ (monotonligi);
- 2) $\text{int}(\text{int} M) = \text{int} M$ (idemponent);
- 3) $\text{int}(M \cap N) = \text{int}M \cap \text{int}N$.

1.1.5-misol. Sonlar o'qi R^1 tabiiy topologiyasiga ko'ra, $\text{int}Q = \emptyset$ va $\text{int}(R^1 \setminus Q) = \emptyset$ bu yerda Q - ratsional sonlar to'plami. X topologik fazoning ixtiyoriy M to'plamostisi uchun:

$$X \setminus \overline{M} = \text{int}(X \setminus M)$$

$X \setminus \text{int} M = \overline{(X \setminus M)}$ tengliklar o'rinlidir.

1.1.7-ta'rif. X topologik fazoning x_0 nuqtasi uchun x_0 nuqta uning ixtiyoriy ochiq U atrofini ham, M ning elementlarini ham uning to'ldiruvchisi $CM = X \setminus M$ ning elementlarini o'zida saqlasa, x_0 nuqta $M \subset X$ to'plami uchun chegaraviy nuqta deyiladi, ya'ni $U \cap M \neq \emptyset$ va $U \cap X \setminus M \neq \emptyset$ lar o'rinlidir. Boshqacha aytganda, x_0 nuqta M va $X \setminus M$ to'plamlar uchun teginish nuqtasi bo'lgan taqdirda, u chegaraviy nuqta deyiladi. To'plamning barcha chegaraviy nuqtalaridan tashkil topgan to'plam uning chegarasi deyiladi va FrM ko'rinishda belgilanadi.

Demak, M ning chegarasi FrM uchun $FrM = \overline{M} \cap \overline{CM}$ tenglik o'rinli ekan. Chegara uchun quyidagi tenglik o'rinlidir:

$$FrM = \overline{M} \setminus \text{int}M = (\overline{M} \setminus M) \cup (M \setminus \text{int}M) = (\overline{M} \setminus M) \cup (M \cap \overline{CM})$$

1.1.4-teorema. X topologik fazoning M to'plami ochiq bo'lishi uchun u

o'zining chegarasi bilan kesishmasligi zarur va yetarlidir. M to'plam yopiq bo'lishi uchun esa, u o'zida chegarasini to'la saqlashi zarur va yetarlidir.

1.1.6-misol. Sonlar o'qi R^1 dagi tabiiy topologiyani olsak, $FrQ = R^1$ va $Fr(R^1 \setminus Q) = R^1$ tengliklar o'rinlidir.

Ammo $Fr R^1 = \emptyset$, $Fr(FrQ) = FrR^1 = \emptyset$. Agar $M \subset X$ bo'lib, M ning faqat o'ziga tegishli bo'lgan chegaraviy nuqtalarini olsak, bu nuqtalar to'plami M ning cheti deb yuritiladi. Bunda $M \cap \overline{CM} = M \setminus intM$ o'rinlidir. Demak, birorta to'plam-ning cheti uning ichki nuqtalarini o'z ichiga olmas ekan. Ya'ni, to'plamning cheti ichki nuqtasiz ekan.

Ba'zi bir masalalarda figuralarning topologik xossalarini o'rganishda, ochiq (yopiq) to'plamlar sinfidan foydalanishga to'g'ri keladi.

1.1.7-ta'rif. Agar X topologik fazoning $A \subset X$ to'laplamostisi, o'z yopig'ining ichiga (ichining yopig'iga) teng bo'lsa, kanonik ochiq (kanonik yopiq) deyiladi. Ya'ni, agar $\overline{A} = int A$ bo'lsa, A kanonik ochiq deyiladi, agar $A = int \overline{A}$ bo'lsa, A kanonik yopiq deyiladi. Kanonik ochiq va kanonik yopiq to'plamlarga tekislikda ochiq va yopiq doiralari misol keltirish mumkin.

To'plamning kanonik yopig'ini olish amalini cl^* bilan, to'plamning kanonik ichini olish amalini int^* bilan belgilasak, bu maxsus amallar bilan to'plamning yopig'i va ichini olish amallari orasida quyidagicha bog'lanish mavjud:

$$int^*A = int\overline{A}; \quad cl^*A = \overline{intA}.$$

Ko'p hollarda kanonik ichini olish amali int^*A to'plamning kanonik yadrosini aniqlash amali deb ham yuritiladi. To'plamning ichini topish $int A$ esa, uning yadrosini aniqlashdir.

Ma'lumki, $A \subset \overline{A}$, u holda $intA \subset int^*A$. Ya'ni, ochiq yadro doimo kanonik yadroda yotadi. Demak, barcha ochiq to'plamlar o'zining kanonik

yadrosida yotar ekan. Bundan ko‘rinadiki, $\text{int}A \subset A$ munosabat o‘rinli. U holda $\text{Cl}(A) \subset \bar{A}$. Ya’ni, to‘planning kanonik yopig‘i uning yopig‘ida yotadi. Demak, barcha yopiq to‘plamlar o‘zida kanonik yopig‘ini saqlar ekan ¹.

¹ Понтрягин Л.С.. Непрерывные группы. М. Наука, 1984, с.520.

2 Metrik fazolar. Misollar

Metrik fazo - bu biror bo'sh bo'lmagan to'plamdagi ikki element (nuqta) orasidagi masofani aniqlash ma'lum demakdir. Bu ikki nuqta orasidagi masofani aniqlash amali ma'lum bir shartlarni (aksiomalarni) qanoatlantirishi shart bo'ladi. Bu shartlar masofa (yoki metrika) aksiomalari deb yuritiladi. Metrik fazo matematikaning deyarli barcha sohalariga tatbiq etiladi. Qolaversa, barcha fanlarda ham turli-tuman ko'rinishda ishlatiladi. Fazoda (to'plamda) ikki nuqta orasidagi masofa ma'lum bo'lsa, nuqtalarning o'zaro "yaqin"ligini, nuqta va to'plamning, qolaversa, ikkita to'plam (figura) "yaqin"ligini aniqlasa bo'ladi. Bu esa, fazoning, figuralarning turli geometrik xossalarini o'rganishda muhim ahamiyatga egadir.

Bo'sh bo'lmagan X to'plam va R haqiqiy sonlar to'plami berilgan bo'lsin.

1.2.1.-ta'rif. Agar $\rho: X \times X \rightarrow R$ akslantirish uchun quyidagi shartlar o'rinli bo'lsa, u X to'plamda metrika deyiladi:

$$(\rho 1). \forall x, y \in X, \rho(x, y) \geq 0;$$

$$(\rho 2). \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x \equiv y;$$

$$(\rho 3). \rho(x, y) = \rho(y, x), \forall x, y \in X \text{ (simmetriklik aksiomasi);}$$

$$(\rho 4). \rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z) \quad \forall x, y, z \in X \text{ (uchburchak aksiomasi).}$$

Agar X to'plam va ρ akslantirish metrika tashkil qilsa, ular birgalikda metrik fazo deyiladi va (X, ρ) ko'rinishda yoziladi. Metrikani (X, ρ) metrik fazoda ikki element yoki ikki nuqta orasidagi masofa deb tushuniladi.

1.2.1-misol. X to'plam sifatida R^1 - sonlar to'g'ri chizig'i yoki X - haqiqiy sonlar to'plami R^1 ni olsak hamda ixtiyoriy x va y sonlar uchun $\rho(x, y) = |x - y|$ desak, u holda, bu ρ metrikaning hamma aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, $(R^1, |x - y|)$ juftlik metrik fazo tashkil qiladi.

1.2.2-misol. R^n - ko'p o'lchovli sonlar fazosi. R^n - elementlari $\{x = (x_1, \dots, x_n): x_i \in R^1, i = 1, n\}$ ko'rinishdagi to'plamni tashkil qiladi. Bu

to'plamning ikki x va y elementlari orasidagi metrikani(masofani)
 $\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ formula bilan
aniqlaymiz, bu yerda $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in R^n$.

Ma'lumki, bu ρ metrika tashkil qiladi. Bu fazo n o'lchamli sonlar fazosi
deb yuritiladi va R^n ko'rinishda belgilanadi.

Xususiyl holda, agar $n = 2$ bo'lsa, R^2 da Evklid tekisligidagi metrika
 $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$, $n=3$ bo'lsa, R^3 da Evklid fazosidagi
metrika $\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}$ ko'rinishlarda
bo'ladi.

1.2.1-izoh. Bu R^n to'plamda ko'p hollarda metrika

$\rho(x, y) = \max |x_i - y_i|$ ko'rinishda ham aniqlanadi.

1.2.3-misol. Diskret metrik fazo. Faraz qilaylik, X bo'sh bo'lmagan
ixtiyoriy to'plam bo'lsin. X to'plamda ikki element x va y orasidagi metrika
(masofa)ni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\rho(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x = y \\ 1, & \text{agar } x \neq y \end{cases}$$

Bu $\rho(x, y)$ metrika tashkil qiladi va diskret metrika deyiladi. (X, ρ)
diskret metrik fazo deb yuritiladi.

Shuni aytish kerakki, bu ko'rinishda fazoni metrikalashtirish doim ham
mazmunli bo'lavermaydi. Shu sababli doimo fazoni diskret bo'lmagan metrika
bilan ta'minlash mazmunliroq bo'ladi va ko'p o'rganiladi.

1.2.2-izoh. Agar A to'plam (X, ρ) metrik fazoning ixtiyoriy bo'sh
bo'lmagan to'plamostisi bo'lsa, A to'plamning ixtiyoriy x_1 va x_2 elementlari
uchun bu ikki element orasidagi masofani (metrikani) $\rho_A(x_1, x_2) = \rho(x_1, x_2)$ deb
olsak, u holda A to'plamostida metrika bo'ladi. Bu metrika ρ_A indutsirlangan

metrika deb yuritiladi. (A, ρ_A) metrik fazo esa, (X, ρ) metrik fazoning fazoostisi deb yuritiladi. Agar A va B to'plamlar (X, ρ) ning bo'sh bo'lmagan to'plamostilari bo'lsa, bu A va B to'plamlar orasidagi masofa sifatida $\rho(A, B) = \inf\{\rho(x, y) : x \in A, y \in B\}$ son qabul qilingandir. Xususiyl holda $\rho(x_0, x) = \inf \rho(x_0, x)$ soni x_0 nuqtadan A to'plamgacha bo'lgan masofa deb ataladi. Xullas, M to'plamning diametri deb $diam M = \sup \rho(x, y)$ songa aytiladi. Bu yerda $M \subset X$ va $x, y \in M$

Nihoyat, agar $diam M < \infty$ o'rinli bo'lsa, M to'plam chegaralangan to'plam deyiladi. Fazolarga doir misollar ba'zi hollarda matematik analizga doir masalalarni hal qilishda yuzaga chiqmoqda.

1.2.4-misol. $[0, 1]$ kesmada uzluksiz bo'lgan barcha funksiyalar to'plamini olaylik. Bu to'plam $C_{[0, 1]}$ ko'rinishda belgilanadi ya'ni

$$C_{[0, 1]} = \{f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} - \text{uzluksiz}\}.$$

Agar $x(t), y(t)$ funksiyalar $C_{[0, 1]}$ ning ixtiyoriy uzluksiz funksiyalari bo'lsa, ular orasidagi masofani $\rho(x, y) = \max |x(t) - y(t)| \quad t \in [0, 1]$ shaklda aniqlaymiz. Matematik analiz kurslaridan ham ma'lumki, bu ρ funksiya $C_{[0, 1]}$ da metrika tashkil qiladi. $C_{[0, 1]}$ uzluksiz $([0, 1])$ da funksiyalar fazosi deb ataladi ¹.

¹ Jo'rayev T.F. Topologiyaga kirish. Funktorlar. O'lchamlar. Chiziqlar, T.Tafakkur- bo'stoni, 2012., 240b

3. Topologik fazolarda kovariant funktoir

1.3.1-ta'rif. Agar elementlari obyekt deb ataluvchi $Ob\zeta$ sinf berilgan bo'lib, u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, ζ kategoriya berilgan kategoriya deyiladi:

1) agar ζ ning har bir (A, B) juft obyektleri uchun morfizmlar deb ataluvchi to'plami $Mor\zeta(A, B)$ (A dan B ga) berilgan bo'lsa; bu yerda $Mor\zeta(A, B) = \{u : A \rightarrow B\}$ morfizmdan iborat deyish mumkin, ko'p hollarda $u \in Mor\zeta(A, B)$, $A \xrightarrow{u} B$ ko'rinishda yoziladi;

2) ζ ning ixtiyoriy uchlik (A, B, C) obyektleri uchun $\mu : Mor\zeta(A, B) \times Mor\zeta(B, C) \rightarrow Mor\zeta(A, C)$ akslantirish aniqlangan bo'lsin, bu yerda $\mu(y, g)$ (y, g) juftlikning aksi (obrazi), $u \in Mor\zeta(A, B)$, $g \in Mor\zeta(B, C)$, bu $\mu(y, g)$ obraz $g \circ y$ yoki $g * y$ ko'rinishda belgilanib, y, g larning kompozitsiyasi deb ataladi;

3) Quyidagicha tasdiq. $Mor\zeta(A, B)$ to'plamlar va morfizmlar kompozitsiyasi uchun o'rinli: (d) bu kompozitsiya assotsiativdir, ya'ni ixtiyoriy morfizmlar uchligi $A \xrightarrow{u} B \xrightarrow{g} C \xrightarrow{\omega} D$ uchun $\omega(g \circ y) = (\omega \circ g)u$ o'rinli;

4) ζ ning har bir A obyektleri uchun ayniy morfizm deb ataluvchi $1_A : A \rightarrow A$ morfizm mavjud bo'ladi, agar uning ixtiyoriy $A \xrightarrow{u} B$; $A \xrightarrow{g} C$ morfizmlari uchun $1_A \circ u = u$ va $g \circ 1_A = g$ lar o'rinli bo'lsa;

5) (γ) agar ζ ning (A, B) , (A^1, B^1) juftliklari har xil bo'ladi, agar $Mor\zeta(A, B)$ va $Mor\zeta(A^1, B^1)$ to'plamlarning kesishmasi bo'sh to'plam bo'lsa.

1.3.1-misol. ζ_{set} **kategoriya.** Bu kategoriyaning obyektleri to'plamlardir. Ixtiyoriy ikki A va B to'plamlar uchun $Mor\zeta_{Gns}(A, B)$ sifatida A ning B ga bo'lgan barcha akslantirishlar to'plami tushuniladi. (f, g) kompozitsiya sifatida esa, oddiy $(g, f) \rightarrow fg$ akslantirishlar kompozitsiyasi $f * g$ tushuniladi.

1.3.2-misol. **Top kategoriya.** Bu kategoriyaning obyektleri topologik fazolardir. $Mor(X, Y) = C(X, Y)$ $C(X, Y) = \{f : X \rightarrow Y \text{ uzluksiz akslantirish}\}$ – barcha uzluksiz akslantirishlar to'plami, kompozitsiya esa, uzluksiz akslantirishlarning

kompozitsiyasi uzluksiz bo'lganligi sababli, uzluksiz akslantirishlarning oddiy kompozitsiyasidir.

1.3.3-misol. G kategoriya. $\mathcal{G}$ kategoriyaning obyekti barcha guppalar to'plami, $\text{Mor} (A,B)$ esa, barcha A va B guppalar orasidagi gomomorfizmlar to'plamidir. Kompozitsiya sifatida esa, gomomorfizmlarning sodda kompozitsiyasini olish mumkin.

1.3.4-misol. Comp kategoriya. Bu kategoriyaning obyekti barcha bikompaktlar to'plami, $\text{Mor} (\text{Somp} (X,Y))$, barcha X va Y bikompaktlar orasidagi uzluksiz akslantirishlar to'plamidir. Kompozitsiya sifatida esa, uzluksiz akslantirishlar kompozitsiyasini olamiz.

1.3.5-misol. Agar f morfizmga teskari $f^1 \in \text{Mor}_k (X,Y)$ mavjud bo'lsa, $f \in \text{Mor}_k (X,Y)$ morfizmni ekvivalentlik ($f:X \approx Y$) deymiz. Bu yerda Mor_k bilan kategoriya morfizmlarini belgiladik.

Kategoriya ta'rifidan ko'rinadiki, ixtiyoriy $X \in \text{Ob}_k$ obyektning ayniy 1_x morfizmi yagonadir.

Yuqorida keltirilganlardan tashqari, kategoriyalarga muhim misol sifatida quyidagilarni ko'rsatishimiz mumkin:

1. Barcha metrik fazolar va ularning uzluksiz akslantirishlari to'plami.
2. Barcha chiziqli fazolar va ularning chiziqli akslantirishlari to'plami.

Shuni ta'kidlash kerakki, yuqorida keltirilgan ζ_{set} , ζ_{top} , Gomp kategoriyalarda faqat gomeomorfizm, uG kategoriyada esa, faqat gomeomorfizm ekvivalentlik vazifasini o'taydi.

Barcha chiziqli fazolar va ularning chiziqli akslantirishlari kategoriyasida ekvivalentlik vazifasini chiziqli gomeomorfizm o'taydi. Barcha metrik fazolar va ularning uzluksiz akslantirishlari kategoriyasida esa gomeomorfizm ekvivalentlik rolini o'taydi.

Endi birorta kategoriyada aniqlangan birlik elementni va morfizmlar kompozitsiyasini saqlovchi ma'lum shartlarni qanoatlantiruvchi akslantirishlarni ko'rib chiqaylik.

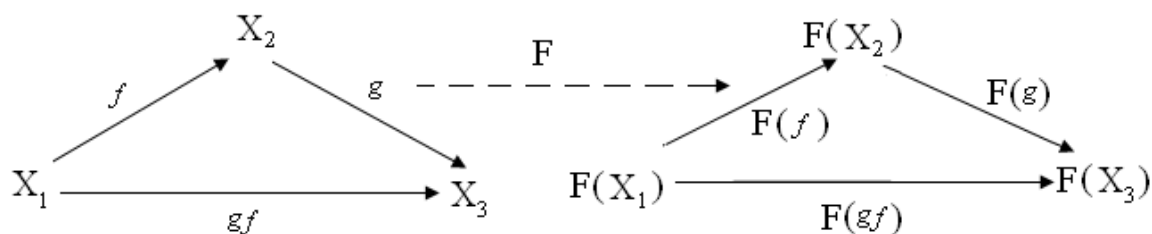
1.3.2-ta'rif. A va B kategoriylar berilgan bo'lsin. A kategoriyaning har bir X obyektiga B kategoriyaning $F(X)$ obyektini va A kategoriyaning har bir $f:X_1 \rightarrow X_2$ morfizmiga B kategoriyaning $F(f):T(X_1) \rightarrow T(X_2)$ morfizmini mos keltiruvchi $F:A \rightarrow B$ akslantirish berilgan bo'lib, agar u

$$1. F(1_x) = 1_{F(x)}$$

$$2. F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$$

shartlarni qanoatlantirsa, u holda u kovariant funktor deyiladi.

Bu ta'rifning 1) va 2) shartlarini funktorning ko'rgazmali ko'rinishida quyidagicha ifodalash mumkin. A kategoriya B kategoriyaning kommutativ diagrammasiga akslanadi:



Agar $F:A \rightarrow B$ kovariant funktor bo'lsa, A kategoriya F funktorning aniqlanish sohasi, B esa, uning o'zgarish yoki qiymatlari sohasi deyiladi.

1.3.6-misol. G guruhlar kategoriyasini olaylik. Har bir G guruhga uning $[G,G]$ kommutanti bo'yicha olingan $G/[G,G]$ faktor guruhini mos qo'yaylik. $G/[G,G]$ faktor guruh, bizga ma'lumki, abel guruhini tashkil qiladi. Har bir $f:G \rightarrow H$ gomomorfizmga, f gomomorfizm orqali vujudga kelgan, $f([g]) = f([g])/[f(g)]$ formula bilan aniqlangan $\hat{f}:G/[G,G] \rightarrow H/[H,H]$ gomeomorfizmni mos qo'yaylik. Natijada, guruhlar kategoriyasi G ni abel guruhlar kategoriyasi AG ga akslantiruvchi $F:G \rightarrow AG$ kovariant funktorga ega bo'ldik. Ko'p hollarda bu funktor kommutirlangan funktor deb yuritiladi.

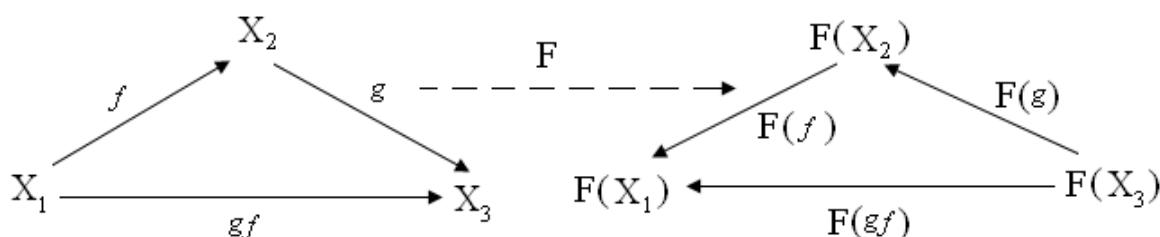
1.3.3-ta'rif. Yuqorida keltirilgan kovariant funktor ta'rifida F funktor uchun

$$F(1_x) = \text{id}_{F(x)} = 1_{F(x)}$$

$$F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$$

shartlar o'rinli bo'lsa, F funktor kontravariant funktor deyiladi.

Boshqacha aytganda, kontravariant funktor A kategoriyadagi kommutativ diagrammani B kategoriyadagi kommutativ diagrammaga o'tkazar ekan, bunda u faqat strelkalar yo'nalishini almashtiradi:



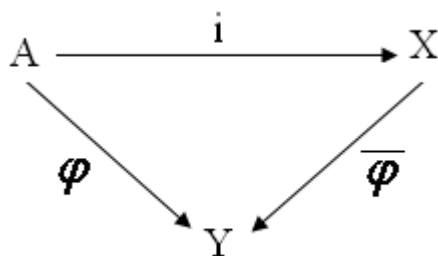
1.3.7.-misol Aytaylik, $C(X) = \{ \varphi: X \rightarrow R \text{ – uzluksiz funksiya} \}$ barcha X fazodagi uzluksiz funksiyalar to'plami bo'lsin. Ma'lumki, bu to'plamning ixtiyoriy $\psi \in C(X)$ ba $\varphi \in C(X)$ elementlari uchun

$$(\varphi + \psi)(x) = \varphi(x) + \psi(x), (\varphi \cdot \psi)(x) = \varphi(x) \cdot \psi(x)$$

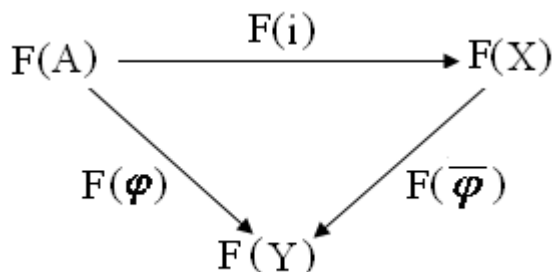
formulalar yordamida binar amal aniqlangan. Bu to'plamda yuqoridagi binar amalga nisbatan birlik element ham mavjud. Shu sababli $C(X)$ fazo kommutativ halqa tashkil qiladi. Agar $f: X \rightarrow Y$ uzluksiz akslantirish bo'lsa, u holda har bir uzluksiz $\varphi: Y \rightarrow R$ akslantirishga $\varphi \circ f: X \rightarrow R$ kompozitsiyani mos qo'ysak, natijada $F(f): C(Y) \rightarrow C(X)$ akslantirishga ega bo'lamiz. Bu akslantirish halqalar orasidagi gomeomorfizmdan iborat bo'ladi. Natijada, har bir $X \in \text{Ob}$ top obyektga (topologik fazoga) X fazoda uzluksiz funksiyalar halqasi $C(X)$ ni, har bir $f: X \rightarrow Y$ morfizmga ($f \in \text{Mor}_{\text{top}}(X, Y)$) halqaviy gomeomorfizm $F(f): C(Y) \rightarrow C(X)$ ni mos keltirdik. Buni tekshirish muammo tug'dirmaydi, topologik fazolar kategoriyasida birlik elementli, kommutativ halqalar kategoriyasiga akslantiruvchi kontravariant F funktor mavjud.

Topologik masalalarni hal qilishda guppalar nazariyasiga funktorlarning qo'llanilishi xususida to'xtalaylik. Oldingi boblarda akslantirishlarni davomlashtirish (kengaytirish) masalasi bayon qilingan edi. Endi shu masalani quyidagicha yoritamiz. X topologik fazo bo'lsin va $A \subset X$. $i: A \rightarrow X$ tabiiy akslantirish (yoki joylashtirish) bo'lsin, ya'ni har bir $a \in A$ uchun $i(a) = a$ o'rinlidir. $\varphi: A \rightarrow Y$ uzluksiz akslantirish bo'lsin.

$\bar{\varphi}: X \rightarrow Y$ akslantirish φ ning davomlashtirishi bo'lishi uchun quyidagi diagramma kommutativ bo'lishi zarur va yetarlidir.



F funktor (masalan, kovariant funktor) yordamida hosila algebraik masalaga ega bo'lamiz. Quyidagi diagrammada kommutativ bo'ladigan $F(\bar{\varphi})$ gomomorfizm mavjudmi?



Bundan ko'rinadiki, yuqoridagi masala yechilsa, keyingi algebraik masala ham yechiladi. Demak, $F(\bar{\varphi})$ gomomorfizmning mavjud bo'lishi φ akslantirishning davomlashtirishi $\bar{\varphi}$ mavjudligining zaruriy shartidir.

1.3.1-teorema. $F: K_1 \rightarrow K_2$ ixtiyoriy kovariant yoki kontravariant funktor berilgan bo'lsin. U holda F funktor natijasida K_1 kategoriyadagi f ekvivalentlikning K_2 kategoriyadagi obrazi $F(f)$ ekvivalentlik bo'ladi.

Isbot. $F: K_1 \rightarrow K_2$ kovariant funktor bo'lsin va $f: X \cong Y$ munosabat K_1 kategoriyadagi ekvivalentlik bo'lsin. Ekvivalentlik ta'rifiga ko'ra, shunday $g: Y \rightarrow X$ morfizm topiladiki, uning uchun $g \circ f = 1_X$, $f \circ g = 1_Y$ o'rinli bo'ladi. Funktorning ikkinchi aksiomasiga ko'ra, $F(g) \circ F(f) = F(g \circ f) = F(1_X) = 1_{F(X)}$ va $F(f) \circ F(g) = F(f \circ g) = F(1_Y) = 1_{F(Y)}$ bo'ladi.

Demak, $F(f)$ morfizm, haqiqatan ham ekvivalentlik ekan. Kontravariant funktor isboti ham shunga o'xshaydi.

1.3.1-natija. Ixtiyoriy funktor ekvivalent obyektlarni ekvivalent obyektlarga o'tkazadi ¹.

¹ Жўраев Т.Ф. О ковариантных функторах конечной степени сохраняющих $A(N)R(M)$ - пространства. Доклады АН Болгария №43, №9, 1990, с.5-8.

4. Chekli eltuvchili normal kovariant funktorlar

$\xi(\delta, m)$ kategoriya berilgan bo'lsin, bu yerda δ — barcha obyektlar va m — barcha morfizmlar jamlanmasi bo'lsin.

Agar obyektlar jamlanmasi σ va har bir $[X, Y]$ jamlanma biror to'plamdan iborat bo'lsa, ξ kategoriya kichik kategoriya deyiladi. Bu yerda X dan Y ga bo'lgan barcha morfizmlar oilasini $[X, Y]$ bilan belgilaymiz. Agar $\xi(\delta, m)$ kategoriya bo'lsa, uning obyektlar jamlanmasi δ da, tabiiyki, old tartib mavjuddir, ya'ni biror munosabat refleksiv va tranzitivdir. Haqiqatan ham, $X \leq Y \Leftrightarrow [Y, X] \neq \emptyset$.

1.4.1-ta'rif. Agar quyidagi shartlar o'rinli bo'lsa, kichik $\mathfrak{S} = (\delta, m)$ kategoriya teskari spektr deyiladi:

- 1) δ to'plamdagi old tartib qisman tartiblangan bo'lsa;
- 2) qisman tartiblangan σ to'plam yuqoriga yo'nalgan bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy ikki $X, Y \in \delta$ obyektlar uchun shunday $Z \in \delta$ topilsa va uning uchun $X \leq Z$ va $Y \leq Z$ o'rinli bo'lsa;
- 3) $[X; Y]$ to'plam bitta elementdan ortiq bo'lmasa.

Teskari spektrning obyektlari uning elementlari, morfizmlari esa proyeksiyalari deb yuritiladi. Qulaylik maqsadida spektrning elementlarini X bilan belgilab, uni indeksdagi α bo'yicha birorta qisman tartiblangan to'plamdan iborat deyishimiz mumkin. Shunda X_β dan X_α ga proyeksiyani π_α^β bilan belgilaymiz. Demak, spektrni $S = \{X_\alpha; \pi_\beta^\alpha; A\}$ ko'rinishida belgilasak bo'lar ekan. Albatta, bu yerda $\alpha, \beta \in A$ va $\beta \leq \alpha$, $\pi_\beta^\alpha: X_\alpha \rightarrow X_\beta$ deb tushuniladi. Teskari spektrlarni ham spektr deb ataymiz.

Agarda (albatta, S spektr qaralayotgan kategoriyada) ixtiyoriy, $\alpha, \beta \in A$, $\beta \leq \alpha$, uchun $\pi_\beta^\alpha \circ \pi_\alpha = \pi_\beta$ o'rinli va ixtiyoriy boshqa Y obyekt va $\pi_\beta^\alpha \circ f_\alpha = f_\beta$ xossalriga ega bo'lgan $f_\alpha: Y \rightarrow X_\alpha$ morfizmlar oilasi uchun shunday yagona $f: Y \rightarrow X$ morfizm topilib, har bir $\alpha \in A$ uchun $f_\alpha = \pi_\alpha \circ f$ o'rinli bo'lsa, X obyekt va morfizmlar oilasi $\pi_\alpha: X \rightarrow X_\alpha, \alpha \in A$, S spektrning limiti deyiladi. Spektrning

limiti $X = \lim S$ ko‘rinishda belgilanadi. π_α morfizmlarga oralovchi (yelvizak) proyeksiyalar deyiladi.

Biror kategoriyada aniqlangan F kovariant funktor va $S = \{X_\alpha : \pi_\alpha\}$ spektr berilgan bo‘lsin. Aytaylik, $F(S) = \{F(X_\alpha) : \pi_\alpha^\beta\}$. Bu holda $F(S)$ ham spektrdan iborat bo‘ladi. Uni oralovchi proyeksiyalarni π_α^F bilan belgilaymiz.

1.4.2-ta’rif. Agar ixtiyoriy S spektr uchun $F(\lim S) = \lim F(S)$ o‘rinli bo‘lsa, F funktor uzluksiz deyiladi. Boshqacha aytganda, shunday $f : F(\lim S) \rightarrow \lim F(S)$ gomeomorfizm mavjudki, uning uchun

$$F(\pi_\alpha) = \pi_\alpha^F \circ f \quad (1)$$

o‘rinli bo‘ladi. (1) tenglikdan ma’lumki, f gomeomorfizm mavjud va u yagonadir. Bu $F(f_\alpha)$ akslantirishlarning limitidan iborat. Ya’ni, agar $F(\pi_\alpha)$ larning limiti gomeomorfizm bo‘lsa, F funktor uzluksizdir. Buning aksi bo‘lsa, funktor Comp kategoriyasida qaralayotgan hisoblanadi.

1.4.3-ta’rif. Agar F funktor bir nuqtali to‘plamni yana bir nuqtali to‘plamga o‘tkazsa, funktor nuqtani saqlaydi deyiladi.

Aytaylik, $i_A : A \rightarrow X$ yopiq A to‘plamni X ga aynan joylashtirish bo‘lsin. $F_X(A)$ orqali $F(i_A)$ akslantirish obrazini belgilaylik. Agar ixtiyoriy X va uning ixtiyoriy $\{A_\alpha\}$ to‘plamostilar tizimi uchun $F_X(\bigcap_\alpha A_\alpha) = \bigcap_\alpha F_X(A_\alpha)$ o‘rinli bo‘lsa, F faktor kesishmalarni saqlaydi deyiladi.

Agar, $F(f)^{-1}F_Y(A) = F_X(f^{-1}A)$ tenglik ixtiyoriy $f : X \rightarrow Y$ akslantirish va ixtiyoriy $A \subset Y$ to‘plam uchun o‘rinli bo‘lsa, F funktor proobrazlarni (asllarni) saqlaydi deyiladi.

1.4.4-ta’rif. Agar ixtiyoriy o‘zaro bir qiymatli f akslantirish (syuryektiv) uchun $F(f)$ akslantirish ham o‘zaro bir qiymatli (syuryektiv) bo‘lsa, F funktor monomorf (mos ravishda epimorf) deyiladi.

1.4.5-ta’rif. Agar quyidagi shartlarni qanoatlantirsa, F funktor normal funktor deyiladi:

- 1) F funktor nuqta va bo‘sh to‘plamni saqlasa;
- 2) F funktor kesishmalarini saqlasa;

- 3) F monomorfizmni saqlasa;
- 4) F epimorfizmni saqlasa;
- 5) F uzluksiz bo'lsa;
- 6) F proobrazlar va bikompaktlarning salmog'ini saqlasa, ya'ni $\omega(X) \leq \tau \Rightarrow \omega(F(X)) \leq \tau$ bo'lsa.

Oxirgi 30–40-yillar mobaynida topologik fazolarning turli kategoriyalarida yuqoridagi xossalarga ega bo'lgan normal funktorlarning geometrik va topologik xossalari o'rganib borilmoqda. Normal funktor birorta topologik fazoda qaralsa, bu fazoning ko'pgina geometrik xossalarini u yoki bu ma'noda o'zgartirib yuboradi ¹.

¹ Фоменко А.Т.. Дифференциальная геометрия и топология. Дополнительные главы. М. МГУ, 1983, с.216.

5. Ehtimol o'lchovli funktoirlar va ularning qism funktoirlari

Ehtimol o'lchovli funktoir bikompakt fazolar kategoriyasida qaralsa, funktoir natijasida hosil bo'lgan topologik fazolarning geometrik va boshqa xossalari o'rganish katta ahamiyatga egadir. Bu funktoirni chekli to'plamlarda qarasak, chekli o'lchamli simplekslarga ega bo'lamiz. Uning funktoirostilarini oladigan bo'lsak, chekli o'lchamli fazolarni yana chekli o'lchamli fazoga o'tkazadi va bu funktoir fazoning ko'pgina xossalari "yaxshiroq" xossalarga almashtiradi.

X bikompakt bo'lsin. Ma'lumki, har bir $\mu \in C(C(X))$ uzluksiz chiziqli funksionalga (akslantirish) X ning o'lchovi deyiladi. $C(C(X))$ fazo ko'p hollarda $(C(X))^*$ ko'rinishida belgilanadi. $(C(X))^*$ barcha uzluksiz funksionallar fazosi deb yuritiladi va bu fazo $C(X)$ fazoga qo'shma fazodir. $(C(X))^*$ normalangan fazo, bu fazoda norma $\|f(x)\| = \sup\{\|f(x)\| : x \in X\}$ ko'rinishda aniqlanadi, boshqacha aytganda, $(C(X))^*$ fazo Banach fazosidir. Albatta, barcha uzluksiz funksionallarni oladigan bo'lsak, ular chegaralangandir.

Agar X fazodagi barcha chekli regulyar o'lchovlarni $M(X)$ bilan belgilasak, Riss teoremasiga ko'ra, $(C(X))^*$ fazo $M(X)$ fazo bilan izomorfdir. Shu sababli $M(X)$ dagi ba'zi belgilashlarni qabul qilamiz. Bizga Riss teoremasi shart bo'lmaydi, o'lchovlar nazariyasidan boshqa tushunchalarni ishlatmaymiz. X fazoda o'lchov deb faqat $\mu \in C^*(X)$ uzluksiz funksionalni tushunamiz. Ba'zida $\int \varphi d\mu$ belgilashni μ funksionalning φ dagi qiymati deb tushuniladi.

Agar ixtiyoriy $\varphi \geq 0$ uchun va $\mu \in M(X)$ o'lchov uchun $\mu(\varphi) \geq 0$ o'rinli bo'lsa, μ o'lchov musbat deyiladi va $\mu \geq 0$ kabi yoziladi. $M(X)$ fazoning barcha musbat o'lchovlari to'plami musbat konus deyiladi. Shuni aytish kerakki, $\mu \geq 0$ bo'lishi uchun $\mu(1_X) = \|\mu\|$ bajarilishi zarur va yetarlidir. Haqiqatan ham, $\mu \geq 0$ va $|\varphi| \leq 1$ bo'lsin. U holda $\mu(1_X - \varphi) \geq 0$. Bundan $\mu(1_X) \geq \mu(\varphi)$ va $\mu(1_X) = \|\mu\|$. Endi esa $\mu(1_X) = \|\mu\|$ va $\varphi \geq 0$ bo'lsin.

Aytaylik, $\psi = 1_x - (\varphi / \|\varphi\|)$. Bunda $\|\varphi\| \leq 1$, $\mu(\psi) \leq \|\mu\| = \mu(1_x)$, ya'ni $\mu(1_x) - \mu(\varphi / \|\varphi\|) \leq \mu(1_x)$. Bundan $\mu(\varphi) \geq 0$ kelib chiqadi.

Agar $\mu \in M(X)$ o'lchov uchun $\|\mu\| = 1$ bo'lsa, μ o'lchov normalangan deyiladi. Musbat normalangan μ o'lchov ehtimol o'lchovi deyiladi. Oldingilardan ko'rinadiki, μ o'lchov ehtimollik o'lchovi bo'lishi uchun $\int 1_x d\mu = 1$ bo'lishi zarur va yetarlidir. Endi $M(X)$ to'plamda kuchsiz deb ataluvchi topologiyani kiritamiz. Ya'ni, $M(X)$ to'plam sonlar o'qining ko'paytmasidan iborat desak, $M(X)$ ni $\Pi\{R_\varphi : \varphi \in (X)\}$ to'plamning to'plamostisi deb olishimiz mumkin, bunda $R_\varphi = [-\|\varphi\|, \|\varphi\|] \subset R$.

Demak, $M(X)$ fazo to'la (mutloq) regulyar fazo bo'lar ekan.

$\mu \in M(X)$ elementning atroflari bazasini $O(\mu, \varphi, \dots, \varphi_k, \varepsilon)$ ko'rinishdagi to'plamlar tashkil qiladi. Bu yerda $\mu \in C(X)$, $\varepsilon > 0$ va $O(\mu, \varphi, \dots, \varphi_k, \varepsilon) = \{\mu \in M(X) : \mu^1(\varphi_i) - \mu(\varphi_i) < \varepsilon, i = \overline{1, k}\}$. $M(X)$ fazoning barcha ehtimollik o'lchovlaridan tashkil topgan to'plamostisini $P(X)$ bilan belgilaymiz. Demak, $P(X) \subset M(X)$.

1.5.1-teorema. Ixtiyoriy X bikompakt uchun $P(X)$ bikompakt.

Isbot. Bizga ma'lumki, $P(X) \subset \prod \{R_\varphi : \varphi \in C(X)\}$. Eng avvalo, $P(X)$ ning bu ko'paytmada yopiq to'plam ekanligini ko'rsatamiz. Agar $\mu \in [P(X)]$ bo'lsa, u holda μ funksiya chiziqli, agar $\varphi, \psi \in C(X)$, $\varepsilon > 0$ bo'lsa, u holda shunday $\mu_1 \in P(X)$ ni olamiz; $\mu_1 \in O(\mu, \varphi, \psi, \varphi + \psi, \varepsilon/3)$ bo'lsin. U holda $|\mu(\varphi + \psi) - \mu(\varphi) - \mu(\psi)| = |\mu(\varphi + \psi) - \mu_1(\varphi + \psi) + \mu_1(\varphi) + \mu_1(\psi) - \mu(\varphi) - \mu(\psi)| \leq (\mu(\varphi + \psi) - \mu_1(\varphi + \psi)) + |\mu_1(\varphi) - \mu(\varphi)| + |\mu_1(\psi) - \mu(\psi)| < \varepsilon$. Ya'ni, $\mu(\varphi + \psi) = \mu(\varphi) + \mu(\psi)$. Shunga o'xshab, $\mu(r\varphi) = r\mu(\varphi)$. $\|\mu\| = 1$: agar $\|\varphi\| \leq 1$ va $\varepsilon < 0$ bo'lsa, u holda shunday $\mu_1 \in P(X)$ topiladiki, $|\mu_1(\varphi) - \mu(\varphi)| < \varepsilon$ bo'ladi. U holda $|\mu(\varphi)| \leq |\mu_1(\varphi)| + \varepsilon$, ya'ni $|\mu(\varphi)| \leq 1 + \varepsilon$. Demak, $|\mu(\varphi)| \leq 1$. Shunga o'xshab, $\mu(1_x) = 1$ o'rinli. Demak, μ o'lchov normalangan va musbat ekan, ya'ni $\mu \in P(X)$. Ikkinchi tomondan, $P(X)$ to'plam $[-\|\varphi\|, \|\varphi\|]$ kesmalarining

ko'paytmasi $P\{[-\|\varphi\|, \|\varphi\|] : \varphi \in C(X)\}$ da yotmoqda. Demak, $P(X)$ bikompakt ekan.

Agar F da nol bo'lgan (F to'plamda qiymati nolga teng) ixtiyoriy $\varphi \in C(X)$ funksiya uchun $\int \varphi d\mu = 0$ o'rinli bo'lsa, μ o'lchov $F \subset X$ to'plamda jamlangan deyiladi.

μ o'lchovning jamlangan to'plamlarining eng kichigi uning eltuvchisi deyiladi va $\text{supp } \mu$ ko'rinishda yoziladi.

1.5.1-lemma. Har bir $x \in X$ nuqta uchun shu nuqtada jamlangan yagona ehtimol o'lchovi δ_x mavjud.

Isbot. Aytaylik, δ_x aytilgan o'lchov bo'lsin. U holda $\delta_x(1_x) = 1$ va $\delta_x(\varphi) = \delta_x(\varphi(x)1_x) = \varphi(x)$. Ikkinchidan, $\delta_x(\varphi) = \varphi(x)$ tenglik bilan aniqlangan δ_x o'lchov ehtimollik o'lchovi va u x nuqtada jamlangan.

Fazoning x nuqtasida jamlangan δ_x o'lchov Dirak o'lchovi deyiladi. Barcha Dirak o'lchovlari to'plami $\mathcal{S}(X)$ bilan belgilanadi.

1.5.2-lemma. X fazodagi x nuqtani δ_x Dirak o'lchoviga o'tkazuvchi (mos qo'yuvchi) $\delta : X \rightarrow P(X)$ akslantirish uzluksiz va gomeomorfizmdir.

Isbot. Bu akslantirishning o'zaro bir qiymatli ekanligi ravshan. Shu sababli uning uzluksizligini ko'rsataylik. δ_x ning ixtiyoriy $O\delta_x$ atrofida $O(\delta_x, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \varepsilon)$ bazis atrof mavjuddir. Uning Ox atrofi topiladiki, uning uchun $|(\varphi_i(x) - \varphi_i(y))| < \varepsilon$ tengsizlik barcha $y \in Ox$ va $i = \overline{1, k}$ larda o'rinlidir. U holda $\delta(Ox) \subset O(\delta_x, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \varepsilon)$.

1.5.3-lemma. Ixtiyoriy cheksiz bikompakt X uchun $\omega(X) = \omega P(X)$ o'rinli.

Isbot. 1.5.2-lemmaga ko'ra, X fazo δ akslantirish natijasida $P(X)$ ga joylashtirilgan. Shu sababli $\omega(X) \leq \omega P(X)$ o'rinlidir. Ikkinchidan, $M(X)$ fazodagi topologiyani aniqlashda φ_i funksiyalarni $C(X)$ dagi hamma joydagi zich to'plamdan olsa bo'ladi. Bu yerda ε ni ham ratsional son deyish mumkin. Ma'lumki, agar X bikompakt salmog'i τ bo'lsa, u holda $C(X)$ fazoda fazoning

hamma joyida zich va quvvati τ bo'lgan to'plamosti mavjud. Shu sababli cheksiz bikompakt X uchun $dC(X) \leq \omega X$ o'rinli.

Aytaylik, $f: X \rightarrow Y$ uzluksiz akslantirish bo'lsin. $P(f): P(X) \rightarrow P(Y)$ akslantirishni $(P(f)(\mu)(\phi)) = \mu(\phi \circ f)$ (1) formula bilan aniqlaymiz. $P(f)$ akslantirish uzluksizdir. Haqiqatan ham, $\mu \in P(X)$ va $\nu = P(f)(\mu)$ bo'lsin. ν nuqtaning bazis atrofi $V = O(\nu, \varphi_1, \dots, \varphi_k, \varepsilon)$ ni olaylik, $U = O(\mu, \varphi_1 \circ f, \varphi_2 \circ f, \dots, \varphi_k \circ f, \varepsilon)$ deylik va $P(f)(U) \subset V$ ni ko'rsataylik. Agar $\mu^1 \in U$ bo'lsa, u holda $|\mu(\phi_i \circ f) - \mu^1(\phi_i \circ f)| < \varepsilon$ (1) tenglikka ko'ra bu tengsizlik $|(P(f)(\mu^1))(\varphi_i) - \nu(\varphi_i)| < \varepsilon$ tengsizlikka teng kuchlidir. Bundan $P(f)(\mu) \in V$ ga ega bo'lamiz. Bevosita tekshirish mumkinki, $P(g \circ f) = P(g) \circ P(f)$ tenglik ham o'rinlidir. Demak, P funktor $Comp$ kategoriyada harakatlanuvchi kovariant funktor ekan. Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

1.5.2-teorema. P funktor uzluksizdir, ya'ni $S = \{x_\alpha; \pi_\beta^\lambda, A\}$ spektr uchun $P(\lim S) = \lim P(S)$ o'rinli.

1.5.3-teorema. Agar $f: X \rightarrow Y$ monomorfizm bo'lsa, u holda $P(f): P(X) \rightarrow P(Y)$ ham monomorfizmdir.

Isbot. Agar $\mu_1, \mu_2 \in P(X)$ ikkita har xil o'lchovlar bo'lsa, u holda shunday $\varphi \in C(X)$ funksiya mavjud bo'ladiki, $\mu_1(\varphi) \neq \mu_2(\varphi)$ o'rinli bo'ladi. Brauer-Titse-Urison teoremasiga ko'ra, shunday $\Psi \in C(Y)$ funksiya topiladiki, uning uchun $\varphi = \Psi \circ f$ o'rinli bo'ladi. (1) tenglikka ko'ra, $P(f)(\mu_i)(\Psi) = \mu_i(\Psi \circ f) = \mu_i(\varphi)$. Bundan $P(f)(\mu_1) \neq P(f)(\mu_2)$ kelib chiqadi.

Eltuvchisi chekli sondagi nuqtalardan iborat bo'lgan o'lchov chekli eltuvchili o'lchov deb tushuniladi. Ya'ni, μ o'lchov uchun $|\text{supp } \mu| < \infty$. Aytaylik, $\mu \in P(X)$ o'lchovning eltuvchisi $\text{supp } \mu = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ har xil nuqtalardan iborat bo'lsin. Quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n \in C(X)$ funksiyalarni olaylik:

$$\phi_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{agar } i = j \text{ bo'lsa;} \\ 0, & \text{agar } i \neq j \text{ bo'lsa.} \end{cases} \quad (1)$$

Aytaylik, $m_i = \mu(\varphi_i)$. O'lchovlarning eltuvchilik ta'rifiga ko'ra, m_i sonlar (2) shartni qanoatlantiruvchi φ_i funksiyalarni tanlashga bog'liq emas. Shu sababli ular m_i sonini x_i nuqtaning μ -o'lchovi deyiladi. (1)-shartni qanoatlantiruvchi φ_i funksiyalarni $\sum \varphi_i = 1$ va $\varphi_i \geq 0$ shartlar qanoatlantiruvchi qilib tanlashimiz mumkin. Shu sababli $m_1 + m_2 + \dots + m_n = 1$ va $m_i \geq 0$ (2).

Endi eltuvchisi $\{x_1, \dots, x_n\}$ chekli to'plamdan iborat bo'lgan μ o'lchov x_i nuqtalarining o'lchovlari m_i lar orqali bir qiymatli aniqlanishini ko'rsatamiz. Ya'ni,

$$\mu(\varphi) = m_1\varphi(x_1) + \dots + m_n\varphi(x_n) \quad (3)$$

Tenglik ko'rinishi. Dirak o'lchovi δ_{x_i} ning aniqlanishiga ko'ra, (3) tenglik

$$\mu = m_1\delta_{x_1} + m_2\delta_{x_2} + \dots + m_n\delta_{x_n} \quad (4)$$

ga aylanadi. Haqiqatan ham, ixtiyoriy φ funksiyani

$$\varphi = \varphi(x_1)\varphi_1 + \varphi(x_2)\varphi_2 + \dots + \varphi(x_n)\varphi_n$$

ko'rinishda ifodalash mumkin, bu yerda $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ fuksiyalar (1) shartni qanoatlantiradi. U holda

$$\mu(\varphi) = \varphi(x_1)\mu(\varphi_1) + \varphi(x_2)\mu(\varphi_2) + \dots + \varphi(x_n)\mu(\varphi_n) = \varphi(x_1)m_1 + \varphi(x_2)m_2 + \dots + \varphi(x_n)m_n.$$

Shunday qilib, quyidagi teorema ham isbotlandi.

1.5.4-teorema. Chekli eltuvchili o'lchovlar Dirak o'lchovlarining qavariq chiziqli kombinatsiyasi (5) dan iborat ekan.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz:

1.5.5-teorema. Chekli eltuvchili barcha o'lchovlar $P(X)$ to'plamda zich to'plamostini tashkil qiladi.

1.5.6-teorema. Agar akslantirish $f: X \rightarrow Y$ epimorfizm bo'lsa, u holda $P(f): P(X) \rightarrow P(Y)$ ham epimorfizmdir.

Isbot. Dastlab $P(f)$ akslantirish natijasida barcha $\mu \in P(Y)$ chekli eltuvchili o'lchovlar qamrab olinishini ko'rsatamiz, ya'ni $\mu = \sum_{i=1}^u m_i \delta_{y_i}$.

Haqiqatan ham, $f^{-1}(y_i)$ dan bittadan $x_i \in f^{-1}(y)$ nuqtani olsak va $v = \sum m_i \delta_{x_i}$ o'lchovni tuzsak, $P(f)(v) = \mu$ o'rinli bo'ladi. Endi 1.5.6-teoremani qo'llasak, isbot poyoniga yetadi.

Agar $f : X \rightarrow Y$ akslantirish va har bir $a \in F(X)$ nuqta uchun quyidagi $f(\sup pa) = \sup pF(f)a$ (6) o'rinli bo'lsa, F funktor eltuvchilarni saqlaydi.

1.5.7-teorema. Monomorf F funktor eltuvchini saqlashi uchun F funktor proobrazlarni saqlashi zarur va yetarlidir.

Isbot. *Yetarliligi.* Ixtiyoriy $A \subset X$ yopiq to'plam uchun $F(A)$ ni $F(X)$ dagi tabiiy ravishdagi $F_x(A) \subset F(X)$ to'plamostisi sifatida qarash mumkin, ya'ni $i_a : A \rightarrow X$ ayniy joylashtirishni olsak va $F(i_a)$ funktordagi obrazini qarasak, $F(i_a)(A) \subset F(X)$ o'rinli bo'ladi. Aytaylik, $A = \sup pa$ bo'lsin. $F(f)(a) \in F(f)|_{F(A)} \subset F(f_A)$ o'rinli, ya'ni $\sup F(f)(a) \subset f(\sup pa) Y$ va aksincha, aytaylik, $B = \sup pF(f)(a)$ bo'lsin. U holda F proobrazlarni saqlaganligi tufayli ega bo'lamiz:

$$F(f^{-1}(B)) = F(f)^{-1}F(B) \supset F(f)^{-1}F(f)(a) \supset a$$

Demak, $\sup pa \subset f^{-1}B$. Ya'ni, $f(\sup pa) \subset B$ bo'ladi.

Zarurligi. f akslantirish $f^{-1}(A)$ ni A ga o'tkazganligi tufayli $F(f)(F(f)(f^{-1}(A))) \subset F(A)$ ga ega bo'lamiz va shu sababli $F(f^{-1}(A)) \subset F(f)^{-1}F(f)(F(f^{-1}A)) \subset F(f)^{-1}F(A)$ bo'ladi. Demak, $F(f)^{-1}F_y(A) = F_x(f^{-1}(A))$ tenglikda $\sup$ ni tekshirishda F ning eltuvchini saqlashi zarur bo'lmadi.

Endi teskarisini tekshiramiz. Aytaylik, $a \in F(f)^{-1}F(A)$ bo'lsin. U holda F ning eltuvchini saqlashi tufayli $f(\sup pa) \subset A$ ga ega bo'lamiz. Nihoyat, $\sup(a) \subset f^{-1}(A)$ o'rinli va $a \in F(f^{-1}A)$.

1.5.8-teorema. $x \in X$ nuqta $\mu \in P(X)$ o'lchovning eltuvchisiga tegishli bo'lishi uchun uning ixtiyoriy Ox atrofi uchun $\mu([Ox]) > 0$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Faraz qilaylik, x nuqtaning shunday O_x mavjud bo'lsinki, u uchun $\mu([O_x]) = 0$ o'rinli bo'lsin. Ixtiyoriy shunday $\varphi \in C(X)$ funksiyani olaylikki, $\varphi(X \setminus O_x) = 0$ bo'lsin. Aytaylik, $|\varphi| \leq M > 0$ bo'lsin. $C(X)$ fazoda shunday $\Psi \in C(X)$ ni olamizki, u uchun $0 \leq \Psi \leq 1$ va $\Psi([O_x]) = 1$, $\mu(\mu\varphi) < \varepsilon M$ o'rinlidir. U holda $|\varphi| \leq M\Psi$ va, nihoyat, $\mu(|\varphi|) \leq \mu(M\Psi) < \varepsilon$. Demak, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun $\mu(|\varphi|) < \varepsilon$. Nihoyat, $\mu(|\varphi|) = 0$, bundan esa, $\mu(\varphi) = 0$ kelib chiqadi. Eltuvchining ta'rifiga ko'ra, $\text{supp } p\mu \subset X \setminus (O_x)$ va, nihoyat, $\bar{x} \in \text{supp } \mu$. Buning aksi, agar $\bar{x} \in \text{supp } p\mu$ bo'lsa, X ning O_x atrofini $O_x \cap \text{supp } p\mu = \emptyset$ shartni qanoatlantiradigan qilib olib, Urison teoremasiga ko'ra shunday $\psi \in C(X)$ topish mumkinki, $x \in \text{supp } \mu$ nuqtalarda $\psi(x) = 0$ bo'ladi. U holda $\mu([O_x]) \leq \mu(\varphi) = 0$. Bu yerda $\mu([O_x]) = \inf\{\mu(\phi) : \phi \in C(X), 0 \leq \phi(x) \leq 1, \phi(x) = 0, x \in F\}$.

Bu teorema bilan bir qatorda quyidagi ham isbotlandi.

1.5.9-teorema. Agar $\mu(F) > 0$ bo'lsa, u holda $F \cap \text{supp } p\mu \neq \emptyset$.

1.5.10-teorema. Ixtiyoriy $f \in C(X, Y)$ akslantirish va ixtiyoriy $\mu \in P(X)$ uchun quyidagi o'rinli: $\text{supp } P(f)(\mu) = f(\text{supp } \mu)$.

Isbot. Avval $\subset$ bo'lishini tekshiramiz. Aytaylik, $\varphi \in C(Y)$ funksiya $f(\text{supp } p\mu)$ da nolga teng bo'lsin. U holda $(\varphi \circ f)(\text{supp } p\mu) = 0$ bo'ladi. Demak, $\mu(\varphi \circ f) = 0$. Bu holda $P(f)(\mu)(\varphi) = \mu(\varphi \circ f) = 0$ ham o'rinli.

Endi $\supset$ bo'lishini tekshiraylik. Aytaylik, $y \in f(\text{supp } p\mu)$. Bu holda 1.5.9-teoremaga ko'ra, ixtiyoriy O_y atrof uchun $P(f)(\mu)([O_y]) > 0$ ni tekshirish kerak. Shunday $x \in \text{supp } p\mu$ nuqta va shunday O_x atrof olaylikki, $f(O_x) \subset O_y$ o'rinli bo'lsin. 1.5.8-teoremaga ko'ra, $\mu([O_x]) > 0$. Lekin ixtiyoriy yopiq $F \subset X$ to'plam uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\mu(F) \leq P(f)(\mu)(f(F)) \quad (1)$$

Haqiqatan ham, agar $x \in F$ bo'lsa, bu tengsizlik $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(x) = 0$, $x \in f(F)$ lardan $0 \leq \varphi \circ f \leq 1$, $\varphi \circ f(x) = 0$, larni keltirib chiqaradi. Demak, $P(f)(\mu)([O_y]) \geq P(f)(\mu)(f([O_x])) \geq ((1) \text{ ga ko'ra}) \geq \mu([O_x]) > 0$.

1.5.11-teorema. Ehtimollik funktori P normal funktordir.

Isbot. Ma'lumki, ehtimollik funktori P nuqtani va bo'sh to'plamni saqlaydi, ya'ni R natijasida nuqta yana nuqtaga, bo'sh to'plam yana bo'sh to'plamga o'tadi. Ushbu paragrafda biz funktorning uzluksizligi, monomorfligi, epimorfligi, cheksiz biokompaktlarning salmog'ini saqlashini ko'rsatdik. Endi proobrazlarni hamda kesishmalarni saqlashini ko'rsatishimiz lozim. Proobrazlarni saqlashi eltuvchini saqlashga ekvivalent bo'lganligi tufayli o'rinlidir. Kesishmalarni saqlashini ko'rsatsak yetarli bo'ladi, chunki P funktor 1.5.8-teoremaga ko'ra eltuvchini saqlaydi. Ma'lumki, P funktor uzluksiz, shu sababli bir juft to'plamning kesishmasini saqlashini ko'rsatishimiz yetarli. Aytaylik, $Y_1, Y_2 \subset X$ va $\mu \in P(Y_1) \cap P(Y_2)$ bo'lsin. Bu ixtiyoriy $\varphi \in C(Y_i)$ funksiya va uning X gacha ixtiyoriy davomlashtirishlari φ^1, φ^{11} lar uchun $\mu(\varphi^1) = \mu(\varphi^{11})$ o'rinli. Boshqacha aytganda, agar $\varphi \in C(X)$ va $\varphi(Y_i) = 0$ bo'lsa, u holda $\mu(\varphi) = 0$. Aytaylik, $\varphi(Y_1 \cap Y_2) = 0$ bo'lsin. Y_1 to'plamda φ ga va Y_2 to'plamda nolga teng bo'lgan $\psi': Y_1 \cup Y_2 \rightarrow R$ funksiyani olamiz. Aytaylik, ψ funksiya ψ^1 ning X gacha bo'lgan ixtiyoriy davomlashtirishi bo'lsin. $\mu \in P(Y_1)$ bo'lganligi sababli $\mu(\varphi) = \mu(\psi)$ ga ega bo'lamiz. Lekin $\psi(Y_2) = 0$ va $\mu \in (Y_2)$. Demak, $\mu(\varphi) = 0$. Binobarin, $\mu(\varphi) = 0$ va $\mu \in P(Y_1 \cap Y_2)$. $P(Y_1 \cap Y_2) \subset P(Y_1) \cap P(Y_2)$ ning isboti trivialdir.

Biz ehtimollik funktori $P: Comp \rightarrow Comp$ bikompaktlar va ularning uzluksiz akslantirishlari kategoriyada normal funktor ekanligini ko'rsatdik. P funktorning funktorostilari P_n va P^c lar ham ajoyib geometrik xossalarga ega. Qiziqqan o'quvchilar boshqa $\exp, \exp_n, \lambda, \lambda_n$ funktorlar bilan ham tanishishlari mumkin ¹.

¹ Jo'rayev T.F. Topologiyaga kirish. Funktorlar. O'lchamlar. Chiziqlar, T.Tafakkur- bo'stoni, 2012., 240b

6. Gomotopik grupp funktoirlari

Oldingi bo'limlarda ta'kidlaganimizdek, ba'zi bir hollarda $\pi(X, Y)$ to'plam guruh tashkil qilar ekan. Ayrim hollarda bu guruh abel guruhini tashkil qiladi. Shu sababli $\pi(X, Y)$ guruh strukturasiga qarab topologik fazolar va ularning uzluksiz akslantirishlari kategoriyasida har xil algebraik funktoirlarni ko'rish mumkin. Algebraik funktoirlar turli-tuman topologik algebraning va umumiy topologiya vazifalarini yechishda qo'l keladi. Bunday algebraik funktoirlarni ko'rish va tatbiq qilish gomotopik topologiyaning asosini tashkil qiladi. Shuni ta'kidlashimiz lozimki, har bir Y topologik fazo hamda X_1 va X_2 topologik fazolar orasidagi $f: X_1 \rightarrow X_2$ uzluksiz akslantirishga tabiiy aniqlangan quyidagi akslantirish mos kelmoqda:

$$\pi^Y(f): \pi(X_2, Y) \rightarrow \pi(X_1, Y).$$

Aniqroq aytadigan bo'lsak, agar $[\varphi] \in \pi(X_2, Y)$ bo'lsa, $\pi(X_1, Y)$ fazoda (guruhda) bu $[\varphi]$ ga bir qiymatli $[\varphi]$ mos kelmoqda. Shunga o'xshab, har bir X topologik fazo va $g: Y_1 \rightarrow Y_2$ uzluksiz akslantirishga quyidagi akslantirishni mos qo'yishimiz mumkin: $\pi_X(g): \pi(X_2, Y_1) \rightarrow \pi(X_1, Y_2)$.

Agar $[f] \in \pi(X_1, Y_2)$ bo'lsa, $[f]$ ga mos bir qiymatli qilib $\pi(X_1, Y_2)$ fazoda (guruhda) $[fg] \in \pi(X_1, Y_2)$ ni mos qo'yishimiz mumkin.

Bu yerda keltirilgan ikki $\pi_X(g)$ va $\pi^Y(f)$ konstruktsiyalar korrekt aniqlangandir.

Tayinlangan Y topologik fazo uchun $Y \rightarrow \pi(X, Y)$ moslik kontravariant funktoir bo'ladi. Bu funktoir topologik fazolar kategoriyasi Top da funktoir bo'ladi.

Agar tayin X fazo uchun $Y \rightarrow \pi(X, Y)$ moslikni olsak, bu moslik topologik fazolar kategoriyasi top da kovariant funktoir bo'ladi.

Keltirilgan ikki funktoirni oladigan bo'lsak, ikkala funktoir ham Top kategoriyadan topologik guruhlar kategoriyasiga o'tkazuvchi funktoirlardir. Aniqroq aytganda, $\pi_X(g)$ va $\pi^Y(f)$ funktoirlar Top kategoriyani guruhlar

kategoriyasi $\mathfrak{S}$ ga o'tkazuvchi funktorlardir. Agar $\pi(X,Y)$ guruhda birorta topologiya keltirilsa, ya'ni $\pi(X,Y)$ topologik guruh holatiga keltirilsa, bu ikki $\pi_x(g)$ va $\pi^y(f)$ funktorlar Top kategoriyada harakat qiladi, deyishimiz mumkin.

X topologik fazoning gomotopik va fundamental guruhlarini olsak, bu operatsiya ham kovariant (algebraik) funktorni tashkil qiladi. Fazoning gomologik guruhi $H(X)$ ni oladigan bo'lsak, bu ham algebraik xarakterdagi funktorlarga misol bo'la oladi. Fazoning fundamental guruhi, gomotopik va gomologik guruhi tushunchalari ba'zi topologik xarakterdagi masalalarni algebraik usullarda hal qilishda juda qo'l keladi va aksincha.

Topologik xarakterdagi misollarni yechishda funktorning guruhlarda qo'llanishini ko'rib chiqaylik: A to'plam X topologik fazoning yopiq to'plamostisi bo'lsin, tabiiy joylashtirish akslantirishini $i:A \rightarrow X$ bilan belgilaylik. Aytaylik, $\varphi:A \rightarrow Y$ birorta uzluksiz akslantirish bo'lsin. Bu φ akslantirishning davomlashtirishi $\bar{\varphi}:X \rightarrow Y$ mavjud bo'lishi uchun quyidagi diagrammaning kommutativ bo'lishi zarur va yetarlidir.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & X \\ & \searrow \varphi & \swarrow \bar{\varphi} \\ & Y & \end{array}$$

Masalan, birorta T funktor (aytaylik, kovariant funktor) yordamida quyidagi hosila T algebraik masalaga ega bo'lamiz. Quyidagi diagrammada kommutativ bo'ladigan $T(\bar{\varphi})$ gomeomorfizm mavjudmi?

$$\begin{array}{ccc} T(A) & \xrightarrow{T(i)} & T(X) \\ & \searrow T(\varphi) & \swarrow T(\bar{\varphi}) \\ & T(Y) & \end{array}$$

Berilgan masalaning yechimi keyingi algebraik masalaning yechimi borligiga olib keladi. Shunday qilib, $T(\bar{\varphi})$ gomeomorfizmning mavjudligi $\bar{\varphi}$ davomlashtirish mavjudligining zaruriy sharti ekan. Masalan, agar $T(i)$

gomeomorfizm nol bo‘lib, $T(\varphi)$ noldan farqli bo‘lsa, u holda $T(\overline{\varphi})$ gomeomorfizm mavjud bo‘lmaydi. Bu holda φ akslantirishning davomlashtirishi $\overline{\varphi}$ ham mavjud bo‘lmaydi, chunki diagrammaning kommutativligi buziladi ¹.

¹ Фоменко А.Т.. Наглядная геометрия и топология. Математические образы в реальном мире. М. МГУ, 1998, с.254.

I bob bo'yicha xulosalar

Topologik fazolar va ularga doir misollar keltirilgan . Topologiya so'zining lug'aviy ma'nosi va uning ta'rifi haqida ma'lumot berilgan.

Metrik fazolar va ularga doir misollar keltirilgan. Metrik fazo - bu biror bo'sh bo'lmagan to'plamdagi ikki element (nuqta) orasidagi masofani aniqlashi ko'rsatilgan.

Topologik fazolarda kovariant funktorlarning ta'rifi va teoremlari berilgan. Ixtiyoriy funktor ekvivalent obyektlarni ekvivalent obyektlarga o'tkazadi.

Chekli eltuvchili normal kovariant funktorlarning geometrik va topologik xossalari o'rganildi.

Extimol o'lchovli funktorlarning ta'rifi va ularning qism funktorlari haqida ma'lumotlar berilgan.

Gomotopik gruppalar funktorlari haqida yetarlicha ma'lumot keltirilgan.

II bob. Topologik fazolarda o'lchamlar va funktoqlar

1. Topologik fazolarda *ind* o'lchami va xossalari

Umumiy topologiya fani o'rganadigan asosiy va o'ta geometrik-topologik invariantlar qatoriga topologik fazolar o'lchami tushunchasi ham kiradi. Bu invariant to'g'ri chiziq, ko'pburchak, fazo, ko'pyoqlilar va hokazolarning elementar-geometrik o'lchamlari tushunchasining o'lchovlar sonini umumlashtiruvchi topologik invariantdir. Bu invariant $n=1,2,3,\dots$ hollarda arifmetik fazo R^n to'plamlarining topologik xarakteristikasini berish uchun ham juda muhimdir.

Masalan, to'g'ri chiziq va kesma, tekislik va kvadrat o'lchovlari, fazoda kub o'lchamlari biz tasavvur qilganimizdek, mos ravishda 1, 2 va 3 ga tengdir. Bu invariant yordamida ko'p geometrik figuralarga, masalan, chiziq tushunchasiga umumiy ta'rif beriladi.

O'lchamlar nazariyasida asosan (albatta, topologik invariant) uchta klassik *ind*, *Ind* va *dim* o'lcham funksiyalari mavjud bo'lib, bu bobda ular bilan tanishtirib o'tiladi ¹.

2.1.1-ta'rif. X topologik fazodagi p ning ixtiyoriy U atrofi uchun shunday V atrof topilsa va $U \subset V$ hamda $FrV = \emptyset$ shartni qanoatlantirsa, X topologik fazo $p \in X$ nuqtada nol o'lchamli fazo deyiladi (o'lchami nol).

2.1.2-ta'rif. Bo'sh bo'lmagan X topologik fazo o'zining har bir nuqtasida nol o'lchamga ega bo'lsa, nol o'lchamli fazo deyiladi va $\dim X = 0$ ko'rinishda yoziladi.

Agar X topologik fazo, agar har bir nuqtasi chegarasi bo'sh to'plamdan iborat atrofga ega bo'lsa, nol o'lchamli bo'lar ekan.

Ta'rifdan ko'rinadiki, fazoning nol o'lchamli yoki nuqtada nol o'lchamli bo'lishi xossasi topologik invariantdir. Ya'ni topologik akslantirishlarda o'zgarmaydi.

¹ Энгелькинг Р.. Общая топология. М. Мир, 1986, с.752.

Fazoning nol o'lchamli bo'lishini quyidagicha ta'riflash ham mumkin. Barcha to'plamostilari bir vaqtda ham ochiq, ham yopiq to'plamlardan iborat bo'lsa, fazo nol o'lchamlidir.

2.1.1-misol. Har bir chekli yoki sanoqli topolgik fazo nol o'lchamlidir. Deylik, U ochiq to'plam birorta $p \in X$ nuqtaning atrofi bo'lsin. Bu holda p nuqtaning shunday $O_r(p)$ shar atrofi topiladiki, $O_r(p) \subset U$ o'rinlidir. $x_1, x_2, x_3, \dots$ lar X ning nuqtalari bo'lsin. Bu holda $r_i = \rho(x_i, p)$. Endi shunday r^1 son topiladiki, u r^1 va $r^1 \neq r_i$ uchun o'rinli bo'lishi zarur. U holda $O_{r^1}(p)$ shar atrofi uchun $O_{r^1}(p) \subset U$ va $FrO_{r^1}(p) = \emptyset$.

Bu misoldan xususiy holda barcha natural, butun va ratsional sonlar to'plami nol o'lchamli ekanligi ko'rinadi.

2.1.1-teorema. Nol o'lchamli fazoning bo'sh bo'lmagan har qanday to'plamostisi nol o'lchamlidir.

Isbot. Faraz qilaylik, $X_0 \subset X$, $X_0 \neq \emptyset$ va x_0 nuqta X_0 ning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. U^1 to'plam x_0 ning ixtiyoriy atrofi bo'lsin. X_0 nuqtaning X fazoda shunday U atrofi topiladiki, $U \cap X^1 = U^1$ tenglik o'rinli bo'ladi. X ning nol o'lchamli ekanligidan, bir vaqtda ham ochiq, ham yopiq shunday V to'plam topiladiki, $x_0 \in V \subset U$. $V^1 = V \cap X_0$ desak, $x_0 \in V^1$ va V^1 - ochiq va yopiqdir. $x_0 \in V^1 \subset U^1$. Demak, X_0 nol o'lchamlidir.

2.1.2-misol. Barcha irratsional sonlar to'plami J nol o'lchamlidir. Agar $U \subset J$ to'plam r irratsional sonning atrofi bo'lsa, shunday r_1 va r_2 ratsional sonlar topiladiki, r_1 va r_2 orasida yotgan barcha irratsional sonlar to'plami $J(r, r_1)$ uchun $J(r_1, r_2) \subset U$ bo'ladi. Irratsional sonlar fazosi J da $J(r_1, r_2)$ ochiq to'plamlar va $FrJ(r_1, r_2) = \emptyset$. Chunki ixtiyoriy irratsional nuqta limit bo'lib, u ham yana shu $J(r_1, r_2)$ ga tegishlidir.

Ikki nol o'lchamli to'plamlar birlashmasi nol o'lchamli bo'lishi shart emas. Chunki irratsional va ratsional sonlar birlashmasi nol o'lchamli emas.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz:

2.1.2-teorema. Sanoqli sondagi yopiq nol o'lchamli to'plamlar birlashmasi nol o'lchamlidir.

2. Topologik fazolarda *dim* o'lchami va xossalari

Ushbu paragrafda biz, agar aksi aytilmagan bo'lsa, fazo sifatida sanoqli bazaga ega bo'lgan metrik fazolarni ko'rib chiqamiz. Nuqta atrofi deb esa, faqat shu nuqtani saqlovchi ochiq to'plamlarni olamiz.

Fazoning nuqtadagi o'lchamini induksiya bo'yicha quyidagicha aniqlaymiz:

2.2.1-ta'rif. Bo'sh to'plam va faqat bo'sh to'plam – 1 o'lchamga ega. Agar x_0 nuqta chegarasi $\leq n-1$ o'lchamga ega bo'lgan shunday turli kichik atroflarga ega bo'lsa, topologik fazo X o'zining $x_0 \notin X$ nuqtasida o'lchami $\leq n(n \geq 0)$ ga ega deyiladi.

Topologik fazo, agar o'zining har bir nuqtasida $\leq n$ o'lchamga ega bo'lsa, uning o'lchami $\leq n(n \geq 0)$ deyiladi va $\dim X \leq n$ ko'rinishda yoziladi. Agar X fazo $\dim X \leq n$ bo'lib, $\dim X > n-1$ bo'lsa, $\dim X = n$ deyiladi.

Agar $\dim X \geq n$ uchun har qanday $n \in \mathbb{N}$ o'rinli bo'lsa, $\dim X = \infty$ deyiladi. Ravshanki, topologik akslantirishlarda fazoning strukturasi o'zgarmaydi. Shu sababli nuqtaning atrofi va chegarasida o'zgarish bo'lmaydi.

Bu ta'rifdan quyidagi xulosalarni chiqarishimiz mumkin.

2.2.1-xulosa. Ma'lum bo'ladiki, fazoning n o'lchamli (nuqtada n o'lchamli) bo'lish xususiyati topologik invariant ekan.

2.2.2-xulosa. $\dim X \leq n$ shart X fazoning shunday ochiq bazasi topilib, uning elementlari chegarasi $\leq n-1$ o'lchamga ega bo'lishi shartiga ekvivalentdir.

2.2.3-xulosa. $n=0$ bo'lganda, 2.1.1- va 2.2.1-ta'riflar ustma-ust tushadi.

2.2.1-teorema. Agar $\dim X = n$, bo'lsa, n chekli. U holda ixtiyoriy $m \leq n$ uchun X fazo m o'lchamli qismga ega.

Isbot. Ma'lumki, agar $\dim X > n-1$ bo'lsa, u holda shunday $x_0 \in X$ nuqta va uning U_0 atrofi topiladiki, V ixtiyoriy ochiq atrof uchun $x_0 \in V \subset U_0$ va $\dim F_r V \geq n-1$ shartlar o'rinli. Ikkinchi tomondan, $\dim X \leq N$ bo'lganligidan shunday ochiq V_0 topiladiki, $x_0 \in V_0 \subset U_0$ bo'lsin. Bu atrof uchun $\dim F_r V_0 \leq n-1$.

Demak, V_0 to'plamning chegarasi X ning shunday to'plamostisi ekanki, uning o'lchami $n-1$ ga teng ekan. Bizdan xuddi shuning isboti talab qilingan edi.

Mazkur 2.2.1-teorema faqat chekli o'lchamli fazolar uchun o'rinlidir.

2.2.1-misol. a) to'g'ri chiziq va interval 1 o'lchamlidir;

b) ixtiyoriy ko'pburchak, aylana, ellips, giperbola va parabola 1 o'lchamga ega;

d) doira, Miyobius varag'i va sfera 2 o'lchamlidir.

2.2.2-teorema. Ixtiyoriy $X_0 \subset X$ uchun $\dim X_0 \leq \dim X$ o'rinlidir.

Isbot. Induksiya metodi bilan isbotlaymiz: $n=-1$ bo'lganda teorema o'rinli: $n-1$ uchun teorema sharti o'rinli bo'lsin. X fazo uchun $\dim X \leq n$ o'rinli, X_0 qism fazo va $x_0 \in X_0$ ixtiyoriy nuqtasi bo'lib, U_0 to'plam uning X_0 dagi atrofi bo'lsin. U holda X_0 nuqtaning X da U atrofi topiladiki, u uchun $U_0 = U \cap X_0$ o'rinli. $\dim X \leq n$ bo'lganidan, X fazoda shunday V ochiq to'plam topiladiki, u uchun $x_0 \in V \subset U$, $\dim Fr V \leq n-1$ o'rinlidir. $V_0 = V \cap X_0$ desak, u holda V_0 to'plam X_0 da ochiq to'plam va $x_0 \in V_0 \subset U_0$. Endi $B = Fr V$ va $B_0 = Fr V_0$ deb belgilasak, bu yerda $B = \bar{V} \setminus V$, $B_0 = (\bar{V}_0 \setminus V) \cap X_0$. Bu holda, ravshanki, $B_0 \subset B \cap X_0$. Induksiya shartiga ko'ra, $\dim B_0 \leq n-1$. Biz aynan shuni isbot qilishimiz lozim edi.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

2.2.3-teorema. Sanoqli bazali mertik X topologik fazoning ixtiyoriy ikki A va B to'plamlari uchun quyidagi tengsizlik o'rinlidir:

$$\dim(A \cup B) \leq \dim A + \dim B + 1$$

2.2.4-teorema. Sanoqli bazali mertik X va Y topologik fazolar uchun $\dim(X \times Y) \leq \dim X + \dim Y$ o'rinlidir.

Isbot. Induksiya metodi bilan isbotlaymiz. Agar $\dim X = -1$ va $\dim Y = -1$ bo'lsa, teorema o'rinli.

Faraz qilaylik, $\dim X = m$, $\dim Y = n$ bo'lsin. Induksiyaga ko'ra, quyidagi hollar o'rinli:

$$\dim X \leq m, \dim Y \leq n-1 \quad (1)$$

$$\dim X \leq m-1, \dim Y \leq n \quad (2)$$

Har bir $Z = (x, y) \in X \times Y$ nuqta $X \times Y$ topologik fazoda yetarli kichik $U \times V$ ko'rinishdagi atrofga ega va bu yerda U to'plam x ning X fazodagi, V esa, y ning Y dagi atroflari bo'lib, ular uchun $\dim F_r U \leq m-1$, $\dim F_r V \leq n-1$ lar o'rinli bo'ladi.

Dekart ko'paytma va chegaraviy to'plamlarning xossalariga ko'ra, ular uchun $Fr(U \times V) = (\bar{U} \times FrV) \cup (FrU \times \bar{V})$ tenglik o'rinli. Bu birlashmada $\bar{U} \times FrV$ va $FrU \times \bar{V}$ to'plamlar yopiq to'plamlardir. Induktiv shartga va (1), (2) larga ko'ra, qo'shiluvchilar o'lchami $\leq m+n-1$ ga teng. Demak, $\dim F_r(X \times Y) \leq m+n-1$.

U holda $\dim(X \times Y) \leq m+n$ bo'ladi ¹.

¹ Энгелькинг Р.. Общая топология. М. Мир, 1986, с.752.

3. Qo'zg'almas nuqta haqida Brauer teoremasi va uning tatbig'i

R^n fazoning o'lchami n ga teng bo'lishini ko'rsatish uchun bu fazoning tuzilishiga chuqurroq e'tibor berish kerak. Buning uchun albatta kombinator fikrlash jarayoni lozimdir. Brauer teoremasidan $\dim R^n = n$ tenglik oson isbotlanadi va bu teorema ko'pgina teoremlarni isbotlashda qo'llaniladi.

2.3.1-ta'rif. Agar har bir $\lambda_0, \lambda_1 \dots \lambda_k$ haqiqiy sonlar sistemasi uchun $\lambda_0 x_0 + \lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_k x_k = 0$ va $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_k = 0$ shartlar faqat $\lambda_i = 0, i \in \overline{0, n}$ bo'lganda o'rinli bo'lsa, R^n fazoning $x_0, x_1, \dots, x_k$ nuqtalar sistemasi chiziqli erkin sistema deyiladi.

R^n fazoning ixtiyoriy $m+1$ chiziqli erkin $a_0, a_1, \dots, a_m$ nuqtalari berilgan bo'lsin. R^n fazoning $x = \lambda_0 a_0 + \lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_m a_m$ (1) ko'rinishidagi nuqtalar to'plami $a_0, a_1, \dots, a_m$ nuqtalarga tortilgan m o'lchamli simpleks deyiladi va $[a_0 a_1 \dots a_m] = T^m$ ko'rinishda belgilanadi. Bu yerda $\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_m = 1$ va $\lambda_i \geq 0 \quad i \in \overline{0, m}$ (2).

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, m o'lchamli simpleks $T^m = [a_0, a_1, \dots, a_m] \subset R^n$ nuqtalarning tartibiga bog'liq emas, u faqat $\{a_0, a_1, \dots, a_m\}$ to'plamga bog'liqdir.

2.3.2-ta'rif. $T^m = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_m] \subset R^n$ simpleksni olsak, m dan katta bo'lmagan va manfiy bo'lmagan har qanday $k+1$ haqiqiy sonlar $j_0, j_1, \dots$ uchun $a_{j_0}, a_{j_1}, \dots, a_{j_k}$ nuqtalar sistemasi ham chiziqli erkindir. Bundan doimo k o'lchovli $T^k = [a_{j_0} a_{j_1} \dots a_{j_k}]$ simpleks aniqlangan bo'ladi. Har bir shu $T^k = [a_{j_0} a_{j_1} \dots a_{j_k}]$ ko'rinishdagi simpleks $T^m = [a_0 a_1 \dots a_m]$ simpleksning k -o'lchovli tomoni (yog'i) deyiladi. 0 o'lchovli tomoni $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m$ nuqtalar bo'lib, ular $T^m = [a_0, a_1, a_2, \dots, a_m]$ simpleksning uchlari deyiladi. $T^m = [a_0 a_1 \dots a_m]$ simpleks ham o'ziga yoq hisoblanadi. Agar $x \in T^m = [a_0 \dots a_m]$ bo'lsa, u holda u nuqta bo'lib, bu nuqta uchun (1) va (2) tengliklar o'rinlidir. Bu holda $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_m$ sonlar x nuqtaning barisentrik koordinatalari deyiladi va $(\lambda_0(x), \lambda_1(x), \dots, \lambda_m(x))$ ko'rinishda yoziladi.

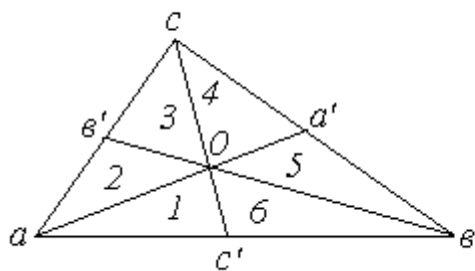
Bu ta'rifda $m=0$ bo'lsa, 0-o'lchovli $T^0=[a_0]$ simpleks — bu nuqta; $m=1$ bo'lsa, 1-o'lchovli simpleks $T^1=[a_0a_1]$ — bu uchlari a_0 va a_1 nuqtalarda bo'lgan kesma; $m=2$ bo'lsa, 2-o'lchovli simpleks $T^2=[a_0a_1a_2]$ — bu uchlari a_0, a_1 , va a_2 nuqtalarda bo'lgan uchburchak (albatta, teng tomonli); $m=3$ bo'lsa, 3-o'lchovli $T^3=[a_0a_1a_2a_3]$ simpleks — bu uchlari a_0, a_1, a_2, a_3 nuqtalarda bo'lgan tetraedrdir. Yopiq simpleks $\overline{T^m} = \overline{[a_0a_1a_2\dots a_m]}$ ko'rinishda belgilanadi va yoqlari bilan birga qaraladi. Ochiq simpleks ko'p hollarda $T^m = [a_0, a_1, \dots, a_m]$ ko'rinishda belgilanadi, bu simpleksga uning yoqlari kirmaydi.

2.3.1-Brauer teoremasi. Ixtiyoriy n o'lchovli yopiq simpleks $\overline{T^n}$ ni o'z-o'ziga $f:\overline{T^n} \rightarrow \overline{T^n}$ uzluksiz akslantirishda kamida bitta qo'zg'almas nuqta mavjud, ya'ni shunday $x \in \overline{T^n}$ topiladiki, uning uchun $f(x)=x$ o'rinli bo'ladi.

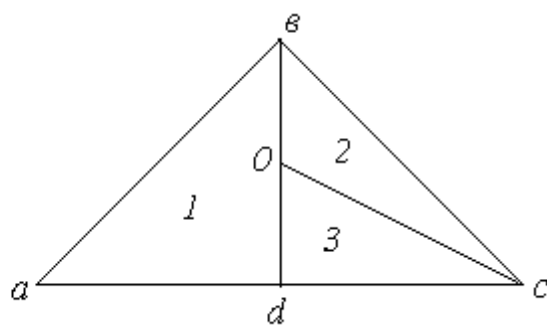
Isbot. Bu teoremaning $n=2$ bo'lgan holdagi isbotini keltiramiz. Tekislikda yoki R^n , $n>2$ fazoda uchlari a, b va c nuqtalarda bo'lgan uchburchakni $T=[a,b,c]$ ko'rinishda belgilaylik. $T=[a,b,c]$ uchburchakning triangulyasiyasi τ deb shunday chekli sondagi uchburchaklarning ixtiyoriy sistemasiga aytiladiki, bu τ sistema quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

a) $\cup\{\tau:\tau \in \tau\}=T$;

b) τ sistemaning ixtiyoriy ikki turli elementi (uchburchagi) umumiy nuqtaga ega emas yoki agar umumiy nuqtaga ega bo'lsa, bu nuqta har ikkalasi uchun uch bo'lsin yoxud ular kesma bo'yicha kesishsa, bu kesma har ikkalasi uchun tomon bo'lsin.



2.3.1-rasm



2.3.2-rasm

2.3.1-rasmdagi uchburchaklar sistemasi $[a,b,c]$ uchburchakning τ triangulyasiyasi bo‘la oladi. 2.3.2-rasmdagisi esa, triangulyasiya bo‘la olmaydi. $[a,b,c]$ uchburchak triangulyasiyasi τ ning o‘lchovlari va kesmalari sifatida triangulyasiyadagi uchburchakning uchlari va kesmalarini olish kerak. a,b va c lar ham triangulyasiya uchlari bo‘ladi, uning $[ab]$, $[bd]$ va $[ca]$ kesmalarda yotgan kesmalari kesmalarning triangulyasiyasini ifodalaydi.

Teoremani isbotlash uchun quyidagi Shperner lemmasidan foydalanamiz.

2.3.1-Lemma (Shperner lemmasi). $[a_0,a_1,a_2]$ uchburchakning ixtiyoriy τ triangulyasiyasi berilgan va triangulyasiyaning har bir e uchiga uchburchak $T=[a_0a_1a_2]$ ning $f(e)$ uchi mos qo‘yilgan bo‘lsin. Bu moslik $f(a_i)=a_i, i=0,1,2$ shartni va τ triangulyasiyada uchburchak T ning $[a_i a_j]$ tomonida yotgan e uchiga, moslik $f(e)=a_i$ yoki $f(e)=a_j$ shartni qanoatlantirsin; bu yerda $0 \leq i < j \leq 2$. U holda τ triangulyasiya uchburchaklari uchlariga uchburchak T ning mos kelgan har xil uchlari to‘g‘ri kelgan, triangulyasiyaning uchburchaklari soni toq sonidir.

Isbot. $f:\tau \rightarrow T$ moslik berilgan bo‘lsin. Agar bu f moslikda T uchburchakning ikki a_0 va a_1 uchlari mos qo‘yilgan bo‘lsa, τ kesmasi belgilangan kesma deyiladi. Uchburchakning (triangulyasiyasining) har bir xil uchiga T uchburchakning har xil uchi mos qo‘yilgan bo‘lsa, bunday uchburchak bir karrali uchburchak deyiladi. τ triangulyasiyaning bittadan kam bo‘lmagan belgilangan tomonli bir karrali bo‘lmagan uchburchagi ikki karrali uchburchak deyiladi. Ravshanki, triangulyasiyada ikki karrali uchburchak ikkita belgilangan tomonga ega.

Endi τ triangulyasiyaning bir karrali uchburchaklar sonini α bilan, τ triangulyasiyaning ikki karrali uchburchaklar sonini esa, β bilan belgilaymiz. Lemmani isbotlash uchun $\alpha + 2\beta$ sonning toq ekanligini ko‘rsatishimiz yetarli. τ triangulyasiyaning jami (t^1, t^2) juftliklar sistemasini olamiz, bu yerda t^1 — kesmalari, t^2 — uchburchaklari bo‘lib, agar $t^1 \neq (t^1)'$ yoki $t^2 \neq (t^2)'$ bo‘lsa, (t^1, t^2)

juftlik $((t^1)', (t^2)')$ juftlikdan farqli hisoblanadi. Agar t^1 kesma belgilangan bo'lib, t^2 uchburchakning tomonidan iborat bo'lsa, (t^1, t^2) juftlik belgilangan belgili deyiladi. Har bitta bir karrali uchburchak element sifatida faqat bitta belgilangan juftlikka kiradi, har bir ikki karrali uchburchak esa, element sifatida ikkita belgilangan juftlikka kiradi. Shu sababli $\alpha + 2\beta$ ifoda hamma belgilangan juftliklar sonidir.

Lemmaning shartiga ko'ra, τ triangulyasiyaning belgilangan kesmalari $[a_1 a_2]$ va $[a_0 a_2]$ kesmalarda yotmaydi. Shu sababli ular $[a_0, a_1]$ kesmada yoki T uchburchakning ichida yotadi (uchlaridan tashqari). Agar belgilangan kesma $[a_0, a_1]$ kesmada yotsa, u holda bu kesma τ triangulyasiyada faqat bitta uchburchakning tomonidan iborat bo'ladi. Shu vaqtning o'zida agar belgilangan kesma (uchlarisiz) T uchburchakning ichida yotsa, u holda bu kesma τ triangulyasiyaning ikkita uchburchagi tomonidan iborat bo'ladi. Shu sababli $\alpha + 2\beta = \gamma + 2\delta$ tenglik o'rinli, bu yerda γ — T uchburchakning $[a_0, a_1]$ tomonida yotgan belgilangan kesmalar sonidir, δ esa, T uchburchakning ichida yotgan belgilangan kesmalar sonidir. Shperner lemmasi kesma uchun qaralganda, δ □ toq sondan iboratdir. Shu sababli $\alpha + 2\beta$ son ham toq sonidir.

Shperner lemmasidan talab qilingan natijalarni olish uchun quyidagilar kerak.

2.3.2-Lemma (Lebeg lemmasi). X kompaktda shunday yopiq to'plamlar sistemasi $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ berilgan bo'lsin va bu sistema ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun X kompaktda shunday M_ε to'plam topilib, bu to'plam ixtiyoriy $\alpha \in A$ uchun $diam M_\varepsilon < \varepsilon$, bu $M_\varepsilon \cap F_\alpha \neq \emptyset$, $\alpha \in A$ shartlarni qanoatlantirsa, u holda $\bigcap \{F_\alpha : \alpha \in A\} \neq \emptyset$.

Isbot. Faraz qilaylik, $\bigcap \{F_\alpha : \alpha \in A\} = \emptyset$ o'rinli bo'lsin. $A_\varepsilon = \{x \in X : O_\varepsilon(x) \cap F_\alpha = \emptyset : \alpha \in A^1 \not\subset A\}$ to'plamni olaylik. Ya'ni, $O_\varepsilon(x)$ to'plam F_α larning hammasi bilan kesishmaydi.

Ma'lumki, a) $\varepsilon > \varepsilon^0$ uchun $A_\varepsilon \subset A_{\varepsilon^0}$ va $\text{int } A_\varepsilon \subset \text{int } A_{\varepsilon^0}$ o'rinli. Uchburchak tengsizligidan $y \in O_{\varepsilon/2}(x)$ dan $O_{\varepsilon/2}(y) \subset O_\varepsilon(x)$ ham o'rinli. Shu sababli

b) $A_\varepsilon \leq \text{int } A_{\varepsilon/2}$.

Shartimizga ko'ra, ixtiyoriy $x \in X$ nuqta uchun shunday $\alpha = \alpha(x)$ nomer topiladiki, $x \in \overline{F_\alpha}$, ya'ni $x \in X \setminus F_\alpha$. $X \setminus F_\alpha$ ning ochiq to'plam ekanligidan, shunday $\varepsilon > 0$ topiladiki, $O_\varepsilon(x) \subset X \setminus F_\alpha$. Bundan $x \in A_\varepsilon$. Demak,

d) $X = \bigcup \{A_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ tenglik o'rinlidir.

b) va d) shartlardan $X = \bigcup \{\text{int } A_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ ni ham yozishimiz mumkin. X ning kompakt ekanligidan shunday $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$ lar topiladiki, ular uchun $X = \text{int } A_{\varepsilon_1} \cup \text{int } A_{\varepsilon_2} \cup \dots \cup \text{int } A_{\varepsilon_k}$ tenglik o'rinli; a) xossadan $\delta = \min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k\}$ son uchun $X = \text{int } A_\delta \subset A_\delta$ ga ega bo'lamiz.

Agar $\emptyset \neq M \leq X$ va $\text{diam } \overline{M} < \delta$ bo'lsa, u holda $x_0 \in M$ uchun $M \subseteq O_\delta x_0$ o'rinli. Shu sababli M to'plam hamma F_α larni kesmaydi. M to'plamning ixtiyoriy ekanligi lemmaning shartiga ziddir.

X metrik fazo berilgan bo'lsin. Agar ixtiyoriy $M \subset X$, $\text{diam } M < \eta$ to'plam λ sistemaning hamma elementlarini kesmasa (kesishmasa), X metrik fazoning yopiq to'plamlar sistemasi $\lambda = \{F_\alpha : \alpha \in A\}$ uchun $\eta > 0$ son sistemaning Lebeg soni deyiladi.

Agar ixtiyoriy $M \subset X$, $\text{diam } M < r$ to'plam uchun shunday $\alpha = \alpha(M)$ nomer topilsa va uning uchun $M \subseteq O_\alpha$ o'rinli bo'lsa, X fazoning ixtiyoriy ochiq qoplamasi $\omega = \eta \{O_\alpha : \alpha \in A\}$ uchun $\eta \geq$ son qoplamaning Lebeg soni deyiladi.

Lebeg lemmasidan quyidagilar kelib chiqadi:

- a) kompakt fazoda kesishmasi bo'sh to'plamdan iborat bo'lgan yopiq to'plamlar sistemasi loqal bitta Lebeg soniga ega bo'ladi;
- b) kompaktning ixtiyoriy ochiq qoplamasi kamida bitta Lebeg soniga ega.

Haqiqatan ham, $\omega = \{O_\alpha\}$ sistema X fazoning ochiq qoplamasi bo'lsa, u holda $X - O_\alpha = F_\alpha$ yopiq to'plamdir va ularning kesishmasi bo'sh to'plamdir. Isbotlanganiga ko'ra, $\{F_\alpha\} = \lambda$ sistemaning Lebeg soni mavjud, bu son ω qoplama uchun ham Lebeg son bo'ladi.

2.3.1-natija. $T = [a_0 a_1 a_2]$ uchburchakning, yopiq F_1, F_2, F_3 to'plamlar shunday qoplamasi bo'lsinki, ular uchun $a_i \in F_i$, $i = 0, 1, 2$ va $[a_i a_j] \subseteq F_i \cup F_j$ $0 \leq i < j \leq 2$ o'rinli bo'lsin. U holda $F_0 \cap F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$.

Isbot. Tayinlangan $\varepsilon > 0$ uchun $T = [a_0 a_1 a_2]$ uchburchakning shunday τ triangulyasiyasini olamizki, uning elementlarining diametri ε dan katta bo'lmasin. Bunday τ triangulyasiyaga ε triangulyasiya deyiladi. Bu triangulyasiya va T uchburchak orasida quyidagicha f moslik o'rnatamiz: τ ning ixtiyoriy ye uchiga T uchburchakning shunday $fe = a_i$ uchini mos qo'yamiz: 1) $e \in F_i$ va 2) agar $e = a_j$ bo'lsa, u holda $i = j$; agar $e \in [a_j a_k]$, $0 \leq j < k \leq 2$ bo'lsa, u holda yoki $i = j$, yoki $i = k$. Shartga ko'ra, bu bo'lishi mumkin bo'lgan holdir.

Ma'lum bo'ladiki, Shperner lemmasining 2.3.1-shartlari o'rinli. Bu holda τ triangulyasiyada shunday $t = [a, b, c]$ uchburchak topiladiki, $f\{a, b, c\} = \{a_0, a_1, a_2\}$ o'rinli bo'ladi. Demak, $t \cap F_i \neq \emptyset$; $i = 0, 1, 2$ va $\rho(F_i, F_j) \leq \text{diam } t < \varepsilon$ $0 \leq i < j \leq 2$. Lebeg lemmasidan va $\varepsilon > 0$ ning ixtiyoriy ekanligidan: $F_0 \cap F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$.

Brauer teoremasining isboti (davomi). $f: T \rightarrow T$, $T = [a_0 a_1 a_2]$, uzluksiz akslantirish berilgan bo'lsin. l_{ij} bilan T uchburchak a_i va a_j uchlaridan o'tgan to'g'ri chiziqlarni belgilaymiz, bu yerda $0 \leq i < j \leq 2$.

$\varphi_k(x) = \rho(x, l_{ij})$, $x \in R^2$, $0 \leq i, j, k \leq 2$. $i \neq j \neq k \neq i$ funksiyaning o'zaro perpendikulyar to'g'ri chiziqlar bo'lganligi o'rinli. Shuni aytishimiz kerakki, φ_k funksiya l_{ij} to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan to'g'ri chiziqlarda doimiy qiymatga ega, to'g'ri chiziqqa perpendikulyar to'g'ri

chiziqlarda va shu chiziqlardan chiqqan nurlarda chiziqli funksiyalardir, bu yerda $i \neq j \neq k \neq r$.

Bu funksiya R^2 da uzluksiz bo'lganligi sababli T da ham uzluksizdir. Shu tufayli $F_k = \{x \in T : \varphi_k(x) - \varphi_k(f(x)) \geq 0\}$, $k = 0, 1, 2$.

$\varphi_k(x)$ va $\varphi_k(f(x))$ funksiyalar uzluksiz bo'lganligidan F_k to'plamlar yopiq to'plamlardir. Ixtiyoriy $x \in T$ nuqta uchun quyidagi:

$\varphi_0(x)\rho(a_1a_2) + \varphi_1(x)\rho(a_2a_0) + \varphi_2(x)\rho(a_0a_1) = \varphi_0(f(x))\rho(a_1a_2) + \varphi_1(f(x))\rho(a_2a_0) + \varphi_2(f(x))\rho(a_0a_1)$ tenglik o'rinli.

Shu sababli

$$[\phi_0(x) - \phi_0(f(x))]\rho(a_1a_2) + [\phi_1(x) - \phi_1(f(x))]\rho(a_2a_0) + [\phi_2(x) - \phi_2(f(x))]\rho(a_0a_1) = 0 (*).$$

Ikkinchi ko'paytuvchilar musbat bo'lganligi uchun bu (*) yig'indida birinchi ko'paytuvchilardan birortasi manfiy emas. Binobarin, $T = F_0 \cup F_1 \cup F_2$.

Agar $x = a_0$ bo'lsa, u holda $\varphi_1(x) = \varphi_2(x) = 0$ va (*) da oxirgi ikki qo'shiluvchi musbat emas. Binobarin, $\varphi_0(x) - \varphi_0(f(x)) \geq 0$ va $a_0 \in F_0$. Shunga o'xshab, $a_k \in F_k, i = 1, 2$. Agar $x \in [a_1a_2]$ bo'lsa, u holda $\varphi_0(x) = 0$ va (*) dagi birinchi qo'shiluvchi musbat emas. Shu sababli qolgan ikki qo'shiluvchidan kamida biri manfiy emas va shuning uchun $x \in F_1 \cup F_2$. Bundan esa $[a_1a_2] \subset F_1 \cup F_2$ va $[a_0a_1] \subset F_0 \cup F_1$, $[a_0a_2] \subset F_0 \cup F_2$. Oldingi 2.3.1-natijaga ko'ra, shunday nuqta $J \in F_0 \cap F_1 \cap F_2$ mavjudki, bu nuqta uchun (*) tenglikka ko'ra $\varphi_k(\xi) - \varphi_k(f(\xi)) = 0$; $k = 0, 1, 2$. Ya'ni, $\rho(\xi, l_{ij}) = \rho(f(\xi), l_{ij})$, $0 \leq i < j \leq 2$. Binobarin, agar l_{ij} to'g'ri chiziq uchburchak T ni kesib va l_{ij} to'g'ri chiziqlarga parallel bo'lib, undan $\rho(\xi, l_{ij})$ masofada bo'lsa, u holda ξ va $f(\xi)$ nuqtalar uchta l_{ij} to'g'ri chiziqlarning har biriga tegishlidir. Ya'ni, bu to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan iborat ekan. Demak, $f(\xi) = \xi$.

X topologik fazo va $A \subset X$ ning to'plamostisi bo'lsin.

Agar $f(x) = x, x \in A$ bo'lsa, uzluksiz $f : X \rightarrow A$ akslantirish retraksiya deyiladi. Bu yerda $A \subset X$ to'plam X fazoni retrakti deb yuritiladi.

2.3.1-misol. $\{(x, y) \in R^3 : x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1\}$ silindrni olsak, uni OZ o'qqa parallel proeksiyalari natijasida asosiga retraksiyalash mumkin.

Agar $I = [a, b]$ kesmani olsak, bu holda bunday retraksiya $f : [a, b] \rightarrow S^0 = \{a\} \cup \{b\}$ mavjud emas.

Haqiqatan ham, agar $f : [a, b] \rightarrow \{a\} \cup \{b\}$ mavjud bo'lsa, $f^{-1}(a) = F_1$; $f^{-1}(b) = F_2$, F_1, F_2 lar yopiq to'plamlardir va $F_1 \cup F_2 = [a, b]$, $a \in F_1$ va $b \in F_2$. $F_1 \cap F_2 \neq \emptyset$. Agar $F_1 \cap F_2 = \emptyset$ bo'lsa, $[a, b]$ ning bog'lamli ekanligiga ziddir. Demak, bunday retraksiya mavjud emas.

Agar $T = [a_0 a_1 a_2]$ uchburchakni olsak, T da ham o'zining chegarasi (konturiga) $S = [a_0 a_1] \cup [a_1 a_2] \cup [a_2 a_0]$ ga retraksiyasi mavjud emas.

Agar shunday $f : T \rightarrow S$ uzluksiz akslantirish mavjud desak, $F_0 = f^{-1}([a_0 a_1])$, $F_1 = f^{-1}([a_1 a_2])$, $F_2 = f^{-1}([a_2 a_0])$ to'plamlar T da yopiq va T ni qoplaydi. Ravshanki, $a_i \in F_i$, $i = 0, 1, 2$ va $[a_{ij}] \subset F_i \cup F_j$, $0 \leq i < j \leq 2$.

2.3.1-natijaga ko'ra, shunday $\xi \in F_1 \cap F_2 \cap F_3$ nuqta mavjud. U holda $f(\xi) \in [a_0 a_1] \cap [a_1 a_2] \cap [a_2 a_0] = \emptyset$. Bu ziddiyat retraksiya mavjud emasligini ko'rsatadi ¹.

¹ Jo'rayev T.F. Topologiyaga kirish. Funktorlar. O'lchamlar. Chiziqlar, T.Tafakkur- bo'stoni, 2012., 240b

4. Fazoning ind, Ind va dim o'lchamlarining o'zaro bog'liqliklari

Biz yuqorida sanoqli bazaga ega bo'lgan metrik fazolarning *dim* ko'rinishdagi o'lchami bilan tanishgan edik. Lekin fazolarning *ind*, *Ind* va *dim* o'lchamlari ham mavjud. Bu o'lchamlar sanoqli bazaga ega bo'lmagan metrik fazolar sinfidan tashqarida teng emas. Ya'ni, metrik bo'lmagan X topologik fazo uchun $\dim X \neq \text{ind} X \neq \text{Ind} X$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi. Lekin sanoqli bazali yoki separabel metrik fazolar uchun bu uchala o'lcham ekvivalentdir.

X regulyar fazo va n - manfiy bo'lmagan butun son berilgan bo'lsin.

2.4.1-ta'rif.

- i1) $\text{ind} X = -1$ faqat va faqat, $X = \emptyset$ bo'lsa;
- i2) agar ixtiyoriy $x \in X$ va uning ixtiyoriy atrofi V uchun shunday ochiq $U \subset X$ topilsa va $x \in U \subset V$ hamda $\text{ind}_U U \leq n-1$ o'rinli bo'lsa, $\text{ind} X \leq n$;
- i3) agar $\text{ind} X \leq n$ tengsizlik o'rinli va $\text{ind} X \leq n-1$ tengsizlik bajarilmasa, $\text{ind} X = n$;
- i4) agar $\text{ind} \leq n$ tengsizlik hech bir n uchun o'rinli bo'lmasa, $\text{ind} X = \infty$.

Bu i1) – i4) shartlar har bir X regulyar fazoga $\text{ind} X$ manfiy bo'lmagan butun sonni yoki 1 yoxud cheksiz son ∞ mos qo'ymoqda. Boshqacha aytganda, *ind* funksiya barcha regulyar fazolar oilasini $\{-1, 0, 1, 2, \dots, n, \dots, +\infty\}$ to'plamga akslantiradi. Yana shuni ta'kidlash lozimki, o'lchami bir xil bo'lgan fazolar topologik ekvivalentdir. $\text{ind} X$ son regulyar fazoning Menger-Urison o'lchami yoki kichik induktiv o'lchami deyiladi. Osongina tekshirib ko'rish mumkinki, agar X va Y regulyar fazolar gomeomorf bo'lsa, u holda $\text{ind} X = \text{ind} Y$ o'rinlidir.

2.4.2-ta'rif. X topologik fazoning E to'plami uning $P \subset X$ va $Q \subset X$ to'plamlarini ayiradi (yoki ajratadi), deyiladi, agar $X \setminus E = H_1 \cup H_2$ bo'lib, H_1, H_2 dizyunkt va $X \setminus E$ da ochiq va $P \subseteq H_1; Q \subseteq H_2$ bo'lsa.

X topologik fazoning regulyar bo'lganligi tufayli ta'rifdagi i2) shartning U to'plamini kuchliroq $\bar{U} \subset V$ shart bilan almashtirsak ham bo'ladi. Bu holda $\text{ind} X \leq n \geq 0$ tengsizlik ixtiyoriy $x \in X$ nuqta bilan bu nuqtani o'z ichiga olgan ixtiyoriy F yopiq to'plamni o'lchami $\text{ind}_F F \leq n-1$ bo'lgan to'plam orqali ajratish mumkin bo'lsa.

Menger-Urison o'lchami ta'rifidan bevosita aytishimiz mumkin: agar X fazoning shunday β bazasi mavjud bo'lsa va $indX \leq n$ bu fazoning ixtiyoriy $U \in \beta$ elementi uchun $F_2U \leq n-1$ o'rinli bo'lsa.

Topologik fazoning regulyarligi nasliy xossa bo'lganligi tufayli, agar X fazoda ind o'lcham aniqlangan bo'lsa, u holda uning ixtiyoriy fazoostisi $M \leq X$ da ham $indX$ o'lcham aniqlangan bo'ladi.

2.4.1-teorema. Regulyar topologik fazoning ixtiyoriy M fazoostisi uchun $indM \leq indX$ o'rinli.

Isbot. Agar $indX = 1$ yoki $indX = \infty$ bo'lsa, teorema shartidagi tengsizlik o'rinlidir. Yuqoridagi $indM \leq indX$ tengsizlik $indX \leq n-1$ shartni qanoatlantiruvchi barcha X fazolar uchun isbotlangan bo'lsin. Endi X regulyar fazo va $indX = n$ bo'lsin va ixtiyoriy $x \in M$ nuqtani olaylik. V to'plam x nuqtanng M dagi ixtiyoriy atrofi bo'lsin. X da V_1 ixtiyoriy ochiq to'plam olamiz, u $V = V_1 \cap X$ shartni qanoatlantirsin. $indX \leq n$ bo'lganligi sababli shunday $U_1 \subset X$ ochiq to'plam topiladiki, u uchun

$$x \in U_1 \subset V_1 \text{ va } indFrU_1 \leq n-1(1)$$

$U = M \cap U_1$ to'plam x nuqtaning M atrofi bo'ladi, uning M dagi chegarasi $FrU = M \cap \overline{M \cap U_1} \cap \overline{M \setminus U_1}$. U_1 ning X dagi chegarasining fazoostidir.

Binobarin, (1) va induktiv shartga ko'ra, $indM \leq n$.

Endi X normal fazo va n manfiy bo'lmagan butun son bo'lsin.

2.4.3-ta'rif.

- I1) $IndX = -1$ faqat va faqat, $X = \emptyset$ bo'lsa;
 - I2) agar ixtiyoriy $V \subset X$ atrofi uchun shunday $U \subset X$ ochiq to'plam topilmasa va u uchun $A \subset U \subset V$ va $IndFrU \leq n-1$ o'rinli bo'lsa; $IndX \leq n$ bo'ladi.
 - I3) agar $IndX \leq n$ bo'lsa va $IndX \leq n-1$ tengsizlik bajarilmasi $IndX = n$ bo'ladi.
 - I4) agar $IndX \leq n$ tengsizlik hech bir n uchun o'rinli bo'lmasa $IndX = \infty$ bo'ladi.
- I1) – I4) shartlar har bir normal X fazo uchun $IndX$ sonni mos keltirmoqda, bu $IndX$ yoki ≥ -1 butun son yoki “cheksiz katta” ∞ sonidan iboratdir. $IndX$ son X normal fazoning Brauer-Chex o'lchami yoki katta induktiv o'lchami deb

yuritiladi. Agar X va Y fazolar homeomorf bo'lsa, u holda $IndX = IndY$ ekanligi osongina tekshiriladi.

Bu ta'rifdan hamda X normal fazo bo'lganligi tufayli I2) shartdagi U to'plamni yanada kuchliroq shart $\bar{U} \subset V$ bilan almashtirsa bo'ladi. Bu holda I2) shart quyidagi ko'rinishga keladi:

$IndX \leq n$ tengsizlik shuni anglatadi: agar X fazoda ixtiyoriy ikki yopiq kesishmaydigan $A \subset X$ va $B \subset X$ to'plamlar chegarasining o'lchami $\leq n-1$ dan iborat bo'lgan to'plam bilan ajratilgan (yoki ayirilgan) bo'lsa.

Quyidagi teoremaning isboti o'quvchiga qiyinchilik tug'dirmaydi. Bu teorema kichik va katta induktiv o'lchamlar deb atalishini oqlaydi.

2.4.2-teorema. Agar X normal fazo bo'lsa, u holda $indX \leq IndX$. Ma'lumki, normal fazolar nasliy xossaga ega emas. Quyidagi teorema ham 2.4.1-teoremaga o'xshab isbotlanadi.

2.4.3-teorema. Normal fazoning ixtiyoriy $M \subset X$ yopiq fazoostisi uchun $IndM \leq IndX$ tengsizlik o'rinlidir.

Bo'sh bo'lmagan X to'plam berilgan bo'lsin, $A = \{A_\alpha : A_\alpha \subset X, \alpha \in J\}$ to'plamostilar sistemasi karrasi deb shunday eng katta butun n songa aytiladiki, A sistemaning $n+1$ ta elementi kesishmasi bo'sh bo'lmasa yoki "cheksiz son" ∞ deyiladi, agar bunday butun son mavjud bo'lmasa. Demak, agar A sistemaning tartibi n ga teng bo'lsa, u holda ixtiyoriy $n+2$ ta har xil $S_1, S_2, \dots, S_{n+2} \in J$ indeks uchun $A_{S_1} \cap A_{S_2} \cap \dots \cap A_{S_{n+2}} = \emptyset$ o'rinli. A sistemaning karrasi $ordA$ ko'rinishida belgilanadi.

2.4.4-ta'rif. Agar shunday $f: X \rightarrow [0,1]$ funksiya mavjud bo'lib, uning uchun $f^{-1}(0) = A$ bajarilsa, X topologik fazoning A to'plamostisi funksional yopiq to'plam deyiladi.

X fazoning funksional yopiq to'plamlarining to'ldiruvchisi funksional ochiq to'plam deyiladi. Ta'rifdan ma'lum bo'ladiki, funksional yopiq to'plam yopiq to'plamdir. Shu sababli funksional ochiq to'plam ochiq to'plam bo'ladi.

Endi X Tixonov fazosi, n butun son va $n \geq -1$ bo'lsin.

2.4.5-ta'rif. d1) agar X fazoning ixtiyoriy funksional ochiq chekli qoplamasiga karrasi $\leq n$ bo'lgan funksional ochiq chekli qoplama chizish mumkin bo'lsa; $\dim X \leq n$ bo'ladi.

d2) agar $\dim X \leq n$ o'rinli, lekin $\dim X \leq n-1$ o'rinli bo'lmasa; $\dim X = n$ bo'ladi.

d3) agar $\dim X \leq n$ tengsizlik barcha n lar uchun bajarilmasa, $\dim X = \infty$; bo'ladi.

d1) – d3) shartlar har bir Tixonov fazosi X ga $\dim X$ sonni mos keltirmoqda. Bu $\dim X$ son yoki butun son ≥ 1 yoxud “cheksiz son” ∞ bo'lar ekan. $\dim X$ son X Tixonov fazosining Chex-Lebeg o'lchami yoki fazoning qoplama ma'nosida o'lchami deb yuritiladi. Agar X va Y fazolar gomeomorf bo'lsa, $\dim X = \dim Y$ o'rinli bo'ladi.

Fazoning qoplama ma'nosidagi ta'rifidan bevosita aytish mumkinki, $X = \emptyset$ bo'lgan taqdirdagina $\dim X \leq -1$ bo'ladi.

Tixonov fazolari nasliy xossaga ega bo'lgani uchun, agar bunday X da $\dim$ aniqlangan bo'lsa, uning ixtiyoriy fazoostisida ham $\dim$ aniqlangandir.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz. Bu teorema ko'p hollarda ta'rif sifatida ham qabul qilinadi.

2.4.4-teorema. Har bir X normal fazo uchun quyidagi ikki shart ekvivalentdir:

- 1) $\dim X \leq n$;
- 2) X fazoning ixtiyoriy chekli ochiq qoplamasiga karrasi $\leq n$ bo'lgan chekli ochiq qoplama chizish mumkin.

Agar X metrik hamda sanoqli bazaga ega bo'lgan fazo bo'lsa, 2.1 da keltirilgan o'lcham ind , 2.2 da keltirilgan o'lcham $\dim$ va 2.4 da keltirilgan o'lchamlar ind , Ind va $\dim$ lar o'zaro ekvivalentdir. Ya'ni, sanoqli bazaga ega bo'lgan metrik X fazo uchun quyidagi tenglik doimo o'rinli:

$$\dim X = indX = IndX - 1$$

¹ Jo'rayev T.F. Topologiyaga kirish. Funktorlar. O'lchamlar. Chiziqlar, T.Tafakkur- bo'stoni,2012.,240b

5. R^n fazo va uning to'plamostilari o'lchami. Chiziqli ta'rifi

O'lchamlar nazariyasi nafaqat geometrik figuralarning, balki R^n Evklid fazosining ixtiyoriy mukammal to'plamostilarining o'lchovlar soni haqida gap yuritishga imkon beradi. Gohida Evklid fazosi R^n ning to'plamostilari shunchalik murakkab bo'ladiki, ularni o'rganib chiqishda geometrik tasavvurimiz ko'p hollarda ojizlik qilib qoladi. O'lchamlar nazariyasida esa, teskari topologiyadan geometriyaga o'tish jarayoni mavjud bo'lib qoldi. Ixtiyoriy topologik fazolarning o'lchamini geometrik tushunchalar poliedr va n o'lchamli kublar o'lchamlari soni yordamida xarakterlash mumkin. Bunday urinish birinchi marta o'tgan asrning 20-yillari o'rtalari va oxirlarida rus matematigi P.S. Aleksandrov tomonidan ε siljish, ε akslantirishlar va jiddiy akslantirish haqidagi teoremlar yordamida amalga oshirildi.

Aleksandrovning ε akslantirish haqidagi teoremasi topologik fazolarning eng muhim sinfi Evklid fazosi R^n dagi barcha to'plamostilarning xarakteristikasini keltirib chiqardi. Ma'lum bo'ldiki, bu to'plamostilar barcha chekli-o'lchovli yoki sanoqli bazaga ega bo'lgan metrik fazolardan boshqa narsa emas ekan.

Jiddiy akslantirishlar haqidagi teoremasi esa, Aleksandrovning gomologik o'lchamlar nazariyasini qurishni boshlab berdi va o'lchamning algebraik xarakteristikasini vujudga keltirdi. Metrik fazolar sinfidan chetga chiqsak, keltirilgan uchala o'lcham ta'rifi o'zaro ekvivalent emas. Metrik fazolar sinfidan tashqarida asosan dim o'lchami nazariyasi invariantdir. Ya'ni, o'lchamning topologik fazodagi qoplama ma'nosidagi ta'rifi juda qo'l keladi. Shuni ta'kidlashimiz kerakki, metrik fazolar sinfidan tashqarida o'lchamlar nazariyasi yetarlicha mazmunga ega va geometrikroqdir.

2.5.1-misol. Haqiqiy sonlar o'qi R yoki aylana S^1 ni olaylik. Ularning ixtiyoriy x nuqtasi va bu nuqtaning ixtiyoriy V atrofi uchun ularning shunday U atrofi topiladiki, $U \subset V$ va chegara $F_r U$ faqat ikkita nuqtadan iborat bo'ladi. Ya'ni, ta'rifga ko'ra, $\text{ind}_{F_r U} = \emptyset$ chegara. U holda $\text{ind} R \leq 1$ va $\text{ind} S^1 \leq 1$ ga ega

bo'lamiz. $indM \leq indX$ va diskret fazolar nol o'lchamli ekanligidan $IndR > 0$ tengsizlikni yoza olamiz. Shu sababli quyidagi tengliklar o'rinlidir:

$$IndR = IndI = 1 \quad indS^1 = 1$$

Bunda S^1 aylana, $I=[0,1]$ -kesma.

Evklid fazosi R^n yoki S^n sferaning ixtiyoriy x nuqtasi va uning ixtiyoriy V atrofi uchun shunday U atrof topiladiki, $U \subset V$ va $F_r U$ gomeomorf S^{n-1} bo'ladi. Induksiya orqali ko'paytmasini oson isbotlash mumkin: $indR^n \leq n$, $indS^n \leq n$ va $indI^n \leq n$ tengsizliklar o'rinli.

2.5.1-teorema. C_1 va C_2 yopiq to'plamlar X fazoning o'zaro kesishmaydigan to'plamlari va $A \subset X$ fazoostisi bo'lib, $\dim A \leq n$ bo'lsin. U holda C_1 va C_2 larni ajratuvchi shunday B to'plam topiladiki, u uchun $\dim A \cap B \leq n-1$ o'rinli bo'ladi.

Isbot. Teoremani induksiya metodi bilan isbotlaymiz. Agar $n=0$ bo'lsa, $\dim A = -1$ yoxud $\dim A = 0$ bo'lib, teorema o'rinli.

Endi $n > 0$ bo'lsin. Ma'lumki, to'plamga chekli sondagi elementlarni qo'shsak, o'lcham o'zgarmaydi. Shu sababli A to'plamni $A = D \cup E$ ko'rinishda ifodalashimiz mumkin, bu yerda $\dim D \leq n-1$, $\dim E \leq 0$. Teorema shartiga ko'ra, $n=0$ bo'lganda, C_1 va C_2 larni ayiruvchi shunday B to'plam topiladiki, $B \cap E = \emptyset$ o'rinli bo'ladi. Bundan $A \cap B \subset D$, $\dim D \leq n-1$ bo'lganligi sababli $\dim A \cap B \leq n-1$.

2.5.2-teorema. X topologik fazo va X uchun $\dim X \leq n-1$ bo'lsin. n tadan C_i va C_i^1 yopiq to'plamlar berilgan bo'lib, ular $C_i \cap C_i^1 = \emptyset$, $i = 0, 1, \dots, n-1$ shartni qanoatlantirsin. U holda shunday n ta yopiq B_i to'plamlar topiladiki, har bir B_i to'plam C_i va C_i^1 ni ajratadi va $B_0 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1} = \emptyset$ o'rinli bo'ladi.

Isbot. Topologik fazo uchun $\dim X \leq n-1$ o'rinli bo'lsin. Oldingi teoreмага ko'ra, shunday B_i yopiq to'plam topiladiki, B_1 to'plam C_1 va C_1^1 ni ayiradi va $\dim B_1 \leq n-2$ bo'ladi. Yana shu teoremani qo'llasak, shunday B_2 to'plam C_2 va C_2^1 to'plamlarni ayiradi va $\dim B_1 \cap B_2 \leq n-3$ bo'ladi. Oldingi

teoremani qo'llash natijasida n ta B_i yopiq to'plamlar topiladiki, ular C_k va C_k^1 ni ayiradi va $\dim(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_k) \leq n - k - 1, k = 1, 2, \dots, n$ o'rinli bo'ladi. Agar $n = k$ bo'lsa, $\dim(B_1 \cap \dots \cap B_{n-1}) = -1$, bu esa, faqat $\emptyset$ to'plam uchun o'rinlidir. Ya'ni, $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n = \emptyset$.

2.5.2-misol. I^n kub berilgan bo'lsin, $I^n \subset R^n$ – Evklid fazosi. Ma'lumki, ixtiyoriy $x \in I^n$ uchun $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), |x_i| \leq 1$ shart o'rinlidir. $C_i = \{x \in I^n : x_i = 1\}$; $C_i^1 = \{x \in I^n : x_i = -1\}$. Agar B_i yopiq to'plam C_i va C_i^1 larni ayirsa, u holda $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n \neq \emptyset$.

Isbot. Agar B_i yopiq to'plam C_i va C_i^1 larni ayirsa, u holda ta'rifga ko'ra, $X \setminus B_i = U_i \cap U_i^1, C_i \subset U_i, C_i^1 \subset U_i^1, U_i \cap U_i^1 = \emptyset$ o'rinli.

U_i va U_i^1 lar $I^n \setminus B_i$ to'plamda ochiq bo'lgani uchun ular I^n da ham ochiq to'plamdir. Har bir $x \in I$ nuqta uchun $\vec{V}(x)$ vektor olamiz. $V(x)$ ning i -koordinatasi $\pm \rho(x, B_i)$ dan iborat bo'lib, agar $x \in U_i$ bo'lsa, $+\rho(x, B_i)$ olinadi; agar $x \in U_i^1$ bo'lsa, $-\rho(x, B_i)$ olinadi.

Har bir $x \in I^n$ nuqta uchun bunday moslikda $f(x)$ deb, x nuqtadan boshlab $\vec{V}(x)$ qo'ysak, shu $\vec{V}(x)$ ning uchini $f(x)$ nuqta deb olamiz. $\bar{T}^n$ va I^n fazolar gomeomorf bo'lganligi tufayli Brauer teoremasini qo'llash mumkin. Brauer teoremasiga ko'ra, bu uzluksiz akslantirishda shunday ishoralar qonuniyatiga ko'ra, har qanday holda ham $f(x) \in I^n$ o'rinlidir. Natijada, $f : I^n \rightarrow I^n$ akslantirishga ega bo'lamiz. Bu akslantirish uzluksizdir.

$x^0 \in I^n$ nuqta topiladiki, $f(x^0) = 0$ o'rinli bo'ladi.

Ixtiyoriy i indeks uchun $\rho(x^0, B_i) = 0$, bundan $x^0 \in B_i$ deyishimiz mumkin.

U holda $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n \neq \emptyset$.

Endi quyidagini isbot qilamiz.

2.5.3-teorema. Ixtiyoriy n uchun $\dim I^n \geq n$ o'rinli.

Isbot. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $\dim I^n \leq n - 1$ bo'lsin. 2.5.2-teoremaga ko'ra, I^n kubning turli qarama-qarshi yoqlarini ayiruvchi n ta yopiq

B_i to‘plamostilar mavjud bo‘lib, ular $B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n \bar{T} \neq \emptyset$ shartni qanoatlantiradi.

Bu esa, 2.5.2-misolda keltirilgan qoidaga ziddir. Demak, $\dim I^n \geq n$.

2.5.3-teorema va 2.5.1-misoldan quyidagi o‘rinli.

2.5.4-teorema. Ixtiyoriy n butun son uchun $\text{ind} R^n = \text{ind} S^n = \text{Ind} I^n = n$ tenglik o‘rinlidir.

Sanoqli bazaga ega metrik fazolarda uchala o‘lcham ekvivalent bo‘lganligi tufayli quyidagi o‘rinli.

2.5.5-teorema. Ixtiyoriy n butun son uchun quyidagi tengliklar o‘rinli:

$$\text{ind} R^n = \text{ind} S^n = \text{Ind} I^n = n$$

$$\dim R^n = \dim S^n = \dim I^n = n$$

$$\text{Ind} R^n = \text{Ind} S^n = \text{Ind} I^n = n$$

Ma’lumki, $\bar{T}^n$ simpleks yopiq B^n sharga gomeomorf. Shu tufayli $\bar{T}^n$ ning chegarasi S^{n-1} ga gomeomorfdir. $n=2$ bo‘lganda yopiq uchburchak $[a_0 a_1 a_2]$, tekislikdagi yopiq doiraga gomeomorfdir. Uchburchakning chegarasi (konturi) $[a_0 a_1] \cup [a_1 a_2] \cup [a_2 a_0]$ S^1 aylanaga gomeomorfdir. Shu sababli $n=2$ bo‘lgan holda 2.3 da quyidagi teoremaning isboti keltirilgan.

2.5.6-teorema. R^n fazoda yopiq B^n shar va S^{n-1} uning $(n-1)$ o‘lchamli chegarasi berilgan bo‘lsin. S^{n-1} sferaning nuqtalarning qo‘zg‘almas qoldiradigan hech qanday uzluksiz $F: B^n \rightarrow S^{n-1}$ akslantirish mavjud emas. Boshqacha aytganda, S^{n-1} sfera B^n sharga rerakt bo‘la olmaydi.

Quyidagi teorema to‘plamostining ichki va chegaraviy nuqtalarining R^n fazoda invariantligi haqida Brauer teoremasidir.

2.5.7-teorema. X to‘plam R^n ning ixtiyoriy to‘plamostisi bo‘lsin va $f: X \rightarrow Y$ gomeomorfizm bo‘lsin va $f(X) = Y \subset R^n$. Agar $x \in X$ nuqta X ning ichki nuqtasi bo‘lsa, $f(x) \in Y$ nuqta ham $f(X)$ ning ichki nuqtasi bo‘ladi. Agar $x \in X$ nuqta X ning chegara nuqtasi bo‘lsa, u holda $f(x)$ nuqta ham Y ning chegara nuqtasi bo‘ladi. Xususiyl holda agar A va B to‘plamlar R^n ning gomeomorf to‘plamlari bo‘lib, A ochiq to‘plam bo‘lsa, u holda B ham ochiq to‘plam bo‘ladi.

Isbot. Bu teoremaning ichki nuqta chegaraviy nuqta uchun isbotini keltiramiz. Haqiqatan ham, x nuqta X ning ichki nuqtasi bo'lsin.

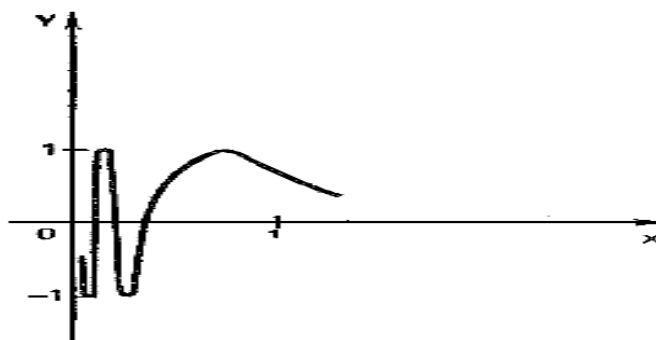
$S_r(x)$ bu nuqtaning shunday sferik atrofi bo'lsinki, $\overline{S_r(x)} \subset X$. Ko'ramizki, x nuqtaning X dagi $S_r(x)$ da yotadigan atrofi qanday bo'lishidan qat'i nazar, $X \setminus U$ ni S^{n-1} ga akslantiruvchi uzluksiz akslantirish mavjud bo'ladiki, bu akslantirishni butun X ga davomlashtirish mumkin bo'lmaydi. S^{n-1} sifatida $\overline{S_r(x)}$ ning chegarasini, $f: X \setminus U \rightarrow S^{n-1}$ akslantirish sifatida esa, x nuqtadan $X \setminus U$ to'plamning S^{n-1} ga proeksiyasini olamiz. Bu proeksiyada S^{n-1} ning nuqtalari qo'zg'almas qoladi. Bu $f: X \setminus U \rightarrow S^{n-1}$ akslantirishni butun X fazoga davomlashtirish mumkin emas. Agar mumkin bo'lsa, ya'ni $f: X \rightarrow S^{n-1}$ o'rinli bo'lsa, S^{n-1} ning nuqtalari qo'zg'almas qolib, $\overline{S_r(x)}$ ham S^{n-1} ga uzluksiz akslantirish bo'ladi. Ya'ni, S^{n-1} sfera $\overline{S_r(x)}$ sharning retrakti bo'lib qolmoqda. 2.5.6-teoremaga ko'ra esa bu mumkin emas. Demak, R^n fazoda ichki nuqtalar invariant ekan.

Evklidning "Negizlar" asarida ham "chiziq — ensiz uzunlikdir" deb izohlangan. Yuqorida kiritilgan o'lchamlar chiziqni ta'riflashga imkon beradi. Olimlar deyarli 2500 yil mobaynida geometriyaning asosiy tushunchalaridan biri chiziqqa turli ta'riflar berib kelishgan. Endi oxirgi aniq urinishni keltiramiz.

2.5.1-ta'rif. Bir o'lchamga ega bog'langan va kompakt metrik fazolar chiziq deyiladi.

Kompakt bo'lmagan hollarda esa chiziqni quyidagicha ta'riflash mumkin.

2.5.2-ta'rif. Bir o'lchamli lokal kompakt chekli dizyunkt yopiq bog'lamli to'plamlarning birlashmasidan iborat bo'lgan metrik fazolarga chiziq deyiladi. Tekislikda yotgan chiziqlarga silliq chiziq deyiladi. Tekislikda ichki nuqtaga ega bo'lmagan bog'lamli yopiq kompakt to'plamlar silliq chiziq deb ataladi. Bu — chiziqqa Kantor tomonidan berilgan xarakteristika yoki ta'rifdir. Chiziqqa kesma, aylana, giperbola va quyidagi tekislik to'plamostisi misol bo'la oladi.



2.5.1-rasm

Bu chiziqni $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \sin \frac{1}{x}; x \in (0, T]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$ to'plam sifatida olishimiz mumkin. (2.5.1-rasm)

Ma'lum bo'lishicha, ixtiyoriy chiziqni I^3 kubda yotgan Menger universal chizig'ining birorta qismiga topologik ekvivalent deb olishimiz mumkin ¹.

¹ Фоменко А.Т.. Наглядная геометрия и топология. Математические образы в реальном мире. М. МГУ, 1998, с.254.

II bob bo'yicha xulosalar

Topologik fazolarda ind o'lchamining ta'rifi keltirilgan. Topologik fazolarda ind o'lchamining xossalari haqida ma'lumotlar berilgan.

Topologik fazolarda dim o'lchami ta'rifi va teoremlari keltirilgan.

Topologik fazolarda dim o'lchamining xossalari sanab o'tilgan.

Qo'zg'almas nuqta haqida Brauer teoremasi isboti bilan ko'rsatilgan .

Brauer teoremasini tadbiri keltirilgan

Fazoning ind, Ind va dim o'lchamlarining o'zaro bog'liqliklari haqida ma'lumotlar berilgan

R^n fazoning ta'rifi va uning fazo ostilari o'lchami haqida ma'lumotlar berilgan. Chiziqning ta'rifi keltirilgan.

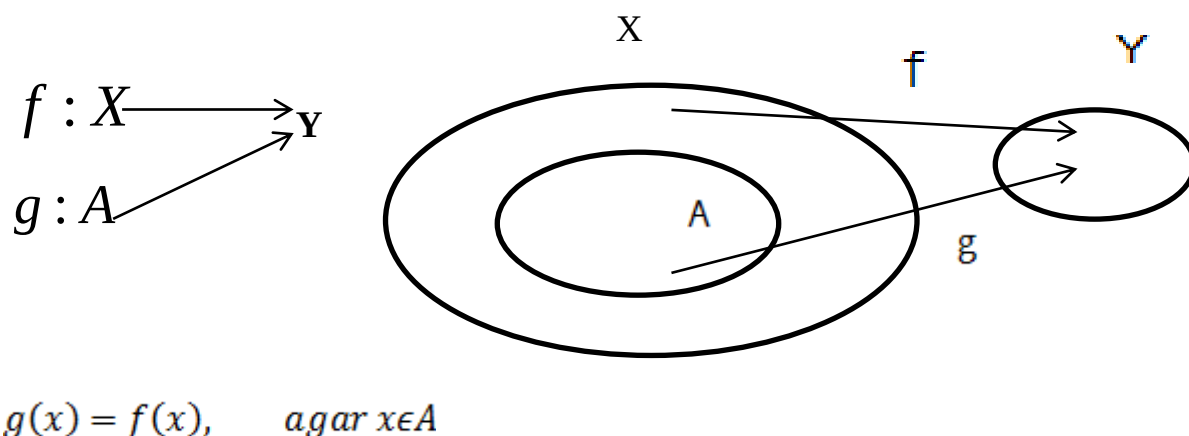
III bob. Topologik fazolarda sheyp tushunchasi va chekli eltuvchili kovariant funkto­rlar

1. Kompakt topologik fazoda retrakt tushunchasi

X va Y topologik fazolar berilgan bo'lsin.

3.1.1-ta'rif. $A \subset X$ yopiq $A \subset X$ ni olaylik $f: A \rightarrow Y$ uzluksiz akslantirishni butun X fazoga davomlashtirish (kengaytirish) mumkin deyiladi, agar shunday $\tilde{f}: X \rightarrow Y$ uzluksiz akslantirish mavjud bo'lib, u ixtiyoriy $a \in A$ uchun $\tilde{f}(a) = f(a)$ shartni qanoatlantirsa. Ya'ni $\tilde{f}|_A = f$ tenglik o'rinli bo'lsa.

Umumiy topologiyaning qolaversa zamonaviy geometriyaning asosiy masalalaridan biri uzluksiz akslantirishni davomlashtirish. Masalan, X va Y topologik fazolar berilgan bo'lib, A to'plam X fazoning birorta bo'sh bo'lmagan to'plamostisi bo'lib va $g: A \rightarrow Y$ uzluksiz akslantirish mavjud bo'lsa, shu g akslantirishni qanday shartlar bajarilganda butun $f: X \rightarrow Y$ X fazoga davomlashtirish mumkin bo'ladi va A to'plamda ularning qiymatlari bir xil bo'ladi, ya'ni $f|_A = g$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu masalani quydagi diagramma sifatida ko'rsatishimiz ham mumkin.



Bu masalaning juda muhim qismlaridan biri retraksiya(retrakt) tushunchasidir. Retrakt tushunchasidan yuqorida keltirilgan A to'plam Y bilan ustma-ust tushadigan holda masalaning xususiy hollari qaraladi.

3.1.2-ta'rif. X topologik fazoning A fazoostisi uning retrakti deyiladi, agar shunday $r: X \rightarrow A$ uzluksiz akslantirish mavjud bo'lib, bu akslantirish mavjud A qism to'plamida ayniy akslantirishdan iborat bo'lsa, ya'ni $r|_A = 1_A$. Bu yerda $1_A = id: A \rightarrow A$, $id(a) = a$, $a \in A$. Bunda $1_A: A \rightarrow A$ ayniy (aynan) akslantirishdan iborat.

Qisqacha qilib aytganda, ayniy akslantirish $id: A \rightarrow A$ butun X fazoga davomlashtiruvchi $r: X \rightarrow A$ uzluksiz akslantirish mavjud bo'lsa. Bu yerda r akslantirishga X ni A ga retraksiyasi yoki retraklashtiruvchi akslantirishi deyiladi. Ko'p holda uni $r: X \supset A$ ko'rinishda yoziladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki ixtiyoriy topologik fazoning ixtiyori bitta $\{x_0\}$ nuqatasi uning retrakti bo'ladi. Chunki X ni $\{x_0\}$ nuqtaga uzluksiz akslantirish doimiy akslantirishdan iborat bo'ladi, ya'ni $i: X \rightarrow x_0$ ixtiyoriy $x \in X$ uchun $i(x) = x_0$ bo'ladi.

3.1.1-teorema. Ixtiyoriy topologik fazoning retrakti yopiq to'plamdir.

Isbot: Bizga $r: X \rightarrow A$ uzluksiz retraksiya berilgan bo'lsin. Bunda $A \subset X$. Ma'lumki $(A) \subset X$. Buning uchun, ixtiyoriy $x_0 \in X \setminus r(A)$ nuqata uchun uning shunday (X fazoda) $W_0 \ni x_0$ atrofi topiladiki, u $W_0 \subset X \setminus r(A)$ shartni qanoatlantirishi yetarli bo'ladi. Ixtiyori $x_0 \in X \setminus r(A)$ nuqtani olaylik. $r: X \rightarrow A$ uzluksiz bo'lganligi tufayli, x_0 ning shunday U_0 atrofi topiladiki uning uchun $r(U_0) \subset V a_0$ o'rinli bo'ladi, bunda $r(x_0) = a_0 \in A$.

$V a_0$ to'plam A to'plamdagi ixtiyoriy ochiq to'plamdir. $r^{-1}(V a_0) \cap U_0 = W(x_0)$

deb belgilaymiz. Birinchidan, $W(x_0) \subset X \setminus r(A)$ va $x_0 \in W(x_0)$, ikkinchidan $W(x_0)$ ochiq to'plamdir. Shuni isbot qilish talab qilingan edi. Teorema isbotlandi.

3.1.1-misol . n o'lchamli R^n evklid fazodagi ixtiyoriy B^n yopiq shar yoki gipertekislik uning retrakti bo'ladi. Bunda $B^n(x_0, r) = \{y \in R^n : \rho(x_0, y) \leq r\}$ mazkazi x_0 da va radiusi r ga teng bo'lgan yopiq shar. Ko'p xollarda R^n fazoda yopiq sharni yopiq diek ham deb yuritiladi.

3.1.2-misol . Aytaylik, $X = [0, 1] \subset R$ kesma, $A = FrX = \{0, 1\}$. FrX to'lam X ning R to'g'ri chiziqdagi chegarasi. Bu holda isbotlash mumkinki A to'plam X ning retrakti bo'la olmaydi. Chunkiy, A to'plam R to'g'ri chiziqda bog'lamli emas, X to'plam esa bog'lamli to'plamdir. Chunki bog'lamlilik uzluksiz akslantirishlarda o'zgarmaydi.

3.1.3-misol . Aytaylik, $X = B^n \setminus \{0\}$ to'plam B^n sharning bitta markaz nuqtasi O ni chiqarib tashlangan yoki B^n shardan (diskdan) markazi O ni "o'yib" tashlangan to'plam bo'lsin.

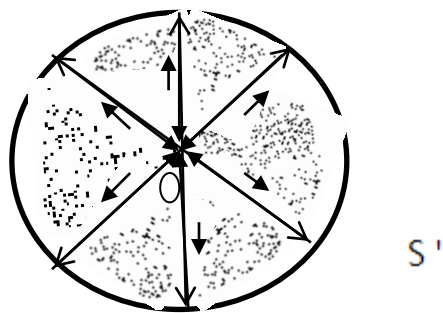
$S^{n-1} = \{x \in R^n : \|x\| = 1\}$ markazi koordinata boshi O da va radiusi 1 ga teng sferani olaylik, bu S^{n-1} sfera B^n yopiq sharning chegarasidan iborat, ya'ni $FrB^n = S^{n-1}$ d i $\mathbb{R}^n B^n - r$ bo'lgani uchun bu sferani S^{n-1} ko'rinishida yozamiz. X fazoda r retraksiya $r: X \rightarrow S^{n-1}$ ni quydagicha aniqlaymiz.

$$r(x) = \frac{x}{\|x\|}, \quad \text{bunda } x \in X$$

Bu retraksiya O dan o'tgan diametrni (O nuqtasiz diametr bo'laklari radiuslarni o'ziga yaqin) diametrial nuqtalarga mos qo'yadi.

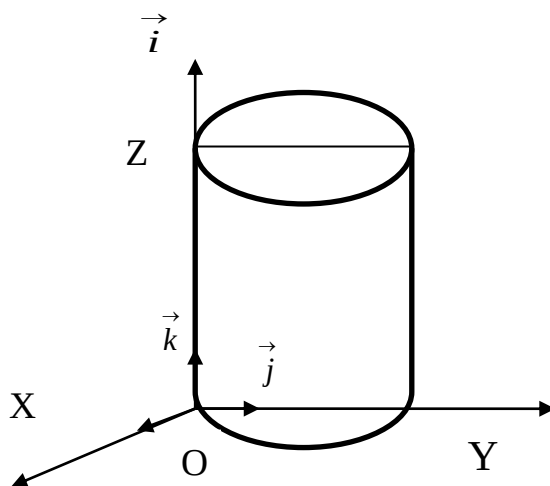
Demak, o'yib olingan X (bir nuqtasiz shar) shar uchun uning chegarasi sfera S^n uning retrakti bo'lar ekan.

Xususiyl holda, tekislikda markazisiz doiraga o'zining chegarasi aylana uning retrakti bo'lar ekan.



$$X = B^n \setminus \{0\}$$

3.1.4-misol . B^2 doira ustida qurilgan $X \setminus B^2 \times I$ slindrni olaylik.



$Y = B^2 \times \{0\} \cup S^1 \times I$ esa X slindrning pastki asosi bilan uning qirrasi birlashmasi bo'lsin. $M(0; 0; \frac{1}{2})$ nuqtadan markaziy simmetriya natijasida X ni Y ga uzluksiz akslantiramiz.

Demak, Y to'plam X ni retraksiyasi bo'lar ekan.

Quyidagini isbotsiz keltiramiz.

3.1.2-teorema. Retraktning retrakti rerakt bo'ladi.

Akslantirishning uzluksiz davom ettirishda atrofli rerakt tushunchasi ham keng ishlatiladi. Ba'zi hollarda akslantirishlarni yopiq to'plamostidan butun fazoga davomlashtirib bo'lmaydi. Shunday hollarda uni birorta ochiq atrofliga davomlashtirish mumkin bo'ladi.

3.1.3-ta'rif. X topologik fazoning X_0 yopiq to'plamostisi X fazoning atrofli retracts deyiladi, agar X_0 to'plam o'zining birorta ochiq U atrofi uchun retracts bo'lsa, ya'ni $X_0 \subset U \subset X$ va $r: U \rightarrow X_0$ – retraksiya.

Ravshanki, ixtiyoriy retracts atrofli retracts bo'ladi.

3.1.5-misol . R^n Evklid fazosida radiusi $\|x\| = 1$ tenglik bilan aniqlovchi S^{n-1} sferani olaylik. $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$, barcha $x \in R^n \setminus \{0\}$ formula orqali aniqlangan. $r: R^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ retraksiyani olsak. Ma'lumki, bu yerda S^{n-1} sfera R^n fazoga atrofli retracts dan iboratdir. Oldin ta'kidladikki, S^{n-1} sfera R^n fazoga retracts bo'la olmaydi.

3.1.6-misol . Uch o'lchamli R^3 Evklid fazosida δ uchburchakni va l to'g'ri chiziqni olaylik. Aytaylik, l to'g'ri chiziq δ uchburchakni chegarasi $Fr\delta$ ga tegishli bo'lmagan yagona a nuqtada kessin, ya'ni $l \cap A\delta = \{a\}$, l to'g'ri chiziq δ uchburchak tekisligida yotmaydi.

Endi ko'rsatamizki, δ uchburchakning chegarasi $Fr\delta$ to'plam $R^3 \setminus l$ fazoning retracts bo'ladi.

$R^3 \setminus l$ ning ixtiyoriy $x \in R^3 \setminus l$ nuqtasini olamiz. $P(x)$ bilan x nuqtadan va l to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekislikni belgilaymiz. Ma'lumki $P(X)$ tekislik $Fr\delta$ bilan ikki nuqtada kesishadi. Bu nuqtalarda biri l to'g'ri chiziq va x nuqta bilan bir tomonda yotadi. U nuqtani $r(x)$ bilan belgilaymiz. Demak, ixtiyoriy $x \in R^3 \setminus l$ nuqtaga $r(x)$ ni mos qo'yamiz. Bu moslik ma'lumki $r: R^3 \setminus l \rightarrow Fr\delta$ retraksiyani tashkil qiladi.

3.1.3-teorema. Topologik fazoning yopiq $A \subset X$ to'plamostisi X ga retracts bo'lishi uchun ixtiyoriy $g: A \rightarrow Y$ uzluksiz akslantirish(bunda Y ixtiyoriy topologik fazo) butun X fazogacha davomlashtirishga ega bo'lishi zarur va yetarlidir ya'ni

$$\begin{array}{ccc}
 & g & \\
 g: A & \xrightarrow{\quad} & Y \\
 f: X & \xrightarrow{\quad f \quad} &
 \end{array}$$

diagramma kommutativ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti:*Zarurligi:* Bizga X topologik fazo berilgan bo'lsin. A to'plam uning yopiq ixtiyoriy to'plamostisi, ya'ni $A \subset X_0$. Teorema shartiga ko'ra $r: X \rightarrow A$ retraksiya aniqlangan bo'lsin. Bizga kerakli davomlashtirishni $t = gor: X \rightarrow Y$ formula orqali aniqlaymiz. Ravshanki f akslantirish izlangan akslantirish bo'ladi.

Yetarliligi: Aytaylik, X topologik fazoning $A \subset X$ to'plamostisi shunaqaki, ixtiyoriy $f: A \rightarrow Y$ uzluksiz akslantirish uzluksiz $f: X \rightarrow Y$ davomlashtirish (kengaytirishga) ega. Xususiyl holda $g = id_A = 1_A: A \rightarrow A$ aynan akslantirish uchun ham uzluksiz $f: X \rightarrow A$ davomlashtirish mavjud bo'ladi. Bunda $f|_A = 1_A$ tenglik o'rinli bo'ladi. Shu oxirgi, $r = f: X \rightarrow A$ akslantirish retraksiya vazifasini bajaradi. Biz bu yerda $f|_A$ belgi f akslantirishning aniqlanish sohasidagi birorta qism to'plamostisidagi chegaralanmasi deb tushunamiz. Teorema isbotlandi.

Masalan, $f: [-3, 3] \rightarrow [-3, 3]$ akslantirish $f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 3x)$ formula orqali berilgan bo'lsa, uning $[-1, 1]$ kesmada chegaralanganmasini oladigan bo'lsak, u $[-1, 1]$ kesmani $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ ga akslantiradi, ya'ni

$f|_{[-1, 1]}: [-1, 1] \rightarrow [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ o'rinli bo'ladi ¹.

¹ Борсуқ К.. Теория ретрактів, М.Мир, 1971, с.288.

2. Kompakt topologik fazolarda Sheyp tushunchasi va uning xossalari

Bizga X va Y kompakt topologik fazolar berilgan bo'lsin.

3.2.1-ta'rif. X va Y topologik fazolar gomotop fazolar yoki gomotopik ekvivalent deyiladi, agar shunday ikki $f: X \rightarrow Y$ va $g: Y \rightarrow X$ akslantirishlar mavjud bo'lib, ular uchun $g \circ f \sqsubset id_X$ va $f \circ g \sqsubset id_Y$ shartlar o'rinli bo'lsa. Bu holda ya'ni gomotopik ekvivalent bo'lgan kompaktlarni $X \sqsubset_h Y$ ko'rinishida yoziladi va X va Y kompaktlar bir xil gomotopik tiplarga ega deb yuritiladi.

Ta'rifdagi $g \circ f \sqsubset id_X$ va $f \circ g \sqsubset id_Y$ belgilashlar quyidagini anglatdi: $f_1: X \rightarrow Y$ va $f_2: X \rightarrow Y$ akslantirishlar gomotop deb yuritiladi, agar shunday $F(x, t): X \times [0, 1] \rightarrow Y$ mavjud bo'lib $F(x, 0) = f(x)$, $F(x, 1) = g(x)$ va $F(x, t) \in Y$ shartlarni qanoqlantirsa, bunda $x \in X$ va $t \in [0, 1]$. Demak, $f: X \rightarrow Y$ va $g: Y \rightarrow X$ akslantirishlarni oladigan bo'lsak, $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$ kompazitsiya va $Y \xrightarrow{g} X \xrightarrow{f} Y$ kompazitsiyalar o'rinli bo'lib, ular mos ravishda id_X va id_Y larga gomotopik ekvivalent, ya'ni $F(x, t): X \times [0, 1] \rightarrow Y$ va $\Phi(y, t): Y \times [0, 1] \rightarrow Y$ mavjud bo'lib, ular $F(x, 1) = g \circ f$, $F(x, 0) = id_X$, $\Phi(y, 1) = f \circ g$, $\Phi(y, 0) = id_Y$, $F(x, t) \in Y$, $\Phi(y, t) \in Y$. Bu yerda id_X bilan $id_X: X \rightarrow X$, $id_X(x) = x$ ayniy (aynan) akslantirish belgilanadi.

3.2.1-misol. X ixtiyoriy kompakt topologik fazo bo'lsin, Y to'plam (fazo) sifatida $Y = [0, 1]$ ni olsak, ixtiyoriy $f_1: X \rightarrow Y$ va $f_2: X \rightarrow Y$ akslantirishlar gomotop bo'ladi, agar f_1 va f_2 akslantirishlar orasidagi gomotopiya $F(x, t): X \times I \rightarrow Y$ quyidagi formula orqali aniqlanadi:

$$F(x, t) = (1-t)f_1(x) + f_2(x) \text{ bunda } I = [0, 1]$$

Ravshanki, $F(x, 0) = f_1(x)$, $F(x, 1) = f_2(x)$ va $F(x, t) \in Y$. Yuqoridagi misolda Y fazo o'rnida ixtiyoriy qovariq topologik fazo yoki bitta nuqtani olsak ham

bo'ladi. Demak har qanday ikki o'zgarma $f_1: X \rightarrow \{y_0\}$, $f_2: X_2 \rightarrow \{y_0\}$ akslantirish doimo gomotop ekan.

3.2.2-ta'rif. Y topologik fazo absolyut rerakt deyiladi va $Y \in AR$ ko'rinishida yoziladi, agar har bir $h: Y \rightarrow X$ gomeomorfizm uchun $h(Y)$ yopiq to'plam X fazoning retrakti bo'lsa, yani $r: X \rightarrow h(Y)$ retraksiya mavjud bo'lsa. Bu ta'rifdan ko'rinadiki Banax fazosining ixtiyoriy qavariq to'plami AR -fazo ekan.

3.2.2-misol. Ixtiyoriy Evklid fazosi R^n , kompakt gilbert kubi $Q = \prod_{i=1}^{\infty} [-1:1]_i$ ham AR -fazo ekan.

Bizga ma'lumki X va Y kompakt fazolarni olsak, ularni birorta Banax fazosiga joylashtirilgan deb olishimiz mumkin. Demak, ixtiyoriy kompakt topologik fazoni birorta AR -fazoning qismi sifatida qarashimiz mumkin ekan.

Aytaylik, X va Y kompakt fazolar berilgan bo'lsin, bu fazolarni mos ravishda AR fazolar M va N larda joylashgan deyishimiz mumkin ekan, ya'ni $X \subset M \in AR$, $Y \subset N \in AR$.

Bizga $f_k: X \rightarrow Y$ akslantirishlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin, bunda $k=1, 2, \dots$

3.2.3-ta'rif. $f_k: X \rightarrow Y, k \in N$ akslantirishlar ketma-ketligi fundamental ketma-ketlik deyiladi, agar Y kompaktning N fazodagi ixtiyoriy V atrofi uchun X kompaktning M fazoda shunday U atrofi topilsaki, V da $f_k|_U \sqcup f_{k+1}|_U$ ni ($k \in N$ uchun) qanoatlantirsa, ya'ni, shunday $\varphi_k: U \times [0, 1] \rightarrow V$ gomotopiya mavjud bo'lsaki, barcha $k \in N$ va $x \in U$ lar uchun $\varphi_k(x, 0) = f_k(x)$ va $\varphi_k(x, 1) = f_{k+1}(x)$ tengliklar o'rinli bo'lsa.

Bu fundamental ketma - ketlikni $\{f_k: X; Y\}_{M, N}$ yoki $f_k: X \rightarrow Y_{M, N}$ ko'rinishida belgilaymiz.

Aytishimiz kerakki, $f = \{f_k, X, Y\}$ fundamental ketma-ketlik $f: X \rightarrow Y$ akslantirish vositasida vujudga kelgan, agar $f_k(x) = f(x)$ tenglik barcha $x \in X$

va $k \in N$ lar uchun o'rinli bo'lsa. Ma'lumki, $N \in AR$ bo'lganligi sababli, har bir $f: X \rightarrow Y$ akslantirish uchun shunday $\square: M \rightarrow N$ akslantirish mavjudki, u barcha $x \in X$ uchun $F(x) = f(x)$ ni qanoatlantiradi. Ravshanki, barcha $k \in N$ uchun $f_k(x) = \square(f(x))$ desak biz $f_k: X \rightarrow Y$ fundamental ketma-ketlikka ega bo'lamiz.

Demak, ixtiyoriy $f: X \rightarrow Y$ akslantirish uchun bu akslantirish vujudga keltiradigan fundamental $f = \{f_k: X \rightarrow Y\}$ ketma - ketlik mavjud ekan.

Xususiy xolda ayniy $i_x: X \rightarrow X$ akslantirish uchun ham hosil qilingan fundamental ketma- ketliklar mavjud bo'ladi.

3.2.4-ta'rif. Aytaylik, X va Y kompaktlar mos ravishda AR fazolar M va N larning yopiq to'plamostilari bo'lsin. X va Y kompaktlar (M va N larga nisbatan) fundamental ekvivalent deyiladi, agar shunday $f: X \rightarrow Y$ va $g: Y \rightarrow X$ fundamental ketma- ketliklar mavjud bo'lib, ular M va N larda $g \circ f \square id_X$ va $f \circ g \square id_Y$ shartlarini qanoatlantirsa. Bu holda, ya'ni X va Y lar fundamental ekvivalent bo'lsa, uni $X \square_F Y$ ko'rinishida yozamiz.

Barcha metrik kompaktlar kategoriyasini $MComp$ bilan belgilasak, bu kategoriyada fundamental ekvivalentlik munosabati olsak, bu munosabat ekvivalent munosabatini tashkil qiladi. Ma'lumki har bir ekvivalentlik munosabati $MComp$ kategoriyani o'zaro kesishmaydigan yoki ustma-ust tushmaydigan ekvivalentlik siniflariga ajratadi. Bu ekvivalentlik siniflariga Sheyp deb yuritiladi. X kompaktni o'zida saqlagan ekvivalentlik sinfga X ning Sheypi deb yuritiladi va ShX ko'rinishida yoziladi. Demak,

$$ShX = MComp / \square_F \text{ yoki } ShX = \{Y \in MComp : X \square_F Y\}$$

Ma'lumki, sheyp tushunchasi topologik tushinchadir, ya'ni topologik gomeomorf fazolarni sheypi bir va yagona sheypga egadir. Gomotopik ekvivalent bo'lgan kompakt topologik fazolar ham bir xil yoki teng sheypga ega bo'ladi. Agar gomotopik ekvivalent kompaktlar ANR fazolardan iborat bo'lsa, teskarisi ham o'rinlidir.

3.2.5-ta'rif. Agar $r: X \rightarrow Y$ retraksiya bo'lib shunday $\varphi: X \times [0,1] \rightarrow X$ gomotopiya mavjud bo'lsaki, u barcha $x \in X$ lar uchun $\varphi(x,0) = x$ va $\varphi(x,1) = r(x)$ shartlar o'rinli bo'lsa r akslantirishga defarmatsion retrakt deyiladi va Y fazo X ning defarmatsion retrakti deyiladi. Bu ta'rifdan ko'rinadiki kompakt X fazoning har bir defarmatsion retrakti Y kompaktning o'ziga gomotopik ekvivalent ekan. Demak, quyidagi tasdiq o'rinli:

3.2.1-teorema. Agar kompaktosti Y kompakt X ning defarmatsion retrakti bo'lsa, u holda $ShY = ShX$ bo'ladi.

3.2.6-ta'rif. $A \subset X$ to'plamosti A kompakt X fazoda $B \subset X$ to'plamosti bo'yicha tortiluvchan deyiladi, agar $i_A: A \rightarrow X$ joylashtirish, $f(A) \subset B$ shartni qanoatlantiruvchi $f: A \rightarrow X$ akslantirishga gomotop bo'lsa. Bu ta'rifda B to'plam bitta nuqtadan iborat bo'lsa, A to'plam X bo'yicha tortiluvchan deyiladi. Xususiyl holda, X fazo o'zi o'zi bo'yicha tortiluvchan deyiladi va $X \in C$ ko'rinishida yoziladi.

Demak, har qanday qavariq A to'plamosti X fazoda tortiluvchan bo'lar ekan. Haqiqatan ham A to'plamning a nuqtasini tayin qilib olaylik. Ixtiyoriy $t \in [0,1]$ va $x \in A$ uchun $f(x,t): X \times [0,1] \rightarrow X$ gomotopiyani $f_t(x) = f(x,t) = ta + (1-t)x$ formula orqali aniqlaymiz. Ma'lumki, $f(x,0) = 0a + (1-0)x = x \in A$, $f(x,1) = 1a + (1-1)x = a$.

Demak, $f(x,0) = f_0 = id_A$, $f(x,1) = f_1 = a$ yuqoridagi ta'rifdan va tortiluvchan kompaktlarni xossalariidan ma'lum bo'lmoqdaki, agar X kompakt o'zi bo'ylab a nuqtaga tortilar ekan, u holda bitta nuqtadan tashkil topgan to'plam X kompaktga defarmatsion retraktdir. Shu sababli, bu fazoning ShX bitta nuqta $\{a\}$ ning sheypiga teng ekan. Bitta nuqtaning sheypidan iborat bo'lgan fazolarga trivial sheypili fazo deyiladi va $sh1$ bilan belgilanadi.

Demak quyidagi o'rinli ekan:

3.2.2-teorema. Agar X kompakt fazo o'zi bo'ylab bitta nuqtaga tortiluvchan bo'lsa, u holda $ShX = Sh1$ bo'ladi.

3.2.7-ta'rif. Kompakt X fazo Y fazo ustida gomotopik gominorant deyiladi va $X \underset{h}{\geq} Y$, agar $f: X \rightarrow Y$ va $g: X \rightarrow Y$ akslantirishlar mavjud bo'lib ular uchun $f \circ g \sqsubset id_Y$ shart o'rinli bo'lsa.

Eslatamizki, agar Y fazo X kompaktning retrakti bo'lsa, u holda $X \underset{h}{\geq} Y$.

Ma'lumki, fazolarda gominarantlik munosabati sheyplar orasida tengsizlik munosabati quyidagicha aniqlanadi:

$$ShX \geq ShY \Leftrightarrow X \underset{F}{\geq} Y$$

Agar $X \underset{h}{\geq} Y$ bo'lsa, u holda $ShX \geq ShY$

3.2.3-teorema. Agar Y to'plamosti X ni retrakti bo'lsa, u holda $ShX \geq ShY$
Xususiyl holda

3.2.1-natija. Ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan kompakt X uchun $ShX \geq Sh1$ o'rinlidir.

Ma'lumki, agar $ShX \geq ShY$ va $ShX \leq ShY$ bo'lsa, u holda $ShX = ShY$. Natijadan ko'rinadiki, bo'sh bo'lmagan X kompakt uchun ShX trivial sheyptan farqli.

3.2.4-teorema. Agar $ShX \leq Sh1$, u holda $ShX = Sh1$ bo'ladi.

3.2.5-teorema. Agar $ShX = ShX'$ va $ShY = ShY'$, u holda $Sh(X \times Y) = Sh(X' \times Y')$ bo'ladi.

3.2.6-teorema. Agar $ShX \geq ShX'$ va $ShY \geq ShY'$, u holda $Sh(X \times Y) \leq Sh(X' \times Y')$ bo'ladi ¹.

¹ Борсук К.. Теория шейпов, М.Мир, 1976, с.175.

3. Chekli eltuvchuvchili kovariant funktorlar va kompaktning sheypi

Bizga X kompakt topologik fazo berilgan bo'lsin $\square X$ orqali X kompaktning bog'lamlilik komponentasini belgilaymiz. Ma'lumki, kompakt X fazo o'zining bog'lamlilik komponentasi birlashmasidan iboratdir. $x \in X$ nuqtani o'zida saqlagan bog'lamli to'plamostini K_x yoki $K(x)$ bilan belgilaymiz. X ning ixtiyoriy x va y elementlari uchun $R: x \square y \Leftrightarrow x \in K_y$ munosabatni aniqlasak. U holda $\square X = \{K(x): x \in X\}$ Bog'lamli komponenta va faktor akslantirish. Demak, birorta kompakt topologik fazo berilgan bo'lib uning bog'lamlilik komponentasini qarasak, bu bog'lamlilik komponentalari fazoda ekvivalentmunosabatini aniqlaydi. Har bir $x \in X$ nuqtaga uning shu nuqtasini o'z ichiga olgan komponentasini $K(x) \in \square X$ mos qo'yamiz. Natijada $X \rightarrow \square X$ akslantirish vujudga keladi va bu akslantirishni $\pi_\square$ bilan belgilaymiz ya'ni $\pi_{\square x}: X \rightarrow \square X$ uzluksiz akslantirishdan iborat bo'ladi. bu yerda $\square X$ faktor topologiya qaraladi.

Agar $f: X \rightarrow Y$ uzluksiz akslantirish bo'lsa, qo'yidagi diagramma (kommutativ) ega bo'lamiz, bunda X va Y kompaktlardir:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \downarrow \pi_{\square X} & & \downarrow \pi_{\square Y} \\ \square X & \xrightarrow{\square f} & \square Y \end{array} \quad (1)$$

Diagrammaning kommutativ ekanligidan $\square f: \square X \rightarrow \square Y$ akslantirish ham aniqlanadi, ya'ni har $x \in X$ nuqtaning $K(x)$ komponentasiga $K_f(x)$ ni mos qo'yadi. Natijada

$$\pi_{\square y} \circ f = \square f \circ \pi_{\square x} \quad (2)$$

tenglik vujudga keladi. Bu (2) tenglikdagihar bir akslantirish uzluksizdir.. Bizga o'zaro kesishmaydigan X va Y kompakt fazolar berilgan bo'lsin.

$X_0 \subseteq X$ $f: X_0 \rightarrow Y$ uzluksiz akslantirish berilgan bo'lsin, bunda X_0 to'plam X fazoning yopiq to'plamostisidir. $X \oplus Y$ bilan X va Y to'plamlarning o'zaro dizyunk birlashmasini belgilaymiz. $X \oplus Y$ to'plamda qo'yidagicha ekvivalent E munosabatni aniqlaymiz:

$$\{x\}, \text{ agar } x \in X \setminus X_0.$$

$E:$

$$\{y\} \cup f^{-1}(y), \text{ agar } y \in Y$$

Ravshanki, agar $y \in Y \setminus f(X_0)$ bo'lsa $\{y\} \cup f^{-1}(y) = \{y\}$ dan iborat bo'ladi

$X \oplus Y / E$ faktor fazoni $f: X_0 \rightarrow Y$ akslantirish bo'yicha aniqlangan yilimlangan (birlashtirilgan) fazo deb yuritiladi va bu fazoni $X \cup_f Y$ bilan belgilanadi. Ma'lumki, agar Y bitta nuqtadan iborat bo'lsa u holda $X \cup_f Y$ fazo $X \setminus X_0$ ga gomeomorfdir.

Aytaylik, $i_x: X \rightarrow X \oplus Y$ va $i_y: Y \rightarrow X \oplus Y$ lar X va Y fazolarning mos ravishda $X \oplus Y$ dagi joylashmasi bo'lsin.

$X \oplus Y \rightarrow X \cup_f Y$ tabiiy akslantirish bo'lsin. Bu holatda $j = q \circ i_x: X \rightarrow X \cup_f Y$ va $k = q \circ i_y: Y \rightarrow X \cup_f Y$ kompozitsiyalar uzluksiz bo'ladi. Ya'ni: $C \subset X \cup_f Y$ ochiq (yopiq) faqat va faqat agar $f^{-1}(C)$ va $k^{-1}(C)$ obrazlar mos ravishda X va Y fazolarda ochiq (yopiq) to'plamlardir.

Bu yerda j va k akslantirishlar uchun qo'yidagi tengliklar ham o'rinli bo'ladi.

$$(3) \quad j^{-1}k(B) = f^{-1}(B) \text{ va } k^{-1}k(B) = B, \text{ bunda } B \subset Y;$$

$$(4) \quad j^{-1}j(A) = A \cup f^{-1}(A \cap X_0) \text{ va } k^{-1}j(A) = f(A \cap X_0) \text{ bunda } A \subset X$$

(3) formuladan, ma'lum bo'ladiki $k: Y \rightarrow X \cup_f Y$ yopiq akslantirishdir. Shunga uxshash (4) formuladan ma'lum bo'ladiki, $j: X \rightarrow X \cup_f Y$ akslantirish ochiq akslantirishdir. Yana (4) tengliklardan ma'lum bo'lmoqdaki:

$$(5) \quad j\text{-yopiq akslantirish faqat va faqat, agar } f \text{ yopiq bo'lsa;}$$

$$(6) \quad q: X \oplus Y \rightarrow X \cup_f Y$$

faktor akslantirish yopiq faqat va faqat, agar f yopiq bo'lsa;

3.3.1-ta'rif. $F : Comp \rightarrow Comp$ funktor normal deyiladi, agar quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

- 1) Nuqta va bo'sh to'plamni saqlasa;
- 2) kesishmalarni va proobrazlarni saqlasa;
- 3) fazoning salmog'ini saqlasa;
- 4) monomorf va epimorf bo'lsa;
- 5) uzluksiz bo'lsa;

Kesishmani saqlovchi f funktor uchun ixtiyoriy $a \in f(X)$ nuqtaning eltuvchisi $\text{supp}(a)$ quyidagicha aniqlanadi: $\text{supp} a = \bigcap \{A \subset X : A \text{ yopiq hamda } a \in f(A)\}$

Nuqtaning eltuvchisi $\text{supp} a$ ma'lumki yopiq to'plamdir. $\text{Supp} a \subset X$ va $\text{supp} a$ kompaktdir.

$F : Comp \rightarrow Comp$ funktor va natural K son uchun uzluksiz

$\pi_{F,X,K} = C(\left\{ \begin{smallmatrix} \square \\ k \end{smallmatrix} \right\}, X) \times F(\left\{ \begin{smallmatrix} \square \\ k \end{smallmatrix} \right\}) \rightarrow F(X)$ akslantirishni qo'yidagi formula orqali aniqlaymiz:

$\pi_{F,X,K}(\xi, a) = F(\xi)(a)$, bunda $\xi \in C(\left\{ \begin{smallmatrix} \square \\ k \end{smallmatrix} \right\} X), a \in F(\left\{ \begin{smallmatrix} \square \\ k \end{smallmatrix} \right\})$ $\left\{ \begin{smallmatrix} \square \\ k \end{smallmatrix} \right\}$ bilan k -

elementli $\{1, 2, 3, \dots, k\}$ diskret topologiyali tuplamni belgilaymiz. $C(\left\{ \begin{smallmatrix} \square \\ k \end{smallmatrix} \right\} X)$ -kompakt- ochiq topologiyali uzluksiz funksiyalar fazosini belgilaymiz.

$F : Comp \rightarrow Comp$ funktor darajasi n ga teng deyiladi, agar

$\pi_{F,X,K} = C(\left\{ \begin{smallmatrix} \square \\ k \end{smallmatrix} \right\}, X) \times F(\left\{ \begin{smallmatrix} \square \\ n \end{smallmatrix} \right\}) = F_n(X) = F(X)$ bo'lsa va $\deg F \leq n$ ko'rinishda belgilanadi.

Agar $F : Comp \rightarrow Comp$ funktor uchun $|\text{supp } pa| \leq n$ o'rinli bo'lsa, F chekli eltuvchili deb yuritiladi, bunda $X \in Comp$, $a \in F(X)$.

Ikkinchi tomondan $F : Comp \rightarrow Comp$ funktor chekli darajali (darajasi n dan kichik emas) deyiladi va $\deg F \leq n$ belgilanadi, agar ixtiyoriy kompakt X uchun $F_n(X) = F(X)$ va $F_{n-1}(X) \neq F(X)$ lar o'rinli bo'lsa.

Bizga $P:Comp \rightarrow Comp$ normal ehtimol o'lchovli funktor berilgan bo'lsin. Kelining ishlaridan ma'lum bo'ladiki, ixtiyoriy cheksiz kompakt X fazo uchun $P(X)$ fazo gilbert kubi Q ga gomeomorfdir, bunda $Q = \prod_{i=1}^{\infty} [-1, 1]_i$ gilbert kubi.

P funktorning chekli eltuvchili normal funktorostisi P_n olsak, ixtiyoriy X metrik kompakt uchun $P_n(X)$ fazo $P(X)$ ni yopiq fazoostisi bo'ladi. Ma'lumki,

$P_n(X)$ fazo $\sum_{i=1}^k m_i \delta_{x_i}$, $k \leq n$ elementlardan tashkil topgan. Ya'ni

$P_n(X) = \{\mu \in P(X) : \mu = \sum_{i=1}^n m_i \delta_{x_i}, \sum_{i=1}^n m_i = 1, m_i \geq 0 \text{ } \delta_{x_i} \text{-lar } x_i \text{ nuqtalardagi Dirak ehtimol o'lchovi, } x_i \in X \}$.

Boshqacha qilib aytganda $\sum m_i \delta_{x_i}$ larning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lgan barcha $(i \leq n)$ elementlar to'plami $P_n(X)$ fazoni tashkil qilar ekan. m_i musbat sonlarni x_i nuqtalarga qo'yilgan massa (vazn, og'irlik) lar deb tushunsa bo'ladi.

$P_n: Comp \rightarrow Comp$ funktor ham P funktor kabi normal funktordir. P_n funktor chekli eltuvchili va chekli darajaga egadir, ya'ni $\forall \mu \in P_n(X)$ uchun $|\sup pa| \leq n$ va $\deg F \leq n$.

P_n funktorning funktorostisi bo'lgan P_n^C ni olaylik. Ixtiyoriy metrik kompakt X uchun $P_n^C(X)$ fazo $P_n(X)$ ning to'plamostisidir. Ya'ni $P_n^C(X) \subset P_n(X)$. $P_n^C(X)$ fazo nuqtalar $P_n(X)$ fazoning birorta bog'lamlilik komponentasida yotgan nuqtalaridan iboratdir. Ravshanki, kompakt X fazo faqat bitta kompanentadan iborat bo'lsa, u holda $P_n^C(X) = P_n(X)$. Shuni aytish lozimki, agar kompakt X fazo $X_1, X_2, \dots, X_n$ -bog'lamlilik komponentasidan iborat bo'lsa, u holda

$P_n^C(X) = \bigcup_{i=1}^n P_n^C(X_i)$ o'rinli bo'ladi.

$P: Comp \rightarrow Comp$ ehtimol o'lchovli normal funktorning yana bir funktorostisi $P^C: Comp \rightarrow Comp$ funktor bo'lib, $P^C(X)$ fazoning elementlari $P(X)$ fazoning

eltuvchisi X kompaktning birorta bog'lamlilik komponentasida yotgan elementlaridan tashkil topgandir. Bu $P^c(X)$ fazo $P^c(X)$ ham $P(X)$ ning qism fazosidir. Agar X kompakt faqat bitta bog'lamlilik komponentasiga ega bo'lsa, $P(X)$ va $P^c(X)$ kompaktlar ustma-ust tushadi. Ya'ni $P(X) \approx P^c(X)$.

Ikkinchi tomondan X kompakt $X_1, X_2, \dots, X_k$ bog'lamlilik komponentasiga ega bo'lsa, u holda $P^c(X)$ fazo $P(X_1), P(X_2), \dots, P(X_k)$ larning birlashmasidan iborat.

$$\text{Ya'ni } P^c(X) = \bigcup_{i=1}^k P(X_i)$$

Е.В.Щепин tomonidan yana bir mazmunli geometrik va topologik xossalarga boy P funktorning funktorostisi $P_f: \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ funktor aniqlangan. P_f funktor quyidagicha aniqlangandir: agar μ ehtimol o'lchovi n ta eltuvchi $x_1, x_2, \dots, x_n$ ga ega bo'lsa, u holda bu nuqtalarning kamida birida joylashgan massaning qiymati $1 - \frac{1}{n+1}$ dan kichik emas.

Ravshanki, ixtiyoriy X kompakt uchun, $P_f(X) \subset P(X)$. $P_f(X)$ fazo $P(X)$ da yopiqdir.

Funktor chekli eltuvchiga ega, lekin chekli darajaga ega emas. Ixtiyoriy kompakt X va $n \in \mathbb{N}$ natural soni uchun qo'yidagi fazoostilarni qaraylik:

$$P_{f,n}(X) = \{ \mu \in P_f(X) : |\sup p\mu| \leq n \}$$

$$P_{f,n}^c(X) = \{ \mu \in P_f^c(X) : |\sup p\mu| \leq n \}, \text{ bu yerda}$$

$$P_f^c(X) = P_f(X) \cap P^c(X) = \{ \mu \in P_f(X) : \mu \text{ o'lchovning eltuvchisi } X \text{ ning birorta bog'lamlilik komponentasida yotadi} \}.$$

Ravshanki, ixtiyoriy $n \in \mathbb{N}$ uchun P_n va P_n^c funktorlarining funktorostisidir. Eslatib o'tamizki $P_{f,n}^c, P_n^c, P_f^c$ funktorlar epimorfizmni saqlaydi.

Ixtiyoriy cheksiz kompakt X va $n \in \mathbb{N}$ uchun qo'yidagi ham o'rinlidir:

$$P_f(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{f,n}(X) \quad P_f^c(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_{f,n}^c(X).$$

Ma'lumki , agar X kompakt chekli $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ to'plamdan iborat bo'lsa;

a) $P_n(X)$, $P(X)$ fazolar uchlari $x_1, x_2, \dots, x_n$ nuqtalarda bo'lgan simpleksdan iborat bo'ladi;

$P_n^c(X)$, $P^c(X)$ va $P_f^c(X)$ lar esa shu nuqtalardagi Dirak o'lchovidan iborat bo'ladi, ya'ni

$$P_n^c(X) = P^c(X) = P_f^c(X) = \{\delta_{x_1}, \delta_{x_2}, \dots, \delta_{x_n}\}$$

3.3.2-ta'rif. $f: X \rightarrow Y$ akslantirish katako'xshov (qisqacha, CE-akslantirish) deyiladi, agar ixtiyoriy $A \subset Y$ kompakt uchun uning proobrazi $f^{-1}(A)$ kompakt bo'lsa va ixtiyoriy $y \in A$ ning proobrazi $f^{-1}(y)$ bir nuqtaning sheypiga teng bo'lsa.

3.3.1-teorema. Aytaylik , X ixtiyoriy kompakt bo'lsin. U holda shunday uzluksiz, ochiq katako'xshov (barcha qatlari tortiluvchan) $r_f^X: P_f(X) \rightarrow \delta(X)$ retraksiya mavjuddir.

Isbot. X -cheksiz kompakt bo'lsin. $\delta(X)$ bilan Dirak ehtimol o'lchovlari to'plamini belgilaymiz. Ma'lumki $\delta(X)$ fazo X ga gomeomorf bo'ladi. Ixtiyoriy $\mu \in P_f(X)$ o'lchovini olaylik. $P_f(X)$ fazoning aniqlanishiga ko'ra $\mu = \sum_{i=1}^l m_i \delta_{x_i}$ va shunday i_0 topiladiki , $m_{i_0} \geq 1 - \frac{1}{e+1}$, m_{i_0} -yagonadir. Bu μ nuqtaga $\delta(X)$ fazoning $\delta_{x_{i_0}}$ nuqtani mos quyamiz. Bu $P_f(X) \rightarrow \delta(X)$ moslikni r_f^X bilan belgilaymiz. Demak, $r_f^X: P_f(X) \rightarrow \delta(X)$ ya'ni akslantirish aniqlandi va $r_f^X(\delta(X)) = \delta(X)$ ya 'ni bu akslantirishda $\delta(X)$ fazoning nuqtalari qo'zg'almas ekan .

a)Endi bu akslantirish $r_f^X: P_f(X) \rightarrow \delta(X)$ ni uzluksizligini ko'rsatamiz.

Haqiqatdan , ham $\mu_0 \in P_f(X)$ bo'lsin . Bunda $\mu_0 = m_0 \delta_{x_0} + \sum_{i=1}^{k-1} m_i \delta_{x_i}$, $m_0 = \frac{k}{k+1}$. U holda $r_f^X(\mu_0) = \delta_{x_0}$.

Aytaylik , $O(\delta_{x_0})$ ochiq to'plam δ_{x_0} ning atrofi bo'lsin. x_i nuqtalarning shunday $O(x_i)$ atroflarini olamizki, $O(x_i)$ lar o'zaro dizyunk bo'lsin . $\delta \succ 0$

sonni $[0, \frac{m_0}{k+1})$ yarim oraliqdan olamiz, ya'ni $\delta \in [0, \frac{m_0}{k+1})$. $\delta \succ 0$ va $\mu \in P_f(X)$

$$\text{uchun } O(\mu_0, \delta) = \left\{ \mu \in P_f(X) : |\mu(O(x_i) - m_i)| \prec \delta, \mu(X \setminus \bigcup_{i=0}^k O(x_i)) \prec \delta \right\} \quad O(\mu_0, \delta)$$

to'plamning ochiqligidan $O(\mu_0, \delta]$ to'plam ochiq to'plamdir. Ixtiyoriy $\mu \in O(\mu_0, \delta)$ uchun quyidagiga ega bo'lamiz: $r_f^x(\mu) \in O(x_0)$. Ya'ni $r_f^x(O(\mu_0, \delta)) \subset O(x_0)$. Demak, $r_f^x : P_f(X) \rightarrow \delta(X)$ akslantirish uzluksizdir.

Bevosita tekshirib ko'rish natijasida, ixtiyoriy $\mu \in P_f(X)$ uchun $[\mu, r_f^x(\mu)]$ kesma $(r_f^x)^{-1}(r_f^x(\mu))$ proobrazda to'liq yotishiga ishonch hosil qilamiz. Bu esa, $r_f^x : P_f(X) \rightarrow \delta(X)$ katako'xshovli ekanligini kursatadi. Bu r_f^x retraksiyaning har bir qati $(r_f^x)^{-1}(\delta_x)$ tortiluvchan ekanligini ham anglatadi. Yana shuni takidlash mumkinki, har xil ikki x va y nuqtalarning qatlari $(r_f^x)^{-1}(\delta_x)$ va $(r_f^x)^{-1}(\delta_y)$ orasida o'zaro bir qiymatli moslik mavjuddir.

b) Endi $r_f^x : P_f(X) \rightarrow \delta(X)$ ning ochiq akslantirish ekanligini ko'rsatamiz.

Aytaylik, $\mu_0 \in P_f(X)$ va $r_f^x(\mu_0) = \delta_{x_0}$. $\mu_0 \in P_f(X)$ dan $\mu_0 = m_0 \delta_{x_0} + \sum_{i=1}^{k-1} m_i \delta_{x_i^0}$, bunda

$m_0 \geq 1 - \frac{1}{k+1}$ Aytaylik, $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ ketma-ketlik x_0 ga yaqinlashsin.

Quyidagicha aniqlangan $\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n, \dots$ o'lchovlar ketma-ketligini olamiz:

$\mu_n = m_0 \delta_{x_n} + \sum_{i=1}^{k-1} m_i \delta_{x_i^0}$ ravshanki, μ_n ketma-ketlik kuchsiz topologiyada μ_0

o'lchovga yaqinlashadi va $r_f^x(\mu_n) = \delta_{x_n}$. Demak, rekratsiya r_f^x ochiq akslantirish ekan. Teorema isbotlandi.

Xuddi 3.3.1-teorema singari fikr yuritib quyidagi isbotlanadi.

3.3.2-teorema. Aytaylik, X ixtiyoriy kompakt bo'lsin, u holda shunday uzluksiz, ochiq, katak o'xshov (barcha qatlari tortiluvchan) retraksiyalar $r_{f,n}^x : P_{f,n}(X) \rightarrow \delta(X)$,

$(r_f^x)^c : P_f^c(X) \rightarrow \delta(X)$ va $(r_{f,n}^x)^c : P_{f,n}^c(X) \rightarrow \delta(X)$ mavjud bo'ladi.

$A(N)R$ -kompakt

3.3.3-ta'rif. Aytamizki , Y topologik fazo K topologik fazolar sinfiga absolyut (atrofi) retrakt deb yuritiladi va $Y \in A(N)R(K)$ ko'rinishda yoziladi, agar $Y \in K$ va ixtiyoriy $h: Y \rightarrow X \in K$ gomeomorfizm uchun , $h(Y)$ fazo X da yopiq bo'lib, u X fazoda retrakt (atrofli) bo'lsa .

Bu ta'rifda , K topologik fazolar sinfi sifatida barcha kompaktlar kategoriyasini olsak , Y fazo $A(N)R$ –kompakt deb yuritiladi. K sifatida barcha metrik fazolar kategoriyasini olsak , u holda $A(N)R(M)$ -korinishida yoziladi

3.3.3-teorema. Agar X metrik $A(N)R$ kompakt bo'lsa, u holda $F(\pi_x): F(X) \rightarrow F(\square X)$ akslantirish gomotopik ekvevalentdir, bunda $F = P_f, P_f^c, P_{f,n}$ va $P_{f,n}^c$

Isbot. Aytaylik , X kompakt va $A(N)R$ fazo bo'lsin U holda X kompakt chekli bog'lamlilik komponentalariga egadir. Ya'ni $|\square X| < \infty$. Ma'lumki, $\pi_x: X \rightarrow \square X$ yoyiluvchi akslantirish (faktor akslantirish) epimorf akslantirish bo'ladi. Bu teorema $F = P_f$ funktor uchun isbot qilamiz, qolgan $P_{f,n}, P_f^c$ va $P_{f,n}^c$ lar uchun isboti shunga o'xshashdir. U holda $P_f(\pi_x): P_f(X) \rightarrow P_f(\square X)$ akslantirish ham epimorfizmdir. $\square X$ faktor fazoning chekli ekanligidan , kompakt $P_f(\square X)$ ham chekli bo'ladi . Aytaylik , $\mu \in P_f(\square X)$ bo'lsin. Quyidagi diagrammani qaraylik:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\pi_{\square X}} & \square X \\
 \uparrow r_f^{\square X} & & \uparrow r_f^{\square X} \\
 P_f(X) & \xrightarrow{P_f(\pi_x)} & P_f(\square X)
 \end{array} \quad (2)$$

Bu diagramma komutativdir, ya'ni $\pi_x \circ r_f^x = r_f^{\square X} \circ P_f(\pi_x)$ tenglik o'rinlidir.

3.3.1-teorema ga ko'ra μ nuqtaning proobrazi $(P_f(\pi_x))^{-1}(\mu)$ tortiluvchan bo'lganligi tufayli trivial sheyppga ega. Agar turli μ_1 va μ_2 nuqtalarni $P_f(\square X)$

dan olsak , u holda bu nuqtalarning proobrazlari $(P_f^{-1}(\pi_x))(\mu_1)$ va $(P_f^{-1}(\pi_x))(\mu_2)$ o'zaro kesishmaydi. Bu holatda $P_f(\Box X)$ ning chekli ekanligidan $P_f(\pi_x)$ akslantirishning gomotopik ekvevalentligi kelib chiqdi. Teorema isbotlandi

3.3.4-teorema. X ixtiyoriy kompakt bo'lsin . U holda $P_f(\pi_x): P_f(X) \rightarrow P_f(\Box X)$ akslantirish sheyp ekvevalentligidir. Qolaversa quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$shP_f(X) = shP_f(\Box X)$$

Isboti. Bizga X ixtiyoriy kompakt berilgan bo'lsin. $\pi_x: X \rightarrow \Box X$ faktor akslantirishni olaylik, $X = \{X_\alpha, \pi_\alpha^\beta, \Omega\}$ $A(N)R$ - sistema bo'lib u X ning assosirlangan sistemasi bo'lsin, ya'ni $X = \lim_{\leftarrow} X$ bu holatda soda va oson isbotlash mumkinki , $\Box X = \lim_{\leftarrow} \{\Box X_\alpha, \Box \pi_\alpha^\beta, \Omega\}$ o'rinli bo'ladi. P_f ning uzluksizligidan quyidagi tengsizliklarga ega bo'lamiz:

$$P_f(X) = \lim_{\leftarrow} \{P_f(X_\alpha), P_f(\pi_\alpha^\beta), \Omega\}$$

$$P_f(\Box X) = \lim_{\leftarrow} \{P_f(\Box X_\alpha), P_f(\Box \pi_\alpha^\beta), \Omega\}$$

$\alpha, \beta \in \Omega$, $\alpha \leq \beta$ indekslar uchun (1), (2) diagrammalarning komutativligidan va $\pi_{x_\alpha} \circ \pi_\alpha^\beta = (\Box \pi_\alpha^\beta) \circ \pi_{x_\beta}$ tenglikdan $P_f(\pi_{x_\alpha}) \circ P_f(\pi_\alpha^\beta) = P_f(\Box \pi_\alpha^\beta) \circ P_f(\pi_{x_\beta})$ tenglikga ega bo'lamiz , $\{P_f(\pi_{x_\alpha}): \alpha \in \Omega\}$ akslantirishlar oilasi $\{P_f(\pi_{x_\alpha}), P_f(\pi_\alpha^\beta): \Omega\}$ sistemani $\{P_f(\Box \pi_{x_\alpha}), P_f(\Box \pi_\alpha^\beta): \Omega\}$ sistemaga o'tkazadi. Yuqoridagi keltirilgandan teorema 3.3.3 ga ko'ra har bir $\alpha \in \Omega$ indeks uchun $P_f(\pi_{x_\alpha})$ akslantirish gomotopik ekvevalentlikdir.

Gomotopik ekvevalent akslantirishlarning teskari limiti

$$P_f(\pi_{x_\alpha}): P_f(X) \rightarrow P_f(\Box X)$$

ko'ra sheyplik ekvevalentligidir.

U holda , $shP_f(X) = shP_f(\Box X)$ teorema isbotlandi.

3.3.5-teorema. X va Y lar ixtiyoriy kompaktlar bo'lsin .

Agar $shX \geq shY$ (mos ravishda , $shX = shY$), u holda $shP_f(X) \geq shP_f(Y)$
 $(shP_f(X) = shP_f(Y))$ ¹

¹ Жўраев Т.Ф. Некоторые геометрические свойства функтора Р вероятностных мер и его подфунктаров.
 Конд.диссер.МГУ.1989,с.90

4. Chekli darajali ochiq va yopiq kovariant funktoirlarning ba'zi xossalari

Aytaylik , $F : \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ kovariant funktor bo'lsin . Bizga n natural son berilgan. Ixtiyoriy kompakt X fazo uchun V.N.Basmanov tomonidan

$\pi_{F,X,k} : X^k \times F(k) \rightarrow F(X)$ uzluksiz akslantirish aniqlangandir.

Agar F normal funktor bo'lsa, u holda $\pi_{F,X,k}$ akslantirish ham uzluksiz bo'ladi.

Aytamizki , F funktor chekli k darajali deyiladi, agar $X^k \times F(k)$ fazoning $\pi_{F,X,k}$ akslantirishdagi obrazi $F(X)$ ga teng bo'lsa va $\deg F \leq k$ ko'rinisda belgilanadi.

3.4.1-ta'rif $F : \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ normal n darajali funktor ochiq (yopiq) funktor deyiladi, agar $\pi_{F,X,k}$ akslantirish barcha $k \leq n$ lar uchun ochiq (yopiq) akslantirishdan iborat bo'lsa .

Biz k bilan $\{1, 2, \dots, k\}$ k -elementli to'plamni belgilaymiz. Ma'lumki, ixtiyoriy k elementli $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ almashtirishlar gruppasi S_k uzluksiz harakatlanadi. $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ va S_k topologik fazoda diskret topologiya qaraladi. Shu sababli, S_k topologik gruppaning $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$ topologik fazodagi harakati uzluksiz bo'ladi. X kompakt fazoning sheyp o'lchami $ShX \leq k$ tengsizlikni qanoatlantiradi deyiladi, agar kompakt X elementlarining $\dim$ o'lchami k dan kata bo'lmagan $\{X_\alpha, P_\beta^\alpha, \alpha, \beta \in A\}$ ANR-sistemaningteskari limitidan iborat bo'lsa. Boshqaha qilib aytganda $\forall \alpha \in A$ uchun $X_\alpha \in \text{ANR}$ va $\dim X_\alpha \leq k$ lar o'rinli bo'lsa.

Yana $X = \lim_{\leftarrow} \{X_\alpha; P_\beta^\alpha, \alpha, \beta \in A\}$.

3.4.1 -teorema $F : \text{Comp} \rightarrow \text{Comp}$ ochiq (yopiq) darajasi $\leq n$ bo'lgan kovariant funktor bo'lsa, u holda F funktor kompaktning sheypini saqlaydi. Ya'ni qo'yidagilar o'rinli bo'ladi.

a) agar $ShX \leq ShY$ bo'lsa, u holda $ShF(X) \leq ShF(Y)$ bo'ladi;

b) agar $ShX = ShY$ bo'lsa, u holda $ShF(X) = ShF(Y)$ bo'ladi;

3.4.2-teorema $F : Comp \rightarrow Comp$ ochiq (yopiq) darajasi $\leq n$ bo'lgan kovariant funktor bo'lsa, u holda $Sd(F(X)) \leq k \cdot n$ kelib chiqadi ¹.

¹ Yodgorov E.I. Shape properties of the space of values of some covariant functors of finite degree. "Zamonaviy topologiya tadbiqlari va muammolari" nomli xalqaro konferensiya tezislari to'plami. T. 2013-y, 96-97-b

III bob bo'yicha xulosalar

Kompakt topologik fazolarning ta'rif va ularga doir teoremlar isbotlari bilan ko'rsatilgan. Kompakt topologik fazolarda rerakt tushunchasi haqida ma'lumotlar keltirilgan.

Kompakt topologik fazoda sheyp tushunchasi haqidagi ta'rif va teoremlar berilgan. Xususiyl xolda ayniy $i_x: X \rightarrow X$ akslantirish uchun ham hosil qilingan fundamental ketma-ketliklar mavjud bo'lishi ko'rsatilgan. Ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan kompakt X uchun $ShX \geq Sh1$ o'rinliligi ko'rsatilgan.

Chekli eltuvchili kovariant funktoirlarning ta'rif va ularga oid teoremlar isboti bilan to'liq ko'rsatilgan. Kompaktning sheypi haqida ma'lumotlar berilgan. X ixtiyoriy kompakt bo'lsin. U holda $P_f(\pi_x): P_f(X) \rightarrow P_f(\square X)$ akslantirish sheyp ekvevalentligi bo'lishi isbotlangan.

Chekli darajali ochiq va yopiq kovariant funktoirlarning ba'zi xossalari berilgan.

$F: Comp \rightarrow Comp$ ochiq (yopiq) darajasi $\leq n$ bo'lgan kovariant funktor bo'lsa, u holda $Sd(F(X)) \leq k \square n$ kelib chiqishi ko'rsatilgan.

Xulosa

Ushbu magistrlik dissertatsiyasining birinchi bobida mavzuga oid asosiy tushunchalar bayon qilingan.

Topologik fazolar va ularga doir misollar keltirilgan. Topologiya soʻzining lugʻaviy maʼnosi va uning taʼrifi haqida maʼlumot berilgan.

Metrik fazolar va ularga doir misollar keltirilgan. Metrik fazo - bu biror boʻsh boʻlmagan toʻplamdagi ikki element (nuqta) orasidagi masofani aniqlashi koʻrsatilgan.

Topologik fazolarda kovariant funktorlarning taʼrifi va teoremlari berilgan. Ixtiyoriy funktor ekvivalent obyektlarni ekvivalent obyektlarga oʻtkazadi.

Chekli eltuvchili normal kovariant funktorlarning geometrik va topologik xossalari oʻrganildi.

Extimol oʻlchovli funktorlarning taʼrifi va ularning qism funktorlari haqida maʼlumotlar berilgan.

Gomotopik gruppalar funktorlari haqida yetarlicha maʼlumot keltirilgan. Ikkinchi bobda topologik fazolarda *ind* oʻlchamining taʼrifi keltirilgan. Topologik fazolarda *ind* oʻlchamining xossalari haqida maʼlumotlar berilgan.

Topologik fazolarda *dim* oʻlchami taʼrifi va teoremlari keltirilgan.

Topologik fazolarda *dim* oʻlchamining xossalari sanab oʻtilgan.

Qoʻzgʻalmas nuqta haqida Brauer teoremasi isboti bilan koʻrsatilgan. Brauer teoremasini tadbqiqi keltirilgan

Fazoning *ind*, *Ind* va *dim* oʻlchamlarining oʻzaro bogʻliqliklari haqida maʼlumotlar berilgan

R^n fazoning taʼrifi va uning fazo ostilari oʻlchami haqida maʼlumotlar berilgan. Chiziqning taʼrifi keltirilgan.

Uchinchi bobda dissertatsiyaning asosiy ilmiy natijalari keltirilgan.

Kompakt topologik fazolarning taʼrifi va ularga doir teoremlar isbotlari bilan koʻrsatilgan. Kompakt topologik fazolarda retrakt tushunchasi haqida maʼlumotlar keltirilgan.

Kompakt topologik fazoda sheyp tushunchasi haqidagi ta'rif va teoremlar berilgan. Xususiyl xolda ayniy $i_x: X \rightarrow X$ akslantirish uchun ham hosil qilingan fundamental ketma- ketliklar mavjud bo'lishi ko'rsatilgan.

Ixtiyoriy bo'sh bo'lmagan kompakt X uchun $ShX \geq Sh1$ o'rinliligi ko'rsatilgan.

Chekli eltuvchili kovariant funktoirlarning ta'rifl va ularga oid teoremlar isboti bilan to'liq ko'rsatilgan. Kompaktning sheypi haqida ma'lumotlar berilgan. X ixtiyoriy kompakt bo'lsin . U holda $P_f(\pi_x): P_f(X) \rightarrow P_f(\square X)$ akslantirish sheyp ekvevalentligi bo'lishi isbotlangan.

Chekli darajali ochiq va yopiq kovariant funktoirlarning ba'zi xossalari berilgan.

$F: Comp \rightarrow Comp$ ochiq (yopiq) darajasi $\leq n$ bo'lgan kovariant funktoir bo'lsa, u holda dan $Sd(F(X)) \leq k \square n$ kelib chiqishi ko'rsatilgan.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

I. O'zbekiston Respublikasi qonunlari

1. [O'zbekiston Respublikasi](#) “Ta'lim to'g'risidagi” qonuni. 464-I-son, 1997 yil 29 avgust.
2. [O'zbekiston Respublikasi](#) “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” to'g'risidagi qonuni. 463-I-son, 1997 yil 29 avgust.

II. O'zbekiston Respublikasi Prezident farmonlari va qarorlari, Vazirlar maxkamasining qarorlari

1.I.A. Karimov. “Barkamol avlod mamlakatimiz rivojlanishida hal qiluvchi kuch”. 16 – 17 fevral kunlari Toshkentda o'tkazilgan “Yuksak bilimli va intellektual rivojlangan avlodni tarbiyalash mamlakatni barqaror taraqqiy ettirish va modernizatsiya qilishning muhim sharti” mavzusidagi xalqaro konfirensiyada so'zlagan nutqi. “Toshkent oqshomi” gazetasi. 20 – fevral.

III. O'zbekiston Respublikasi Prezident asarlari

1. I.A. Karimov. “O'zbekiton mustaqillikka erishish ostonasida”. Toshkent. “O'qituvchi”. 2011 yil, 440 bet.
2. I.A. Karimov. “Yuksak ma'naviyat yengilmas kuch”. Toshkent. “Ma'naviyat”. 2008 yil, 175 bet.

IV. Asosiy adabiyotlar

1. Р.Н. Назаров, Б.Т.Тошпўлатов, А.Д. Дўсумбетов. Алгебра ва сонлар назарияси. I қисм. Ўқитувчи. 1995. – 271 б.
2. Жўраев Т.Ф.Топологияга кириш. Ўлчамлар, функторлар, чизиклар. -Т.: 2012. -187 б.
3. Энгелькинг Р. Общая топология. М. Наука. : 1986. -752 с.
4. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. -М.: Физматлит, 2006. -252 с.
5. Келли. Дж. Л. Общая топология. М. Наука : 1981. -431 с.
6. Архангельский А.В. О мощности бикомпактов с первой аксиомой счетности // ДАН СССР. – 1969. – № 5 (187). – С. 967-970.

7. Аюпов Ш.А., Заитов А.А. Слабо аддитивные функционалы на линейных пространствах // ДАН РУз. 2006. № 4-5. Стр. 7-12.
8. Аюпов Ш.А., Заитов А.А. Принцип равномерной ограниченности для слабо аддитивных операторов // УзМЖ. 2006. № 4. стр. 3-10.
9. Банах Т.О. Топология пространств вероятностных мер. I: Функторы P_τ и $\mathcal{P}$ // Математичні студії. – 1995. – Вып.5. – С. 65-85.
10. Заитов.А.А. Некоторые свойства пространств знакопеременных мер и функтора слабо аддитивных нормированных и сохраняющих порядок функционалов: Дисс. канд. физ. – мат. наук. – Ташкент: НУ, 2004. – 62 с.
11. Заитов А.А. Клеточность и (слабая) плотность пространства слабо аддитивных функционалов // УзМЖ. 2003. № 2. С. 16-21.
12. Заитов А.А. О продолжении слабо аддитивных функционалов // ДАН РУз. 2005, № 5. Стр. 3-7.
13. Мусаев Д.К. Равномерно суперкомпактные, вполне компактные и сильно паракомпактные равномерные пространства // ДАН РУз. – 2004. – № 4 . – С. 3-9.
14. Федорчук В.В. Вполне замкнутое отображения // Математический сборник. – 1976. – № 1 (99). – С. 3-33.
15. Федорчук В.В. Бесконечномерные бикомпакты // Изв. АН СССР, сер. матем. – 1978. – (42). – С. 1162-1178.
16. Федорчук В.В. Вполне замкнутые отображения и их приложения // Фундаментальная и прикладная математика. – 2003. – 4 (9). – С. 105-235.
17. Fedorchuk V.V., Todorcevic S. Cellularity of covariant functors // Topol. and its applications. – 1997. – № 1 (76). – P. 125-150.
18. Fedorchuk V.V. The Suslin number of the functor of probability measures // Topol. and its Appl. – 1996. – № 1 (84). – P. 55-60.
19. Musaev D.K. Dyadic mappings and dyadic superparacompact topological groups // Siberian Mathematical Journal. – 2005. – № 4 (46). – P. 35-48.

20. Musaev D.K. Characterization of complete mappings by means of morphisms into zero-dimensional mappings // Siberian Advances in Mathematics. – 2005. – № 2 (15). – P. 44-68
21. Zaitov A.A. The density and cellularity of the spaces of signed measures and probability measures. //Methods of functional analysis and topology. 2002. Vol. 8. No. 3. P. 85-89.

V. Qo'shimcha adabiyotlar

1. Куротовский К. Топология. Масква. Мир. 1966. Том 1. 594 с.
2. Arhangel'skii A.V. , Ponomarvov V.I. bases of general topology In problems and exercises. Moskow. 1974. p. 475.
3. Собиров М.А. Математик фанлардан русча – ўзбекча луғат. Тошкент. Ўқитувчи. 1983 й. 256 б.
- 4.Souslin M. Problem 3 // Fundamenta Mathematica. – 1920. – (1). – P. 223.
- 5.Todorcevic S., and Velickovic B., Martin's axiom and partitions // Compositio Math. – 1987. – (63). – P. 391 – 408.
- 6.Todorcevic S. Partition Problems in Topology // Contemp. Math. Amer. Math. Soc., Providence, RI. –1989. – (84).
- 7.Todorcevic S., Remarks on cellularity in products // Compositio Math. – 1986. – (57). P. 357 – 372.
- Tychonof A.N. Uber die topologishe Erweiterung von Raumen // Math. Ann. – 1930. – (102). – P. 544-561
- 8.van Douwen E.K. Density of compactifications // Set-theoretic topology. N.Y.Acad. Press. – 1977. – P. 97-110.
- 9.Verbek A., Superextensions of Topological Spaces // CWI Tracts. – 1972. – (41).
10. Zaitov A.A. On categorical properties of order-preserving functionals // Methods of Functionals Analysis and Topology. – 2003. – № 4 (9). – P. 357-364.
- 11.Yajnal A.,Juhasz J. Discrete subspaces of topological spaces // Indag. Math. – 1967. – (29). – P. 343-346.

12.Грызлов А.А. Кардинальные инварианты и бикомпактные расширения топологических пространств: Дисс. доктора физ. - мат.наук. – Москва: МГУ, 1996. – 209 с.

13.Заричный М.М. О свойствах нормальных функторов // V-Тираспольский симпозиум по общей топологии и ее приложениям: Тезисы докладов. – Кишинев, Штинца. 1985. С. 96-97.

14. Иванов А.В. О весе нигде не плотных подмножеств в компактах // Сибирский математический журнал. – 2003. – 6 (44). – С. 1266-1272.

15.Зайтов А.А. Число Суслина единичного шара знакопеременных мер // УзМЖ. 2001. № 3-4. С. 14-18.

VI. Davriy nashrlar statistik to'plamlar va hisobotlar

1. Жўраев Т.Ф. Некоторые геометрические свойства функтора P вероятностных мер и его подфункторов. Конд.диссер.МГУ.1989,с.90

2. Жўраев Т.Ф. О ковариантных функторах конечной степени сохраняющих $A(N)R(M)$ - пространства. Доклады АН Болгария №43,№9, 1990, с.5-8.

3.Махмуд Т. Кардинальнозначные инварианты пространств сцепленных систем: Дисс. канд. физ.- матем. наук. М.: МГУ, 1993.

4.Yodgorov E.I.Shape properties of the spase of values of same covariant funktors of finite degree.”Zamonaviy topologiya tadbiqlari va muammolari” nomli xalqaro konferinsiya tezislar to'plami. T.2013-y, 96-97-b

5.Yodgorov E.I. Topologik fazolarda o'lcham funksiyalari va ularning ba'zi xossalari.”Tafakkur sarchashmalari'magistrnlarning ilmiy-metodik maqolalari to'plami.T.2013,64-66-b

VII. Internet saytlari

1. <http://vilenin.narod.ru/Mm/Books/>.

2. <http://www.allmath.ru/>.

3. <http://www.akademic.ru/>.

Tayanch soʻzlar lugʻati

№	Oʻzbek tilida	Rus tilida	Ingliz tilida
1	Topologiya	Топология	Topology
2	Topologik fazo	Топологическое пространство	Topological space
3	Toʻplam	Множество	Set
4	Qism toʻplam	Подмножества	Subset
5	Element	Элемент	Element
6	Ixtiyoriy	Любой	Every
7	Mavjud	Существует	There
8	Ochiq	Открытое	Open
9	Yopiq	Замкнутое	Close
10	Oila	Семейство	Family
11	Funksiya	Функция	Function
12	Birlashma	Объединение	Union
13	Kesishma	Пересечение	Intersection
14	Koʻpaytma	Произведение	Product
15	Teorema	Теорема	Theorem
16	Tenglik	Равенство	Equality
17	Isbot	Доказательство	Proof
18	Misol	Пример	Example
19	Tegishli	Принадлежит	Belong
20	Kompakt	Компакт	Compact
21	Lokal kompakt	Локальный компакт	Locally compact
22	Kardinal	Кардинал	Cardinal
23	Baza	База	Base
24	Old baza	Предбаза	Subbase
25	Xarakter	Характер	Character
26	Toʻplamning ichi	Внутренность множества	Interior sets
27	Diskret	Дискрет	Discrete
28	Antidiskret	Антидискрет	Antidickret
29	Tabiiy topologiya	Естественная топология	Naturally topology
30	Interval	Интервал	Interval
31	Metod	Метод	Method
32	Topologiyani kiritish	Введение топологию	Introduction of topologies
33	Oʻzida zich	Плотны в себе	Dense in itself
34	Separabel	Сепарабел	Separable
35	Akslantirish	Отображение	Display

36	Uzluksiz	Непрерывное отображение	Continuous maps
37	Chiziq	Прямая	Line
38	Qoplama	Покрытие	Cover
39	Kalibr	Калибр	Caliber
40	Shanin sonlari	Число Шанина	Number Shanin
41	Lemma	Лемма	Lemma
42	Ajrimlilik aksiomalari	Аксиомы отделимости	Separation Axioms
43	Nuqta	Точка	Point
44	Hosilaviy to'plam	Производная множества	Derivative set
45	Zorgenfrey to'g'ri chizig'li	Прямая Зоргенфрея	Sorgenfrey line
46	Topologik xossalari	Топологические свойства	Topological properties
47	Xausdorf fazosi	Хаусдорфово пространство	Hausdorff spaces
48	Regulyar fazo	Регулярное пространство	Regular space
49	To'la regulyar fazo	Вполне регулярное пространство	Completely regular space
50	Normal fazo	Нормальное пространство	Normal space
51	Qoplama	Покрытия	Cover
52	Invariant	Инвариант	Invariant
53	Mukammal fazo	Совершенное пространство	Perfectly space
54	Chech tipidagi kompakt	Компакт в смысле Чеха	Complete in the sense of Chekh