МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ НИЗАМИ

На правах рукописи

УДК 517.986

Гараева Полина Васильевна

«Некоммутативное интегрирование на алгебрах фон Неймана и их приложение»

Специальность: 5А110101- Методика преподавания математики

Диссертация на получение академической степени магистра

«Утверждаю»

начальник отдела магистратуры

__________М.Х.Эсанов

2014г «_______» июнь

"Математика и методика её преподавания"

Заведующая кафедрой, д.ф.-м. н.

____________ Р.Б.Бешимов

Научный руководитель: д.ф.-м. н. проф.

___________ Р.З.Абдуллаев

Ташкент 2014г

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. Отечественная наука создала мощный интеллектуальный потенциал, который находит свое практическое применение во многих сферах жизни, служит основой для укрепления национальной государственности и экономической независимости республики. Успех деятельности предприятий, да и в целом государства, в силу ограниченности естественных, природных ресурсов, в значительной мере сегодня определяется тем, насколько широко внедряются достижения научно-технического прогресса, наукоемкие технологии, уровнем профессиональной подготовленности кадров. Исторически сложилось так, что на пороге XXI века в Республике Узбекистан сформирован интеллектуальный потенциал, который по своему уровню развития, инновационным открытиям, возможностям превосходит сегодня многие развивающиеся страны мира, а во многом и не уступает экономически развитым странам. Без преувеличения можно сказать, что фундамент уникального и прекрасного здания науки, интеллектуального потенциала Узбекистана был заложен много веков назад. Мы вправе с гордостью говорить о том, что отечественная наука восходит к очень древним временам, имеет глубокие и мощные корни.[1] [3]

Современный этап развития математики, как науки требует совершенствования, а также серьезного анализа научной литературы современных ученых. (Р.Аренса,Н.В.Трунова, И Сегала и многих других ученых).

Изучением проблем интегрирования на алгебрах фон Неймана занимались такие зарубежные ученые, как Р.Аренс, Н.В.Трунов, И. Сегал имногие другие. У нас в стране этой проблематикой занимаются такие

---

[1] - Каримов И.А. Узбекистан, устремлённый в XXI век. - Ташкент. Узбекистан, 1999.

ученые, как Аюпов Ш.А., Чилин И, Кудайберганов К.К., Абдуллаев Р.З. Интегрирование того или иного объекта всегда являлось актуальным направлением в мире математики. В частном случае интегрирование на алгебрах фон Неймана эта тема, над которой сейчас работают много научных работников, включая ученых-математиков нашей страны. В данной теме не раскрыты еще много вопросов (какие пространства одновременно могут являться и алгебрами, доказательство или опровержение теорем частными случаями, приведение построения пространств различными способами и методами, влияние выбора нормы на пространства Аренса и Орлича и т.д.)

Объект исследования является процесс интегрирования на алгебрах фон Неймана.

Предмет исследования составляют *алгебры фон Неймана* .

Цель исследования: проанализировав статьи и работы Р.Аренса, Н.В.Трунова, И . Сегала, Аюпова Ш.А., Чилина И., Кудайберганова К.К., Абдуллаева Р.З рассмотреть и изучить построение неккоммутативных пространств , конкретизировать случаи построения алгебр Аренса и йордановых алгебр.

Выдвигаемая гипотеза и задачи:

- критически проанализировать основные научные концепции изучения пространств ;
- систематизировать научные задачи, принципы и методы интегрирования на алгебрах фон Неймана;
- рассмотреть и конкретизировать понятие некоммутативного пространства Аренса;
- на основе статьи[2] [10] доказать теорему для случая α=0;
- привести примеры построения коммутативных и некоммутативных пространств (по весу, состоянию и т.д.);

[2] - Albverio S., AyupovSh.A., Abdullaev R.Z. Arens Spaces associated with von Neumann algebras and normal states J. of functional Analysis-2008

- разобрать примеры симметризованного умножения;
- привести примеры йордановых алгебр;
- показать значимость приложения теории интегрирования для функциональных пространств.

Теоретическая основа исследования. Среди зарубежных ученых данной проблематикой занимались и занимаются Альбверио С., Р.Аренс, Трунов Н.В.,Такесаки М., ЙедонФ.Дж. и многие другие ученые.

В Узбекистане проблема интегрирования на алгебрах фон Неймана прослеживается и рассматривается в работах Аюпова Ш.А.,Чилина В.И.,Кудайберганова К.К. и Абдуллаева Р.З.

И по сегодняшний день существуют ученые которые в взаимодействии ищут решение данных проблем используя совместные труды и обмен полученными результатами. К данным ученым относятся Альбверио С., Аюпов Ш.А.,Чилин В.И.,Кудайберганов К.К. и Абдуллаев Р.З., которые ведут исследование по данной теме, регулярно собираются международные конференции и выпускаются научные труды.

Некоторые из соответствующих научных проблем планируется проанализировать в настоящей диссертационной работе.

Основанием исследования является работа [30] , в которой введены некоммутативные пространства аренса, ассоциированные с произвольными точными нормальными локально конечными весами, заданными на полуконечной алгебре фон Неймана. Также упор делается на научную работу [33] , где рассматривается построение некоммутативного случая пространств[3] Аренса и условие того, чтобы пространства Аренса было алгеброй для случая α=1. На основе этой статьи в данной диссертационной работе приведен и доказан случай для α=0 [4] .Также большой упор делался на изучение работ Трунова В.И., который внес

[3] - Трунов Н.В. О некоммутативном аналоге пространства L_p .- Изв.ВУЗов. Матем, 1979,№11 , с. 69-77

[4] - Albverio S., AyupovSh.A., Abdullaev R.Z. Arens Spaces associated with von Neumann algebras and normal states J. of functional Analysis-2008

большой вклад в развитие интегрирования и дифференцирования на алгебрах фон Неймана.

Методы и методология исследования: доказательство теорем по аналогии, анализ научной литературы, систематизация научных знаний и их классификация.

Исследование проблем интегрирования на алгебрах фон Неймана является одним из актуальных направлений в современной математике. Данная проблема имеет широкое применение в физике,для изучения и построения все возможных пространств.

Теоретическая и практическая значимость: данная тематика очень широко применяется в физике . Исследование и доказательства поставленных целей и задач будут продолжением работы над изучением некоммутативного интегрирования.

С учётом научного и практического потенциала математики, её отраслевой структуры намечено обосновать круг теоретических и прикладных задач всех основных подразделений системы интегрирования на алгебрах фон Неймана.

Систематизация совокупности научных принципов и методов изучения выпуклых функций.

Доказательство теорем и приведение других случаев для рассмотрения в доказательстве.

Ожидаемые результаты:

1) доказательство конкретных случаев теорем на основе доказанных теорем в работах [33];

2) подтверждение научно-практического потенциала математики в изучении процесса интегрирования на алгебрах фон Нейман;

3) комплекс научно обоснованных предложений по решению проблем построения некоммутативных пространств Аренса и йордановых алгебр;

Научная новизна работы: С учётом научного и практического потенциала математики, её отраслевой структуры намечено обосновать круг теоретических и прикладных задач всех основных подразделений системы интегрирования на алгебрах фон Неймана.

На основе всей предложенной литературы строятся различные некоммутативные и коммутативные случаи данных приведенных пространств, рассматривается геометрическая интерпретация функциональных пространств, исследуются теоремы интегрирования на алгебрах фон Неймана.

Структура магистерской диссертации: магистерская диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и глоссария.

Магистерская диссертация состоит из введения, трёх глав, заключения, списка литературы и приложений.

Во введении обосновывается актуальность исследования, его цель, задачи, объект, предмет, степень теоретические и методологические основы, рассматривается степень изученности проблемы и научная новизна работы. В первой главе - “Изучение и построение L_p пространств” – рассматриваются научноые подходы к изучению объекта исследования, обосновывается круг задач в этой сфере. Также анализируются и, в соответствии с теоретическими взглядами автора, определённым образом уточняются различные способы построения и введения L_p-пространств

Во второй главе – “Пространства Аренса” – на основе работ [10,34] рассматриваются и конкретизируются случаи построения пространств Аренса по состоянию и весу. Также на основе доказанной теоремы в работе [10] рассматривается условие для того, чтобы пространства Аренса было алгеброй для случая $\alpha=1$. На основе доказанного приводится авторское доказательство теоремы для случая $\alpha=0$.

В третьей главе – “Интегрирование на йордановых алгебрах ” – на основе анализа изученной литературы рассматривается построение йордановых алгебр. Подробно рассматриваются и разбираются примеры из данного раздела.

Заключение работы посвящено выводам по теме исследования.

ГЛАВА I. ПОСТРОЕНИЕ L_p – ПРОСТРАНСТВ НА АЛГЕБРАХ ФОН НЕЙМАНА

1. Предварительные сведения из теории алгебр фон Неймана и общей теории линейных операторов в гильбертовом пространстве

Пусть H- гильбертово пространство и B(H)-C*-алгебра всех ограниченных линейных операторов , действующих в H. Для каждого $\varepsilon \in$ H определим полунорму

$\rho_\varepsilon(T) = \|T\varepsilon\|_{H,} T \in B(H)$.

Локально выпуклая топология на B(H) порожденная семейством полунорм $\{\rho_\varepsilon\}_{\varepsilon\in H}$, называется сильной топологией (или (S_0) –топологией) на B(H). Данная топология является хаусдорфовой, и сеть

$$(T_\alpha)_{\alpha\in\Lambda} \subseteq B(H)$$

(S_0)- сходится к оператору T∈B(H) тогда и только тогда, когда

$\|T_\alpha(\varepsilon) - T(\varepsilon)\|_H \to 0, \;\; \forall\varepsilon \in H.$

(S_0) -топология слабее равномерной топологии на B(H), порожденной нормой $\|\cdot\|_{B(H)}$.

Относительно (S_0) - топологии B(H)- является топологическим векторным пространством, т.е. операции сложения и умножения на скаляр являются непрерывными.

Определим еще одну локально выпуклую хаусдорфову топологию на B(H), определяющая следующей системой полунорм

$\rho\{\varepsilon_i\},\{\eta_i\}(T) = |\sum_{i=1}^{\infty}(T\varepsilon_{i,}\eta_i)|$,

где $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^{\infty}, \{\eta_i\}_{i=1}^{\infty} \subset H$ удовлетворяет условиям

$$\sum_{i=1}^{\infty}\|\varepsilon_i\|_H^2 < \infty \; u \; \sum_{i=1}^{\infty}\|\eta_i\|_H^2 < \infty \;.$$

Эта топология является ультраслабой (операторной) топологией (или (ω)-топологией).

Ультраслабая операторная топология слабее, чем равномерная топология на B(H). На ограниченных подмножествах из B(H) ультраслабая топология совпадает со слабой операторной топологией.

Пусть M -произвольное подмножество в B(H). Через M' обозначим коммутант M, т.е.

$$M' = \{S \in B(H): TS = ST \ \ \forall \ T \in M\}.$$

Отсюда вытекает , что бикоммутант $M'' = (M')'$ содержит M и M' является унитарной [5]подалгеброй в B(H).

Определение 1.1. *-подалгебра $M \subseteq B(H)$ называется алгеброй фон Неймана , если $M = M''$.

В этом случае алгебра фон Неймана M действует в H. Так как M''-замкнутое подмножество B(H) в равномерной топологии , то алгебра фон Неймана M является C*-алгеброй . Норму оператора T алгебры фон Неймана обозначим через $\|T\|_M$.

Теорема 1.2. Пусть M –унитарная *-алгебра в B(H)и пусть M_1-единичный шар в M, тогда следующие условия эквивалентны:

1) $M = M''$
2) M - замкнута в сильной операторной топологии
3) M - замкнуто в слабой операторной топологии
4) M - замкнуто в ультраслабой операторной топологии
5) M_1- замкнута в сильной операторной топологии
6) M_1-замкнута в слабой операторной топологии
7) M_1-замкнута в ультраслабой операторной топологии

Простейшими примерами алгебр фон Неймана являются алгебра B(H) и алгебра $\mathbb{C}_H = \{\lambda 1 : \lambda \in \mathbb{C}\}$ всех скалярных кратных единичного элемента 1 в B(H).

---

[5] -алгебра A называется унитарной , если она имеет мультипликативную единицу (единичный элемент)

Подмножество M⊆B(H), называется самосопряженным, если из T∈M следует T*∈ M.

Если M- самосопряженное подмножество , то $M' = M''$, и поэтому M' является алгеброй фон Неймана.

Если M - алгебра фон Неймана , то множество

Z(M)={ $T \in M : TS = ST \, \forall \; S \; \in M$}

называется центром M.

Из определения видно, что

$$Z(M) = M \cap M' = M'' \cap M' = Z(M')$$

и Z(M)- коммутативная алгебра фон Неймана.

Если Z(M)=$\mathbb{C}_H$, то алгебра фон Неймана M называется фактором. Также можно показать, что $(B(H))'$=$\mathbb{C}_H$. таким образом получается, что B(H)-фактор.

Для произвольного семейства гильбертовых пространств $\{H_i\}_{i\in I}$определим гильбертову сумму

$$H = \sum_{i\in I} H_i.$$

как множество

$$\left\{\{\varepsilon_i\}_{i\in I} : \varepsilon_i \in H_i \;\; \forall \, i \in I, \sum_{i\in I} \|\varepsilon_i\|^2 < \infty\right\},$$

алгебраические операции в котором определяются покоординатно , а скалярное произведение задается равенством

$$(\{\varepsilon_i\}_{i\in I,}\{\eta_i\}_{i\in I}) = \sum_{i\in I} (\varepsilon_i, \eta_i)_{H_i}$$

Пусть M_i - алгебры фон Неймана , действующие в гильбертовых пространствах H_i , соответственно $i \in I$. Для каждого элемента $\{T_i\}_{i\in I}$ из C*- произведения

$$C^* = \prod_{i\in I} M_i$$

определим оператор T в

$$H=\sum_{i\in I} H_i$$

следующим равенством

$$T=(\{\varepsilon_i\}_{i\in I,})=\{T_{i,}\varepsilon_i\}_{i\in I}.$$

Множество всех таких операторов Т, действующих в гильбертовой сумме

$$H=\sum_{i\in I} H_i,$$

образует алгебру фон Неймана , которая называется С*-произведениемалгебр фон Неймана M_i , $i\in I$ и обозначается через

$$M=C^*-\prod_{i\in I} M_i.$$

Если множество индексов I - конечно, то C^*-произведение алгебр фон Неймана может быть записано в виде

$$M_1+M_2+\cdots+M_n=\sum_{i\in I}^{n} M_i.$$

Пусть М- алгебра фон Неймана , действующая в гильбертовом пространстве Н, и пусть М*- сопряженное к нему пространство (т.е. банахово пространство всех непрерывных , относительно линейной топологии (равномерной топологии)линейных функционалов на М).

Через обозначим множество всех (ω)-непрерывных линейных функционалов на М. Непосредственно из определения следует , что M_*является линейным подпространством в М*.

Теорема 1.3.

1) Подпространство M_*- замкнуто по норме вМ* и

$$(M_*^*)^*=M$$

Относительно канонической билинейной формы

$$\langle f,T\rangle=f(T),f\in M_*,T\in M;$$

более того ,$\sigma(M,M_*)$- топология в М совпадает с ультраслабой операторной топологией;

2) Если f- положительный линейный функционал на M , то $f \in M_*$тогда и только тогда, когда для каждой сети $T_\alpha \uparrow T,\quad T_\alpha, T \in M_n$, следует ,что $f(T_\alpha) \uparrow f(T)$ (в этом случае, функционал f называется нормальным положительным линейным функционалом);

3) Каждый линейный функционал $f \in M_*$ есть линейная комбинация нормированных положительных линейных функционалов.

В следующей теореме приводится характеризация множества всех (ω_0)- непрерывных линейных функционалов на M.

Пусть P(M)- множество всех проекторов алгебры фон Неймана. Данное множество является полной структурой с ортодополнением относительно частичного порядка , индуцированного из M_n, в которой нулем является нулевой проектор 0, единицей тождественный оператор 1, а ортодополнением проектора P проектор $P^\perp = 1 - P$.

Алгебра фон Неймана называется :

- атомической , если для любого ненулевого проектора E ∈ P(M) существует такой минимальный проектор P∈P(M), что P≤E;

- конечной, если 1-конечный проектор;

- полуконечной, если для любого центрального проектора [6] Z ∈ M, существует такой ненулевой конечный проектор E∈P(M), что E≤Z;

- типа I, если для любого центрального проектора Z∈M существует такой ненулевой абелев проектор[7] E∈P(M), что E≤Z;

- типа II, если M-полуконечная алгебра , не содержащая ненулевых абелевых проекторов;

-типа III, если M- не содержит ненулевых конечных проекторов ;

-типа $\mathrm{I_{fin}}$, если M- конечная алгебра типа I;

- типа $\mathrm{II_1}$, если M – конечная алгебра типа II;

- дискретной , если M- типа I;

---

[6] -z(T)= $\inf\{Z \in P(Z(M)) : ZT = T\}$

[7] Проектор E называется абелевым, если редуцированная алгебра EME- коммутативна

- непрерывной , если М-типа II или III;

-собственно бесконечной , если 1-собственно бесконечный проектор;

-чистобесконечной, если М- типа III.

Далее введем понятие веса, следа и состояния на алгебрах фон Неймана для их дальнейшего применения и использования в диссертации.

Положительный линейный функционал φ называется весом на М, если:

1) $\varphi(x+y)=\varphi(x)+\varphi(y)$;
2) $\varphi(\lambda x)=\lambda\varphi(x)$;
3) $\varphi(x)\geq 0, \forall x>0$.

Вес называется

- точным, если $\varphi(x)=0, при\ x=0$;

- конечным, если $\varphi(\mathbb{1})<\infty$;

- состоянием , при $\varphi(\mathbb{1})=1$;

- следом , если $\varphi(x^*x)=\varphi(xx^*)\ \ \forall\ x\in M$.

Пусть μ-точный нормальный полуконечный след на алгебре фон Неймана M. В силу теоремы Радона-Никодима имеем, что для любого нормального состояния φ на М, существует положительный интегрируемый оператор h, присоединенный к М, такой что:

$$\varphi(x)=(x)\ \ \forall\ x\in M_+, где\ \mu(hx)=\lim_{\varepsilon\to 0}\mu\left(h_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\,x\,h_\varepsilon^{\frac{1}{2}}\right)=h(\mathbb{1}+\varepsilon h)^{-1}, \varepsilon>0$$

И наоборот , любой положительный интегрируемый оператор, присоединенный к М определяет состояние на М в выше указанном смысле.

Оператор h обозначается через $\frac{d\varphi}{d\mu}$ и носит название производной Радона-Никодима состояния φ по следу μ.

Определение 1.4 . Нормальный полуконечный вес φ, определенный на алгебре фон Неймана с точным нормальным конечным следом μ:

-конечен, тогда и только тогда , когда $\mu(h)<\infty$;

- является состоянием, если $\mu(h) = 1$;

- точен тогда и только тогда, когда h^{-1} локально измеримый оператор;

- является следом тогда и только тогда, когда h присоединен к центру M.

Введем еще одно определение на алгебре фон Неймана M.

Функционал $\tau : M_+ \to [0, \infty)$ называется следом на M, если:

1) $\tau(T + S) = \tau(T) + \tau(S),\ \forall\, S, T \in M_+$;

2) $\tau(\lambda T) = \lambda\tau(T),\ \forall\ T \in M_+\ и\ \lambda \geq 0$;

3) $\tau(v^*Tv) = \tau(T)\ \ \forall\ T \in M_+\ \ и\ v \in U(M)$.

След τ называется:

-конечным , если $\tau(T) < \infty,\ \forall\ T \in M_+$;

- полуконечным, если $\tau(T) = \sup\{\, \tau(S) : S \leq T, \tau(S) < \infty\},\ \forall\ T \in M_+;$

- точным, если из $\tau(T)$=0, $T \in M_+$,следует, что T=0;

- нормальным, если из условия $T_\alpha \uparrow T,\ \ T_\alpha, T \in M_+$ следует, что $\tau(T_\alpha) \uparrow \tau(T)$[8].

[8] - Takesaki M. Theory of operator algebras. I. New-York Heidelberg Berlin: springer, 1979, XII ,415 p

2. Определение некоммутативного L_1 – пространства измеримых операторов , присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана по следу τ

Пусть M - полуконечная алгебра фон Неймана , τ – точный нормальный полуконечный след на M, S(M, τ)-*-алгебра всех τ –измеримых операторов, присоединенных к M.

Определение1.5. Оператор $T \in S(\mathrm{M}, \tau)$ называется τ – интегрируемым, если $\tau(|T|) < \infty$. Обозначим множество всех τ – интегрируемых операторов из $\mathrm{S(M}, \tau)$ через $\mathrm{L_1(M}, \tau)$ и для каждого T∈ $\mathrm{L_1(M}, \tau)$ положим :

$$\|T\| = \tau(|T|).$$

Теорема 1.6.

А) $\mathrm{L_1(M}, \tau)$ – линейное подпространство в $\mathrm{S(M}, \tau)$ и $\|\cdot\|_1$ –норма на $\mathrm{L_1(M}, \tau)$;

Б) Для любых операторов A,B∈ M и T∈ $\mathrm{L_1(M}, \tau)$-верны соотношения : ATB∈ $\mathrm{L_1(M}, \tau$)и $\|ATB\|_1 \leq \|A\|_M \|B\|_M \|T\|_1$;

В) Если T∈ $\mathrm{L_1(M}, \tau)$,то T*∈ $\mathrm{L_1(M}, \tau)$ и $\|T^*\|_1 = \|T\|_1$;

Г) Если T∈ $\mathrm{L_1(M}, \tau)$,S∈ $\mathrm{S(M}, \tau)$ и S<T , то S∈ $\mathrm{L_1(M}, \tau)$и $\|S\|_1 = \|T\|_1$;

Д) Если $\{\mathrm{T}_n\}_{n=1}^{\infty}$, T∈ $\mathrm{L_1(M}, \tau)$и

$\|\mathrm{T}_n - \mathrm{T}\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$, то $\mathrm{T}_n \to \mathrm{T}$ при $n \to \infty$.

Доказательство.

а) Пусть T,S∈ $\mathrm{L_1(M}, \tau)$. Согласно следствию 7 из [25] имеем:

$$\tau(|\mathrm{T} + S|) \leq \tau(|\mathrm{T}|) + \tau(|S|) < \infty.$$

это означает, что (T+S) $\in \mathrm{L_1(M}, \tau)$ и

$$\|\mathrm{T} + S\|_1 \leq \|\mathrm{T}\|_1 + \|S\|_1.$$

Если $\alpha \in \mathbb{C}$, то $\tau(|\alpha \mathrm{T}|) = |\alpha| \tau(\mathrm{T}) < \infty$, то есть $\alpha \mathrm{T} \in \mathrm{L_1(M}, \tau)$ и

$$\|\alpha \mathrm{T}\|_1 = |\alpha| \|\mathrm{T}\|_1$$

Следовательно $L_1(M,\tau)$ - линейное подпространство в $S \in S(M,\tau)$. Ясно, что $\|T\|_1 \geq 0$и если $\tau(|T|) = \|T\|_1 = 0$, то в силу точности следа τ имеем , что|T|=0, то есть T=0. Таким образом$\|\cdot\|$ есть норма на $L_1(M,\tau)$.

Б) Пусть A,B∈M, T∈ $L_1(M,\tau)$. Согласно предположению 7 (i) из [13] имеем, что

$$\mu(ATB)(t) \leq \|A\|_\mu \|B\|_\mu \mu(T)(t) \qquad \forall t > 0.$$

Поэтому

$$\tau(|ATB|) = \int_0^\infty \mu(ATB)(S)dS \leq \|A\|_\mu \|B\|_\mu \int_0^\infty \mu(T)(S)dS =$$

$$= \tau(|T|) < \infty,$$

то есть ATB∈ $L_1(M,\tau)$и

$$\|ATB\|_1 \leq \|A\|_\mu \|B\|_\mu \|T\|_1.$$

В) Из предложения 7 имеем, что

$$\mu(|T^*|)(t) = \mu(T^*)(t) = \mu(T)(t) = \mu(|T|)(t) \quad \forall\, t > 0.$$

Поэтому , дляT∈ $L_1(M,\tau)$имеем, что $T^* \in L_1(M,\tau)$ и

||T*||$_1$=||T||$_1$.

г) Пусть T∈ $L_1(M,\tau)$, S∈ $S(M,\tau)$и $S < T$, т.е.

$$\int_0^t \mu(T)(S)dS \leq \int_0^t \mu(S)(S)dS \leq \lim_{t\to\infty} \int_0^t \mu(T)(S)dS = \tau(|T|) < \infty,$$

т.е. S∈ $L_1(M,\tau)$и

||S||$_1$≤||T||$_1$.

Д) Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, T∈ $L_1(M,\tau)$и $\|T_n - T\|_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Для фиксированного $\varepsilon > 0$ имеем , что

$$|T_n - T| \geq |T_n - T| E_{(\varepsilon,\infty)}(|T_n - T|) \geq \varepsilon E_{(\varepsilon,\infty)}(|T_n - T|).$$

Поэтому

$$\tau\left(E_{(\varepsilon,\infty)}(|T_n - T|)\right) \leq \frac{1}{\varepsilon}\tau(|T_n - T|) = \frac{1}{\varepsilon}\|T_n - T\|_1 \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно , для любого $\delta > 0$ найдется такое $n(\varepsilon,\delta)$, что при

$$n \geq n(\varepsilon,)$$

$$\mathrm{T}\left(\mathrm{E}_{(\varepsilon,\infty)}(|\mathrm{T}_n-\mathrm{T}|)\right)<\delta.$$

Поскольку $0\le|\mathrm{T}_n-\mathrm{T}|\left(I-\mathrm{E}_{(\varepsilon,\infty)}(|\mathrm{T}_n-\mathrm{T}|)\right)\le\varepsilon$, то

$$\left\||\mathrm{T}_n-\mathrm{T}|\left(I-\mathrm{E}_{(\varepsilon,\infty)}(|\mathrm{T}_n-\mathrm{T}|)\right)\right\|\le\varepsilon$$ [9]

и поэтому$\mathrm{T}_n\to\mathrm{T}$ при $n\to\infty$.

Пусть $\mathrm{T}\in\mathrm{L}_1(\mathrm{M},\tau)$. Тогда существуют такие изометрии-частичные изометрии V_1 ,V_2 ,V_3 , $V_4\in$ M,что

$$(ReT)_+\le V_1|\mathrm{T}|V_1^*$$
$$(ReT)_-\le V_2|\mathrm{T}|V_2^*$$
$$(ImT)_+\le V_3|\mathrm{T}|V_3^*$$
$$(ImT)_-\le V_4|\mathrm{T}|V_4^*.$$

Следовательно ,

$$\tau((ReT)_+)=\int_0^\infty\mu((ReT)_+)(t)dt\le\int_0^\infty\mu(V_1|\mathrm{T}|V_1^*)(t)dt\le\int_0^\infty\mu(|\mathrm{T}|)(t)dt=$$
$$=\tau(|\mathrm{T}|)<\infty,$$

то сеть $(ReT)_+\in\mathrm{L}_1(\mathrm{M},\tau)$. Аналогично, $(ReT)_-$, $(ImT)_+,(ImT)_-\in\mathrm{L}_1(\mathrm{M},\tau)$.

Поэтому определено число

$\tilde{\tau}(\mathrm{T})=\tau((ReT)_+)-\tau((ReT)_-)+i\tau((ImT)_+)-i\tau((ImT)_-)$.

Определение 1.7. Число $\tilde{\tau}(\mathrm{T})$ называется интегралом оператора $\mathrm{T}\in\mathrm{L}_1(\mathrm{M},\tau)$ по следу τ.

Ясно, что для $\mathrm{T}\in\mathrm{L}_1^+(\mathrm{M},\tau)=\{\mathrm{S}\in\mathrm{L}_1(\mathrm{M},\tau):S\ge0\}$интеграл$\tilde{\tau}(\mathrm{T})$ совпадает с $\tau(\mathrm{T})$.

Предположение 1.8. Если $\mathrm{T}\in\mathrm{L}_1(\mathrm{M},\tau)$, $\mathrm{T}=S_1-S_2$, где $S_1,S_2\in\mathrm{L}_1^+(\mathrm{M},\tau)$, то

$$\tilde{\tau}(\mathrm{T})=\tau(S_1)-\tau(S_2);$$

---

[9] -МуратовМ.А.,ЧилинВ.И.,К вопросу об определении некоммутативного пространства L1(M,t) измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана,Динамические системы 2007

τ −линейный функционал на $L_1(M,\tau)$.

Доказательство.

Так как $T=(ReT)_+-(ReT)_-=S_1-S_2$, то

$(ReT)_++S_2=(ReT)_-+S_1$.

Согласно предположению 9 из[10] [13], имеем, что

$$\tau((ReT)_+)+\tau(S_2)==\tau((ReT)_--S_1)=\tau((ReT)_-)+\tau(S_1).$$

Следовательно,

$$\tau(S_1)-\tau(S_2)=\tau((ReT)_+)-\tau((ReT)_-)=\tilde{\tau}(T).$$

Докажем теперь, вторую часть предположения.

Пусть $T,S\in L_1(M,\tau)$, T*=T и S*=S. Тогда

$$T+S=((ReT)_++(ReS)_+)-((ReT)_-+(ReS)_-).$$

Из первой части предположения следует, что

$$\tilde{\tau}(T+S)=\tau((ReT)_++(ReS)_+)-\tau((ReT)_-+(ReS)_-)=\tilde{\tau}(T)+\tilde{\tau}(S).$$

Пусть теперь T,S- произвольные операторы из $L_1(M,\tau)$. Тогда

$$T+S=(ReT+ReS)+i(ImT+ImS),$$

и поэтому

$$\tilde{\tau}(T+S)=\tau(ReT+ReS)+i\tilde{\tau}(ImT+ImS)=\tilde{\tau}(T)+\widetilde{\tau}(S).$$

Аналогично проверяем равенство

$$\tilde{\tau}(\alpha T)=\alpha\tilde{\tau}(T)$$

для любого $\alpha=a+ib\in\mathbb{C},\quad a,b\in\mathbb{R}$

Теорема 1.9 . Нормированное пространство $(L_1(M,\tau),\|\cdot\|_1)$- полно.

Доказательство.

Доказательство данной теоремы разбивается на несколько этапов

1) Пусть $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ - последовательность Коши в $(L_1(M,\tau),\|\cdot\|_1)$ и $0\le T_n\le T_{n+1}$, где $n=1,2,\ldots$. Покажем, что существует такой оператор $T\in L_1(M,\tau)$, что $T_n\uparrow T$ и

$$\|T-T_n\|_1\to 0,\text{при } n\to\infty.$$

[10] - Pedersen G.K., Takesaki M. The Radon-Nicidym theorem for von Neumann algebras. Acta.Math. 1973, v. 130, № 1-2, p.57-87

Поскольку $\|T_k - T_n\|_1 \to 0$, при $n, k \to \infty$, то согласно теореме 6 (V)[11] [20], последовательность $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$, есть последовательность Коши в $(S(M,\tau), t_\tau)$.

Так как $(S(M,\tau), t_\tau)$ – полное топологическое пространство (векторное) [25 теорема 3] , то существует такой оператор $T \in S(M,\tau)$, что

$$T_n \overset{t_\tau}{\rightarrow} T \text{ при } n \to \infty.$$

В силу предложения 4 и 12 из [25] имеем , что

$T_n \uparrow T$ и $\mu(T_n)(t) \to \mu(T)(t)$ при $n \to \infty$ почти для всех $t > 0$.

Покажем, что $T \in L_1(M,\tau)$. Действительно из [21 теорема 3,4] следует, что

$$\int_0^{\infty} |\mu(T_n)(t) - \mu(T)(t)| dt \le \|T_n - T\|_1.$$

Это означает, что последовательность функций $\{\mu(T_n)(t)\}_{n=1}^{\infty}$, есть последовательность Коши в банаховом пространстве $L_1((0,\infty), m)$, где m –бесконечная мера Лебега на полупрямой $(0,\infty)$. Поэтому существует такая функция $f \in L_1((0,\infty), m)$, что

$$\|\mu(T_n) - f\|_{L_1((0,\infty),m)} \to 0$$

Поскольку $\mu(T_n)(t) \to \mu(T)(t)$ при $n \to \infty$ почти для всех $t > 0$, то $\mu(T)(t) = f(t)$ почти всюду, то есть

$$\int_0^{\infty} |\mu(T)|(t) dt < \infty, \text{или } T \in L_1(M,\tau).$$

Покажем теперь, что

$$\|T - T_n\|_1 \to 0, \text{при } n \to \infty.$$

Переходя к подпоследовательности, можно считать, что

$$\|T_{n+1} - T_n\| \le \frac{1}{n^3}, n = 1,2.$$

Положим

[11] - Абдуллаев Р.З. Классификация σ –конечных алгебр Аренса типа I. Доклады АН Уз 1999, № 1

$$S_n = \mathrm{T}_1 + \sum_{k=1}^{n} k(\mathrm{T}_{k+1} - \mathrm{T}_k).$$

$\{S_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathrm{L}_1(\mathrm{M},\tau)$, $0 \leq S_n \leq S_{n+1}$ и если $n < m$, то

$$\|S_m - S_n\|_1 = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} k(\mathrm{T}_{k+1} - \mathrm{T}_k) \right\|_1 \leq \sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{k^2} \to 0 \text{ при } n, m \to \infty.$$

Следовательно, $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность Коши в $\mathrm{L}_1(\mathrm{M},\tau)$ и в силу доказанного выше , найдется такой оператор $\mathrm{S} \in \mathrm{L}_1(\mathrm{M},\tau)$, что $S_n \uparrow S$.

Далее , для каждого $n = 1,2,\ldots$ имеем :

$$n(\mathrm{T} - \mathrm{T}_n) = n(\sup(\mathrm{T}_m - \mathrm{T}_n)) = n(\sup \mathrm{T}_m - \mathrm{T}_n)$$

$$= n\left(\sup \sum_{k=n}^{m-1} (\mathrm{T}_{k+1} - \mathrm{T}_k)\right) =$$

$$= \sup\left(\sum_{k=n}^{m-1} n\,(\mathrm{T}_{k+1} - \mathrm{T}_k)\right) \leq \sup \sum_{k=n}^{m-1} k\,(\mathrm{T}_{k+1} - \mathrm{T}_k) \leq S.$$

Поэтому

$$0 \leq \mathrm{T} - \mathrm{T}_n \leq \frac{S}{n},$$

откуда следует , что

$$\|\mathrm{T} - \mathrm{T}_n\|_1 \leq \frac{1}{n}\|S\|_1,$$

т.е.

$$\|\mathrm{T} - \mathrm{T}_n\|_1 \to 0, \text{при } n \to \infty.$$

2) Пусть $\{\mathrm{T}_n\}_{n=1}^{\infty}$, есть последовательность Коши в $(\mathrm{L}_1(\mathrm{M},\tau), \|\cdot\|_1)$ и $\mathrm{T}_n = \mathrm{T}_n^*$, где $n = 1,2,\ldots$.

Покажем, что существует такой оператор $\mathrm{T} \in \mathrm{L}_1(\mathrm{M},\tau)$, что

$$\|\mathrm{T} - \mathrm{T}_n\|_1 \to 0, \text{при } n \to \infty.$$

Переходя к подпоследовательности можно считать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n\|_1 < \infty.$$

Положим, что

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{T}_{k+1} - \mathrm{T}_k)_+$$

$$L_n = \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{T}_{k+1} - \mathrm{T}_k)_-.$$

Тогда $0 \leq S_n \leq S_{n+1},\ 0 \leq L_n \leq L_{n+1},\ S_n, L_n \in \mathrm{L}_1(\mathrm{M}, \tau), n = 1,2, \dots$.

Если $n \leq m$,то

$$\|S_m - S_n\|_1 = \left\| \sum_{k=n+1}^{m-1} (\mathrm{T}_{k+1} - \mathrm{T}_k)_+ \right\|_1 \leq$$

$$\leq \sum_{k=n+1}^{m-1} \left\|(\mathrm{T}_{k+1} - \mathrm{T}_k)_-\right\|_1 \leq \sum_{k=n+1}^{m-1} \left\|(\mathrm{T}_{k+1} - \mathrm{T}_k)_+\right\|_1 \to 0, \qquad n \to \infty.$$

Следовательно , $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ последовательность Коши в$\mathrm{L}_1(\mathrm{M}, \tau)$.Согласно первому доказательству существует такой оператор $S \in \mathrm{L}_1(\mathrm{M}, \tau), S \geq 0$, что

$$\|S - S_n\|_1 \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Аналогично найдется такой оператор $L \in \mathrm{L}_1(\mathrm{M}, \tau), S \geq 0,$ что

$$\|L - L_n\|_1 \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \|(S_n - L_n) - (S - L)\|_1 = 0.$$

С другой стороны

$$S_n - L_n = \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{T}_{k+1} - \mathrm{T}_k) = \mathrm{T}_{n+1} - \mathrm{T}_n.$$

Следовательно , $\mathrm{T}_n \to (S - L + \mathrm{T}_1) = \mathrm{T} \in \mathrm{L}_1(\mathrm{M}, \tau)$ по норме $\|\cdot\|_1$ при $n \to \infty$.

3) Пусть $\{\mathrm{T}_n\}_{n=1}^{\infty}$ произвольная последовательность Коши в $(\mathrm{L}_1(\mathrm{M}, \tau), \|\cdot\|_1)$.

Поскольку$\|\mathrm{T}_n^*\|_1 = \|\mathrm{T}_n\|_1$, то $\{\mathrm{T}_n\}_{n=1}^{\infty}$тоже последовательность Коши в ($\mathrm{L}_1(\mathrm{M}, \tau)$, $\|\cdot\|_1$).Следовательно , последовательности $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{L_n\}_{n=1}^{\infty}$, задаваемые равенствами:

$$S_n = Re\mathrm{T}_n = \frac{\mathrm{T}_n + \mathrm{T}_n^*}{2} \quad \text{и}$$

$$L_n = Im\,\mathrm{T}_n = \frac{\mathrm{T}_n - \mathrm{T}_n^*}{2i}$$

есть последовательности Коши самосопряженных операторов из$(\mathrm{L}_1(\mathrm{M}, \tau), \|\cdot\|_1)$.С

Согласно второму доказательству, найдутся такие операторы $S, L \in \mathrm{L}_1(\mathrm{M}, \tau)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|S - S_n\|_1 = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \|L - L_n\|_1 = 0.$$

Но тогда

$$S + iL = \mathrm{T} \in \mathrm{L}_1(\mathrm{M}, \tau) \text{ и}$$

$$\|\mathrm{T} - \mathrm{T}_n\|_1 = \|(S + iL) - (S_n + iL_n)\|_1 \to 0 \quad n \to \infty.$$

Таким образом, пространство L_1является некоммутативным и полным пространством.

3. Построение $\mathrm{L_p}$ – пространства на алгебрах фон Неймана по следу

Пусть S(M) - алгебра измеримых операторов , присоединенных к алгебре фон Неймана M и τ –точный нормальный полуконечный след на M. Тогда определим некоммутативное $\mathrm{L_p}$ - пространство следующим образом:

$$\mathrm{L_p}(\mathrm{M},\tau) = \{x \in S(\mathrm{M}) \colon |x|^p \in \mathrm{L_1}(\mathrm{M},\tau)\}\ ,\ \ p \in [1,\infty).$$

Это пространство полно относительно нормы

$$\|x\|_p^\tau = (\tau(|x|^p))^{\frac{1}{p}}\ ,\quad x \in \mathrm{L_p}(\mathrm{M},\tau),$$

которая называется $\mathrm{L_p}$- нормой элемента x. Сопряженное к пространству $\mathrm{L_p}(\mathrm{M},\tau)$изометрически изоморфно пространству $\mathrm{L_q}(\mathrm{M},\tau)$, где $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

Пусть φ- нормальный полуконечный вес на M и самосопряженный оператор $h \geq 0$, присоединённый к M , является «производной » по (т.е. $\varphi = \tau(h\,\cdot)$[12]). Такой вес называется локально измеримым, если $h \in L(M)$.

Определение локально измеримого веса φ корректно , т.е. не зависит от выбора следа τ на M. Действительно, пусть $\varphi = \tau_1(h_1\,\cdot)$, где $\tau_1 -$ еще один точный нормальный полуконечный след на M. Тогда $h_1 = h \cdot k$, где $k \geq 0$- самосопряженный несингулярный оператор в H, присоединенный к центру M, такой , что $\tau = \tau_1(k\,\cdot)$, где $k \in L(M)$. Таким образом, если $h \in L(M)$, то оператор h_1 локально измерим, как сильное произведение локально измеримых операторов.

Определение1.10. Для каждого $1 \leq p \leq \infty$ и $0 \leq \alpha \leq 1$ обозначим через $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$линеал операторов из M:

$$\mathfrak{m}_\alpha^{\frac{1}{p}} = \left\{x \in M \mid h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}} \in L_p(M,\tau)\right\} =$$

$$= \left\{x \in M \mid\ \tau\left(\left|h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}}\right|^p\right) < \infty\right\}$$

---

[12]- условимся в дальнейшем значком «$\cdot$» обозначать сильное произведение операторов

и положим

$$\|x\|_{p,\alpha} = \tau\left(\left| h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}} \right|^p\right)^{1/p} \quad \text{для} \quad x \in \mathfrak{m}_\alpha^{1/p}.$$

Теорема1.11. Линеал $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$ не зависит от выбора следа τ и функция $x \to \|x\|_{p,\alpha}$ является нормой на $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$, также не зависящей от τ.

Доказательство. Пусть τ_1- еще один нормальный полуконечный след на М, $\varphi = \tau_1(h_1 \cdot)$, $\tau = \tau_1(k \cdot)$и $h_1 = h \cdot k$. Тогда для каждого $x \in M$в силу перестановочности оператора k с h, h_1и x имеем:

$$\left|h_1^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h_1^{\frac{1-\alpha}{p}}\right|^p = k \cdot \left| h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}}\right|^p.$$

Положим $k_\varepsilon = k(1+\varepsilon k)^{-1}$ для каждого $\varepsilon > 0$. В силу перестановочности операторов k и $\left| h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}}\right|^p$ сеть $k_\varepsilon \cdot \left| h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}}\right|^p$ возрастает к оператору $k \cdot \left| h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}}\right|^p$ при $\varepsilon \to 0$. Тогда в силу [10 предложение 4.2] следует, что

$$\tau\left(\left| h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}}\right|^p\right) = \sup \tau_1\left(k_\varepsilon \cdot \left| h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}}\right|^p\right) =$$

$$= \tau_1\left(\left|h_1^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h_1^{\frac{1-\alpha}{p}}\right|^p\right),$$

откуда следует независимость линеала$\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$и функции$x \to \|x\|_{p,\alpha}$ от выбора следа τ. То , что $\|\cdot\|_{p,\alpha}$- преднорма на $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$, следует из линейности отображения $x \to h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}}$ ($x \in \mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$) с учетом того, что $\|\cdot\|_p^\tau = \tau(|\cdot|^p)^{1/p}$ - норма на $L_p(M,\tau)$. В силу точности веса φ оператор h - несингуляерен , так что равенство $\|x\|_{p,\alpha}$=0 ($x \in \mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$) , равносильно условию $h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}} = 0$, имеет место только для $x = 0$.Теорема доказана.

Определение1.12. Для каждого $1 \leq p \leq \infty$ и $0 \leq \alpha \leq 1$ будем через $\mathrm{L}_{\mathrm{p},\alpha}(M,\varphi)$ обозначать банахово пространство , являющееся пополнением $\mathfrak{m}_{\alpha}^{1/p}$по норме $\|\cdot\|_{p,\alpha}$.

Теорема1.13. Пусть $1 \leq p \leq \infty$. Для каждого $0 \leq \alpha \leq 1$ банахово пространство $\mathrm{L}_{\mathrm{p},\alpha}(M,\varphi)$ изометрически изоморфно банахову пространству $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(M,\tau)$.

Доказательство. Рассмотрим линейную изометрию

$$\mathfrak{m}_{\alpha}^{1/p} \ni x \to h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}} \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\tau)$$

и проверим, что $h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot \mathfrak{m}_{\alpha}^{1/p} \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}}$ (образ $\mathfrak{m}_{\alpha}^{1/p}$ при этом отображении) плотен в $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(M,\tau)$. Пусть $h = \int_0^{\infty} \lambda de(\lambda)$ $-$спектральное представление оператора hи $e_n = \int_{1/n}^{n} de(\lambda)$ $(n = 1,2,\ldots)$. Введем множество

$$\mathfrak{m} = \bigcup_{m,n=1}^{\infty} e_m \mathfrak{m}_{\tau} e_n,$$

где $\mathfrak{m}_{\tau} = \{x \in M \mid \tau(|x|) < \infty\}$. Легко видеть, что $\mathfrak{m}$- * подалгебра ,ультраслабо плотная в M, при чем $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_{\tau}$[13].Ясно, что $\mathfrak{m}_{\tau} \subset \mathrm{L}_{\mathrm{p}}(M,\tau)$ для каждого $1 \leq p \leq \infty$.Таким образом, для завершения доказательства достаточно установить, что

а) $\mathfrak{m}$ плотно в $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(\tau)$ $(1 \leq p \leq \infty$);

б) для каждого $1 \leq p \leq \infty$,$0 \leq \alpha \leq 1$ имеет место включение

$\mathfrak{m} \subset h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot \mathfrak{m}_{\alpha}^{1/p} \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}}$.

Для проверки (а) воспользуемся известным отождествлением $\mathrm{L}_{\mathrm{p}}(M,\tau)^* = \mathrm{L}_{q}(M,\tau)$, ($1/p + 1/q = 1$), осуществляемым с помощью формулы $\{x,y\} \to \tau(x \cdot y), x \in \mathrm{L}_{\mathrm{p}}(M,\tau)$ и $y \in \mathrm{L}_{q}(M,\tau)$. Допустим, что оператор $z \in \mathrm{L}_{q}(M,\tau)$ таков, что для всех $x \in \mathfrak{m}_{\tau}$, $m,n = 1,2,\ldots$:

$\tau\big((e_m x e_n) \cdot z\big) = \tau(x \cdot e_n \cdot z e_m) = 0.$

[13] - $\mathfrak{m}_{\tau}$- *-идеал ,ультраслабо плотный в M

Поскольку $e_n \cdot ze_m \in L_q(M,\tau)$ и $\mathfrak{m}_\tau$ плотно в $L_p(M,\tau)$, то для всех $m,n = 1,2,\dots$ оператор $e_n \cdot ze_m$ =0. Учитывая , что $e_n \to 1$ при $n \to \infty$, получаем $ze_m = 0$, так что $0 = (ze_m)^* = e_m \cdot z$ для всех $m = 1,2,\dots$. Отсюда $z^* = 0$ и , следовательно $z = 0$. Таким образом , (а) доказано.

Проверим (б). В силу включения $\mathfrak{m} \subset \mathfrak{m}_\tau \subset L_p(M,\tau)$ достаточно убедиться в том, что для любого произвольного $x \in \mathfrak{m}_\tau$ и любой пары чисел $m,n = 1,2,\dots$ найдется оператор $y \in M$ такой, что

$$e_m x e_n = h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot y \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}}. \qquad (*)$$

Учитывая, что операторы $h^{-\frac{\alpha}{p}} e_m = (he_m)^{-\frac{\alpha}{p}}$ и $h^{\frac{1-\alpha}{p}} e_n = (heh)^{\frac{\alpha-1}{p}}$ ограничены и следовательно принадлежат M. Положим

$$y = h^{-\frac{\alpha}{p}} \cdot (e_m x e_n) \cdot h^{\frac{\alpha-1}{p}}.$$

Тогда (*) очевидно выполнено и (б) установлено. Теорема доказана.

4. Построение $\mathrm{L_p}$ – пространства на полуконечных алгебрах фон Неймана , ассоциированных с весом

В данном параграфе рассмотрим вопрос о содержательном описании пространств $\mathrm{L}_{\mathrm{p},\alpha}(M,\varphi)$, ()где φ –точный нормальный полуконечный вес.

Введем для каждого $1 \le p < \infty$, $0 \le \alpha \le 1$ линеал локально измеримых операторов

$$\mathrm{L}_{\mathrm{p},\alpha}(M,\varphi) = \left\{ x \in L(M) \middle| \ h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}} \in \mathrm{L_p}(M,\tau) \right\}$$

и положим

$$\|x\|_{p,\alpha} = \tau\left(\left| h^{\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}} \right|^p \right)^{1/p}, \qquad x \in \mathrm{L}_{\mathrm{p},\alpha}(M,\varphi) .$$

При этом $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p} \subset \mathrm{L}_{\mathrm{p},\alpha}(M,\varphi)$ и ограничение функции $x \to \|x\|_{p,\alpha}$ на $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$совпадает с нормой, введенной в [37].[14]

Теорема 1.14. Пусть $\varphi = \tau(h\,\cdot)$ –точный нормальный полуконечный вес на M такой, что операторы h и h^{-1} принадлежат $L(M)$. Тогда для всех $1 \le p \le \infty$, $0 \le \alpha \le 1$:

а) линеал $\mathrm{L}_{\mathrm{p},\alpha}(M,\varphi)$ не зависит от выбора следа τ и функция $x \to \|x\|_{p,\alpha}$- норма на $\mathrm{L}_{\mathrm{p},\alpha}(M,\varphi)$, также не зависит от τ;

б) пространство $\mathrm{L}_{\mathrm{p},\alpha}(M,\varphi)$ полно относительно нормы $\|\cdot\|_{p,\alpha}$и линеал $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$плотен в $\mathrm{L}_{\mathrm{p},\alpha}(M,\varphi)$.

Доказательство.

То обстоятельство, что $L(M)$ - является *-алгеброй относительно сильных алгебраических операций, позволяет для проверки (а) сослаться на доказательство теоремы [33].

Для проверки (б) заметим, что отображение $x \to\ h^{-\frac{\alpha}{p}} \cdot x \cdot h^{\frac{\alpha-1}{p}}$ является линейной изометрией $\mathrm{L_p}(M,\tau)$ на $\mathrm{L}_{\mathrm{p},\alpha}(M,\varphi)$, причем линеал $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$ есть

---

[14] - Трунов Н.В. О некоммутативном аналоге пространства $\mathrm{L_p}$.- Изв.ВУЗов. Матем, 1979,№11 , с. 69-77

образ плотного в $\mathrm{L_p}(M,\tau)$ линеала $h^{\frac{\alpha}{p}}\cdot x\cdot h^{\frac{1-\alpha}{p}}$. Таким образом, $\mathfrak{m}_\alpha^{1/p}$плотно в банаховом пространстве $\mathrm{L_{p,\alpha}}(M,\varphi)$и теорема доказана.

Следствие 1.15. Обозначим через $L^+(M)$- множество положительных самосопряженных операторов из $L(M)$и положим для каждого $x\in L^+(M)$: $\varphi(x)=\sup\varphi(x_\varepsilon)$ для $\varepsilon>0$, где $x_\varepsilon=x(1+\varepsilon x)^{-1}$. Тогда из условия выше приведенной теоремы имеем:

а) $L_{1,\frac{1}{2}}(M,\varphi)$ есть линейная оболочка конуса

$$L_1^+=\{x\in L^+(M)|\ \varphi(x)<\infty\}$$

и $\|x\|_{1,1/2}=\varphi(x)$для каждого $x\in L_1^+$;

б) $L_{2,0}(M,\varphi)=\{x\in L(M)|\ \varphi(x^*x)<\infty\}$и норма $\|x\|_{2,0}$ в $L_{2,0}(M,\varphi)$ индуцируется скалярным произведением

$$\{x,y\}=\tau\left(\left(h^{\frac{1}{2}}x\right)\cdot\left(h^{\frac{1}{2}}y\right)^*\right).$$

Таким образом, из выше приведенных результатов вытекает, что для конечной алгебры Неймана M и конечного веса φ пространство $L_{2,0}(M,\varphi)$ совпадает с пространством $L_2(M,\varphi)$.

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 1

В первой главе - “Изучение и построение L_p пространств” – рассматриваются научноые подходы к изучению объекта исследования, обосновывается круг задач в этой сфере. Также анализируются и, в соответствии с теоретическими взглядами автора, определённым образом уточняются различные способы построения и введения L_p-пространств.

В этой главе вводятся такие понятия, как, коммутант и бикоммутант, алгебра фон Неймана и приведена их классификация. Также рассмотрены простейшие случаи построения пространств L_1, L_2 и L_p.

Данные пространства строятся различными способами: по следу, по состоянию и по весу.

ГЛАВА II. ПРОСТРАНСТВА АРЕНСА НА ОПЕРАТОРНЫХ АЛГЕБРАХ

1. Пространства Аренса, построенное по состоянию на полуконечных алгебрах фон Неймана

В данном параграфе вводятся пространства Аренса на алгебрах фон Неймана относительно состояния на основе метода Трунова Н.В.

Пусть $M-$ алгебра фон Неймана с точным нормальным полуконечным следом μ и с точным нормальным состоянием φ. $L_p(M,\mu)-$пространства были введены Йедоном[15] в [7] , а $L_p(M,\varphi)-$ пространства были введены Труновым Н.В. в [34].

$L_p(M,\mu)-$ пространствас введенной нормой $\|\cdot\|_p$ является банаховым пространством всех интегрируемых в $p-$ той степени измеримых операторов, присоединенных к M. Рассмотрим множество

$$L^\omega = \bigcap_{p\geq 1} L_p\,(M,\mu).$$

Впервые такое множество исследовалось в работе Аренса [4], в случае, когда $M=L^\infty[0,1]$ и μ конечный след, порожденный мерой Лебега. Он показал, что $L^\omega(L^\infty[0,1];\,\mu)$ является локально выпуклой метризуемой алгеброй , относительно топологии τ, порожденной системой норм $\{\|\cdot\|_p\}_{p\geq 1}$.

Дальнейшее изучение свойств алгебры $L^\omega(M;\ \mu)$, ассоциированной с коммутативной алгеброй фон Неймана M и точным нормальным конечным следом μ, было дано в работах [36]. Также в данных работах показывается что $L^\omega(M;\ \mu)$- рефлексивно.

Пусть $M-$ полуконечная алгебра фон Неймана , $P(M)$ $-$решетка всех проекторов в M и μ $-$точный нормальный полуконечный след на M. Для любых $x\in L_p(M;\ \mu), y\in L_q(M;\ \mu)$ из $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=\frac{1}{r},\ p,q\in(1;\infty),\ r\geq 1$,

[15] - Yeadon F.J. Non- commutative L_p spaces. Math. Proc. Cambriage Phil. Soc., 1975, v. 77, № 1, p. 91-102

следует, что $xy \in L_r(M;\ \mu)$ и $\| xy\|_r \leq \| x \|_p \| y \|_q$. Кроме того , если $x \in L_p(M;\ \mu)$, то $x^* \in L_p(M;\ \mu)$ и $\| x \|_p = \| x^* \|_p$. Это означает, что множество

$$L^\omega = \bigcap_{p\geq 1} L_p\,(M,\mu)$$

является *- подалгеброй в *-алгебре $S(M)$ всех измеримых опреторов , присоединенных к M. Таким образом получили что $L^\omega(M,\mu)$- алгебра Аренса , ассоциированная с алгеброй фон Неймана M и следом μ.

Для точного нормального состояния φ на M имеет место равенство

$$\varphi(x) = \mu(hx) \quad (x \in M),$$

где $h-$ однозначно определенный положительный несингулярный оператор из $L_1(M,\mu)$.

Если $x \in M$, тогда $h^{\frac{1}{2p}} x h^{\frac{1}{2p}} \in L_p(M,\mu)$. Действительно, т.к. $h \in L_1(M,\mu)$, то $h^{\frac{1}{2p}} \in L_{2p}(M,\mu)$. Следовательно

$$\left(\mu \left| x h^{\frac{1}{2p}} \right|^{2p}\right)^{\frac{1}{2p}} \leq \|x\|_\infty \left\| h^{\frac{1}{2p}} \right\|_{2p}^{\mu},$$

т.е.

$$x h^{\frac{1}{2p}} \in L_{2p}(M,\mu).$$

Так же отсюда имеем

$$\left(\mu\left(\left| h^{\frac{1}{2p}} x h^{\frac{1}{2p}} \right|^{p}\right)\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left\| h^{\frac{1}{2p}} \right\|_{2p}^{\mu} \left\| x h^{\frac{1}{2p}} \right\|_{2p}^{\mu} \leq \left\| h^{\frac{1}{2p}} \right\|_{2p}^{\mu} \|x\|_\infty \left\| h^{\frac{1}{2p}} \right\|_{2p}^{\mu}.$$

Это означает, что $h^{\frac{1}{2p}} x h^{\frac{1}{2p}} \in L_p(M,\mu)$.

Исходя из данного утверждения на алгебре фон Неймана можно задать следующую функцию

$$x \to \|x\|_p^\varphi = \left(\mu\left(\left| h^{\frac{1}{2p}} x h^{\frac{1}{2p}} \right|^{p}\right)\right)^{\frac{1}{p}} = \left\| h^{\frac{1}{2p}} x h^{\frac{1}{2p}} \right\|_p^{\mu}.$$

Не трудно показать, что данная функция образует норму на M и она не зависит от выбора точного нормального полуконечного следа μ. Кроме того, пополнение M по этой норме является банаховым пространством, которое описывается блилинейными формами. Это пространство обозначается через $L_p(M,\varphi)$, и для него имеют место следующие соотношения

$L_q(M,\varphi) \subset L_p(M,\varphi)$ и $\|a\|_p^{\varphi} \leq \|a\|_q^{\varphi}$ (***)

для любого $a \in L_q(M,\varphi), 1 \leq p \leq q \leq \infty$ [16].

Рассмотрим плотное в H линейное многообразие

$$D_{\varphi} = \{f \in H | \ \exists \lambda > 0 : \ (xf;f) \leq \lambda\varphi(x), \ (x \in M^{+})\},$$

которое будем называть линеалом состояния φ. Билинейная форма на $D_{\varphi}-$ это отображение $a : D_{\varphi} \times D_{\varphi} \to C$ линейное по первому и антилинейное по второму аргументу.

Определение 2.1. Билинейная форма a на D_{φ} называется $\omega-$ интегрируемой , если существует последовательность $\{x_n\} \subset M$, называемая ω $-$определяющей для a такая, что:

А)$a(f,g) = \lim\limits_{n\to\infty}(x_n f, g)$, $f, g \in D_{\varphi}$;

Б) $(x_n - x_m)_p^{\varphi} \to 0$, $n, m \to \infty$, $\forall\, p \in [1,\infty)$.

Обозначим множество ω $-$интегрируемых билинейных форм через $L^{\omega}(M,\varphi)$[17].

Топологию на L^{ω} , порожденную системой норм $\{\|\cdot\|_p^{\varphi}\}_{p\in[1,\infty)}$, обозначим t_{φ}.

За определяющую систему окрестностей нуля топологии t_{φ} принимается система множеств

$$O_{n,\varepsilon} = \{x \in L^{\omega}(M,\varphi): \|x\|_1 < \varepsilon, \dots, \|x\|_n < \varepsilon\} = \{x \in L^{\omega}(M,\varphi): \|x\|_n < \varepsilon\},$$

где $n \in N, \varepsilon > 0$ данное равенство следует из соотношений (***).

[16] - Сарымсаков Т.А., Аюпов Ш.А., Хаджиев Дж., Чилин В.И. Упорядоченные алгебры. Ташкент, Фан, 1983, 304 с.

[17] -если заменить в последнем условии “$\forall\, p \in [1,\infty)$” условием “для некоторого $p \in [1,\infty)$”, то получим определение $L_p(M,\varphi)$, т.е. p-интегрируемых билинейных форм

Теорема 2.2. $\left(L^{\omega}(M,\varphi),t_{\varphi}\right)-$ полное метризуемое локально выпуклое пространство.

Доказательство. Полнота данного пространства следует из полноты пространства $L_p(M,\varphi)$ и соотношений (***).

Систему норм $\{\|\cdot\|_p^{\varphi}\}_{p\in[1,\infty)}$ можно заменить счетной системой норм $\{\|\cdot\|_p^{\varphi}\}_{n\in N}$, так как они задают одну и ту же топологию на $L^{\omega}(M,\varphi)$. Следовательно, топология t_{φ}- метризуема. Эта метрика может быть задана формулой

$$\rho(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}2^{-n}\ \frac{\|x-y\|_n}{1+\|x-y\|_n}.$$

Теорема доказана.

Для точного нормального состояния φ на алгебре фон Неймана M введем обозначение

$$L(M,\varphi)=\bigcup_{q\in(1,\infty]}L_q(M,\varphi).$$

Теорема 2.3. Всякая билинейная форма из $a\in L(M,\varphi)$ определяет непрерывный линейный функционал F_a на $\left(L^{\omega}(M,\varphi),t_{\varphi}\right)$ по формуле

$$F_a(b)=\mu\left(h^{\frac{1}{2}}bh^{\frac{1}{2}}a\right),\quad b\in\left(L^{\omega}(M,\varphi),t_{\varphi}\right).$$

И обратно , всякий непрерывный линейный функционал на $\left(L^{\omega}(M,\varphi),t_{\varphi}\right)$ имеет вид

$$F(b)=\mu\left(h^{\frac{1}{2}}bh^{\frac{1}{2}}a\right)$$

для некоторой билинейной формы $a\in L(M,\varphi)$.

Доказательство. Пусть линейная форма $a\in L(M,\varphi)$. Тогда

$$a\in\bigcup_{1<q\leq\infty}L_q(M,\varphi),$$

т.е. $a\in L_{q'}(M,\varphi)$ для некоторого $q'\in(1;\infty]$. Отсюда получаем

$F_a(b) = \mu\left(h^{\frac{1}{2}} b h^{\frac{1}{2}} a\right) - \|\cdot\|_p$ - непрерывный линейный функционал на $L_p(M,\varphi)$ $(\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} = 1)$ и тем более $F_a - L_p$- непрерывен на $L^\omega(M,\varphi)$. Поэтому F_a будет t_φ -непрерывным линейным функционалом на $\left(L^\omega(M,\varphi), t_\varphi\right)$. Действительно, если $\{x_n\}$ последовательность, t_φ −сходящаяся к x на $\left(L^\omega(M,\varphi), t_\varphi\right)$, то $x_n \to x$ относительно каждой нормы $\|\cdot\|_r, r \in [1;\infty)$. Следовательно последовательность (x_n) L_p - сходится к x для исходного $p \in [1;\infty)$ и в силу L_p -непрерывности F_a получаем , что $F_a(x_n) \to F_a(x)$, т.е. получили , что $F_a - t_\varphi$- непрерывен.

Обратно, пусть теперь F- некоторый t_φ- непрерывный линейный функционал на $\left(L^\omega(M,\varphi), t_\varphi\right)$. Тогда в $\left(L^\omega(M,\varphi), t_\varphi\right)$ существует окрестность нуля О на которой F ограничен. В силу определения t_φ существуют такие $n \in N$ и $\varepsilon > 0,$ что $O_{n,\varepsilon} = \{x \in L^\omega(M,\varphi) \ : \ \|x\|_n < \varepsilon\}$ содержится в O . Поэтому F - ограничен на $O_{n,\varepsilon}$ и следовательно функционал F L_n-непрерывен на $L^\omega(M,\varphi)$. Тогда $F - L_n$-непрерывен и на L_n- пополнении $L^\omega(M,\varphi)$, которое совпадает с $L(M,\varphi)$. Поэтому в силу теоремы 4 [25] существует билинейная форма $a \in L^q(M,\varphi)$, где $\frac{1}{n} + \frac{1}{q} = 1$ такая, что функционал F имеет вид

$$F(b) = \mu\left(h^{\frac{1}{2}} b h^{\frac{1}{2}} a\right).$$

Таким образом, получили, что для любого t_φ - непрерывного функционала F на $L^\omega(M,\varphi)$ существует билинейная форма a на некотором $L^q(M,\varphi)$, такая, что $F(b) = \mu\left(h^{\frac{1}{2}} b h^{\frac{1}{2}} a\right)$ $b \in L^\omega(M,\varphi)$.

Таким образом установлено взаимооднозначное соответствие между $\left(L^\omega(M,\varphi), t_\varphi\right)^*$ и $L(M,\varphi)$.

Теорема доказана.

2. Пространство Аренса, построенное по следу на алгебрах фон Неймана типа I₂

Рассмотрим алгебру фон Неймана M^2 типа I_2 с точным нормальным конечным следом μ. Элементы M^2 представим в виде матрицы 2^x2

$a(t) = (a_{ij}(t)),\ i,j = \overline{1,2}$

с данными $a_{ij}(t) \in L_\infty(X,\mu)$, где $L_\infty(X,\mu)$- алгебра измеримо связных функций в измеримом пространстве (X,μ).

Через $S(M^2,\mu)$ обозначим алгебру всех измеримых операторов M^2 , или алгебра всех матриц размерностью 2^x2 с элементами

$a(t) = (a_{ij}(t))_{\,i,j=\overline{1,2}}$, где $a_{ij}(t) \in S(X,\mu)$- алгебра всех измеримых функций в пространстве (X,μ) и

$$\mu(a) = \frac{1}{n}\int\limits_X \sum_{i=1}^{n} a_{ii}(t)d\mu.$$

Лемма 2.4. Пусть (X,μ) будет измеримым пространством и предположим , что функция $h(t)$, определенная на X, $0 \le h(t) \le 1$ и удовлетворяет условию $h^{-1}(t) \notin L_q\ (X,\mu),\ \forall\ 0 < q \le \infty$, тогда существует функция

$a(t) \notin L_1\ (X,\mu)$

такая , что

$$\int\limits_X h(t)a^p(t)d\mu < \infty$$

для всех $p \in [1,\infty)$ и $(\mathbb{1} - h(t))a(t)\ \notin L_1\ (X,\mu)$. [18]

Доказательство.

Пусть $E_k = \{t\colon \frac{1}{e^{k-1}} \ge h(t) > \frac{1}{e^k}\}$, k=1,2,… . Откуда видно, что

$$E_k \cap E_j = \emptyset, \text{где}\ \ k \ne j \quad \text{и}\ x = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k.$$

[18] - Albverio S., AyupovSh.A., Abdullaev R.Z. Arens Spaces associated with von Neumann algebras and normal states J. of functional Analysis-2008

Рассмотрим движение функции по X

$$m(t) = \frac{1}{e^k}, \qquad t \in E_k, \;\; k = 1,2, \ldots.$$

Из условия имеем $m(t) \le h(t) \le em(t)$, т.е.

$$\frac{1}{h(t)} \le \frac{1}{m(t)} \le \frac{e}{h(t)}, \quad \forall \;\; t \in (X, \mu).$$

Из того, что $h^{-1}(t) \notin L_1\ (X, \mu), \;\; \forall\, 0 < q \le \infty$, т.е.

$$\int\limits_X \left(\frac{1}{m(t)}\right)^q d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} e^{qk} \mu(E_k) = \infty, \qquad 0 < q \le \infty.$$

Следовательно для q=1 существует такое $k_2 > k_1$, такое что

$$\sum_{k=k_1+1}^{k_2} e^{\frac{1}{2}k} \mu(E_k) \ge 1.$$

При помощи индукции доказывается , что для $q = \frac{1}{n}$ существует $k_n > k_{n-1}$ такое, что

$$\sum_{k=k_{n-1}+1}^{k_n} e^{\frac{1}{n}k} \mu(E_k) \ge 1 \quad , \forall\, n \in N.$$

Получаем, что для любой последовательности $d_k = \frac{1}{n}$, где $k_{n-1} < k < k_n$ и выполняется следующее условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} e^{k\, d_k} \mu(E_k) = +\infty.$$

Определим функцию следующим образом $a(t) = e^{k\, d_k}$, где

$$t \in E_k, \quad k = 1,2, \ldots.$$

Из определения следа на M^2 следует

$$\int_X a(t) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} e^{k\, d_k} \mu(E_k) = \infty. \qquad (\,*\,)$$

т.е. $a(t) \notin L_1\ (X, \mu)$. Но с другой стороны для $p \ge 1$ имеем

$$\int\limits_X m(t) a^p(t) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{e^k} e^{kp\, d_k} \mu(E_k) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{k(p\, d_{k-1})} \mu(E_k) < \infty$$

Потому, что для любого фиксированного $p \geq 1$ существует $p\ d_k \to 0$ при $k \to \infty$.

Следовательно , под неравенствами

$$m(t) \leq h(t) \leq em(t), \text{при } p \geq 1$$

понимается

$$\int_X h(t)a^p(t)d\mu < \infty \quad (**)$$

Следовательно , функция $a(t)$ удовлетворяет всем условиям доказываемой леммы и покажем, что

$(\mathbb{1} - h(t))d(t) \notin L_1\ (X, \mu)$.

На самом деле

$$\int_X \big(\mathbb{1} - h(t)\big)a(t)d\mu = \int_X a(t)d\mu - \int_X h(t)a(t)d\mu = \infty.$$

Из (*) и (**) имеем

$$\int_X a(t)d\mu = \infty \ \text{ и } \int_X h(t)a(t)d\mu < \infty \quad (***)$$

Лемма доказана.

Теперь покажем условие для того, чтобы пространство Аренса $L^\omega(M, \mu)$ определенное по состоянию являлось алгеброй. Рассмотрим случай. когда M является алгеброй фон Неймана типа I_2.

Теорема 2.5 . Пусть $\boldsymbol{\varphi}$- точное нормальное диагональное состояние на M^2, которое связано со следом μ. Тогда $L^\omega(M, \mu)$ будет подалгеброй в $S(M^2)$ тогда и только тогда, когда $L^\omega(M^2, \varphi) = L^\omega(M^2, \mu)$.

Доказательство.

Предположим, что $L^\omega(M^2, \varphi) \neq L^\omega(M^2, \mu)$, тогда $L^\omega(M^2, \varphi) \neq L^\omega(M^2, \nu)$, где $\nu(a) = 2\mu$. Пусть $h = \frac{d\varphi}{d\nu}$ будет диагональной матрицей $h = h_{ij}$, где $i, j = \overline{1,2}$ и $h_{11}(t) + h_{22}(t) = 1$ и из [25 теорема 3.5] получаем, что $L^\omega(M^2, \mu) \subset L^\omega(M^2, \varphi)$. Следовательно при данных предположениях это утверждение не верно. Согласно [25 теорема 3.6] это означает, что $h^{-1} \notin L_1(M^2,\nu)$, т .е. $h_{11}^{-q} + h_{22}^{-q} \notin L_1(X,\nu), \quad \forall\ 0 < q \le \infty$.

Рассмотрим два случая :

1) $h_{11}^{-q} \notin L_1(X,\nu), \forall\ 0 < q \le \infty$;

2) $h_{22}^{-q} \notin L_1(X,\nu), \forall\ 0 < q \le \infty$.

Рассмотрим первый случай , второй будет рассматриваться аналогично. В этом случае h_{11} удовлетворяет условию предыдущей леммы.

Рассмотрим элемент

$$a = \begin{pmatrix} a(t) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $h_{11}(t)a^p(t) -$ функция интегрируемая на X , для всех $p \in [0,1)$, $a(t) \notin L_1(X,\nu), a(t) > 0$.

Существование данной функции следует из предыдущей леммы. Следовательно

$$(\ \|a\|_p^{\varphi})^p = (\ \left\| ah^{\frac{1}{p}} \right\|_p^{\nu})^p \ = \ \nu\left(\left| ah^{\frac{1}{p}} \right|^p \right) = \int\limits_X h_{11}(t)a^p(t)\,d\nu < \infty, \forall\, p \in [1,0),$$

т.е. $a \in L^{\omega}(M^2,\varphi)$, b $\in M^2 \subset L^{\omega}(M^2,\varphi)$.

Докажем, что $\notin L_1(M^2,\varphi)$.

$$abh = \begin{pmatrix} 0 & ah_{22} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|abh| = \sqrt{(abh)^*(abh)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22}^2 a} \end{pmatrix}.$$

Используя (***) имеем

$$\nu(|abh|) = \int\limits_X \sqrt{h_{22}^2 a^2}\,d\nu \ge \int\limits_X h_{22}(t)a(t)\,d\nu = \int\limits_X (1 - h_{11}(t))a(t)\,d\nu = \infty,$$

так как $\subset L_1(M^2,\varphi)$, то $ab \in L^{\omega}(M^2,\varphi)$.

Теорема доказана.

3. Изоморфизмы некоммутативных алгебр Аренса

Пусть $M-$ алгебра фон Неймана, $\mu-$ точный нормальный полуконечный след на M. Через $L_h^{\omega}(M,\mu)$ обозначим самосопряженную часть алгебры $L^{\omega}(M,\mu)$.

Пусть $x_n, x \in L_h^{\omega}(M,\mu)$. Говорят, что последовательность $\{x_n\}$ (o) $-$сходится к x, если найдутся такие $y_n, z_n \in L_h^{\omega}(M,\mu)$, что

$$y_{n-1} \leq y_n \leq x_n \leq z_n \leq z_{n-1}, n = 2,3, \dots;$$

$$\sup y_n = x = \inf z_n \ , \qquad n \geq 1;$$

в данном случае в работе [9][19] предлагается следующее обозначения

$$y_n \uparrow x, \qquad z_n \downarrow x, \quad x_n \overset{(o)}{\to} x.$$

Сильнейшая из топологий в $L_h^{\omega}(M,\mu)$, в которых из (o)- сходимости последовательностей вытекает их топологическая сходимость , называется (os) $-$топологией.

Теорема 2.6. В $L_h^{\omega}(M,\mu)$ топология t_μ совпадает с (os) $-$топологией.

Доказательство. Пусть

$$\{x_n\} \subset L_h^{\omega}(M,\mu) \quad \text{и} \ \ x_n \overset{(o)}{\to} 0.$$

Тогда найдутся такие $y_n, z_n \in L_h^{\omega}(M,\mu)$, что

$$y_n \leq x_n \leq z_n, \quad y_n \uparrow 0, \qquad z_n \downarrow 0.$$

При этом

$$0 \leq x_n - y_n \leq z_n - y_n \leq z_{n-1} - y_{n-1}, \ \ \inf(z_n - y_n) = 0 \text{ при } n \geq 1.$$

Следовательно ,

$$\|x_n - y_n\|_p \leq \|z_n - y_n\|_p \to 0$$

при $n \to \infty$ для всех $p \geq 1$, т.е. $x_n - y_n \overset{t_\mu}{\to} 0$. Поскольку $\|y_n\|_p \to 0$ при $n \to \infty, p \geq 1$, то $\|x_n\|_p \overset{t_\mu}{\to} 0$. Это означает, что топология t_μ мажорируется (os) $-$ топологией на $L_h^{\omega}(M,\mu)$.

Пусть

---

[19] - Ajupov Sh., Abdullaev R.Z. On isometries of non- associative L_p - spaces. Lectures Notes in mathematics, springer , 1998, Quantum Probabiliti and Applications, IV. Proceeding, Roma, 1987

$$x_n \in L_h^{\omega}(M,\mu) \quad \text{и} \quad x_n \overset{t_\mu}{\to} 0.$$

Выберем в $(L^{\omega}(M,\mu), t_\mu)$ такую последовательность $\{U_m\}$ замкнутых заполненных окрестностей нуля , что

$$U_{m+1} + U_{m+1} \subset U_m.$$

Так как $x_n \overset{t_\mu}{\to} 0$, то найдется такая последовательность номеров $n_1 \le n_2 \le \cdots$, что $x_{n_m} \in U_m$ для всех $m = 1,2, \dots$. ясно, что последовательность

$$y_m = \sum_{i}^{m-1} |x_{n_i}|$$

является t_μ- фундаментальной , и поэтому найдется такое $y \in L_+^{\omega}(M,\mu)$, что $y_n \overset{t_\mu}{\to} y$, при этом

$$z_m = y - y_m = \sum_{i=m}^{\infty} |x_{n_i}| \downarrow 0.$$

Поскольку

$$-z_m \le -|x_{n_m}| \le x_{n_m} \le |x_{n_m}| \le z_m,$$

то $x_{n_m} \overset{(o)}{\to} 0$. Следовательно, топология t_μ мажорирует (os) −топологию. Таким образом, (os) −топология на $L_h^{\omega}(M,\mu)$ совпадает с топологией t_μ.

Теорема доказана.

Теорема 2.7. Всякий *-изоморфизм α алгебр Аренса

$$(L^{\omega}(M,\mu), t_\mu), (L^{\omega}(M,\mu), t_\mu)$$

является непрерывным отображением.

Доказательство. Пусть $x_n, x \in L^{\omega}(M,\mu)$ и $x_n \overset{t_\mu}{\to} x$. Тогда $Re\, x_n = (x_n + x_n^*)/2 \overset{t_\mu}{\to} Re\, x$ и $Im x_n = (x_n + x_n^*)/2i \overset{t_\mu}{\to} Im\, x$. В силу вышеприведенного доказательства

$$Re\, x_n \to Re\, x, Im\, x_n \to Im\, x$$

в (os) −топологии. Поскольку α −∗- изоморфизм. Поэтому

$$\alpha(Re\, x_n) \to \alpha(Re\, x), \alpha(Im\, x_n) \to \alpha(Im\, x)$$

в (os) −топологии в $L^{\omega}(M,\nu)$. Используя равенства

$$\alpha(Re\,x) = Re\big(a(x)\big), \qquad \alpha(Im\,x) = Im\big(a(x)\big)$$

и также используя выше приведенную теорему, получим, что

$$Re\big(a(x_n)\big) \xrightarrow{t_\mu} Re\big(a(x)\big),\ \ Im\,\big(a(x_n)\big) \xrightarrow{t_\mu} Im\,\big(a(x)\big).$$

Следовательно,

$$a(x_n) = Re\big(a(x_n)\big) + iIm\,\big(a(x_n)\big) \xrightarrow{t_\mu} Re\big(a(x)\big) + iIm\,\big(a(x)\big).$$

Теорема доказана.

Пусть μ и ν- два точных нормальных конечных следа на M. Через $h = \frac{d\mu}{d\nu}$ обозначим производную Радона-Никодима следа μ относительно ν.[20] Ясно, что оператор x из $K(M,\nu)$ принадлежит $L^1(M,\nu)$ тогда и только тогда, когда $hx \in L^1(M,\nu)$; при этом выполняется равенство $\mu(x) = \nu(hx)$.

Теорема 2.8. Пусть μ и $\nu -$ точные нормальные полуконечные следы на алгебре фон Неймана M, $h = \frac{d\mu}{d\nu}$. Тогда $L^\omega(M,\nu) \subset L^\omega(M,\mu)$ в том и только том случае, когда $h \in L(M,\nu)$.

Доказательство. Пусть $L^\omega(M,\nu) \subset L^\omega(M,\mu)$. Тогда, для каждого $x \in L^\omega(M,\nu)$ выполняется равенство $\mu(x) = \nu(hx)$, т.е. μ является положительным линейным функционалом на $L^\omega(M,\nu)$. Поскольку $(L^\omega(M,\nu), t_\nu) -$ полная метризуемая локально выпуклая *-алгебра и инволюция непрерывна в t_ν, то $\mu - t_\nu$ - непрерывный линейный функционал на $L^\omega(M,\nu)$. Следовательно, найдется такой оператор $y \in L(M,\nu)$, что

$$\nu(hx) = \mu(x) = \nu(yx)$$

для всех $x \in L^\omega(M,\nu)$. Это означает, что $h = y$, и поэтому $h \in L(M,\nu)$. Обратно, если $h \in L(M,\nu)$, то $\mu(x) = \nu(hx)$ является $t_\nu -$непрерывным линейным функционалом на $L^\omega(M,\nu)$. Пусть $x \in L^\omega(M,\nu)$, $p \geq 1$. Тогда

$$|x|^p \in L^\omega(M,\mu), \qquad \mu(|x|^p) < \infty.$$

Это означает, что

[20] -т.е. такой положительный оператор из $L^1(M,\nu)$, принадлежащий центру алгебры $K(M,\nu)$ для которого выполняется равенство $\mu(x) = \nu(hx)$ при всех $x \in M$.

$$L^{\omega}(M,\nu) \subset \bigcap_{p\geq 1} L_p\,(M,\mu) = L^{\omega}(M,\mu).$$

Теорема доказана.

Следствие 2.9. Пусть μ и $\nu -$ точные нормальные полуконечные следы на алгебре фон Неймана M. Следующие условия эквивалентны:

1) $L^{\omega}(M,\mu) = L^{\omega}(M,\nu)$;

2) $\frac{d\mu}{d\nu} \in L(M,\nu), \frac{d\nu}{d\mu} \in L(N,\nu)$, где M и N –алгебры фон Неймана, μ и $\nu -$ точные нормальные полуконечные следы M и N соответственно.

Определение 2.10. Следы μ и ν называются эквивалентными, если существует такой *-изоморфизм

$$\alpha: M \to N, \text{что } L^{\omega}(N,\nu) = L^{\omega}(N,\mu \circ \alpha^{-1}).$$

Предположим, что существует *- изоморфизм α из M на N . Рассмотрим на N след $\lambda(x) =$ Из [11] следует, что существует единственное биективное положительное линейное отображение

$$\hat{a}:\ L^1(M,\mu) + M \to L^1(N,\lambda) + N,$$

совпадающее с α на M, такое, что $\lambda\big(\hat{a}(x)\big) = \mu(x)$ для всех $x \in L^1(M,\mu)$. В частности, $\hat{a}\left(L_p(M,\mu)\right) = L_p(N,\lambda)$ и

$$\|\hat{a}(x)\|_p = \|x\|_p$$

для всех $x \in L_p(M,\mu), p \geq 1$. Следовательно, $\hat{a}\big(L^{\omega}(N,\mu)\big) = L^{\omega}(N,\lambda)$ и суждение α отображения $\hat{a}$ на $L^{\omega}(M,\mu)$ являются непрерывными отображениями из $\big(L^{\omega}(M,\mu), t_{\mu}\big)$ на $(L^{\omega}(N,\lambda), t_{\lambda})$. Так как $\big(L^{\omega}(M,\mu), t_{\mu}\big)$- локально выпуклая алгебра , а $M \cap L^{\omega}(M,\mu)$ $t_{\mu} -$ плотно в $L^{\omega}(M,\mu)$, то $\alpha(xy) = \alpha(x)\alpha(y)$ для любых $x, y \in L^{\omega}(M,\mu)$, т.е. α –*-изоморфизм из $\big(L^{\omega}(M,\mu), t_{\mu}\big)$ на $(L^{\omega}(N,\lambda), t_{\lambda})$. Учитывая, что *-изоморфность $L^{\omega}(M,\mu)$ и $L^{\omega}(N,\nu)$ влечет *-изоморфность M и N.

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 2

Во второй главе – “Пространства Аренса” – на основе работ [3,34] рассматриваются и конкретизируются случаи построения пространств Аренса по состоянию и весу. Также на основе доказанной теоремы в работе [13] рассматривается условие для того, чтобы пространства Аренса было алгеброй для случая $\alpha=1$. На основе доказанного приводится авторское доказательство теоремы для случая $\alpha=0$.

В первом параграфе данной главы построено некоммутативное пространство Аренса по состоянию на основе работы Н.В. Трунова [33]. Подробно изучено построение данного пространства.

Во втором параграфе построено некоммутативное пространство Аренса на алгебрах фон Неймана типа I_2. Где элементами данных алгебр являются матрицы типа 2Х2, элементами которых являются функции. Также доказан случай, когда алгебра Аренса является пространством для $\alpha = 0$.

Последний параграф данной главы посвящен критерию изоморфности некоммутативных алгебр Аренса. Рассмотрены теоремы и леммы, приведены примеры.

ГЛАВА III. НЕКОММУТАТИВНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ НА ЙОРДАНОВЫХ АЛГЕБРАХ.

1. Предварительные сведения

Пусть A — векторное пространство над полем действительных чисел R.

A называется йордановой алгеброй , если в ней введена операция умножения, которая удовлетворяет следующим условиям и не является ассоциативной :

1. $xy = yx$
2. $(x + y)z = xz + yz$;
3. $\alpha(xy) = (\alpha x)y$;
4. $(x^2 y)x = x^2(yx)$,

где $x, y, z \in A, \alpha \in R$.

Пример 1 . Пусть , $\mathfrak{A}$ — ассоциативная, необязательно коммутативная алгебра над R с умножением $x \cdot y,\ x, y \in \mathcal{M}$. Определив на $\mathfrak{A}$ симметризированное умножение $xy = 1/2(x \cdot y + y \cdot x)$ получим новую алгебру $\mathfrak{A}^{(+)}$, которая является йордановой алгеброй.

Всякое векторное пространство $\mathfrak{A}^{(+)}$, замкнутое относительно симметризованного умножения, также является йордановой алгеброй. Такие йордановы алгебры называются специальными. Не специальные йордановы алгебры называются исключительными.

Пример 2. Пусть H — гильбертово пространство над R со скалярным произведением $(\varepsilon, \eta), \varepsilon, \eta \in H$. Рассмотрим множество A пар $\{\alpha, \varepsilon\}, \alpha \in R, \varepsilon \in H$ с покоординатными линейными операциями и с умножением: $\{\alpha, \varepsilon\} \cdot \{\beta, \eta\} = \{\alpha\beta + (\varepsilon, \eta), \beta\varepsilon + \alpha\eta\}$.

Проверим выполнение свойств йордановой алгебры:

1) Пусть $x = \{\alpha, \varepsilon\}$, а $y = \{\beta, \eta\}$, тогда

$$xy = \{\alpha, \varepsilon\} \cdot \{\beta, \eta\} = \{\alpha\beta + (\varepsilon, \eta), \beta\varepsilon + \alpha\eta\}$$

$$yx = \{\beta, \eta\} \cdot \{\alpha, \varepsilon\} = \{\beta\alpha + (\eta, \varepsilon), \alpha\eta + \beta\varepsilon\}$$

Т.к $\alpha, \beta \epsilon R,$ то $\alpha\beta = \beta\alpha,$ из коммутативности R, и $(\varepsilon, \eta) = (\eta, \varepsilon)$ из первого свойства скалярного умножения векторов. Следовательно свойство (1) выполняется и $xy = yx$

2) Докажем справедливость второго свойства йордановой алгебры:

$(x + y)z = xz + yz$

Пусть $x = \{\alpha, \varepsilon\},\ y = \{\beta, \eta\}, z = \{\gamma, \delta\}$, тогда

$$(x + y)z = (\{\alpha, \varepsilon\} + \{\beta, \eta\})\{\gamma, \delta\} = \{\alpha + \beta, \varepsilon + \eta\}\{\gamma, \delta\}$$

$$= \{(\alpha + \beta)\gamma + (\varepsilon + \eta, \delta), \qquad \gamma(\varepsilon + \eta) + (\alpha + \beta)\delta\}$$

$$= \{\alpha\gamma + \beta\gamma + (\varepsilon, \delta) + (\eta, \delta), \qquad \gamma\varepsilon + \gamma\eta + \alpha\delta + \beta\delta\}$$

$$xz + yz = \{\alpha\gamma + (\varepsilon, \delta), \gamma\varepsilon + \alpha\delta\} + \{\beta\gamma + (\eta, \delta), \gamma\eta + \beta\delta\}$$

$$= \{\alpha\gamma + (\varepsilon, \delta) + \beta\gamma + (\eta, \delta), \gamma\varepsilon + \alpha\delta + \gamma\eta + \beta\delta\}.$$

Получаем, что $(x + y)z = xz + yz$

3) Выполнение свойства $\alpha(xy) = (\alpha x)y$ очевидно

4) $(x^2y)x = (\{\alpha^2 + |\eta|^2, 2\alpha\eta\} \cdot \{\beta, \varepsilon\}) \cdot \{\alpha, \varepsilon\} = \{\alpha^3\beta + 3\alpha\beta|\eta|^2 + 3\alpha^2(\eta, \varepsilon) + |\eta|^2(\varepsilon, \eta),\ 3\alpha^2\beta\eta + \alpha^3\varepsilon + \alpha|\eta|^2\varepsilon + \beta\eta|\eta|^2 + 2\alpha(\eta, \varepsilon)\eta\}$

$$x^2(yx) = \{\alpha^2 + |\eta|^2, 2\alpha\eta\} \cdot (\{\beta, \varepsilon\} \cdot \{\alpha, \varepsilon\})$$

$$= \{\alpha^3\beta + 3\alpha\beta|\eta|^2 + 3\alpha^2(\eta, \varepsilon) + |\eta|^2(\varepsilon, \eta),$$

$$3\alpha^2\beta\eta + \alpha^3\varepsilon + \alpha|\eta|^2\varepsilon + \beta\eta|\eta|^2 + 2\alpha(\eta, \varepsilon)\eta\}$$

Приведенное доказательство показывает, что данная алгебра является йордановой алгеброй.

Данные йордановые алгебры называются абстрактными спин факторами. Они являются частным случаем алгебры симметричной билинейной формы.

Пример 3. Пусть Ơ- алгебра чисел Кэли (октавы), $Ơ_n$- алгебра $n \times n$ матриц с элементами из – Ơ, *- инволюция на Ơ, которая заключается в транспонировании матрицы и применении операции сопряжения к каждому её элементу. Множество

$$H(Ơ_n) = \{x \in Ơ_n : x^* = x\}$$

эрмитовых матриц замкнуто в $\mho_n$ относительно операции

$$x \cdot y = 1/2(x \cdot y + y \cdot x).$$

Доказано, что только при $n \leq 3$ множество $H(\mho_n)$ с операцией $x \cdot y$ является йордановой алгеброй, при чем при $n \leq 2$ она специальна. Йорданова алгебра $H(\mho_3)$ является исключительной. Данная алгебра обозначается M_3^8.

Пусть A -йорданова алгебра. Подалгебра алгебры A называется сильно ассоциативной, если в ней для любых элементов a и b $(ac)b = a(cb)$ при каждом $c \in A$. Семейство элементов $\{a_\alpha\} \subset A$ назовем совместным, если алгебра , порожденная этими элементами, сильно ассоциативна. Совместность двух элементов a и b будем обозначать в дальнейшем символом $a \leftrightarrow b$.

Определение 3.1. Порядок $\geq$ на йордановой алгебре E назовем согласованным с алгебраическими операциями, если выполняются следующие условия[21]:

1. Если $x \geq y$, то $x + z \geq y + z \quad \forall z \in E$;
2. Если $x \geq y$, то $\lambda x \geq \lambda y \quad \forall \lambda \in R, \lambda \geq 0$;
3. Если $x \geq 0, y \geq 0 \quad x \leftrightarrow y$, то $xy \geq 0$;
4. $x^2 \geq 0$ для любого $x \in E$.

Йорданову алгебру с единицей будем называть $JB -$ алгеброй , если на ней задана норма, относительно которой A является банаховым пространством и для которой выполнены следующие условия:

1. $\|a^2\| = \|a\|^2$;
2. $\|a^2\| \leq \|a^2 + b^2\|, \ \forall \ a, b \in A$.

Важным для приложений в теории интегрирования классом JB- алгебр иявляются JBW - алгебры введенные в работе Шульца [38 49 д]. **Определение 3.2.** JB - алгебра A называется JBW - алгеброй, если она

[21] - Аюпов Ш.А, Абдуллаев Р.З. Алгебры Аренса на йордановых операторных алгебрах и на обертывающих алгебрах фон Неймана. Узб.Мат.Журнал, 1998, № 3, с. 11-17

обладает предсопряженным пространством , т.е. существует банахово пространство A_* такое, что A изометрически изоморфна пространству $(A_*)^*$, топологически сопряженному A_*.

Определение 3.3. Йорданову алгебру E с единицей назовем - алгеброй, если на ней задан порядок , согласованный с алгебраическими операциями и выполнены следующие два условия:

— если $\{x_\alpha\}$ — возрастающая ограниченная сверху сеть положительных элементов из E, то существует $x = \sup x_\alpha$, причем $x \leftrightarrow y$, если $x_\alpha \leftrightarrow y$ для всех α;

— всякая максимальная сильно ассоциативная подалгебра в E является решеткой относительно индуцированного порядка.

Пример 4. Всякая JBW- алгебра A и, в частности, JW- алгебра, являются OJ- алгебрами.

Теорема 3.4. В OJ - алгебре E всякая максимально сильно ассоциированная подалгебра E_0 является полуполем.

Пусть $C\,(X, M_3^8)$ множество непрерывных функций, заданных на гиперстоуновском компакте X со значением в M_3^8. Так как M_3^8 - конечномерное нормированное пространство [27] над R ($\dim M_3^8 = 27$), то существует одноточечная компактификация $M = M_3^8 \cup (\infty)$.

Непрерывное отображение $f\colon X \to M$ назовем допустимым, если множество $f^{-1}(\infty)$ нигде не плотно в X.

Через $S(X, M_3^8)$ обозначим множество всех допустимых отображений. Введем в $S(X, M_3^8)$ алгебраические операции. Пусть $f, g \in S(X, M_3^8)$ и $Y = X(f^{-1}(\infty) \cup g^{-1}(\infty))$. Тогда Y всюду плотно в X и $f(x\,)$ и $g(x) \in M_3^8$ для $x \in Y$. На Y отображение $f + g$ определим, как $(f+g)(x) = f(x) + g(x), x \in Y$. Так как X — экстремально незвязно, то оно является расширением Стоуна-Чеха всякого своего рода всюду плотного подмножества. Поэтому $f + g$ можно однозначно продолжить до отображения из X в M и, очевидно, $f + g \in S(X, M_3^8)$. Так как M_3^8 является йордановой алгеброй, то $S(X, M_3^8)$ также является йордановой алгеброй. На данном множестве $S(X, M_3^8)$ порядок вводится поточечно, то есть $f \leq g$ означает $f(x) \leq g(x,)$ $, \forall\, x \in X(f^{-1}(\infty) \cup g^{-1}(\infty))$.

2. Следовые алгебры

Пусть M - алгебра фон Неймана с положительным конусом M^+ и пусть $\mathbb{1}$ является оператором в M.

Положительный линейный функционал μ называется конечным следом, если $\mu(U^*xU) = \mu(x), \forall\ x \epsilon M$ и каждого единичного оператора $U \epsilon M$.

Конечный след μ является нормальным, если для различных монотонных сетей $\{x_\alpha\}$ с возрастанием $x \epsilon M$, выполнялось

$$\mu(x) = \sup \mu(x_\alpha).$$

Пусть $\tau -$ точный нормальный конечный след на алгебре фон Неймана M. Теорема Родона –Никодима гласит, что для каждого точного нормального конечного следа μ из M , существует положительный оператор $h \in L^1(M,\tau)$ образует центр M так, что $\mu(x) = \tau(hx)$ для всех $x \epsilon M$. Данный оператор h называется производной Родона-Никодима для следа μ и обозначается $\frac{d\mu}{d\tau}$.

Из [29] для взятого точного нормального конечного следа τ на алгебре фон Неймана M, пространство $L_p(M,\tau), p \in [1,\infty)$ определяется следующим образом

$$L_p(M,\tau) = \{x \in S(M): |x|^p \in L^1(M,\tau)\}.$$ [22]

Пространство $L_p(M,\tau)$ с введенной на нем нормой $\|x\|_p = (\tau(|x|^p))^{\frac{1}{p}}$ образует банахово пространство совпадает с $L_q(M,\tau)$ где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ и это пространство двойственно пространству $L_p(M,\tau)$ и двойственность выражается в $< x, a >= f_a(x) = \tau(ax)\ , \forall\ f_a \in L_p(M,\tau)^*$, $a \in L_q(M,\tau)$.

Следовательно [33] полагает пересечение $L^\omega(M,\tau) = \bigcap_{p\geq 1} L_p(M,\tau)$.

[22] - Владимиров Д.А.Булевы алгебры. «Наука». Москва. 1969

Это означает , что $L^{\omega}(M,\tau)$ образует локально выпуклую *-алгебру с введенной топологией t^{τ}, образованную системой норм

$$\{\|\cdot\|_p\}_{p\in[1;\infty)}.$$

Любой оператор

$$a \in \bigcup_{q\in(1;\infty)} L_q(M,\tau)$$

Определяет непрерывный линейный функционал f_a на $(L^{\omega}(M,\tau),t^{\tau})$ формулой $f_a(x)=\tau(ax)$, и обратно , произвольный непрерывный линейный функционал f на алгебре $(L^{\omega}(M,\tau),t^{\tau})$ с элементом

$$a \in \bigcup_{q\in(1;\infty)} L_q(M,\tau)$$

такой, что

$$f(x)=\tau(ax).$$

Для введения понятия следовой алгебры необходимо ввести следующие понятия.

Через $\mathcal{F}$ обозначим множество всех точных нормальных конечных следов на M и пусть $\mathcal{F}\neq\emptyset$.

Таким образом образуется пространство

$$M_f = \bigcap_{\mu\in \mathrm{F}} \bigcap_{p\in[1,\infty)} L_p(M,\mu) = \bigcap_{\mu\in \mathrm{F}} L^{\omega}(M,\mu).$$

На пространстве M_f определим топологию t, порожденную системой норм $\{\|\cdot\|_p^{\mu} \ : \ \mu \in \mathcal{F}, p\in[1;\infty)\}$.

Теорема 3.5. (M_f,t) −полная локально выпуклая *- алгебра.

Определение 3.6. Полная *- алгебра M_f называется конечной следовой алгеброй .

Замечание 3.7. Конечная следовая алгебра является примером GW^*- алгебры.

Доказательство этой теоремы состоит из несколько вспомогательных утверждений, которые интересны для раскрытия данного параграфа.

Утверждение 3.8. Пусть M - алгебра фон Неймана с точным нормальным конечным следом и центром Z. Тогда центр алгебры M_f совпадает с Z , т.е. $Z(M_f) = Z$. Получаем , что в коммутативном случае $M_f = M$.

Доказательство. Пусть $M-$ алгебра фон Неймана с точным нормальным конечным следом τ, и $\tau(1) = 1$.

Предположим, что $x \in Z(M_f), x \geq 0$ и пусть

$$x = \int_0^\infty \lambda \, de_\lambda$$

является спектральным разложение x.

Так как $x \in Z(M_f)$ и $M \subset M_f$, то имеем, что $e_\lambda \in Z$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$.

Центральный элемент можно представить в виде $\varepsilon\mathbb{1} + x$ и предположим, что $e_1 = 0$.

Для $n \in \mathbb{N}$ множество

$$p_n = e_{(n+1)^2} - e_{n^2}$$

и

$$y = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^2 \, p_n$$

Так как $xp_n \geq n^2 p_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$, то получаем, что $0 \leq y \leq x$ и следовательно $y \in M_f$.

Пусть $F = \{n \in \mathbb{N} \ : \ t_n = \tau(p_n) \neq 0\}$ и

$$h = \sum_{n \in \mathcal{F}} \frac{1}{n^2 t_n} p_n \in Z(S(M)).$$

Пусть $x \in M, \quad \|x\|_\infty \leq 1$. Для $\mu \in \mathcal{F}$ и $1 \leq p \leq \infty$ имеем

$$\|x\|_p^\mu = \|x\mathbb{1}\|_p^\mu \leq \|x\|_\infty \|\mathbb{1}\|_p^\mu \leq \mu(\mathbb{1})^{1/p}$$

т.е. $\|x\|_p^\mu \leq \mu(\mathbb{1})^{\frac{1}{p}}$ для всех $x \in M, \|x\|_\infty \leq 1$.

Следовательно M_f есть $GW^* -$ алгебра.

Алгебра M_f содержит M алгебру, но является слабее алгеброй , так как содержится во всем $L_p(M,\mu), \forall\, p \geq 1$ и точного нормального конечного следа μ из M.

Следующая теорема даст необходимое и достаточное условие для того, чтобы M_f совпало с M.

Теорема 3.9. Для конечной алгебры фон Неймана M следующие условия эквивалентны:

1) $M_f = M$

2) $M -$ конечная сумма из однородных типов $I_n, n \in \mathbb{N}$ алгебр фон Неймана

Т.к.

$$\bigvee_{n=1}^{m} p_n = \bigvee_{n=1}^{m} \left(e_{(n+1)^2} - e_{n^2}\right) = \sum_{n=1}^{m} (e_{(n+1)^2} - e_{n^2}) = e_{(m+1)^2} - e_{m^2} =$$

$$= e_{(m+1)^2} \uparrow \mathbb{1}$$

Следовательно, существует оператор $h^1 \in S(M)$. Следовательно

$$\tau(k) = \sum_{n\in\mathcal{F}} \frac{1}{n^2 t_n} \tau(p_n) = \sum_{n\in\mathcal{F}} \frac{1}{n^2 t_n} t_n = \sum_{n\in\mathcal{F}} \frac{1}{n^2} \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2} < \infty, h \in L_1(M,\tau).$$

Пусть $\mu(\cdot) = \tau(h\,\cdot)$. Так как $y \in M_+$ следовательно $y \in L_1(M,\mu)$. Следовательно $\mu(y) < \infty$.

Рассмотрим другие случаи

$$hy = \sum_{n\in\mathcal{F}} \frac{1}{n^2 t_n} p_n \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2\, p_n = \sum_{n\in\mathcal{F}} \frac{1}{t_n} p_n$$

таким образом

$$\mu(y) = \tau(hy) = \sum_{n\in\mathcal{F}} \frac{1}{t_n} \tau(p_n) = \sum_{n\in\mathcal{F}} \frac{1}{t_n} t_n = \sum_{n\in\mathcal{F}} 1 = |\mathcal{F}|.$$

где $|\mathcal{F}|$ −кардинальное число для множества $\mathcal{F}$. Так как $\mu(y) < \infty$ то $\mathcal{F} -$ является конечным множеством. Пусть $k = \max\{n : n \in \mathcal{F}\}$. Тогда $\tau(p_n) = 0$ для всех $n > k$, и так как τ- точный след то мы имеем $p_n = 0$, для всех $n > k$, т.е.

$$e_{(n+1)^2} = e_{n^2}.$$

Так как $e_n \uparrow \mathbb{1}$, то $e_{n^2} = 1, \forall \ \ n > k$.

Это говорит о том, что $0 \leq x \leq (k+1)^2\mathbb{1}$, т. е. $x \in \mathbb{Z}$.

Теорема доказана

Утверждение 3.10. Пусть M является типом $I_{n,} n \in N$ алгебры фон Неймана. Тогда $M_f = M$.

Доказательство . Алгебру фон Неймана M типа $I_{n,} n \in N$ можно представить в виде

$M = Z \otimes B(H_n)$, где $Z -$ центр M и H_n n-мерное Гильбертово пространство. Предположим

$$\mathcal{F}_Z = \{\tau/_Z \colon \ \tau \in \mathcal{F}\}.$$

Следовательно из утверждения 3.10 мы имеем

$$M_f = \bigcap_{p\in[1,\infty)} \bigcap_{\tau\in \mathrm{F}} L_p(M,\tau) = \bigcap_{p\in[1,\infty)} \bigcap_{\mu\in \mathrm{F}_Z} L_p(Z,\mu) \otimes B(H_n) = (\bigcap_{p\in[1,\infty)} \bigcap_{\mu\in \mathrm{F}_Z} L_p(Z,\mu)) \otimes B(H_n) =$$

$Z_f \otimes B(H_n) = Z \otimes B(H_n) = M$, т. е. $M_f = M$.

Утверждение 3.11. Пусть $M-$ конечная алгебра фон Неймана , изоморфная прямой сумме для бесконечного числа однородного типа $I_{n,} n \in N$ алгебры фон Неймана. Тогда $M_f \neq M$.

Доказательство. Предположим, что $M = \sum_{k\in K}^{\ominus} M_k$, где $K -$ бесконечное подмножество N, и $M_k -$однородный тип I_k- алгебры фон Неймана.

Таким образом, множество $k -$ бесконечно, так как существует последовательность $\{k_n\} \subset K$ такая, что $k_n \geq 2^n, \ \forall \, n \in N$. Получаем

$$M_{k_n} = Z_{k_n} \otimes B\big(H_{k_n}\big),$$

где Z_{k_n} $-$центр M_{k_n} и

$$N_n = \mathbb{1}_n \otimes B(H_{2^n}) \subset M_{k_n}.$$

Следовательно алгебра M содержит подалгебру *-изоморфную алгебре $N = \sum_{n\in N}^{\oplus} N_n$.

Следовательно $M = \sum_{n\in N}^{\oplus} N_n$, где $N_n = B(H_{2^n})$- алгебра всех $2^n \times 2^n$ матриц над $\mathbb{C}$. На каждой N_n введем единственное точное состояние (точный нормальный полуконечный след) μ_n и установим значение на M следующий точный нормальный конечный след

$$\tau(x) = \sum_{n\in N} 2^{-n}\,\mu_n(x_n),$$

где $x = \sum_{n\in N}^{\oplus} x_n \in M$. Тогда каждый точный нормальный конечный след μ на M представим в виде

$$\mu(x) = \tau(hx) = \sum_{n\in N} 2^{-n}\,\mu_n(\alpha_n x_n) = \sum_{n\in N} 2^{-n}\,\alpha_n\mu_n(x_n),$$

где

$$h = \sum_{n\in N} \alpha_n\,\mathbb{1}_n = L_1(M,\tau)$$

т.е. $\alpha_n > 0, n \in N,\ \sum_{n\in N} 2^{-n}\,\alpha_n < \infty$.

Возьмем наименьший проектор p_n в котором $N_n = B(H_{2^n})$. Тогда $\mu_n(p_n) = \frac{1}{2^n}$.

Пусть $x = \sum_{n\in N}^{\oplus} np_n$ в $S(M)/M$ и $x \in M_f$.

Для каждого точного нормального конечного следа μ на M выполняется

$$\mu(x^p) = \sum_{n\in N} 2^{-n}\,\alpha_n\mu_n(n^p p_n) = \sum_{n\in N} 2^{-n}\,\alpha_n n^p 2^{-n} < \infty$$

так как $n^p 2^{-n} < 1$ для $n \in N$. Следовательно $x \in L_p(M,\mu)\ \forall\ p \geq 1$ и каждого точного нормального конечного следа $\mu \in \mathcal{F}$, т. е. $x \in M_f$.

Утверждение 3.12. Пусть M −алгебра фон Неймана типа II_1 с точным нормальным конечным следом τ, тогда $M \neq M_f$.

Доказательство (Теорема 3.9.). Импликация (1) ⇒ (2) следует из утверждения 3.11 и 3.12 ,а (2) ⇒ (1) следует из утверждения 3.2.

Теорема 3.13. Пусть $M -$ конечная алгебра фон Неймана и предположим, что $\mathcal{F} \neq \emptyset$ - семейство всех точных нормальных конечных следов на M. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1) $M_f = L^{\omega}(M,\mu)$ для некоторых $\mu \in \mathcal{F}$;

2) (M_f, t) –метрезуемо;

3) (M_f, t) –рефлекксивно;

4) Центр Z на $M -$ конечномерен, т.е. $M = \sum_{i=1}^{m} M_i$, где все M_i есть I_n –факторы или II_1 –факторы.

Доказательство. Предположим, что $Z -$ конечномерно. Тогда M –конечная прямая сумма факторов M_i, $i = \overline{1,k}$. Тогда для каждого фактора M_i алгебры $(M_i)_f$ и $L^{\omega}(M_i, \mu_i)$ совпадает и топология t_i подобна $t_i{}^{\mu}$. Следовательно

$$M_f = \left(\sum_{i=1}^{m} M_i\right)_f = \sum_{i=1}^{m} (M_i)_f = \sum_{i=1}^{m} L^{\omega}(M_i, \mu_i) = L^{\omega}(M,\mu),$$

где $\mu = \sum_{i=1}^{m} \mu_i \in \mathcal{F}$, т.е. $M_f = L^{\omega}(M,\mu)$.

Поскольку топология t^{μ} на алгебре Аренса $L^{\omega}(M,\mu)$ метризуема, из этого следует, что $t = t^{\mu}$ также метризуема.

В [34] показано, что для конечного следа μ алгебры Аренса $(L^{\omega}(M,\mu), t^{\mu})$ рефлексивна и следовательно (M_f, t) также рефлексивно.

Следовательно (4) $\Rightarrow (1), (2), (3)$.

(1) $\Rightarrow$(4) предположим, что $M_f = L^{\omega}(M,\mu)$ для подходящего $\mu \in \mathcal{F}$. Тогда существует последовательность взаимно ортогональных проекторов $\{p_n\}$ в Z, таких, что $p_n \neq 0 \quad \forall \ n \in N$. Так как след $\mu -$ конечен, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(p_k) < \infty$$

и следовательно существует подпоследовательность $\{n_{k_i}, k \in N\}$ такая, что $\mu(p_{n_k}) \leq \frac{1}{2^k} \quad \forall\, k \in N$.

Множество

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} k\, p_k$$

для $p \geq 1$ имеем

$$\mu(|x|^p) = \sum_{k=1}^{\infty} k^p \mu(p_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} k^p\, \frac{1}{2^k} < \infty$$

и следовательно $x \in\ L^{\omega}(M, \mu) = M_f$.

В других случаях x —центральный элемент в M_f и утверждение 3.1. показывает, что $x \in Z(M_f) = Z \subset M$. Также видно, что элемент x неограничен , т.е. $x \notin M$. Следовательно $Z -$ конечномерно.

(3) ⇒(4) предположим, что M_f —рефлексивно. Тогда центр $Z(M_f\ ) = Z$ также рефлексивен, так как является замкнутым подпространством рефлексивного пространства.

Множество

$$B = \{x \in Z :\ \ \|x\|_{\infty} \leq 1\ \}$$

цилиндр в (Z, t) и так как Z —рефлексивно, то B окружность нуля в Z.

Следовательно существует $p \geq 1, \mu \in \mathcal{F}$ и $\varepsilon > 0$ таккое, что

$$\left\{\boldsymbol{x} \subset Z :\ \|x\|^{\mu}{}_{p}\ \leq \boldsymbol{\varepsilon}\right\} \subseteq \boldsymbol{B}$$

т.е. $\|x\|_{\infty} \leq \varepsilon^{-1}\|x\|^{\mu}{}_{p} \quad \forall\, x\ \in Z.$

Из этого следует, что $Z -$ конечномерно.

3. Приложение теории интегрирования для функциональных пространств.

1) Рассмотрим следующий пример

$$g(x) = \begin{cases} |\ln x| \ , \text{при} \quad x \in (0,1) \\ \quad 0, \text{при } x \in [1, \infty) \end{cases}$$

$$\int_0^\infty |g(x)|^p dx = \int_0^1 |g(x)|^p dx = \int_0^1 |ln\, x|^p dx = \int_0^1 (-ln)^p\, x dx$$

$$= \int_0^1 (-1)^p\, ln^p\, x dx = (-1)^p x \quad ln^p\, x\, |_0^1 - \int_0^1 p\, (-1)^p\, ln^{p-1}\, x dx$$

$$= -\int_0^1 p\, (-1)^p\, ln^{p-1}\, x dx$$

$$= (-1)^{p+1}\, ln^{p-1}\, xpx\, |_0^1 - \int_0^1 (-1)^{p+1} (p-1) p\, ln^{p-2}\, x dx$$

$$= (-1)^{p+2} p(p-1)\, ln^{p-2}\, x\, |_0^1$$

$$- \int_0^1 (-1)^{p+1} (p-1)(p-2) p\, ln^{p-3}\, x dx = \cdots =$$

$$= -\int_0^1 (-1)^{p-(p-1)}\, p(p-1) \ldots (p-p+1)\, ln^0\, x dx = -(-1) \int_0^1 p!\, dx =$$

$$= \int_0^1 p!\, dx = p!\, x|_0^1 = p!.$$

Таким образом, получаем, что $g(x) \in L_A(0, \infty)$.

2) Рассмотрим пример следующей функции

$$g(x) = e^{-x}$$

$$\int_0^\infty (e^{-x})^p dx = -\int_0^\infty (e^{-x})^{p-1} d\, e^{-x} = \frac{xe^{-x}}{p}\, |_0^\infty = -\frac{1}{p} e^{-\infty p} + \frac{1}{p} e^0 = \frac{1}{p}$$

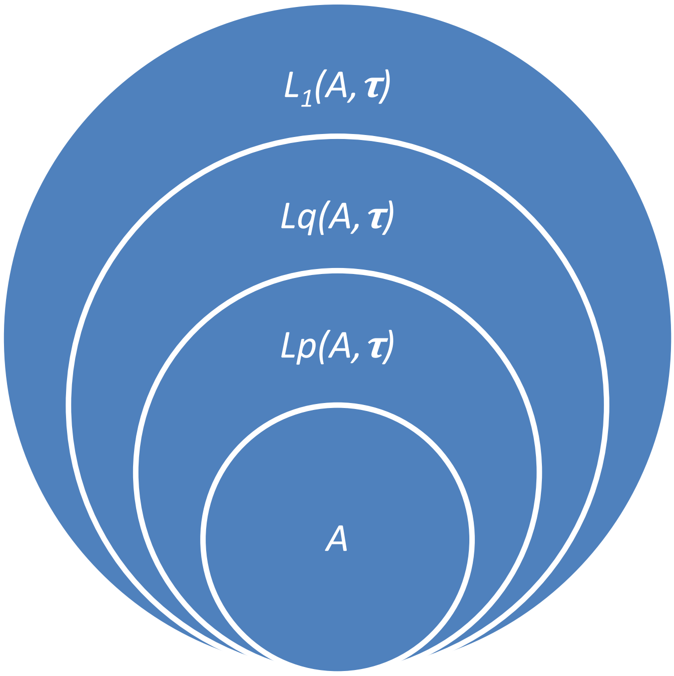
Таким образом, получаем, что $g(x) \in L_A(0,\infty)$.

3) В случае конечного следа имеют место следующие включения

$$A \subset L_p(A,\tau) \subset L_q(A,\tau) \subset L_1(A,\tau),$$

где $1 \leq q \leq p < \infty$ τ –конечный след, а A – произвольная JBW- алгебра.

$L_1(A,\tau)$



Если $a \in L_p(A,\tau)$, $|a| \geq 1$ и $|a|^q \leq |a|^p \implies a \in L_q(A,\tau)$.

ВЫВОДЫ ПО ГЛАВЕ 3

Данная глава была направленна на изучение свойств йордановых алгебр, построение и изучение различных функций, основные свойства следовых алгебр.

В этой главе были подробно разобраны свойства йордановых алгебр на конкретных примерах. Было изученно симметризованное умножение, частный случай неассоциативного умножения.

Во втором параграфе данной главы разобраны примеры и свойсьва следовых алгебр. Подробно рассморенны случаи. Когда следовая алгебра и алгебра Аренса совпадают, а когда различны между собой.

В третьем параграфе Главы 3 подобраны конкретные функции , которые принадлежат пространствам Аренса, интегрируемы в р- ой степени.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цели и задачи поставленные перед написанием данной диссертационной работы были выполненны и достигнуты.

В первой главе были введены основные понятия , теоремы, леммы и свойства необходимые для раскрытия темы в дальнейшем. В первом параграфе на основе работы [6] была введена алгебра фон Неймана, основные свойства алгебр фон Неймана, их классификация.

Во втором параграфе первой главы было введено пространство L_1 на алгебрах фон Неймана на основе работы [27,28]. В третьем и четвертом параграфе данной главы раскрыта проблема построения некоммутативного пространства L_2 и L_p.

Вторая глава посвящена построению различными способами пространств Аренса . в ней раскрыты такие определения как пространство Аренса, алгебра Аренса. Основанием исследования является работа [7] , в которой введены некоммутативные пространства Аренса, ассоциированные с произвольными точными нормальными локально конечными весами, заданными на полуконечной алгебре фон Неймана. Также упор делается на научную работу [6] , где рассматривается построение некоммутативного случая пространств Аренса и условие того, чтобы пространства Аренса было алгеброй для случая α=1. На основе этой статьи в данной диссертационной работе приведен и доказан случай для α=0.

Также большой упор делался на изучение работ Трунова В.И., который внес большой вклад в развитие интегрирования и дифференцирования на алгебрах фон Неймана.

На основе всей предложенной литературы строятся различные некоммутативные и коммутативные случаи данных приведенных пространств, рассматривается геометрическая интерпретация функциональных пространств, исследуются теоремы интегрирования на алгебрах фон Неймана.

С учётом научного и практического потенциала математики, её отраслевой структуры намечено обосновать круг теоретических и прикладных задач всех основных подразделений системы интегрирования на алгебрах фон Неймана.

Систематизация совокупности научных принципов и методов изучения выпуклых функций.

Доказательство теорем и приведение других случаев для рассмотрения в доказательстве.

В третьей главе – “Интегрирование на йордановых алгебрах ” – на основе анализа изученной литературы рассматривается построение йордановых алгебр. Подробно рассматриваются и разбираются примеры из данного раздела.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

I. Законы Республики Узбекистан

1. Национальная программа по подготовке кадров (// Гармонично развитое поколение – основа прогресса Узбекистана.)– Т.: Шарк, 1997.)
2. Закон Республики Узбекистан «Об образовании», 1997.

II. Произведения И.А. Каримова

3. Каримов И.А. Узбекистан, устремлённый в XXI век. - Ташкент. Узбекистан, 1999.
4. Каримов И.А. Великое будущее – это высокая духовность народа. – В кн.: Мыслить и работать по-новому – требование времени. – Т.: 1997.
5. Каримов И.А. Своё будущее мы строим своими руками. – Т.: 1999.
6. Каримов И.А. Оказывать доверие молодым, воплощать их инициативу и способности – приоритетная задача сегодняшнего дня. – Том 14. – Т., 2006.

III. Основная литература

7. Abdullaev R.Z. Classification of non- commutative Arens Algebras associated with semi-finite traces. Algebra and Operator Theory. Kluwer Academic Publishers, 1997, p. 177-181
8. Abdullaev R.Z., Chilin V.I. Arens algebras, assiciated with commutative von Neumann algebras. Ann. Math. Blaise Pascal, Vol. 5, № 1, 1998, p. 1-12
9. Ajupov Sh., Abdullaev R.Z. On isometries of non- associative L_p -spaces. Lectures Notes in mathematics, springer , 1998, Quantum Probabiliti and Applications, IV. Proceeding, Roma, 1987

10. Albverio S., AyupovSh.A., Abdullaev R.Z. Arens Spaces associated with von Neumann algebras and normal states J. of functional Analysis-2008
11. Arens.R. The space $L^{\omega}(0;1)$ and convex topological rings. Bull. Amer.Math.Soc.,52,1946.
12. Dexmier J. Formes lineaires sur un anneu d'operateurs.- Bull.Soc.Math. France, 1953, t. 81, p. 9-39
13. Pedersen G.K., Takesaki M. The Radon-Nicidym theorem for von Neumann algebras. Acta.Math. 1973, v. 130, № 1-2, p.57-87
14. Segal I. A non commutative extension of abstract integration. Ann . of Math. 1953, vol. 57, p. 401-457
15. Takesaki M. Theory of operator algebras. I. New-York Heidelberg Berlin: springer, 1979, XII +415 p
16. Yeadon F.J. Non- commutative L_p spaces. Math. Proc. Cambriage Phil. Soc., 1975, v. 77, № 1, p. 91-102
17. Абдуллаев Р.З. L_p - пространство для йордановых алгебр. Доклады АН УзССР,№ 9
18. Абдуллаев Р.З. Неассоциативные L_p - пространства. Известия Ан УзССР, № 6-83 4
19. Абдуллаев Р.З. Критерий изоморфности некоммутативных алгебр Аренса . Изв.ВУЗов 1998, № 11
20. Абдуллаев Р.З. Классификация σ −конечных алгебр Аренса типа I. Доклады АН Уз 1999, № 1
21. Абдуллаев Р.З. Пространства сопряженные к некоммутативным алгебрам Аренса. Узб.мат.журнал. 1997, № 2, с.3-7
22. Абдуллаев Р.З. Изоморфизмы некоммутативных алгебр Аренса. Доклады АН РУз 1997, № 8, с. 8-10
23. Абдуллаев Р.З., Хикметов Б.А. Пространства, сопряженные к неассоциативным алгебрам Аренса. Узб.Мат Журнал. 1998, № 5

24. Абдуллаев Р.З., Хикметов Б.А. Сопряженные пространства к неассоциативным L^{ω} - пространствам. Тезисы Третьего Сибирского конгресса по прикладной и индустриальной математике. Июнь 1998
25. Аюпов Ш.А, Абдуллаев Р.З.Центрозначные следы на JW- алгебрах и обертывающих алгебрах фон Неймана. Доклады АН УзССР № 8.,1991
26. Аюпов Ш.А, Абдуллаев Р.З. Алгебры Аренса на йордановых операторных алгебрах и на обертывающих алгебрах фон Неймана. Узб.Мат.Журнал, 1998, № 3, с. 11-17
27. Аюпов Ш.А. О конструкции йордановых алгебр самосопряженных операторов. Доклады АН , 1982, т.367,3,с. 521-524
28. Аюпов Ш.А. интегрирование на йордановых алгебрах. Известия АН СССР, серия математическая, 1983, т. 47,1, с. 3-25
29. Владимиров Д.А.Булевы алгебры. «Наука». Москва. 1969
30. Закиров Б.С. Некоммутативные алгебры Аренса. Узб.мат.жур.1997. №1.с. 17-24
31. Золотарев А.А. Пространства L_p относительно состояния на алгебре Неймана и интерполяция. Изв.ВУЗов. матем., 1982,№ 8, с.36-43
32. Жевлаков К.А., Слинько А.М.,Шестаков И.П., Ширшов А.И. Кольца, близкие к ассоциативным.-М.:Наука,1978, 432 с.
33. МуратовМ.А.,ЧилинВ.И.,К вопросу об определении некоммутативного пространства L1(M,t)измеримых операторов, присоединенных к полуконечной алгебре фон Неймана,Динамические системы 2007
34. Сарымсаков Т.А., Аюпов Ш.А., Хаджиев Дж., Чилин В.И. Упорядоченные алгебры. Ташкент, Фан, 1983, 304 с.
35. Тихонов О.Е. Пространства типа L_p относительно веса на алгебре Неймана. Изв.ВУЗов.Матем., 1982,№8,с. 76-78

36. Трунов Н.В. , Шерстнев А.Н. К общей теории интегрирования в алгебрах операторов относительно веса. I.- Изв.ВУЗов.Матем.,1978, №7,с.79-88
37. Трунов Н.В. О некоммутативном аналоге пространства L_p .- Изв.ВУЗов. Матем, 1979,№11 , с. 69-77
38. Трунов Н.В. Пространства L_p , ассоциированные с весом на полуконечной алгебре Неймана.- В сб.: Конструктивн. Теория функций и функц. анализ. Казань, 1981, вып. 3, с. 88-92.
39. Трунов Н.В. Интегрирование в алгебрах Неймана и регулярные веса.-В сб.: Конструктивн.теория функций и цункц. анализ. Казань, 1981, вып. 3, с. 73-87
40. Трунов Н.В. К теории нормальных весов на алгебрах Неймана. Изв.ВУЗов.Матем., 1982, № 8, с.61-70
41. Шерстнев А.Н. К общей теории состояний на алгебрах фон Неймана. Функциональный анализ и его приложение, 1974, т.8, № 3, с.89-90
42. Шерстнев А.Н. Каждый гладкий вес является *l*-весом.- Изв.ВУЗов.Маетем. , 1982, № 8, с. 88-91
43. Шерстнев А.Н. К общей теории меры и интеграла в алгебрах Неймана. Изв.ВУЗов.Матем. 1982,№ 8., с. 20-35

IV. Интернет-ресурсы

44. www.msu.ru
45. www.mathnet.ru/tmf1332
46. www.old.kpfu.ru/journals/izvestiya/02-10.pdf
47. www.lektorium.tv/course/22948
48. www.ium.mccme.ru/ss10/neumann.html
49. www.lib.sernam.ru
50. www.eudml.org

ГЛОССАРИЙ

№	Определение на русском языке	Определение на английском языке	Определение на узбекском языке
1	*-алгебра	*-algebra	*- algebra
2	Алгоритм	Algorithm	Algoritm
3	автоморфизм	Automorphism	Aftomorfizm
4	Абсолютная величина	Absolute values	Absolyut qiymat
5	Возрастание функции	Increasing of function	O’suvchi funksiya
6	Внутренняя точка	Inside point	Ichki nuqta
7	Гиперболическое уравнение	Hyperbolic equation	Giperbolik tenglama
8	Дифференцирование	Differentiation	differensiallash
9	Дифференциальное уравнение	Differential equation	Differensial tenglama
10	Дифференциальное исчисление	Differential calculus	Differensial hisob
11	Замкнутая область	Closed region	Yopiq to’plam
12	Задача	Problem	Masala
13	Интервал	Interval	interval
14	Интегрирование по частям	Integration by parts	Bo’laklab integrallash
15	Классификация	Classification	Klassifikatsiya
16	Кусочно гладкая	Pieced flat	Bo’lakli silliq
17	Конечный предел	Limited boundery	Chekli limit
18	Локаль	Local	Lokal
19	Линия	Line	chiziq
20	многочлены	Polynomials	Ko’phadlar
21	Множество	Set	Ko’p
22	математика	Mathematics	Matematika
23	Матрица	Matrix	Matritsa
24	Метод	Method	Metod
25	Начальные условия	The initial condition	Boshlang’ish shart
26	Неопределенный интеграл	Idenfinite integral	Aniqmas integral
27	Непрерывная функция	Continuity of function	Uzluksiz funksiya

28	Неявная функция	Implicit function	Oshkiyormas funksiya
29	Норма	Norm	Norma
30	Область определения	Domain of definition	Aniqlanish soha
31	Общий интеграл	General integral	Umumiy integral
32	Область	Region	soha
33	Определенный интеграл	Definite integral	Aniq integral
34	ограниченность	Bounded	chegaralangan
35	Односвязная область	Limited sphere	Bir bog'lamli soha
36	отрицательный	Negative	Manfiy
37	пополнение	Replenishment	Tuldirish
38	Предел	Limit	Limit
39	Производная функции	Derivatives of function	Funksiyaning hosilati
40	Плоскость	Plane	Tekislik
41	Параметр	Parameter	Parametr
42	След	Trace	Nishon
43	Состояние	Condition	Holati
44	утверждение	Assertion	Tasdiqlash
45	Теорема	Thetheorem	Teorema
46	Топология	Topology	Topologiya
47	Функция	Function	Funksiya
48	Функция многих переменных	The function of bread change	Ko'p o'zgaruvchili funksiya
49	Функция одной переменной	The function of one change	Bir o'zgaruvchili funksiya
50	Экстремум	Ekstreme	Eksrtremum