

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS
TA'LIM VAZIRLIGI**

NIZOMIY NOMIDAGI TDPU

Fizika –matematika fakulteti

“Matematika ” ta'lim yo'nalishi bo'yicha bakalavr darajasini olish uchun

Mavlonova Hafiza

Kenja qizining

“Normal topologik fazoda funksiyalarni uzluksiz davomlashtirish”

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Ilmiy rahbar

Jo'raev T

“ _____ ” _____ **2014 y.**

Toshkent-2014

Mavzu: Normal topologik fazoda funksiyalarni uzluksiz davomlashtirish

Reja:

I. Kirish:

1§. Topologik fazolar. Misollar.

2§. Metrik fazolar. Misollar.

3§. Topologik va metrik fazolarda uzluksiz akslantirishlar.

II. Asosiy qism:

4§. Topologik fazolarda retrakt tushunchasi.

5§. Topologik fazolarda akslantirishlarni uzluksiz davomlashtirish.

6§. Normal fazolarda funksiyalarni uzluksiz davomlashtirish.

III. Xulosa

IV. Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati

Mundarija

KIRISH.....	3
-------------	---

I Bob. Metrik va topologik fazolar

1.1§ Topologik fazolar.

Misollar.....	
---------------	--

1.2§ Metrik fazolar.

Misollar.....	
---------------	--

1.3§ Topologik va metrik fazolarda uzluksiz akslantirishlar

.....

II Bob. Akslantirishlarni uzluksiz davomlashtirish

2.1§ Topologik fazolarda retrakt

tushunchasi.....	
------------------	--

2.2§ Topologik fazolarda akslantirishlarni uzluksiz davomlashtirish

.....

2.3§ Normal fazolarda akslantirishlarni uzluksiz

davomlashtirish.....	
----------------------	--

XULOSA.....	
-------------	--

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

RO'YXATI.....	
---------------	--

Ilova.....	
------------	--

Kirish

Mavzuning dolzarbligi: Vatanimiz mustaqillikka erishgach, Prezidentimiz I.A.Karimov rahnomaligida ta'lim tizimini tubdan takomillashtirish, yoshlarga jahon andozalari darajasida bilim berish yuksak intellektual salohiyatli, boy dunyoqarashga ega barkamol avlodni tarbiyalash davlat siyosatining ustuvor yo'nalishiga aylanadi.

Prezidentimiz ushbu sohaga Respublikamiz mustaqillikka erishish arafasidan e'tibor qaratdilar. "Fan mustahkam baza negizidagina samarali rivojlanishi mumkin, shu munosabat bilan sizlarning e'tiboringizni xalq ta'limi butun sistemasini, eng avvalo, oliy maktabni isloh qilish zarurligiga qaratmog'imiz kerak".[1]

Prezidentimiz ta'limning jamiyat rivojidagi o'rniga "shuni unutmasligimiz kerakki, kelajak poydevori bilim dargohlarida yaratiladi, boshqacha aytganda xalqimizning ertangi kuni qanday bo'lishi farzandlarimizning bugun qanday ta'lim va tarbiya olishga bog'liq." [2] deya baho beradilar.

Bosib o'tilgan 22 yil mobaynida ta'lim sohasida amalga oshirilayotgan islohatlar samaralari, to'plangan tajribalar bilan keng jamoatchilikni tanishtirish maqsadida 16-17-fevral kunlari Toshkentda "Yuksak bilimli va intellektual rivojlangan avlodni tarbiyalash mamlakatni barqaror taraqqiy ettirish va modernizatsiya qilishning mumkin sharti" mavzusidagi xalqaro konferensiya katta muvoffaqiyatli o'tdi. Prezidentimiz ushbu konferensiyada so'zlagan nutqida ta'lim sohasida amalga oshirgan ishlar, qo'lga kiritilgan yutuqlarni ta'kidlab o'tar ekanlar, kelgusida amalga oshirilishi lozim bo'lgan vazifalarni ham belgilab beradilar. [3]

Yoshlarning bilim olishlari uchun yaratilayotgan sharoit, katta e'tibor ularga katta ma'suliyat ham yuklaydi.

Yoshlarning ijodiy va intellektual salohiyatini ro'yobga chiqarish uchun sharoitlar yaratish, fanni yanada rivojlantirish hamda iste'dodli, iqtidorli yoshlarni ilmiy faoliyatiga jalb qilish bugungi kunda ta'lim berishning asosiy tamoyillaridan biriga aylandi. [3]

Ilm-fan taraqqiyotiga yuksak e'tibor bergan davlatlar bugungi kunda har jihatdan rivojlangan davlatlarga aylanmoqda. Fuqorolari esa farovon yashamoqdalar.

“Kuch bilim va tafakkurda ” degan hikmatli soʻz Prezidentimiz Islom Karimovga tegishli. Shuning uchun ham Oʻzbekiston davlati mamlakatda ilm-fan ahliga-olimlarga samarali ishlari uchun zarur sharoit yaratib berishni oʻz burchi deb hisoblaydi.

Yoshlarning bilim olishlari uchun yaratilayotgan sharoit, katta eʼtibor ularga katta maʼsuliyat ham yuklaydi, Oʻzbekiston Respublikasining mustaqillikka erishishi xalq xoʻjaligining, fan, madaniyat, sanʼatning rivojlanishiga keng yoʻl ochib berdi. Ayniqsa, u xalq taʼlimning rivojlanishiga, birinchi navbatda, oliy taʼlimning rivojlanishiga keng imkoniyatlar ochdi. Natijada mamlakatimizda taʼlimni isloh qilishga, mutaxassislar tayyorlashni jahon andozalariga yaqinlashtirishga kirishildi. Oʻzbekiston Respublikasi “Taʼlim toʻgʻrisida”gi qonuni va “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi”ning qabul qilinishi taʼlimni isloh qilish uchun huquqiy asos boʻldi.

Bu oʻrinda taʼlim mazmuni shaxsning shakllanishi va rivojlanishi uchun muhim sanaladi. Shu sababli taʼlim mazmuni insonparvarlikka yoʻnaltirilgan gumanistik gʻoya va meʼyorlarni oʻzida mujassamlashtirgan boʻlishi lozim. [5]

Oʻzbekiston Respublikasining “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” [4] talablardan biri taʼlim oluvchilarni oʻqitishni jadallashtirish sanaladi.

Mazkur bitiruv malakaviy ishining obʼekti- Topologik va metric fazolar, ularda uzluksiz akslantirishlar, normal topologic fazolarda akslantirishlarni uzluksiz davomlashtirish va ularning xossalarini aniqlashdan iborat.

Bitiruv malakaviy ishining predmeti- Topologik fazo, metric fazo va normal topologic fazolar, ularda akslantirishlarni uzluksiz davomlashtirishni aniqlashdan iborat.

Bitiruv malakaviy ishining maqsadi- Normal topologic fazolarda akslantirishlarni uzluksiz davomlashtirish va ularning xossalarini, tadbiqlarini oʻrganishdan iborat.

Bitiruv malakaviy ishining vazifalari quyidagilardan iborat:

- Topologik fazo tushunchasini oʻrganish;
- Metrik fazo tushunchasini oʻrganish;
- Topologik va metrik fazolarda uzluksiz akslantirishlar oʻrganish;
- Topologik fazolarda rektakt tushunchasini oʻrganish;
- Topologik fazolarda akslantirishlarni uzluksiz davomlashtirishni oʻrganish;
- Normal fazolarda funksiyalarni uzluksiz davomlashtirishni oʻrganish;

Bu vazifalarni bajarish jarayoni bitiruv malakaviy ishining tarkibiy tuzilmasini belgilab berdi. Unga ko'ra bitiruv malakaviy ish kirish, ikki bob, oltita paragraf, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat bo'ldi.

Birinchi bobda "Metrik va topologic fazolar" haqida.

Ikkinchi bobda esa "Akslantirishlarni uzluksiz davomlashtirish" haqida ma'lumotlar keltirilgan.

1§. Topologik fazolar. Misollar.

Ixtiyoriy “tabiatli” bo‘sh bo‘lmagan X to‘plam va $\tau = \{U_\alpha : U_\alpha \subseteq X, \alpha \in A\}$ sistema (shu X to‘plamning to‘plamostilardan tashkil topgan) berilgan bo‘lsin.

1.1-ta’rif. Agar τ sistema (to‘plamostilar oilasi) quyidagi:

1) $\emptyset, X \in \tau$;

2) τ sistemaning ixtiyoriy sondagi elementlarining birlashmasi τ ga tegishli bo‘lsa, ya’ni $\forall A' \subset A$ uchun $\bigcup_{\alpha^1 \in A^1} U_{\alpha^1} \in \tau$; $\alpha^1 A^1$;

3) τ sistemaning ixtiyoriy chekli sondagi elementlari kesishmasi τ ga tegishli bo‘lsa, ya’ni $\forall \alpha_i \in A, i = \overline{1, S} \quad \bigcap_{i=1}^S U_{\alpha_i} \in \tau$ shartlarni qanoatlantirsa, τ sistema X to‘plamdagi topologiya, $(X; \tau)$ juftlik esa, birgalikda topologik fazo deyiladi. $(X; \tau)$ topologik fazo tashkil qilsa, τ sistemaning elementlari ochiq to‘plamlar deb ataladi. Bu ta’rifdagi 1–3-shartlar topologiyaning yoki topologik fazoning aksiomalari deb yuritiladi. Ta’rifdan ma’lumki, X to‘plam qanday bo‘lishidan qat’i nazar, topologik fazodagi ochiq to‘plamlar turlicha bo‘lishi mumkin ekan. Ko‘p hollarda, agar $(X; \tau)$ topologik fazo bo‘lsa, τ sistema topologik struktura, X to‘plam esa, $(X; \tau)$ topologik fazoning yoki topologiyaning ifodalovchisi – eltuvchisi deb ataladi.

1.2-misol. Ikki — a va b elementlardan iborat X to‘plam berilgan deylik. τ sistema sifatida bo‘sh to‘plam, X to‘plamning o‘zini va a dan tashkil topgan to‘plamlar oilasini olamiz, ya’ni $\tau = \emptyset; a, b; a$. Bu τ sistema ta’rifdagi 1–3-shartlarni qanoatlantirishi ravshan. Demak, $(X; \tau)$ juftlik topologik fazodir. Bu fazo topologik sodda qurilganiga qaramasdan, muhim va qiziqarli jihatlarga ega bo‘lganligi uchun maxsus nom bilan “bog‘lamli ikki nuqta” deb yuritiladi.

1.2-misolda, agar τ ni $\emptyset; a; b, b$ ko‘rinishida olsak ham, τ sistema topologiya tashkil qiladi.

Yuqoridagi misollardan ko‘rinadiki, ixtiyoriy bo‘sh bo‘lmagan to‘plamga doimo turlicha topologiya kiritish, ya’ni aniqlash imkoni mavjuddir. Topologiyalarning aniqlanishidan ma’lum bo‘lmoqdaki, ulardagi ochiq to‘plamlar ham turlicha bo‘lishi (topologiyaga qarab) mumkin ekan. Ya’ni, bir topologik strukturaga nisbatan ochiq bo‘lgan to‘plam ikkinchi strukturaga nisbatan ochiq bo‘lmasligi mumkin.

1.3-misol. X ixtiyoriy, albatta, bo'sh bo'lmagan to'plam deylik. $\tau_0 = \emptyset; X$ to'planmani olamiz. Bevosita tekshirib ko'rish mumkinki, $(X; \tau_0)$ juftlik topologik fazo tashkil qiladi. Ya'ni, ta'rifdagi 1–3-shartlar o'rinli. Bu topologik fazo trivial yoki antidisret topologik fazo deb yuritiladi.

1.4-misol. Ixtiyoriy cheksiz X to'plam berilgan bo'lsin. To'plamostilar oilasi τ sifatida $\emptyset, X$ va shunday $U_\alpha \subset X$ to'plamostilarni olamizki, $X \setminus U_\alpha$ to'plam chekli to'plamdan iborat bo'lsin, ya'ni $\tau = \{\emptyset; X; U_\alpha : X \setminus U_\alpha = CU_\alpha \text{ chekli, } \alpha \in A\}$. Bu yerda CU_α bilan U_α to'plamostining X gacha bo'lgan to'ldiruvchisi $X - U_\alpha$ kabi belgilanadi. To'plamlar ustida bajariladigan amallardan ma'lumki, bu τ to'plamlar oilasi ham topologiya tashkil qiladi. Bu topologik fazo Zarisskiy fazosi deb ataladi.

Eslatma: bu yerda $\emptyset$ o'sh to'plamosti ham chekli to'plam hisoblanadi.

Bu topologik fazoning aniqlanishidan ma'lum bo'lmoqdaki (X, τ) Zarisskiy topologiya fazosida chekli to'plam va faqat ular yopiq to'plam ekan.

Shuni ta'kidlash lozimki Zarisskiy fazosi faqat va faqat cheksiz elementli to'plamda aniqlanar ekan.

1-misol. N natural sonlar to'plamini olaylik. Bu to'plamda (N, τ) Zarisskiy topologik fazosini ko'raylik. Bu topologik fazoda ixtiyoriy nuqta (natural sonlar) yoki ixtiyoriy chekli to'plam yopiq to'plamdan iboratdir. Ochiq to'plam esa birorta chekli sondagi natural sonlar kirmagan to'plamdir.

2-misol. R to'g'ri chiziq nuqtalari yoki haqiqiy sonlar to'plamini olaylik.

(R, τ) juftlik Zarisskiy fazosi bo'lsin, R da τ Zarisskiy topologiyasi bo'lsa, R to'g'ri chiziqda ochiq to'plam chekli sondagi ochiq intervallari yig'indisi (birlashnasidan) iboratdir.

Yopiq to'plam esa chekli sondagi to'plamdan iborat bo'ladi.

Zarisskiy topologik fazosining ta'rifidan va keltirgan misollardan ko'rindiki bu fazoda birorta han ochiq va yopiq to'plam faqat $\emptyset$ va X to'plamlardan iborat bo'lar ekan.

3-misol. R^2 tekislikda τ Zarisskiy topologiyasini qaraylik, ya'ni (R^2, τ) juftlik Zarisskiy fazosi bo'lsin. Bu fazoda ochiq to'plam chekli sondagi elementlari kirmagan faqat shu ko'rinishdagi R^2 tekislikning nuqtalaridan iboratdir.

Bu (R^2, τ) Zarisskiy fafosidagi yopiq to'plam chekli sondagi elementlaridan iborat bo'lgan to'plamdan iboratdir.

Shuni ta'kidlashimiz mumkinki ixtiyoriy (X, τ) Zarisskiy topologik fazosida ixtiyoriy X dan farqli sanoqli to'plamostisi ochiq ham yopiq ham to'plam bo'la olmaydi.

Ravshanki, Zarisskiy fazosida ochiq va yopiq to'plamlar anashunday turli-tuman ko'rinishlarga ega ekan.

1.5-misol. X o'plam sifatida sonlar o'qini, ya'ni haqiqiy sonlar to'plami – R^1 ni olaylik. R^1 dagi topologiya esa, quyidagi to'plamostilar oilasidan tashkil topsin. Bo'sh to'plam $\emptyset$ ixtiyoriy intervallar va ularning $U = \bigcup_{\alpha} (a_{\alpha}, b_{\alpha})$ ko'rinishdagi birlashmasi. Ya'ni, $\tau = \{ \emptyset, a, b; \bigcup_{\alpha} (a_{\alpha}, b_{\alpha}) : \alpha \in A, a, b, \bigcup_{\alpha} (a_{\alpha}, b_{\alpha}) : \alpha \in A, \}$

Haqiqiy o'zgaruvchilarning funksiyalar nazariyasi kursidan ma'lumki, bu τ sistema ham topologiya ta'rifidagi 1–3-aksiomalarni qanoatlantiradi. Bunday aniqlangan topologiya to'g'ri chiziqdagi tabiiy topologiya deb yuritiladi.

1.6-misol. X to'plam sifatida R^2 Evklid tekisligini olaylik. Ochiq to'plam sifatida R^2 ning ixtiyoriy nuqtasi va markazi shu nuqtada bo'lgan radiusi yetarlicha kichik bo'lgan ochiq doiralarni, bo'sh to'plamni qarasak, bu barcha ochiq to'plam oilasi topologiya tashkil qiladi.

1.7-misol. Bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy X to'plam berilgan bo'lsin. Topologiya sifatida X to'plamning jami to'plamostilarini olaylik, ya'ni $\{U : U \subseteq X, U \text{ -- ixtiyoriy to'plamosti}\}$. Bu topologik struktura ham X da topologiya tashkil qiladi. Bu topologiya τ_1 topologiya deb qabul qilingan. Bu (X, τ_1) topologik fazo diskret topologik fazo deyiladi.

2§. Metrik fazolar. Misollar.

Matematikaning ko'p qo'llaniladigan tushunchalaridan biri metrik fazo tushunchasidir. Bu tushuncha matematikaga birinchi bor fransuz matematigi M. Freshe tomonidan 1906-yilda kiritildi.

Metrik fazo - bu biror bo'sh bo'lmagan to'plamdagi ikki element (nuqta) orasidagi masofani aniqlash ma'lum demakdir. Bu ikki nuqta orasidagi masofani aniqlash amali ma'lum bir shartlarni (aksiomalarni) qanoatlantirishi shart bo'ladi. Bu shartlar masofa (yoki metrika) aksiomalari deb yuritiladi. Metrik fazo matematikaning deyarli barcha sohalariga tatbiq etiladi. Qolaversa, barcha fanlarda ham turli-tuman ko'rinishda ishlatiladi. Fazoda (to'plamda) ikki nuqta orasidagi masofa ma'lum bo'lsa, nuqtalarning o'zaro "yaqin"ligini, nuqta va to'plamning, qolaversa, ikkita to'plam (figura) "yaqin"ligini aniqlasa bo'ladi. Bu esa, fazoning, figuralarning turli geometrik xossalarini o'rganishda muhim ahamiyatga egadir.

Bo'sh bo'lmagan X to'plam va R haqiqiy sonlar to'plami berilgan bo'lsin.

2.1.-ta'rif. Agar quyidagi shartlar o'rinli bo'lsa, $\rho: X \times X \rightarrow R$ akslantirish X to'plamda metrika deyiladi:

$$(\rho 1). \forall x, y \in X, \rho(x, y) \geq 0;$$

$$(\rho 2). \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$(\rho 3). \rho(x, y) \sim \rho(y, x), \forall x, y \in X \text{ (simmetriklik aksiomasi);}$$

$$(\rho 4). \rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z) \quad \forall x, y, z \in X \text{ (uchburchak aksiomasi).}$$

Agar X to'plam va ρ akslantirish metrika tashkil qilsa, ular birlikda metrik fazo deyiladi va (X, ρ) ko'rinishda yoziladi. Metrikani (X, ρ) metrik fazoda ikki element yoki ikki nuqta orasidagi masofa deb tushuniladi.

2.2-misol. X to'plam sifatida R^1 - sonlar to'g'ri chizig'i yoki X - haqiqiy sonlar to'plami R^1 ni olsak hamda ixtiyoriy x va y sonlar uchun $\rho\{x, y\} = |x - y|$ desak, u holda, ma'lumki, bu ρ metrikaning hamma aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, $(R^1, |x - y|)$ metrik fazo tashkil qiladi.

2.3-misol. R^n - ko'p o'lchovli sonlar fazosi. X sifatida

$\{x = (x_1, \dots, x_n): x_i \in R^1, i = 1, n\}$ ko'rinishdagi to'plamni olaylik. Bu to'plamning ikki x va y elementlari orasidagi metrikaning (masofani)

$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$ formula bilan aniqlaymiz, bu yerda $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in X$.

Ma'lumki, bu ρ metrika tashkil qiladi. Bu fazo n o'lchovli sonlar fazosi deb yuritiladi va R^n ko'rinishda belgilanadi.

Xususiyl holda, agar $n = 2$ bo'lsa, R^2 da Evklid tekisligidagi metrika

$$\rho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}, \quad n=3 \text{ bo'lsa, } R^3 \text{ da Evklid fazosidagi}$$

$$\text{metrika } \rho(x,y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2} \text{ ko'rinishlarda bo'ladi.}$$

2.4-izoh. Bu X to'plamda ko'p hollarda metrika

$$\rho(x,y) = \max |x_i - y_i| \text{ ko'rinishda ham aniqlanadi.}$$

2.5-misol. Diskret metrik fazo. Faraz qilaylik, X bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy to'plam bo'lsin. X to'plamda ikki element: x va y orasidagi metrika (masofa)ni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\rho(x,y) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x = y; \\ 1, & \text{agar } x \neq y. \end{cases}$$

Bu $\rho(x,y)$ metrika tashkil qiladi va diskret metrika deyiladi. (X, ρ) f diskret metrik fazo deb yuritiladi.

Shuni aytish kerakki, bu ko'rinishda fazoni metrikalashtirish doim ham mazmunli bo'lavermaydi. Shu sababli doimo fazoni diskret bo'lma- n metrika bilan ta'minlash mazmunliroq bo'ladi va ko'p o'rganiladi.

2.6-izoh. Agar A to'plam (X, ρ) metrik fazoning ixtiyoriy bo'shbo'lmagan to'plamostisi bo'lsa, A to'plamning ixtiyoriy x_1 va x_2 elementlari uchun bu ikki element orasidagi masofani (metrikani) $\rho_A(x_1, x_2) = \rho(x_1, x_2)$ deb olsak, u holda A to'plamostida metrika bo'ladi. Bu metrika ρ_A induksirlangan metrika deb yuritiladi. (A, ρ_A) metrik fazo esa, (X, ρ) metrik fazoning fazoostisi deb yuritiladi. Agar A va B to'plamlar (X, ρ) ning bo'sh bo'lmagan to'plamostilari bo'lsa, bu A va B to'plamlar orasidagi masofa sifatida $\rho(A, B) = \inf \rho(x, y)$ son qabul qilingandir. Xususiyl holda $\rho(x_0, X) = \inf \rho(x_0, x)$ soni x_0 nuqtadan A to'plamgacha bo'lgan masofa deb ataladi. Xullas, M to'plamning diametri deb $diam M = \sup \rho(x, y)$ songa aytiladi. Bu yerda $M \subset X$.

Nihoyat, agar $diam M < \infty$ o'rinli bo'lsa, M to'plam chegaralangan to'plam deyiladi. Metrik fazolarga doir misollar ba'zi hollarda matematik analizga doir masalalarni hal qilishda yuzaga chiqmoqda.

2.6-misol. $[0,1]$ kesmada uzluksiz bo'lgan barcha funksiyalar to'plamini olaylik. Bu to'plam $C_{[0,1]}$ ko'rinishda belgilanadi. Agar $x(t), y(t)$ funksiyalar $C_{[0,1]}$ ning ixtiyoriy uzluksiz funksiyalari bo'lsa, ular orasidagimasofani

$\rho(x, y) = \max |x(t) - y(t)|$ shaklda aniqlaymiz. Matematikanaliz kurslaridan ham ma'lumki, bu ρ funksiya $C_{[0,1]}$ da metrika tashkil qiladi. $C_{[0,1]}$ uzluksiz funksiyalar fazosi deb ataladi.

$C_{[a,b]}$ to'plamda $\rho(x, y) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - y(t)|$ metrika bo'lishini tekshirish qiyin emas. Metrika aksiomalaridan birinchi va ikkinchisining o'rinishi ravshan. Uchburchak aksiomasini tekshiramiz. Ixtiyoriy $t \in [a, b]$ nuqta va $x(t), y(t)$ va $z(t)$ funksiyalar uchun ushbu munosabat bajariladi:

$$|x(t) - y(t)| = |(x(t) - z(t)) + (z(t) - y(t))| \leq |x(t) - z(t)| + |z(t) - y(t)|$$

Bu tengsizlikdan

$$\max_{[a,b]} |x(t) - y(t)| \leq \max_{[a,b]} |x(t) - z(t)| + \max_{[a,b]} |z(t) - y(t)|$$

Kelib chiqadi. Oxirgi tengsizlik $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$ ekanligini bildiradi.

1.2.7-misol: $C_{[a,b]}[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lgan barcha funksiyalar to'plami bo'lsa, bu to'plamda metrikani quyidagicha ham kiritish mumkin:

$$\rho(x, y) = \int_a^b |x(t) - y(t)| dt$$

Bu metric fazo $C_1[a, b]$ orqali belgilanadi.

1.2.8-misol: $[a, b]$ kesmada uzluksiz funksiyalar to'plamida

$$\rho(x, y) = \left(\int_a^b (x(t) - y(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}}$$

Funksiya metrika aksiomalarini qanoatlantiradi. Bu metric fazo $C_2[a, b]$ orqali belgilanadi.

1.2.9-misol: n -o'lchamli fazoning

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

Nuqtalari orasidagi masofani

$$\rho(x, y) = \sum_{i=1}^n |y_i - x_i|$$

Kabi aniqlash mumkin. Bu metric fazo R_1^n orqali belgilanadi.

1.2.10-misol:

$$X = \left\{ x = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots), x_i \in R, \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 < +\infty \right\}$$

To'plamda x va y nuqtalar orasidagi masofani

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} (y_i - x_i)^2}$$

Kabi aniqlash mumkin. Bu metric fazo l_2 orqali belgilanadi.

3§. Topologik va metrik fazolarda uzluksiz akslantirishlar.

Uzluksiz akslantirishlar topologiyaning eng asosiy va ko'p qo'llaniladigan tushunchalaridan biri hisoblanadi.

X va Y lar har xil topologik fazolar deylik.

Ta'rif. Agar $f: X \rightarrow Y$ akslantirishda, $y_0 = f(x_0)$ obrazning ixtiyoriy V atrofi uchun x_0 nuqtaning shunday U atrofi topilsa va u $f(U) \subset V$ ni qanoatlantirsa, u holda f akslantirish X topologik fazoning $x_0 \in X$ nuqtasida uzluksiz deyiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, y_0 nuqta atrofining proobrazi x_0 nuqta uchun atrof bo'la oladi.

Agar $f: X \rightarrow Y$ akslantirish X fazoning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, f akslantirish X fazoda uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz akslantirishga trivial misol sifatida $i_x: X \rightarrow X$ ayniy akslantirishni olish mumkin. Bu akslantirish X ning har bir x nuqtasiga yana shu $i(x) = x$ nuqtasini mos qo'yadi.

Bundan ko'rinadiki, u har bir nuqtada uzluksizdir.

Misol. Agar $\sin: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ni olsak, ya'ni har bir $x \in \mathbb{R}$ ga $\sin x$ ni mos qo'ysak, bu akslantirish uzluksizdir.

Misol. Agar $\arctg: \mathbb{R}^1 \rightarrow (-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2})$ akslantirishni olsak, bu akslantirish uzluksiz va biektiv akslantirishdir. Bunga teskari akslantirish $tg: (-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^1$ ham uzluksizdir.

Uzluksiz akslantirishlar quyidagi asosiy xossaga ega bo'lib, bu xossa ularni to'la tavsiflaydi.

Teorema. $f: X \rightarrow Y$ akslantirish uzluksiz bo'lishi uchun Y dagi ixtiyoriy ochiq $V \subset Y$ to'plamning $f^{-1}(V)$ proobrazi (asli) X fazoda ochiq to'plam bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bizga ma'lumki, ochiq to'plamlarning to'ldiruvchisi yopiq bo'lganligidan va uzluksiz akslantirishlar ta'rifidan quyidagini tasdiqlash mumkin.

Teorema. $f: X \rightarrow Y$ akslantirish uzluksiz bo'lishi uchun Y fazodagi ixtiyoriy yopiq to'plamning proobrazi X fazoda yopiq bo'lishi zarur va yetarlidir.

Uzluksiz akslantirishga misol sifatida quyidagini aytishimiz mumkin:

ixtiyoriy $f: X \rightarrow Y$ akslantirishda X fazo diskret fazo bo'lsa, yoki Y antidiskret fazo bo'lsa, bu akslantirish doimo uzluksiz bo'ladi.

Bulardan xulosa qilib aytishimiz mumkinki, $f: X \rightarrow Y$ ning uzluksiz bo'lishi bu fazolardagi topologiyalarga bog'liq ekan. Masalan, bir X to'plamda ikki xil topologiyani olsak, u holda $i_x: X \rightarrow Y$ ayniy akslantirish doimo uzluksiz bo'lavermaydi.

Uzluksiz akslantirishlarning oddiy, biroq muhim xossaligidan biri shuki, bir necha uzluksiz akslantirishlarning kompozitsiyasi yana uzluksiz akslantirishdan iborat bo'ladi.

Teorema. Agar $f: X \rightarrow Y$ va $g: X \rightarrow Z$ uzluksiz akslantirishlar bo'lsa, u holda ularning kompozitsiyasi $h = g \circ f: X \rightarrow Z$ uzluksiz bo'ladi.

Topologiyaning ko'pgina masalalarini bayon qilishda ochiq va yopiq akslantirishlar sinfi juda muhim ahamiyatga egadir.

Ta'rif. Agar uzluksiz $f: X \rightarrow Y$ akslantirishda, X dagi har bir ochiq to'plamning (mos ravishda yopiq to'plamning) aksi Y to'plamda ochiq (mos ravishda yopiq) to'plam bo'lsa, ochiq (mos ravishda yopiq) akslantirish deyiladi.

Bir vaqtda ham ochiq, ham yopiq akslantirishga misol sifatida $i_x: X \rightarrow X$ ayniy akslantirishni olsak, $i_x: A \rightarrow X$ shaklidagi joylash-tirishda doimo ochiq to'plamning aksi ochiq, yopiq to'plamning aksi yopiq to'plamdir, bunda $A \subset X$.

Ochiq akslantirishlarning muhim sinfi sifatida ochiq to'plamlarda aniqlangan kompleks o'zgaruvchili golomorf funksiyalar sinfini ko'rsatish mumkin. Bundan tashqari, topologik guruhda aniqlangan gomeomorfizmlar ham mavjuddir.

Misol. Ixtiyoriy $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$ uzluksiz akslantirishni olsak, bu akslantirish doimo yopiq akslantirish bo'ladi. Lekin u doimo ochiq akslantirish bo'lavermaydi.

Misol. $P: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ proeksiyalashni olsak, bu akslantirish $p(x_1; x_2) = x_1$ formula bilan aniqlanadi va ochiq akslantirish bo'ladi. Ya'ni, markazi (x_1, x_2) nuqtada bo'lgan ochiq doira proeksiyasi markazi x , da bo'lgan intervaldan iboratdir. Agar $\mathbb{R}^2$ da $x_1 x_2 = 1$ giperbolani olsak, bu giperbola yopiq to'plamdir.

Yopiq to'plamlarga misol keltirganda tekislikdagi ixtiyoriy ikkinchi tartibli chiziq yopiq to'plam ekanligini ta'kidlagan edik. Bu to'plamlardan ba'zilarining proeksiyasi $\mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ dan iborat bo'lib, bu yopiq to'plam emas. Demak, bu akslantirish yopiq akslantirish emas.

Misol. Agar $f: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ uzluksiz funksiyani $f(x) = 1/(1 + x^2)$ formula bilan aniqlasak, bu uzluksiz akslantirish bo'lib, ochiq ham, yopiq ham emasdir.

Shundan $f(\mathbb{R}^1) = (0; 1]$ to'plam $\mathbb{R}^1$ da ochiq ham, yopiq ham emasligi ma'lum

bo'ladi.

Teorema. Uzluksiz $f: X \rightarrow Y$ akslantirish ochiq bolishi uchun X fazoda ixtiyoriy x_0 nuqtaning U atrofi aksi (obrazi) $y_0 = f(x_0)$ nuqta uchun Y fazoda ochiq atrof bo'lishi zarur va yetarlidir.

Ochiq va yopiq akslantirishlar ta'rifidan quyidagini keltirishimiz mumkin.

Teorema. Ochiq (yopiq) akslantirishlar kompozitsiyasi ochiq (yopiq) akslantirish bo'ladi.

Akslantirishning yopiq bo'lishi uchun quyidagi fakt ham o'rinlidir.

Teorema. $f: X \rightarrow Y$ akslantirish yopiq bolishi uchun ixtiyoriy $A \subset X$ to'plam uchun $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Topologiya fanida gomeomorf akslantirish tushunchasi muhim o'rinlardan birini egallaydi. Gomeomorf akslantirish topologik strukturalarni farqlashsiz o'rganishni tavsiya etadi. Bu akslantirish natijasida topologiyaning fundamental masalasi - qaysi topologik strukturalar o'zaro izomorf ekanligi aniqlanadi.

Ta'rif. Agar f va f^{-1} lar bir vaqtda o'zaro uzluksiz bo'lsa, $f: X \rightarrow Y$ biektiv akslantirish gomeomorf akslantirish yoki gomeomorfizm (ba'zi hollarda topologik akslantirish) deyiladi.

Topologik fazo X bilan topologik fazo Y lar orasida kamida bitta gomeomorf (topologik) $f: X \rightarrow Y$ akslantirish mavjud bo'lsa, birinchisi ikkinchisiga gomeomorf yoki topologik ekvivalent deyiladi. Topologik ekvivalent yoki gomeomorf fazolar $X \approx Y$ yoki $X \overset{top}{\sim} Y$ ko'rinishda belgilanadi.

Gomeomorfizmga $ind_x: X \rightarrow X$ ayniy akslantirishni trivial misol qilib keltirsa bo'ladi. Shuning bilan birga, tekshirib ko'rish mumkinki, to'g'ri chiziqda aniqlangan ixtiyoriy monoton funksiya ham gomeomorf akslantirish bo'ladi.

Misol. R^n fazoda radiusi 1 ga teng bo'lgan B ochiq sharni olsak,

$f: R^n \rightarrow B$ akslantirishni $f(x) = x/(1 + \|x\|)$ formula bilan aniqlasak, bu yerda

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$; $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$. Bu akslantirish biektivdir. Teskari

akslantirish $f^{-1}: B \rightarrow R^n$ esa $f^{-1}(x) = x/(1 - \|x\|)$ formula bilan aniqlanadi. f va f^{-1} lar uzluksizdir. Shu sababli f - gomeomorfizm.

Agar X topologik fazo Y topologik fazoning birorta to'plamostisiga gomeomorf bo'lsa, ya'ni $f: X \rightarrow Y_0 \subset Y$ gomeomorfizm bo'lsa, u holda X fazo Y fazo-ga

topologik joylashgan yoki X fazo Y fazoda topologik yotadi yoxud Y fazo X fazoni o'zida saqlaydi, deyiladi. Bunday gomeomorfizm joylash yoki joylash-tirish deyiladi.

Topologik fazolarning gomeomorf akslantirishlarda o'zgarmay qola- digan xossalari ulaming topologik xossalari deb yuritiladi. Shu sababli topologiyani shunday akslantirishlarda fazoning topologik xossalarini o'rganuvchi fandır, desak ham bo'ladi.

Teorema. $f: X \rightarrow Y$ ochiq (mos ravishda yopiq) biektiv akslantirish gomeomorfizmdir.

Natija. $f: X \rightarrow Y$ biektiv akslantirish gomeomorfizm bo'lishi uchun $f(A) = f(A)$ bo'lishi zarur va yetarlidir. Shuni aytib o'tish kerakki, gomeomorfizmi ikki fazo orasidagi munosabat sifatida qarasak, gomeomorfizm munosabati ekvivalentlik munosabatidir. Gomeomorfizm tushunchasidan kengroq bo'lgan lokal gomeomorfizm tushunchasini ham bilish talab etiladi.

Ta'rif. Agarda ixtiyoriy x va $y=f(x)$ juftlik uchun shunday $U(x)$ va $V(y)$ atroflar topilib, $f: U(x) \rightarrow V(y)$ gomeomorfizm bo'lsa, bu $f: X \rightarrow Y$ akslantirish lokal gomeomorfizm deyiladi.

Misol. $f: \mathbb{R}^1 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^1 \setminus \{0\}$ akslantirishni $f(x) = x^2$ formula bilan olsak, u lokal gomeomorfizmi tashkil qiladi.

Metrik fazolarda uzluksiz akslantirishlar

$(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ metrik fazolar va $T: X \rightarrow Y$ akslantirish, $x_0 \in X$ nuqta berilgan bo'lsin.

Ta'rif: agar x_0 nuqtaga yaqinlashuvchi bo'lgan ixtiyoriy $\{x_n\} \subset X$ ketma-ketlik uchun ushbu

$$T(x_n) \rightarrow T(x_0)$$

munosabat Y metric fazoda bajarilsa, u holda T akslantirish x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Ta'rif: agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ soni uchun shunday $\delta > 0$ son topilib, $\rho_X(x_0, x) < \delta$ shartni qanoatlantiruvchi barcha $x \in X$ lar uchun $\rho_Y(T(x_0), T(x)) < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, u holda T akslantirish x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Ta'rif: agar $b = T(x_0)$ nuqtaning ixtiyoriy V atrofi uchun X fazoda x_0 nuqtaning $T(U) \subset V$ shartni qanoatlantiruvchi U atrofi mavjud bo'lsa, u holda T akslantirish x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Bu uchala ta'rifning teng kuchliligi yoki boshqacha aytganda ekvivalentligi matematik analiz kursidagi funksiya uzluksizligi kabi isbotlanadi.

Misol: $C[0; 1]$ fazoni R ga akslantiruvchi $T(x) \rightarrow x(1)$ akslantirish ixtiyoriy $a \in C[a, b]$ „nuqta“ da uzluksiz bo'ladi.

Haqiqatan, $\varepsilon > 0$ son berilgan bo'lsin. U holda $\delta = \varepsilon$ deb olamiz. Endi

$$\rho_C(a, x) = \max_{a \leq t \leq b} |x(t) - a(t)|,$$

$\rho_R(T(a), T(x)) = |x(1) - a(1)| \leq \rho_C(a, x)$ bo'lganligi sababli, $\rho_C(a, x) < \delta$ shartdan $\rho_R(T(a), T(x)) < \varepsilon$ tengsizlikning kelib chiqishi ravshan (bu yerda $\rho_C - C[a, b]$ fazodagi, ρ_R esa R dagi metrikalar).

$C_1[0; 1]$ fazoni R ga akslantiruvchi $T(x) \rightarrow x(1)$ akslantirish $\theta(t) \equiv 0$ nuqtada uzluksiz emas.

Haqiqatan, $x_n(t) = t^n$ ketma-ketlik $C_1[0; 1]$ fazoda $\theta(t) \equiv 0$ funksiyaga yaqinlashadi,

$$\text{lekin} \quad T(x_n) = x_n(1) = 1, \quad T(\theta) = 0$$

Demak, $\{T(x_n)\}$ ketma-ketlik $T(\theta)$ ga yaqinlashmaydi.

Ta'rif: agar T o'z aniqlanish sohasining har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u holda T uzluksiz akslantirish deyiladi.

Xususan, $Y=R$ bo'lgan holda uzluksiz akslantirish uzluksiz funksional deyiladi.

$C[0; 1]$ fazoni R ga akslantiruvchi $T(x) \rightarrow x(1)$ akslantirish uzluksiz funksional misol bo'ladi.

$(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ metrik fazolar va $T : X \rightarrow Y$ akslantirish berilgan bo'lsin.

Ta'rif: agar X fazodan olingan ixtiyoriy a va b nuqtalar uchun

$\rho_X(a, b) = \rho_Y(T(a), T(b))$ tenglik bajarilsa, u holda T izometrik akslantirish yoki izometriya deyiladi.

Ravshanki, har qanday izometriya uzluksiz akslantirish bo'ladi.

Geometriya kursida aniqlangan tekislikdagi (fazodagi) har qanday harakat izometriyaga misol bo'ladi.

Metrik fazolarda uzluksiz akslantirishlar quyidagi xossalarga ega:

Teorema: aytaylik $T : X \rightarrow Y$ akslantirish X fazoning a nuqtasida, $T : Y \rightarrow Z$ akslantirish Y fazoning $b=T(a)$ nuqtasida uzluksiz bo'lsin. U holda X ni Z ga akslantiruvchi $x \rightarrow F(T(x))$ murakkab akslantirish a nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isbot: Z fazo $c=F(T(a))$ nuqtasining ixtiyoriy W atrofini olamiz. F akslantirish $b=T(a)$ nuqtada uzluksiz va $c=F(b)$ bo'lganligi sababli, b nuqtaning $F(V) \subset W$ shartni qanoatlantiruvchi V atrofi mavjud. Shunga o'xshash, T akslantirish a nuqtada uzluksiz bo'lganligi sababli, bu nuqtaning $T(U) \subset V$ shartni qanoatlantiruvchi U atrofi mavjud. U holda $F(T(U)) \subset T(V) \subset W$ ga ega bo'lamiz. Bu esa $x \rightarrow F(T(x))$ akslantirishning a nuqtada uzluksiz ekanligini isbotlaydi.

Teorema: Agar T akslantirish X metric fazoni Y metric fazoga aks ettiruvchi uzluksiz akslantirish bo'lsa, u holda Y fazodan olingan ixtiyoriy ochiq to'plamning X fazodagi proobrazi ochiq, yopiq to'plamning proobrazi yopiq bo'ladi.

Isbot: Aytaylik G to'plam Y da ochiq bo'lsin. X fazodagi $D = T^{-1}(G)$ to'plamning barcha nuqtalari ichki nuqta ekanligini isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, $a \in D$ va $T(a)=b$ bo'lsin. U holda $b \in G$ va G ochiq bo'lganligidan b nuqta G to'plamning ichki nuqtasi bo'ladi. Shuning uchun bu nuqtaning G ga to'raligicha tegishli bo'lgan V atrofi mavjud. T akslantirishning a nuqtada uzluksizligidan a nuqtaning shunday U atrofi mavjud bo'lib, $T(U) \subset V$ bo'ladi. U holda $T(U) \subset G$, bundan esa $U \subset D = T^{-1}(G)$ kelib chiqadi. Bu esa ixtiyoriy $a \in D$ nuqtaning D ga tegishli atrofi mavjudligi, ya'ni a ichki nuqta ekanligini isbotlaydi. Shuning uchun D ochiq to'plam.

Yopiq to'plamning to'ldiruvchisi ochiq ekanligidan, Y fazodabiri ikkinchisiga to'ldiruvchi to'plamlarning proobrazlari, X fazoda ham biri ikkinchisiga to'ldiruvchi bo'lishidan va teoremaning isbot qilingan qismidan ikkinchi qismning isboti kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Uzluksiz akslantirishda ochiq to'plamning obrazi har doim ham ochiq bo'lmaydi. Masalan, $x \rightarrow \sin x$ uzluksiz akslantirishda $(-\pi;\pi)$ intervalning obrazi $[-1;1]$ kesmadan iborat.

4§. Topologik fazolarda retrakt tushunchasi.

Ta'rif: X topologik fazoning A fazoostisi uning retrakti deyiladi, agar shunday $r: X \rightarrow A$ uzluksiz akslantirish mavjud bo'lib, bu akslantirish mavjud A qism to'plamida ayniy akslantirishdan iborat bo'lsa, ya'ni $r|_A = 1_A$. Bu yerda $1_A = id: A \rightarrow A$, $id(a) = a$, $a \in A$. Bunda $1_A: A \rightarrow A$ ayniy akslantirishdan iborat. Qisqacha qilib aytganda, ayniy akslantirish $id: A \rightarrow A$ butun X fazoga davomlashtiruvchi $r: X \rightarrow A$ uzluksiz akslantirish mavjud bo'lsa. Bu yerda r akslantirishga X ni A ga retraksiyasi yoki retraklashtiruvchi akslantirishi deyiladi. Ko'p holda uni $r: X \supset A$ ko'rinishda yoziladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki ixtiyoriy topologik fazoning ixtiyori bitta $\{x_0\}$ nuqatasi uning retrakti bo'ladi. Chunki X ni $\{x_0\}$ nuqtaga uzluksiz akslantirish doimiy akslantirishdan iborat bo'ladi, ya'ni $i: X \rightarrow x_0$ ixtiyoriy $x \in X$ uchun $i(x) = x_0$ bo'ladi.

Teorema. Ixtiyoriy topologik fazoning ixtiyoriy retrakti yopiq to'plamdir.

Isbot: Bizga $r: X \rightarrow A$ uzluksiz retraksiya berilgan bo'lsin. Bunda $A \subset X$.

Ma'lumki $(A) \subset X$. Buning uchun, ixtiyoriy $x_0 \in X \setminus r(A)$ nuqata uchun uning shunday (X fazoda) $W_0 \ni x_0$ atrofi topiladiki, u $W_0 \subset X \setminus r(A)$ shartni qanoatlantirishi yetarli bo'ladi. Ixtiyoriy $x_0 \in X \setminus r(A)$ nuqtani olaylik. $r: X \rightarrow A$ uzluksiz bo'lganligi tufayli, x_0 ning shunday U_0 atrofi topiladiki uning uchun $r(U_0) \subset V_{a_0}$ o'rinli bo'ladi, bunda $r(x_0) = a_0 \in A$.

V_{a_0} to'plam A to'plamdagi ixtiyoriy ochiq to'plamdir. $r^{-1}(V_{a_0}) \cap U_0 = W(x_0)$ deb belgilaymiz. Birinchi, $W(x_0) \subset X \setminus r(A)$ va $x_0 \in W(x_0)$, ikkinchidan $W(x_0)$ ochiq to'plamdir. Shuni isbot qilish talab qilingan edi.

Teorema isbotlandi.

Misol 2.1.3 n o'lchamli R^n evklid fazodagi ixtiyoriy B^n yopiq shar yoki gipertekislik uning retrakti bo'ladi.

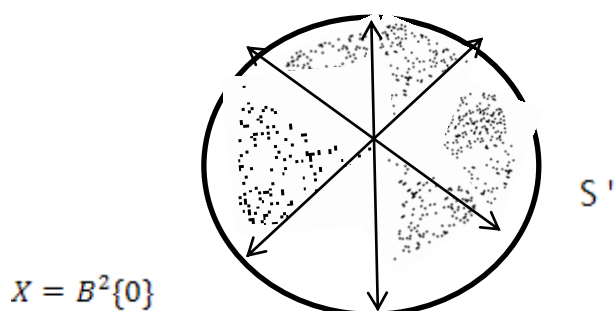
Misol 2.1.4 Aytaylik, $X=[0,1]$ kesma, $A = FrX = \{0,1\}$. FrX to'lam X ning R to'g'ri chiziqdagi chegarasi. Bu holda isbotlash mumkinki A to'plam X ning retrakti bo'la olmaydi. Chunkiy, A to'plam R to'g'ri chiziqda bog'lamli emas, X to'plam esa bog'lamli to'plamdir.

Misol 2.1.5 Aytaylik, $X = B^n \setminus \{0\}$ to'plam B^n sharning bitta markaz nuqtasi O ni chiqarib tashlangan yoki R^n shardan markazi O ni "o'yib" tashlangan to'plam bo'lsin.

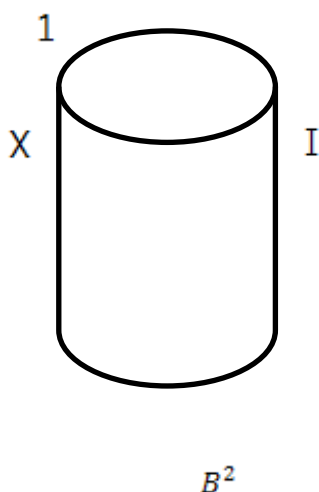
$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ sferani olaylik, bu S^{n-1} sfera B^n yopiq sharning chegarasidan iborat, ya'ni $FrB^n = S^{n-1}$. X fazoda r retraksiya $r: X \rightarrow S^{n-1}$ ni quydagicha aniqlaymiz.

$$r(x) = \frac{x}{\|x\|}, \quad \text{bunda } x \in X$$

Demak, o'yib olingan X shar uchun uning chegarasi sfera S^n retrakti bo'lar ekan. Xususiyl holda, tekislikda markazisiz doiraga o'z chin chegarasi aylana retrakti bo'lar ekan.



Misol 2.1.6 B^2 doira ustida qurilgan $X \setminus B^2 \times I$ slindrni olaylik.



$Y = B^2 \times \{0\} \cup S^1 \times I$ esa X slindrning pastki asosi bilan uning qirrasi birlashmasi bo'lsin.

$M(0; 0; \frac{1}{2})$ nuqtadan markaziy simmetriya natijasida X ni Y ga uzluksiz θ akslantiramiz.

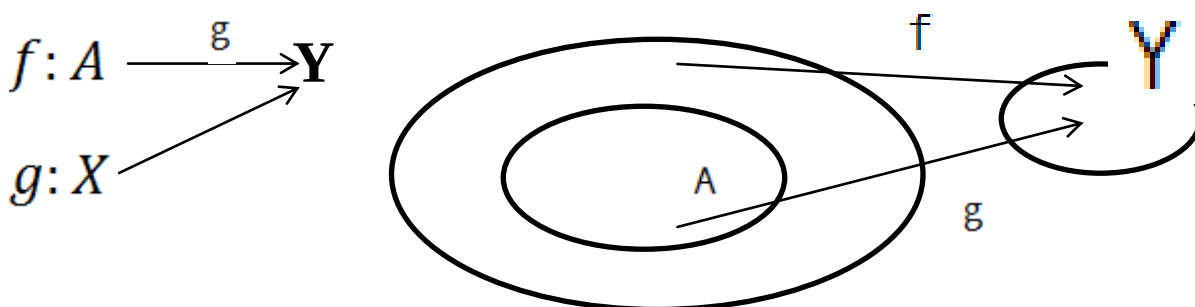
Demak, Y to'plam X ni retraksiya bo'lar ekan. Quyidagini isbotsiz keltiramiz.

Teorema. Retraktning retrakti retract bo'ladi.

5§. Topologik fazolarda akslantirishlarni uzluksiz davomlashtirish.

Umumiy topologiyaning qolaversa zamonaviy geometriyaning asosiy masalalaridan biri uzluksiz akslantirishni davomlashtirish.

Bizga X va Y topologik fazolar berilgan bo'lib, A to'plam X fazoning birorta bo'sh bo'lmagan yopiq to'plamostisi bo'lsin. $g: A \rightarrow Y$ uzluksiz akslantirish mavjud bo'lsa, shu g akslantirishni $f|_A = g$ shart bajariladigan $f: X \rightarrow Y$ akslantirish g ning kengaytmasi yoki davomlashmasi deyiladi. Bu masalani quydagi diagramma sifatida ko'rsatishimiz ham mumkin.



$$g(x) = f(x), \quad \text{agar } x \in A$$

Akslantirishning uzluksiz davom ettirishda atrofli retract tushunchasi ham keng ishlatiladi. Ba'zi hollarda akslantirishlarni yopiq to'plamostisidan butun fazoga davomlashtirib bo'lmaydi. Shunday hollarda uni birorta ochiq atrofliga davomlashtirish mumkin bo'ladi.

Ta'rif. X topologic fazoning x_0 yopiq to'plamostisi X fazoning atrofli retracts deyiladi, agar x_0 to'plam o'zining birorta ochiq U atrofi uchun retract bo'lsa, ya'ni $X_0 \subset U \subset X$ va $r: U \rightarrow X_0$ – retraksiya.

Ravshanki, ixtiyoriy retract atrofli retract bo'ladi.

Misol 2.2.2 R^n Evklid fazosida radiusi $\|x\| = 1$ tenglik bilan aniqlovchi S^{n-1}

sferani olaylik. $r(x) = \frac{x}{\|x\|}$, barcha $x \in R^n \setminus \{0\}$ formula orqali

aniqlangan. $r: R^n \setminus \{0\} \rightarrow S^{n-1}$ retraksiyani olsak. Ma'lumki, bu yerda S^{n-1} sfera

R^n fazoga atrofli reraktdan iboratdir. Oldin ta'kidladikki, S^{n-1} sfera R^n fazoga retrakt bo'la olmaydi.

Misol 2.2.3 R^3 Evklid fazosida δ uchburchakni va l to'g'ri chiziqni olaylik.

Aytaylik, l to'g'ri chiziq δ uchburchakni chegarasi $Fr\delta$ ga tegishli bo'lmagan yagona a nuqtada kessin, ya'ni $l \cap A\delta = \{a\}$

Endi ko'rsatamizki, δ uchburchakning chegarasi $Fr\delta$ to'plam $R^3 \setminus l$ fazoning retrakti bo'ladi.

$R^3 \setminus l$ ning ixtiyoriy $x \in R^3 \setminus L$ nuqtasini olamiz. $P(x)$ bilan x nuqtadan va L to'g'ri chiziqdan o'tuvchi tekislikni belgilaymiz. Ma'lumki $P(X)$ tekislik $Fr\delta$ bilan ikki nuqtada kesishadi. Bu nuqtalarda biri l to'g'ri chiziq va x nuqta bilan bir tomonda yotadi. U nuqtani $r(x)$ bilan belgilaymiz. Demak, ixtiyoriy $x \in R^3 \setminus L$ nuqtaga $r(x)$ ni mos qo'yamiz. Bu moslik ma'lumki $r: R^3 \setminus L \rightarrow Fr\delta$ retraksiyani tashkil qiladi.

Teorema. Topologik fazoning yopiq $A \subset X$ to'plamostisi X ga rerakt bo'lishi uchun ixtiyoriy $g: A \rightarrow Y$ uzluksiz akslantirish (butuda Y ixtiyoriy topologic fazo) butun X fazogacha davomlashtirishga ega bo'lishi zarur va yetarlidir ya'ni

$$\begin{array}{ccc} g: A & \xrightarrow{\quad} & Y \\ \uparrow \zeta_X & \nearrow f & \\ & X & \end{array}$$

diagramma kommutativ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isboti: Zarurligi: Bizga X topologik fazo berilgan bo'lsin. A to'plam uning yopiq ixtiyoriy to'plamostisi, ya'ni $A \subset X_0$. Teorema shartiga ko'ra $r: X \rightarrow A$ retraksiya aniqlangan bo'lsin. Bizga kerakli davomlashtirishni $t = g \circ r: X \rightarrow Y$ formula orqali aniqlaymiz. Ravshanki f akslantirish izlangan akslantirish bo'ladi.

Yetarliligi. Aytaylik, x topologic fazoning $A \subset X$ to'plamostisi shunaqaki, ixtiyoriy $f: A \rightarrow Y$ uzluksiz akslantirish uzluksiz $f: X \rightarrow Y$ davomlashtirish (kengaytirishga) ega. Xususiyl holda $g = id_A = 1_A: A \rightarrow A$ aynan akslantirish

uchun ham uzluksiz $f: X \rightarrow A$ davomlashtirish mavjud bo'ladi. Bunda $f|_A = 1_A$ tenglik o'rinli bo'ladi. Shu oxirgi, $r = f: X \rightarrow A$ akslantirish retraksiya vazifasini bajaradi. Biz bu yerda $f|_A$ belgi f akslantirishning aniqlash sohasidagi birorta qism to'plamostisidagi chegaralanmasi deb tushunamiz.

Teorema isbotlandi.

Masalan, $f: [-3, 3] \rightarrow [-3, 3]$ akslantirish $f(x) = \frac{1}{6}(x^3 - 3x)$ formula orqali berilgan bo'lsa, uning $[-1, 1]$ kesmada chegaralanganmasini oladigan bo'lsak, u $[-1, 1]$ kesmani $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ ga akslantiradi, ya'ni $f|_{[-1, 1]}: [-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ o'rinli bo'ladi.

6§. Normal fazolarda funksiyalarni uzluksiz davomlashtirish.

2.5.1-ta'rif. Agar X topologik fazoning ixtiyoriy ikki turli nuqtasi uchun kamida birining ikkinchisini o'z ichiga olmaydigan atrofi mavjud bo'lsa, T_0 fazo yoki *Kolmogorov fazosi* deyiladi.

Agar bu ta'rifda har ikkala ixtiyoriy nuqtalar birorta atrofga ega bo'lib, biri ikkinchisini o'zida saqlamasa, ma'lum bo'ladiki, bunday fazolar sinfi nisbatan tordir.

Bu fazolar sinfi T_1 fazo yoki erishilgan, istilo qilingan yoki egallangan fazo deb ataladi.

Topologik fazolarning muhim sinflaridan yana biri normal topologik fazolardir.

2.5.9-ta'rif. Agar X fazoning ixtiyoriy ikki bo'sh bo'lmagan kesishmaydigan yopiq F_1 va F_2 to'plamlarining o'zaro kesishmaydigan $U(F_1)$ va $U(F_2)$ ochiq atroflari mavjud bo'lsa, X topologik fazo T_4 fazo deyiladi.

Agar X topologik fazo bir vaqtda ham T_1 , ham T_4 fazo bo'lsa, bunday topologik fazolarga normal topologik fazolar deyiladi.

Ayrim topologik fazolarga o'xshab, normal fazolar sinfi nasliy xususiyatga ega emas, ya'ni bu fazolarning ixtiyoriy to'plamostisi normal fazo bo'lavermaydi. Normal fazolar sinfida uzluksiz akslantirishlarning bir oilasi mavjud bo'lib, bu uzluksiz akslantirishlar o'lcham nazariyasi va topologiyani boshqa deyarli barcha jabhalarida figuralarning geometrik xossalari bilan bog'liq muammolarida va funksiyalarni davomlashtirish masalalarini yechishda, fazoning gomologik o'lchamini aniqlashda muhim ahamiyatga ega. Bu masalaning asosini Urison teoremasi (Urison lemmasi) tashkil qiladi.

2.5.10-Urison lemmasi. Ixtiyoriy normal X fazoning o'zaro kesishmaydigan yopiq A va B to'plamlari uchun shunday uzluksiz $f : X \rightarrow [0,1]$ funksiya mavjudki, uning uchun $f|_A \equiv 0$, $f|_B \equiv 1$ va har bir $x \in X$ uchun shartlar o'rinlidir.

Isbot. X normal fazo, A va B lar uning ixtiyoriy yopiq to'plamostilari va $A \cap B = \emptyset$ bo'lsin. Har bir $r = \frac{k}{2^n}$, $k = 0, 1, \dots, 2^n$ ratsional songa shunday $G_{(r)}$ ochiq to'plamni mos qo'yamizki, u quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $A \subset G(0), X \setminus B = G(1)$;

2) agar $r \angle r'$ bo'lsa, $\overline{G(r)} \subset \overline{G(r')}$.

Yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi ochiq to'plamlar sistemasini n – ko'rsatkichga nisbatan induksiya metodi bilan ko'ramiz.

$n=0$ bo'lsin. Bu holda, X fazo normal bo'lganligi tufayli A va B larning $U(A)$ va $U(B)$ kesishmaydigan ochiq atroflari mavjud bo'ladi. Ularni $G(0)=U(A)$ va $G(1)=X \setminus B$ qilib belgilaymiz.

$k=n-1$ uchun $G_{(r)}$ ochiq to'plamlar sistemasi qurilgan bo'lsin.

Endi n uchun $G_{(n)}$ to'plamni qurishimiz kerak. $2m/2^n = m/2^{n-1}$ bo'lganligi sababli $G_{(r)}$ to'plamni $r=k/2^n$ n – toq son uchun ko'rishimiz yetarli bo'ladi. Aytaylik, $k=2m+1$ bo'lsin, u holda $(k+1)/2^n = (m+1)/2^{n-1}$, $(k-1)/2^n = m/2^{n-1}$ va induksiya shartiga ko'ra, $\overline{G(k-1/2^n)} \subset \overline{G(k+1/2^n)}$ ifodaga egamiz. Ravshanki, $\overline{G(k-1/2^n)}$, $X - G(k+1/2^n)$ lar yopiq va kesishmaydi. X fazoning normalligi tufayli $\overline{G(k-1/2^n)}$ ning ochiq atrofi mavjudki, bu ochiq to'plam $X - G(k+1/2^n)$ ning ochiq atrofi bilan kesishmaydi. $V = G(k/2^n)$ belgilashni kiritamiz. Aniqki, $\overline{G(k-1/2^n)} \subset \overline{G(k/2^n)}$, $\overline{G(k/2^n)} \subset \overline{G(k+1/2^n)}$ lar o'rinli, shu bilan induksiya tugaydi.

$G_{(r)}$ to'plamlarning aniqlanish sohasini quyidagicha kengaytiramiz:

$$G(r) = \begin{cases} \emptyset, & \text{agar } r > 0 \\ X, & \text{agar } r < 1 \end{cases} \text{ bo'lsa:}$$

Endi $\varphi: X \rightarrow [0,1]$ funksiyani quyidagicha aniqlaymiz: agar $x \in G(0)$ bo'lsa $\varphi(x) = 0$, va $\varphi(x) = \sup \{r: x \in G(r) \setminus G(r-1/2^N)\}$. Bu φ funksiyaning uzluksizligini ko'rsatishimiz kerak. Shunga erishish maqsadida ixtiyoriy $x_0 \in X$ nuqta va $N > 0$ uchun x_0 nuqtaning shunday $O_{N(x_0)}$ atrofini ko'ramizki, u uchun $|\varphi(x_0) - \varphi(x)| \leq \frac{1}{2^N}$, $x \in O_N(x_0)$ o'rinli bo'lsin. Aytaylik, r_0 son $k/2^n$ ko'rinishda bo'lib, $\varphi(x_0) < r_0 < \varphi(x_0) + \frac{1}{2}N+1$ (1) shartni qanoatlantirsin. Belgilaymiz: $U_N(x_0) = \overline{G(r_0) \setminus G(r_0 - \frac{1}{2}N)}$. Bu holda $x_0 \in U_N(x_0)$, chunki $r_0 < \varphi(x_0)$ va $r_0 - \frac{1}{2}N+1 \leq \varphi(x_0)$. Agar $x \in U_N(x_0)$ bo'lsa, u holda $x \in G(r_0)$. Shu sababli $\varphi(x) \leq r_0$.

Bundan tashqari, $x \in X - \overline{G(r_0 - \frac{1}{2}N)} \subset X - G(r_0 - \frac{1}{2}N)$, shu sababli $r_0 - \frac{1}{2}N \leq \varphi(x)$.

Demak, $r_0 - \frac{1}{2}N \leq \varphi(x) \leq r_0$.

(1) va (2) larni solishtirsak, quyidagi natijaga ega bo‘lamiz:

$$|\varphi(x_0) - \varphi(x)| < \frac{1}{2}N, x \in U_n(x_0)$$

Bu φ ning uzluksizligini ko‘rsatadi. Funksiyaning qurilishiga ko‘ra, $\varphi|_A \equiv 0; \varphi|_B \equiv 1$ va $0 \leq \varphi(x) \leq 1$.

Bunday qurilgan funksiya Urison funksiya deyiladi. Urisonning bu lemmasi quyidagiga ekvivalentdir.

Normal X fazoning ixtiyoriy kesishmaydigin va bo‘sh bo‘lmagan A va B yopiq to‘plamlari uchun shunday $\varphi_{a,b}(x)$ uzluksiz funksiya mavjud bo‘ladiki, u quyidagi shartni qanoatlantiradi: $\varphi_{a,b}(x)|_A \equiv a; \varphi_{a,b}(x)|_B \equiv b; a \leq \varphi_{a,b}(x) \leq b, x \in X$. Bu yerda a, b ($a < b$) ixtiyoriy haqiqiy sonlardir. Haqiqatan ham, agar $\varphi_{a,b}(x)$ Urison funksiya bo‘lsa, u holda $\varphi_{a,b}(x) = (b-a)\varphi(x) + a$ izlangan funksiya bo‘ladi.

2.5.11-teorema. Normal X fazoning ixtiyoriy yopiq A to‘plamida berilgan ixtiyoriy chegaralangan $\varphi: A \rightarrow R$ uzluksiz funksiya uchun shunday $\Phi: X \rightarrow R$ uzluksiz funksiya mavjudki, uning uchun quyidagi o‘rinli:

$$\Phi|_A \equiv \varphi \text{ va } \sup_{x \in X} \Phi(x) = \sup_{x \in A} \varphi(x).$$

Isbot. Izlanayotgan uzluksiz $F_{(x)}$ funksiya funksiya ketma-ketligining limiti ko‘rinishida quramiz.

$$\begin{aligned} \text{Aytaylik: } \varphi_0 = \varphi \text{ va } a_0 = \sup_{x \in A} |\varphi(x)|: x \in A \quad A_0 = \left\{ x: \varphi_0(x) \leq -\frac{a_0}{3} \right\}, \\ B_0 = \{ x: \varphi_0(x) \geq \frac{a_0}{3} \} \end{aligned} \text{ bo‘lsin}$$

Ravshanki, A_0 va B_0 to‘plamlar yopiq va o‘zaro kesishmaydi. Urison lemmasiga ko‘ra, shunday uzluksiz funksiya $g_0: X \rightarrow R$ mavjudki, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$|g_0(x)| \leq \frac{a_0}{3} \text{ va } g_0(x) = \begin{cases} -\frac{a_0}{3} & \text{agar, } x \in A_0 \text{ bo‘lsa} \\ \frac{a_0}{3} & \text{agar, } x \in B_0 \text{ bo‘lsa} \end{cases}$$

Endi A to'plamda φ_1 funksiyani $\varphi_1(x) = \varphi_0(x) - g_0(x)$ ko'rinishda aniqlaymiz. U holda φ_1 funksiya uzluksiz va $a_1 = \sup\{|\varphi_1(x)| : x \in A\} \leq \frac{2}{3}a_0$ o'rinli. Shunga o'xshab, quyidagicha belgilashlar kiritamiz:

$$A_1 = \left\{x : \varphi_1(x) \leq -\frac{a_1}{3}\right\}, \quad B_1 = \left\{x : \varphi_1(x) \geq \frac{a_1}{3}\right\}.$$

Endi yana Urison funksiyasi g_1 ni olamiz, u quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

$$|g_1(x)| \leq \frac{a_1}{3} \quad \text{va} \quad g_1(x) = \begin{cases} -\frac{a_1}{3}, & \text{agar } x \in A_1 \text{ bo'lsa} \\ \frac{a_1}{3}, & \text{agar } x \in B_1 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

A to'plamda $\varphi_2(x)$, funksiyani $\varphi_2(x) = \varphi_1(x) - g_1(x)$ ko'rinishda ko'ramiz va $a_2 = \sup(A)\{|\varphi_2(x)| : x \in A\} \leq \frac{2}{3}a_1$ deb olamiz. Shu yo'sinda A to'plamda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning $\varphi_0 = \varphi; \varphi_1; \varphi_2; \dots, \varphi_n, \dots$ ketma-ketligi va X da uzluksiz $g_0; g_1; g_2; \dots, g_n, \dots$ funksiyalar ketma-ketligiga ega bo'lib, ular quyidagi shartni qanoatlantiradi:

$$\varphi_{n+1}(x) = \varphi_n(x) - g_n(x), \quad |g_n(x)| \leq \frac{a_n}{3}; a_{n+1} \leq \frac{2}{3}a_n.$$

Bu yerda $a_n = \sup\{|\varphi_n(x)| : x \in A\} \quad n = 0, 1, 2, \dots$, bundan $|\varphi_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n a_0, \quad |\varphi_n(x)| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \frac{a_0}{3}$ larga ega bo'lamiz. Oxirgi tengsizliklardan $\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ qator X da birorta uzluksiz funksiya ga absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu yig'indini $\Phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x)$ bilan belgilaymiz va quyidagi baholashga ega bo'lamiz: $|\Phi(x)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \frac{a_0}{3} = a_0$. Endi $x \in A$ bo'lsin, u holda $S_n(x) = g_0(x) + \dots + g_n(x)$ qisman yig'indi $\varphi_{n+1}(x)$ funksiyalarning qurilishiga ko'ra $\varphi_0(x) - \varphi_n(x)$ ga teng. Lekin $\varphi_n(x) \rightarrow 0$, u holda har bir $x \in A$ uchun $\Phi(x) = \varphi_0(x) = \varphi(x)$. Demak, $\Phi(x)$ izlangan funksiya ekan.

2.5.12-natija. Normal X fazo ning ixtiyoriy yopiq A to'plamostisida berilgan har bir uzluksiz $\varphi : A \rightarrow I^n$ akslantirishni $\Phi : X \rightarrow I^n$ akslantirishgacha uzluksiz davomlashtirish mumkin.

Akslantirishni davomlashtirish masalasi uning ta'rifidan va oldingi bo'limdagi teoremlardan ma'lum bo'lmoqdaki X topologic fazo, uning A yopiq to'plamostisi va Y topologik fazolardagi topologiyalarga ham bog'liq bo'ladi.

Misol. Aytaylik, B^n to'plam R^n fazoda nuqtalari $\{\|x\| < 1 : x \in R^n\}$ shattnin qanoatlantiruvchi shar bo'lsin.

Quyidagi formula orqali $r: R^n \rightarrow B^n$ retraksiyani aniqlaymiz.

$$r(x) = \begin{cases} x, & \text{agar barcha } x \in B^n \text{ bo'lsa;} \\ \frac{x}{\|x\|}, & \text{agar barcha } x \in R^n \setminus B^n \text{ bo'lsa;} \end{cases}$$

Demak, R^n fazodagi ixtiyoriy shar uning retrakti bo'lar ekan.

Bu misoldan ko'rinadiki, R^n Evklid fazosida ixtiyoriy qavariq to'plamostisi R^n fazoning retrakti bo'lar ekan. Bundan quyidagi natijaga ega bo'lamiz.

Natija. N-o'lchovli Evklid fazosining ixtiyoriy qoldiq $A \subset R^n$ to'plamostisi berilgan ixtiyoriy $f: A \rightarrow Y$ akslantirish butun R^n fazogacha davomlashtirish mumkindir.

XULOSA

Ta'limning yuksalishi va fan texnika taraqqiyotida bo'ladigan turli xil o'zgarishlar o'qituvchilar oldiga muhim vazifalar qo'ymoqda. Bu vazifalar har tomonlama rivojlangan, mustaqil fikrlay oladigan, milliy me'rosimizni qadrlaydigan ijodkor va aqilli yoshlarimizni tarbiyalashdan iborat bo'lib, hozirgi o'qituvchilardan tinmay ijod qilish, izlanish, o'qitishda yangicha munosabatlar yaratishda fidoiyligini talab qiladi.

Ma'lumki bugungi kunda mavjud o'quv qo'llanmalari, darsliklar o'zining mazmuni, tuzilishi va funksiyasi jihatdan yuqorida keltirilgan fikr va faktlarga javob bera oladi.

Mazkur bitiruv malakaviy ishida Normal topologic fazolarda akslantirishlarni uzluksiz davomlashtirish haqida ma'lumotlar bayon qilinadi. Bitiruv malakaviy ishining kirish qismida malakaviy ish maqsadi va vazifalari; ob'ekti va predmeti to'g'ri belgilab berilgan.

Birinchi bobda topologic va metrik fazolar;

- topologik fazo tushunchasi;
- metrik fazo tushunchasi;
- metrik va topologik fazolarda uzluksiz akslantirishlar haqida ma'lumotlar berilgan va misollar keltirilgan.

Ikkinchi bobda Uzluksiz akslantirishlarni davomlashtirish;

- Topologik fazolarda retrakt tushunchasi;
- Topologik fazolarda akslantirishlarni uzluksiz davomlashtirish;
- Normal fazolarda funksiyalarni uzluksiz davomlashtirish haqida ma'lumot berilgan.

Shunday qilib, bitiruv malakaviy ishida qo'yilgan maqsadlarga erishildi. Ushbu bitiruv malakaviy ishidan Normal fazolarda funksiyalarni uzluksiz davomlashtirish haqida qiziquvchilar foydalanishlari mumkin.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.

1. I.A.Karimov "Barkamol avlod – O'zbekiston taraqqiyotining poydevori" Toshkent O'zbekiston 1997 y. 20-29 betlar.
2. I.A.Karimovning 2011 yil 20 yanvardagi 19-sonli ma'ruzalari. Toshkent. Ma'rifat №8.
3. O'zbekiston Respublikasi "Ta'lim to'g'risidagi" qonuni. Toshkent. Sharq 1997 yil 64 bet.
4. O'zbekiston Respublikasi "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi." 1997 yil 64 bet.
5. F.G.Jo'rayev "Topologiyaga kirish". Toshkent. "Tafakkur-Bo'stoni" 2012 yil.
6. Р.Энглькин. "Общая топология".Москваю "Мир" 1986 г
7. Normatov A. "Differensial geometriya ". Toshkent. 2003 yil.
8. В.В.Федорчук, В.В.Филипов. "Общая топология".Основные конструкция. Издательство МГУ. 1988 г
9. <http://vilenin.narod.ru/Mm|Books|>.
10. <http://www.allmath.ru/>.
11. <http://www.pedagog.uz/>.
12. <http://www.Ziyonet.uz/>.

Ilova

1. Topology-topologiya
2. Base-baza
3. Between-orasida
4. Binary-binar
5. Boundary-chegaraviy
6. Closed-yopiq
7. Compact-kompakt
8. Complete-to'liqlik (to'la)
9. Conditions-shartlar
10. Consists-saqalaydi
11. Continuum-kontinium
12. Continuous-uzluksiz
13. Convex-qavariq
14. Countable-sanoqli
15. Cube-kub
16. Definition-ta'rif
17. Degree-daraja
18. Dimension-o'lcham
19. Disjoint-kesishmaydigan
20. Each-har bir
21. Extension-davomlashtirish
22. Finite-chekli
23. Following-quyi
24. For-uchun
25. General-umumiy
26. Half-yarim
27. Homeomorphic-homeomorfizm

- 28. Hull-qobiq
- 29. Inion-birlashma
- 30. Interior-ichi
- 31. Intersection-kesishma
- 32. Interval-interval
- 33. Linked-zanjirsimon
- 34. Maps-akslantirish
- 35. Maximal-maksimal
- 36. Measure-o'lchov
- 37. Metric-metrik
- 38. Normal-normal
- 39. Open-ochiq
- 40. Order-tartib
- 41. Paper-maqola
- 42. Partial-qisman
- 43. Point-nuqta
- 44. Preserving-saqlamoq
- 45. Probabilite-ehtimollik
- 46. Properties-xossa
- 47. Quofed-faktor
- 48. Relation-munosabat
- 49. Results-natija
- 50. Set-to'plam
- 51. Spaces-fazo
- 52. Subsets-to'plamosti
- 53. System-sistema
- 54. Uniform-tekis
- 55. Vector-vektor

