

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI
NIZOMIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT PEDAGOGIKA
UNIVERSITETI
FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

“Himoyaga ruxsat etilsin”
Fakultet dekani, f.-m.f.n.
_____ G'.F.Djabbarov
“ ____ ” _____ 2014 yil

“5140100-matematika” ta'lim yo'nalishi 4-kurs talabasi

Akbarova Osiyo Maxsudali qizi
“**KOMPAKT VA BIKOMPAKT TOPOLOGIK FAZOLARNING BA'ZI
XOSSALARI**” mavzusidagi

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Talaba: _____ O.Akbarova

Ilmiy rahbar: “MO'M” kafedrası
dotsenti, f.-m.f.n.
_____ T.Jo'rayev

Taqrizchilar:
“Matematika o'qitish metodikasi”
kafedrası professori, f.-m.f.d.
_____ R.Beshimov

O'zMU, “Geometriya” kafedrası
dotsenti _____ J.Aslov

“Himoyaga tavsiya etilsin”
“Matematika o'qitish metodikasi”
kafedrası mudiri, f.-m.f.d.
_____ R. Beshimov

“ ____ ” _____ 2014 yil
Toshkent 2014 yil

KIRISH

Mavzuning dorzarbligi: Prezidentimiz I.A.Karimovning aytganlaridek “Bugun biz tarixiy bir davrda xalqimiz o‘z oldiga ezgu va ulug‘ maqsadlar qo‘yib, tinch osoyishta hayot kechirayotgan, avvalambor o‘z kuch va imkoniyatlariga tayanib, demokratik davlat va fuqarolik jamiyati qurish yo‘lida ulkan natijalarni qo‘lga kiritayotgan bir zamonda yashamoqdamiz.

Ana shu haqiqatni xalqimiz har tomonlama to‘g‘ri tushunib, tanlagan taraqqiyot yo‘limizni ongli ravishda qabul qilgani va qo‘llab-quvvatlayotgani oldimizga qo‘ygan maqsadlarga erishishning asosiy manbai va garovi ekanini hayotning o‘zi tasdiqlamoqda”. [1] 3-bet.

Bundan ko‘rinib turibdiki bizga berilayotgan e‘tibordan unumli foydalanish biz yoshlarning vatan oldidagi burchimiz hisoblanadi. Jumladan, yosh avlodga qaratilayotgan e‘tiborni ta‘lim tizinig berilayotgan e‘tibor zahirida ko‘rishimiz mumkin.

Yurtboshimiz olg‘a surgan O‘zbekiston ijtimoiy-iqtisodiy rivojlanishning beshta tamoyili bizga ma‘lum.Ularning birida islohotlarni bosqichma-bosqich amalga oshirish belgilangan. “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” ni ham mazkur prinsipga asosan, uch bosqichda amalga oshirish mo‘ljallangan. Har bir bosqichning o‘z oldiga qo‘ygan aniq vazifalari bor.

O‘tish davrini o‘zga qamrab olgan mazkur bosqich 1997-2001 yillarni o‘z ichiga oladi.Milliy dastur qabul qilinganidan keyin o‘tgan davr mobaynida unda belgilangan vazifalarni hayotga tatbiq etish borasida muayyan ishlar amalga oshirildi.

Yangi tizimning huquqiy asoslari yaratildi. Umumiy o‘rta ta‘lim, o‘rta maxsus, kasb-hunar ta‘limi to‘g‘risidagi nizom, umumiy o‘rta-ta‘limning davlat standartlari, o‘quv predmetlari bo‘yicha zamonaviy talablarga javob beruvchi

dasturlar va meyoriy hujjatlar amalda qo'llash uchun kiritilgani ana shu ishlar jumlasidandir.

Har bir hududning ijtimoiy-iqtisodiy rivojlanish istiqbollari, kadrlar bilan ta'minlovchi mazkur ta'lim muassasalarining joylashtirilishi, ularni moddiy va moliyaviy ta'minlashning 1999-2005 yillarga mo'ljallangan dasturi ishlab chiqildi. Bu borada akademik litsey va kasb-hunar kollejlarini qayta rekonstruksiya qilish, ta'mirlash yangidan qurish zaruriyatidan kelib chiqqan holda ularning moddiy bazasini ta'minlash masalalari o'z yechimini topdi.

Va nihoyat, uchinchi bosqichda (2005 yildan keyin) kadrlar tayyorlash tizimini takomillashtirish va yanada rivojlantirish jarayonini amalga oshirmoqdamiz

[2] 62-64 betlar.

“Kadrlar tayyorlash” tizimini rivojlantirishning asosiy yo'nalishlaridan biri ta'limning uzluksizligini ta'minlashdan iboratdir. Uzluksiz ta'lim kadrlar tayyorlash tizimining asosi. O'zbekiston Respublikaning ijtimoiy-iqtisodiy taraqqiyotini ta'minlovchi, shaxs, jamiyat va davlatning iqtisodiy, ijtimoiy ilmiy-texnikaviy va ma'daniy ehtiyojlarini qondiruvchi ustuvor sohadir.

Uzluksiz ta'lim ijodkor, ijtimoiy faol. Ma'naviy boy shaxs shakllanishi va yuqori malakali raqobatbardosh kadrlar ildam tayyorlanishi uchun zarur shart-sharoitlar yaratadi. [3] 43-bet

Zero, prezidentimiz Islom Karimov aytganlaridek “Ta'lim tizimini isloh qilish va vazifalarini muvaffaqiyatli hal etilsa, ijtimoiy siyosiy iqlim keskin o'zgaradi, odamlar ongida demokratik qadriyatlar qaror topadi. Inson jamiyatdagi o'rnini ongli ravishda o'zi belgilaydi”. [2] 78-bet.

BMI obyekti: Topologik va metrik fazolar. Fazo qoplamasi tushunchasi. Kompakt fazolar. Bikompakt fazolar. Kompakt va bikompakt fazolarda uzluksiz akslantirishlar

BMI predmeti:

BMI maqsadi: Bikompakt va kompakt topologik fazolarning geometrik, topologik xossalarini o'rganish, kompaktlikning zaruriy va yetarli shartlarini atroflicha o'rganish

BMI vazifalari:

- Metrik fazo va xossalari;
- Topologik fazo, misollar;
- To'plamlararo amallar;
- Kompakt fazolar va ularga oid misollar;
- Bikompakt fazolar va ularga oid misollar;
- Kompakt va bikompakt fazolarda uzluksiz akslantirishlarni o'rganish.

Bu vazifalarni bajarish jarayoni bitiruv malakaviy ishimning tarkibiy tuzilmasini belgilab beradi. Unga ko'ra BMI kirish, ikkita bob, oltita paragraph, xulosa va foydalanilgan adabiyotlar ro'yxatidan iborat.

Birinchi bob "Topologik va metrik fazolar" haqida.

Ikkinchi bob esa "Kompakt va bikompakt fazolar, ularning xossalari" haqida.

Mundarija.

Kirish.

I. Bob. Topologik va metrik fazolar.

§1.1 Topologik fazo, misollar, xossalari

§1.2 Metrik fazo, misollar va xossalari.....

§1.3 Topologik va metrik fazolarda uzluksiz akslantirishlar.

II. Bob. Kompakt va bikompakt topologik fazolar.

§2.1 Kompakt topologik fazolar. Misollar.....

§2.2 Bikompakt topologik fazolar. Misollar.....

§2.3 Kompakt va bikompakt topologik fazolarda uzluksiz akslantirishlarning xossalari.

Xulosa.

Foydalanilgan adabiyotlar.

I bob. Topologik va metrik fazolar.

Topologiya haqida.

Ko'pgina matematik tushunchalar, ba'zida butun bir matematik nazariyalar vujudga kelishi bilan matematikadan tashqarida bir qancha vaqt davomida o'z tatbig'ini topmaydi. Jumboqli kompleks sonlar tarixi bunga yaqqol misol bo'ladi: ushbu sonlar bir necha yuz yillar mobaynida boshqa sohalarida qo'llanilmay, keyinchalik fizika va mexanikaga kirib keldi. Shunga o'xshab, matematikaning asosiy bo'g'ini bo'lmish geometriya fanini oladigan bo'lsak, bu sohada noevklid (Lobachevskiy) geometriyaning asosiy obyektlari - Lobachevskiy tekisligi va fazosi (Lobachevskiy tekisligi modeli) ham bir necha o'n yillar davomida o'z tatbig'ini topmagan.

Shunga o'xshash sohalardan yana biri **Evklid geometriyasi, Lobachevskiy geometriyasi, zamonamiz geometriyasi**, qolaversa, zamonaviy matematikaning bir bo'limi, hosilasi bo'lgan topologiya fanidir. Topologiya so'zining lug'aviy ma'nosi yunoncha , $\tau\omicron\pi\omicron\zeta$ - joy (o'rin), $\tau\omicron\gamma\omicron\zeta$ - qonun so'zlaridan iborat.

Topologiya atamasini birinchi bo'lib Listing qo'llagan. Topologiya - matematikaning nisbatan "yosh" va muhim bo'limlaridan biridir. Topologiya fani geometriya va matematik analiz fanlarining qator fundamental faktlarini (tushunchalarini) umumiy nuqtai nazardan qayta ko'rib chiqish natijasida paydo bo'ldi.

Topologiya fan sifatida ilk marta XIX asrning oxirlarida buyuk fransuz matematigi Anri Puankare ishlarida shakllana boshlagan. U topologiyani "analysis situs" (lotinchadan tarjimasi -joy (o'rin) geometriyasi) tahlili deb nomlaydi. Bu atamani esa, matematikaga birinchi bo'lib Riman olib kirgan. Keyinchalik bu atamalar bir so'z bilan *topologiya* deb atala boshlandi.

A. Puankare topologiya to'g'risida shunday degan edi: "O'zimga keladigan bo'lsak, oldinma-ketin kirib chiqqan turfa yo'llar meni "analysis situs" tomon boshlab keldi".

Bu o'rinda mashhur fransuz matematigi Andre Veylning topologiya xususida aytgan quyidagi so'zlari ham e'tiborga loyiqdir: "Har bir mate-

matikning qalbini zabt etish ustida topologiya farishtasi bilan mavhum algebra shaytoni kurash olib boradi. Bu orqali, birinchidan, topologiyaning ajoyib jozibasi va go‘zalligi namoyon bo‘lsa, ikkinchidan, barcha zamonaviy matematikaning g‘aroyib birikishi topologiya va algebraga eltishi ifoda etiladi”.

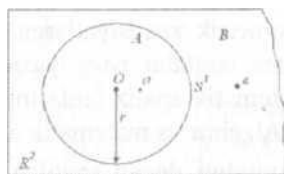
Hozirgi zamon fanlarining rivojlanishida topologiyaning fizika, biologiya, ximiya va binobarin, geografiya fanlaridagi tatbig‘i qo‘llanilmoqda. Topologiyaning sehrli olamiga kirish mashaqqatlidir. Shu sababli topologiya fanining tushuncha, ta’rif va ma’lumotlarini puxta o‘zlashtirish muhim. Oddiy topologik tushunchalar bizni o‘rab turgan olamga nazar tashlaganda paydo bo‘la boshlaydi. O‘z-o‘zidan tushunarliki, figuralarning geometrik xossalariga figura o‘lchamlari, ularning joylashishi, burchaklarining ko‘rinishi va hokazolar kiradi.

Bu geometrik xususiyatlardan tashqari, yana nimadir nazarimizdan chetda qolayotgandek tuyuladi. Masalan, geometrik chiziqlarning yopiq yoki yopiq emasligi, figuralarning “teshikli yoki teshiksiz , cho‘ziluvchan yoki cho‘ziluvchan emasligi, geometrik figuralarning zanjirsimonligi yoki yo‘qligi, bog‘lamli chiziqlarning bog‘ichli bo‘lishi yoki bo‘lmasligi, figuralarni yirtmasdan cho‘zish yoki cho‘zish mumkin emasligi kabi xossalarini inobatga oladigan bo‘lsak, Evklid geometriyasidan sal tashqariga chiqishga to‘g‘ri keladi. Aynan shu o‘rganish natijasida va shu kabi geometrik figuralarning xossalarini o‘rganuvchi topologiya fani elementlari kirib kela boshladi.

Puankare nuqtai nazariga ko‘ra, topologiya shunday fanki, u metrik figuralarning sifatli xossalarini faqat uch o‘lchamli fazoda emas balki undan yuqori o‘lchamli fazolarda ham o‘rganishga yordam beradi. Geometrik figuralarning sifatli xossalari deganda, masalan, sferani rezina qobiq bilan qoplangan deb faraz qilib, uni yetarlicha siqishni yoki yetarlicha uzmasdan cho‘zishni tushunish mumkin. Sferani bunday almashtirishlar topologik gomeomorfizm deb yuritiladi. Gomeomorfizm natijasida hosil qilingan har xil geometrik figuralar o‘zaro gomeomorf deyiladi. Figuralarning sifatli xossalari bu

figuraga o'zaro gomeomorf bo'lgan barcha geometrik figuralarga tegishli bo'ladi. Bunday xossalar bir so'z bilan topologik xossalar deb ataladi.

Yuqoridagi misoldan ko'rinadiki, sferaning topologik xususiyati uning bir butunligi va bog'lamli ekanligidadir. Sferani chuqurroq o'rganishga, masalan, sfera bilan shar yoki doiraning harakati natijasida gomeomorfligini ko'rsatishga harakat qilsak, uning boshqa xususiyatlari ayon bo'ladi. Aslida bunday gomeomorfizm bo'lishi mumkin emas. Masalan, voleybol to'pi bilan velosiped kamerasi o'zaro topologik har xildir. Ko'rgazmali tasavvurlardan ma'lum bo'ladiki, doiraviy halqa doiraga gomeomorf emas. Chunonchi, figuralar teshiklari soni ham figuraning topologik xususiyatidir. Evklid tekisligi R^2 dagi markazi O nuqtada radiusi bo'lgan va r bo'lgan aylanani S^1 bilan belgilaylik (1.1.1 -rasm).



U holda $R^2 \setminus S^1$ to'plam ikkita o'zaro bir-birini to'ldiruvchi (S^1 ga nisbatan) ochiq A va B to'plamlarga ajraladi, ya'ni $A \cup B = R^2 \setminus S^1$. S^1 ga nisbatan A -ichkarisi, B esa, tashqarisi desak, S^1 aylana A va B to'plamlar o'rtasida chegara - to'siq vazifasini o'tamoqda. A to'plamning ixtiyoriy $a \in A$ nuqtasi bilan B to'plamning ixtiyoriy $b \in B$ nuqtasi orasida S^1 aylana bilan kesishmaydigan sodda uzluksiz yo'l mavjudmi?

To'g'ri chiziqdagi $[0;1]$ kesmaning tekislikdagi **gomeomorf** obrazi (aksi) sodda uzluksiz yo'l deb ataladi. Yuqoridagi savolning javobi: yo'q. Haqiqatan ham, agar $p(x,y)$ bilan R^2 Evklid tekisligida ikki nuqta orasidagi masofani belgilasak, $\gamma : [0;1] \rightarrow R^2$ yo'l bo'lsa, buyurday $\gamma(0) = a$ va $\gamma(1) = b$. U holda $f(t) = p(\gamma(t), 0)$ funksiya ham $\gamma(t)$ uzluksiz bo'lgani uchun uzluksizdir va $f(0) < r$; $f(1) > r$. Funksiyaning xossalariga ko'ra, ya'ni $a \in A$; $f(0) = p(y(0), 0) = p(a, 0) < r$, $f(1) = p(y(1), 0) = p(b, 1) > r$, ya'ni $b \in B$.

Funksiyaning uzluksizligidan shunday t_0 nuqta topiladiki, bu nuqtada f funksiyaning qiymati r ga teng bo'ladi. Bundan esa, $\gamma(t_0) \in S^1$. Demak, $\gamma([0,1]) \cap$

$S^1 \neq \emptyset$. Ma'lumki, A va B to'plamlarni tutashtiruvchi S^1 bilan kesishmaydigan uzluksiz yo'l mavjud emas ekan. Agar S^1 ning gomeomorf obrazini G orqali belgilasak, bunday chiziqli yopiq sodda chiziqli deb yuritiladi.

Shunday savol tug'iladi: $\mathbb{R}^2 \setminus G$ to'plam o'zaro kesishmaydigan, chegaralari G dan iborat bo'lgan ochiq to'plamlarga ajraladimi? Topologiyani chuqurroq tushunchalaridan foydalanib, Jordon bu savolga "ha" javobini beradi.

Topologiyani geometrik xususiyatlarga boy muhim yo'nalishlaridan yana biri qo'zg'almas nuqtalar nazariyasidir. Qo'zg'almas nuqtalar nazariyasi algebra va matematik analiz fanlarining asosiy masalalari bilan chambarchas bog'liqdir. Algebra va matematik analizda $f(x) = 0$ (1) tenglamaning yechimlari mavjudmi degan savolga duch kelamiz. Bu yerda $f(x)$ ko'phad yoki boshqa biror funksiya (1) tenglamaga ekvivalent.

$$f(x) + x = x \quad (2)$$

Agar $F(x) = f(x) + x$ deb belgilash kiritsak, ekvivalent $F(x) = x$ (3) tenglamaga ega bo'lamiz. Bu (3) tenglamaning yechimlari F akslantirishning qo'zg'almas nuqtasi deyiladi. Ushbu akslantirish birorta yopiq (Evklid fazosida), albatta, chegaralangan to'plamda qaralsa, qo'zg'almas nuqta mavjudligining mazmunli alomatlari hamda isbotlari bor.

Hozirgi kunga kelib topologiya matematik tadqiqotlarning mustahkam quroliga aylandi, uning tili esa, universal ahamiyat kasb etmoqda. Topologiyani fizikada, mexanikada va boshqa fanlarda kompleks qo'llanishi fakt bo'lib qoldi. Fizikada ba'zi real holatlarni bayon qilishni topologiyasiz hal qilib bo'lmaydi. Teskari holatlar ham uchraydi, ya'ni fizikadagi ba'zi muammolar topologiyani rivojlanishiga ta'sir etmoqda.

1.1-§. Topologik fazolar.

Ixtiyoriy “tabiatli” bo‘sh bo‘lmagan X to‘plam va $\tau = U_\alpha: U_\alpha \subseteq X, \alpha \in A$ sistema (shu X to‘plamning to‘plamostilardan tashkil topgan) berilgan bo‘lsin.

1.1.1-ta’rif. Agar τ sistema (to‘plamostilar oilasi) quyidagi:

1) $\emptyset, X \in \tau$;

2) τ sistemaning ixtiyoriy sondagi elementlarining birlashmasi τ ga tegishli bo‘lsa, ya’ni $\forall A' \subset A$ uchun $U_{\alpha \in A'} \in \tau$; $\alpha^1 \in A^1$; $U_{\alpha} \in \tau$;

3) τ sistemaning ixtiyoriy chekli sondagi elementlari kesishmasi τ ga tegishli bo‘lsa, ya’ni $\forall \alpha_i \in A, i = 1, S \cap U_{\alpha_i} \in \tau$ $\bigcap_{i=1}^S U_{\alpha_i} \in \tau$ shartlami qanoatlantirsa, τ sistema X to‘plamdagi topologiya, $(X; \tau)$ juftlik esa, birgalikda topologik fazo deyiladi. $(X; \tau)$ topologik fazo tashkil qilsa, τ sistemaning elementlari ochiq to‘plamlar deb ataladi. Bu ta’rifdagi 1-3-shartlar topologiyaning yoki topologik fazoning aksiomalari deb yuritiladi. Ta’rifdan ma’lumki, X to‘plam qanday bo‘lishidan qat’i nazar, «topologik fazodagi ochiq to‘plamlar turlicha bo‘lishi mumkin ekan. Ko‘p hollarda, agar $(X; \tau)$ topologik fazo bo‘lsa, τ sistema topologik struktura, X to‘plam esa, $(X; \tau)$ topologik fazoning yoki topologiyaning ifodalovchisi — eltuvchisi deb ataladi.

1.1.2-misol. Ikki a va b elementlardan iborat X to‘plam berilgan deylik. τ sistema sifatida bo‘sh to‘plam, X to‘plamning o‘zini va $\{a\}$ dantashkil topgan to‘plamlar oilasini olamiz, ya’ni $\tau = \emptyset: a; b, a$. Bu τ sistema ta’rifdagi 1-3-shartlarni qanoatlantirishi ravshan. Demak, $(X; \tau)$ juftlik topologik fazodir. Bu fazo topologik sodda qurilganiga qaramasdan, muhim va qiziqarli jihatlarga ega bo‘lganligi uchun maxsus nom bilan “bog‘lamli ikki nuqta” deb yuritiladi.

1.1.2- misolda, agar τ ni $\tau = \emptyset: a; b, a$ ko‘rinishida olsak ham, sistema τ topologiya tashkil qiladi.

Yuqoridagi misollardan ko‘rinadiki, ixtiyoriy bo‘sh bo‘lmagan to‘plamga doimo turlicha topologiya kiritish, ya’ni aniqlash imkoni mavjuddir.

Topologiyalarning aniqlanishidan ma’lum bo‘lmoqdaki, ulardagi ochiq to‘plamlar

ham turlicha bo'lishi (topologiyaga qarab) mumkin ekan. Ya'ni bir topologik strukturaga nisbatan ochiq bo'lgan to'plam ikkinchi strukturaga nisbatan ochiq bo'lmasligi mumkin.

1.1.3-misol. X to'plam sifatida R^2 Evklid tekisligini olaylik. Ochik to'plam sifatida R^2 ning ixtiyoriy nuqtasi va markazi shu nuqtada bo'lgan radiusi yetarlicha kichik bo'lgan ochik doiralarni, bo'sh to'plamni qarasak, bu barcha ochik to'plamlar oilasi topologiya tashkil qiladi.

1.1.4-misol. Bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy X to'plam berilgan bo'sin. Topologiya sifatida X to'plamning jami to'plamostilarini olaylik, ya'ni $\{U: U \subseteq X, U \text{-ixtiyoriy to'plamosti}\}$. Bu topologik struktura ham X da topologiya tashkil qiladi. Bu topologiya τ_1 topologiya deb qabul qilingan. Bu (X, τ_1) topologik fazo diskret topologik fazo deyiladi.

Topologik fazoda to'plamlararo amallar.

Topologik fazoda yopiq to'plam, yakkalangan nuqta tushunchalari aniqlangandan keyin bu tushunchalar bilan bevosita bog'liq bolgan to'plamning teginish nuqtasi, to'plamning yopig'i va to'plam ichi hamda ichki nuqtalari tushunchalarini ham bilish lozim bo'ladi.

1.1.5-ta'rif. (X, τ) topologik fazoning $x_0 \in X$ nuqtasi berilgan bo'lib, agar bu nuqtaning ixtiyoriy U atrofi M to'plamning birorta nuqtasini o'zida saqlasa, ya'ni $U \cap M \neq \emptyset$. $M \subset X$ bo'lsa, u holda x_0 nuqta M to'plamning teginish nuqtasi deyiladi.

Topologik fazoda M to'plamning barcha teginish nuqtasidan tashkil topgan to'plam uning yopig'i deb ataladi va $\overline{M}$ ko'rinishda belgilanadi. To'plamning o'zidan yopig'i to'plamga o'tish amali to'plamning topologik yopig'ini olish amali deb yuritiladi. Ta'rifdan ko'rinadiki, to'plamning yopig'i uning o'zini o'z ichiga oladi: $\emptyset$ ning yopig'i o'ziga teng; butun X ning yopig'i fazoning o'ziga teng. Shuningdek, agar $M \subset N$ bo'lsa, u holda $M \subset \overline{N}$ bo'ladi. Bu esa, mazkur amalning monotonlik xarakterga ega ekanligini ko'rsatadi. Yana shuni ta'kidlash lozimki, bu amal idempotentdir, ya'ni $M = \overline{\overline{M}}$ bo'ladi.

1.1.6.Teorema. Fazoning M to'plamostisi yopiq bo'lishi uchun u o'zining

yopig'iga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Natija. Fazoning ixtiyoriy M to'plamostisi yopig'i M bu fazoda yopiq to'plamdir.

Shuni ta'kidlash kerakki, to'plam yopig'ini olish amali quyidagi xossalarga ega:

$$1^\circ. A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$$

$$2^\circ. A = A$$

$$3^\circ. A \subset A$$

$$4^\circ. \emptyset = \emptyset$$

1.1.7-Ta'rif. Agar x_0 ning ixtiyoriy atrofida M to'plamning x_0 farqli elementi boisa, X fazoning x_0 nuqtasi $M \subset X$ to'plamning nuqtasi deyiladi, ya'ni $U(x_0) \cap M \setminus \{x_0\} \neq \emptyset$.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, to'plamning limit nuqtasi uning teginish nuqtasi bolishi mumkin, lekin teginish nuqtasi yoki **yakkalangan** nuqta doimo ham limit nuqtasi bo'lavermaydi. Shuni ta'kidlash mumkinki, $M \setminus M$ ning har bir nuqtasi M to'plam uchun limit nuqta bo'ladi. I o'p- lamning yopig'ini oladigan bo'lsak, bu to'plam teginish, limit va yakkalangan nuqtalardan tashkil topgan ekan.

To'plamning barcha limit nuqtalaridan tashkil topgan to'plamni uning hosila to'plami deb belgilanadi va M ning hosila to'plami M' ko'rinishda ifodalanadi.

Hosila to'plam ta rifidan ma'lumki, $M' \subset M$ o'rinli va M to'plam yopiq bo'lishi uchun $M' \subset M$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

1.1.8.Ta'rif. Agar X fazoning M to'plami o'z-o'zining hosila to'p- lami bilan ustma-ust tushsa, mukammal to'plam deyiladi, ya'ni $M' = M$. Bu ta'rifdan ma'lum bo'ladiki, mukammal to'plam, bir tomondan, yopiq to'plam, ikkinchi tomondan, yakkalangan nuqtalarga ega emas ekan. Mukammal to'plamga misol sifatida to'g'ri chiziqda ixtiyoriy kesma, tekislikda yopiq doirani olishimiz mumkin. Yana shuni ta'kidlash mum- kinki, fazoda yopiq to'plamlarning ixtiyoriy

birlashmasi har doim ham yopiq bo‘lavermaydi. Ba’zi hollarda yopiq to‘plamlar birlashmasi hamyopiq bo‘lishi mumkin.

1.1.9. Ta’rif. Agar X to‘plamning to‘plamostilaridan tashkil topgan $S = \{A_i: i \in \mathfrak{I}\}$ jamlanma berilgan bo‘lsa, X ning ixtiyoriy x_0 nuqtasi shunday U_0 atrofga ega bo‘lsaki, bu atrof jamlanmaning chekli sonidagi elementlari bilan kesishsa, u holda bu jamlanma lokal chekli deyiladi, ya’ni $U_0 \cap A_i \neq \emptyset$, $i \in K$, $K < \infty$.

1.1.10. Teorema. X topologik fazoning ixtiyoriy lokal chekli jamlanmasi $S = \{A_i: i \in \mathfrak{I}\}$ uchun $\bigcup_{i \in \mathfrak{I}} A_i = \bigcap_{i \in \mathfrak{I}} A_i$ munosabat (tenglik) o‘rinli.

Teoremadan quyidagi xulosani chiqarish mumkin.

Xulosa. Yopiq to‘plamlarning lokal chekli jamlanmasi - birlashmasi yopiq to‘plamdir.

Agar to‘plamning yopig‘ini olish amalini $ClM = \overline{M}$ bilan belgilasak va bu amalni birorta bo‘sh bo‘lmagan X to‘plamda qo‘llasak, shu to‘plamda topologiya aniqlashning yana bir usuli kelib chiqadi. Bu usul, ya’ni to‘plamning yopig‘ini olish amali buyuk polyak topologi K. Kuratovskiy tomonidan yaratilgan.

1.1.11. Teorema. (Topologiyani Kuratovskiy operatori orqali kiritish).

Ixtiyoriy X to‘plamda qo‘llaniladigan ixtiyoriy Kuratovskiy operatori Cl shu to‘plamda ma’lum bir τ topologiyaga asos soladi, aynan $\tau = \{U\}$ ning har bir U elementi uchun $Cl(X \setminus U) = X \setminus U$ tenglik o‘rinli va ixtiyoriy $M \subset X$ to‘plamosti uchun $M = ClM$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

1.1.12. Misol. Ixtiyoriy sanoqsiz X to‘plam berilgan bo‘lsin. X to‘plamda Cl to‘plamning yopig‘i amalini quyidagicha aniqlaymiz: ixtiyoriy sanoqlidan katta bo‘lmagan M to‘plam uchun $Cl(M) = \overline{M}$, agar M sanoqsiz bo‘lsa, $Cl(M) = X$ deb olamiz. Tekshirib ko‘rish ko‘rsatadiki, bunday aniqlangan amal to‘plamning yopig‘ini olishning hamma shartlarini qanoatlantirishini ko‘rsatadi. Ya’ni:

- 1) $Cl(M \cup N) = Cl(M) \cup Cl(N)$;
- 2) $M \subset Cl(M)$;
- 3) $Cl(Cl(M)) = Cl(M)$;

4) $Cl \emptyset = \emptyset$ shartlar o‘rinlidir.

Bu misolda X to‘plamda yopiq to‘plam sifatida faqat va faqat $Cl(M) = M$ tenglikni qanoatlantiruvchi to‘plamlarni e‘lon qilsak. Bu X da ma‘lum bir topologiyani aniqlaydi.

1.1.13. Ta’rif. X topologik fazoning x_0 nuqtasi uchun x_0 nuqtaning shunday ochiq atrofi U_0 topilsaki va bu atrof to‘la M_0 to‘plamda yotsa, u X fazoning M to‘plamostisi-ning ichki nuqtasi deyiladi, ya’ni $U_0 \subset M$ bo‘lsa, M to‘plamning barcha ichki nuqtalari tashkil topgan to‘plam M ning ichi deyiladi va $\text{int}M$ ko‘rinishida belgilanadi. Ta’rifdan va oldingi keltirilgan faktlardan ko‘rinadiki, M to‘plam ochiq to‘plam bo‘lishi uchun $\text{int}M = M$ tenglik yoki u o‘zining ichiga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Yana shuni aytish mumkinki, M to‘plamning ichi ochiq to‘plam va $\text{int}M$ - bu M da yotgan ochiq to‘plamlarning birlashmasidan iboratdir. To‘plamning ichi int quyidagi xossalarga ega:

- 1) agar $M \subset N$ bo‘lsa; $\text{int}M \subset \text{int}N$ (monotonligi);
- 2) $\text{int}(\text{int} M) = \text{int} M$ (idemponent);
- 3) $\text{int} M \cap N = \text{int}M \cap \text{int}N$.

1.1.14. Misol. Sonlar o‘qi R^1 topologiyasiga ko‘ra, $\text{int}Q = \emptyset$ va $\text{int} R^1 \setminus Q = \emptyset$, bu yerda Q - ratsional sonlar to‘plami.

X topologik fazoning ixtiyoriy M to‘plamostisi uchun:

$$X \setminus \overline{M} = \text{int}(X \setminus M)$$

$$X \setminus \text{int}M = \overline{(X \setminus M)} \text{ tengliklar o‘rinlidir.}$$

1.1.15. Ta’rif. X topologik fazoning x_0 nuqtasi uchun x_0 nuqta uning ixtiyoriy ochiq U atrofini ham, M ning elementlarini ham uning to‘ldiruvchisi $CM = X - M$ ning elementlarini o‘zida saqlasa, x_0 nuqta $M \subset X$ to‘plami uchun chegaraviy nuqta deyiladi, ya’ni $U \cap M \neq \emptyset$ va $U \cap X \setminus M \neq \emptyset$. Boshqacha aytganda, x_0 nuqta M va $X \setminus M$ to‘plamlar uchun teginish nuqtasi bo‘lgan taqdirda, u chegaraviy nuqta deyiladi. To‘plamning barcha chegaraviy nuqtalaridan tashkil topgan to‘plam uning chegarasi deyiladi va $F_r M$ ko‘rinishda belgilanadi.

Demak, M ning chegarasi $F_r M$ uchun $F_r M = M \cap CM$ tenglik o‘rinli ekan. Chegara uchun quyidagi tenglik o‘rinlidir:

$$F_r M = M \setminus \text{int} M = M \setminus M \cup M \setminus \text{int} M = (M \setminus M) \cup (M \cap CM)$$

1.1.16. Teorema. X topologik fazoning M to‘plami ochiq bolishi uchun u o‘zining chegarasi bilan kesishmasligi zarur va yetarlidir. M to‘plam yopiq bo‘lishi uchun esa, u o‘zida chegarasini to‘la saqlashi zarur va yetarlidir.

Misol. Sonlar o‘qi R^1 dagi topologiyani olsak, $F_r Q = R^1$ va $F_r R^1 \setminus Q = R^1$ tengliklar o‘rinlidir.

Ammo $F_r R^1 = \emptyset$, $F_r(F_r Q) = F_r R^1 = \emptyset$. Agar $M \subset X$ bo‘lib, M ning faqat o‘ziga tegishli bo‘lgan chegaraviy nuqtalarini olsak, bu nuqtalar to‘plami M ning cheti deb yuritiladi. Bunda $M \cap CM = M \setminus \text{int} M$ o‘rinlidir. Demak, birorta to‘plamning cheti uning ichki nuqtalarini o‘z ichiga olmas ekan. Ya’ni, to‘plamning cheti ichki nuqtasiz ekan.

Ba’zi bir masalalarda figuralarning topologik xossalarini o‘rganishda, ochiq (yopiq) to‘plamlar sinfidan foydalanishga to‘g‘ri keladi.

Ta’rif. Agar X topologik fazoning $A \subset X$ to‘plamostisi, o‘z yopig‘injning ichiga (ichining yopig‘iga) teng bo‘lsa, kanonik ochiq (kanonik yopiq) deyiladi. Ya’ni, agar $A = \text{int} A$ bo‘lsa, A kanonik ochiq deyiladi agar $A = \text{int} A$ bo‘lsa, A kanonik yopiq deyiladi. Kanonik ochiq va kanonik yopiq to‘plamlarga tekislikda ochiq va yopiq doiralarni misol keltirish mumkin.

To‘plamning kanonik yopig‘ini olish amalini Cl^* bilan, to‘plamning kanonik ichini olish amalini int^* bilan belgilasak, bu maxsus amallar bilan to‘plamning yopig‘i va ichini olish amallari orasida quyidagicha bog‘lanish mavjud:

$$\text{int}^* A = \text{int} A;$$

$$Cl^* A = \text{int} A.$$

Ko‘p hollarda kanonik ichini olish amali $\text{int}^* A$ to‘plamning kanonik yadrosini aniqlash amali deb ham yuritiladi. To‘plamning ichini topish $\text{int} A$ esa, uning yadrosini aniqlashdir.

Ma’lumki, $A \subset A$, u holda $\text{int} A \subset \text{int}^* A$. Ya’ni, ochiq yadro doimo kanonik

yadroda yotadi. Demak, barcha ochiq to'plamlar o'zining kanonik yadrosida yotar ekan. Bundan ko'rinadiki, $\text{int}A \subset A$ munosabat o'rinli. U holda $\text{Cl}(A) \subset A$. Ya'ni, to'plamning kanonik yopig'i uning yopig'ida yotadi. Demak, barcha yopiq to'plamlar o'zida kanonik yopig'ini saqlar ekan.

1.2-§. Metrik fazolar.

Matematikaning ko'p qo'llaniladigan tushunchalaridan biri metrik fazo tushunchasidir. Bu tushuncha matematikaga birinchi bor fransuz matematigi M. Freshe tomonidan 1906-yilda kiritildi.

Metrik fazo - bu biror bo'sh bo'lmagan to'plamdagi ikki element (nuqta) orasidagi masofani aniqlash ma'lum demakdir. Bu ikki nuqta orasidagi masofani aniqlash amali ma'lum bir shartlarni (aksiomalarni) qanoatlantirishi shart bo'ladi. Bu shartlar masofa (yoki metrika) aksiomalari deb yuritiladi. Metrik fazo matematikaning deyarli barcha sohalariga tatbiq etiladi. Qolaversa, barcha fanlarda ham turli-tuman ko'rinishda ishlatiladi. Fazoda (to'plamda) ikki nuqta orasidagi masofa ma'lum bo'lsa, nuqtalarning o'zaro "yaqin"ligini, nuqta va to'planning, qolaversa, ikkita to'plam (figura) "yaqin"ligini aniqlasa bo'ladi. Bu esa, fazoning, figuralarning turli geometrik xossalarini o'rganishda muhim ahamiyatga egadir.

Bo'sh bo'lmagan X to'plam va R haqiqiy sonlar to'plami berilgan bo'lsin.

1.2.1.-ta'rif. Agar quyidagi shartlar o'rinni bo'lsa, $\rho: X \times X \rightarrow R$ akslantirish X to'plamda metrika deyiladi:

$$(\rho 1). \forall x, y \in X, \rho(x, y) \geq 0;$$

$$(\rho 2). \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

$$(\rho 3). \rho(x, y) \sim \rho(y, x), \forall x, y \in X \text{ (simmetriklik aksiomasi);}$$

$$(\rho 4). \rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z) \quad \forall x, y, z \in X \text{ (uchburchak aksiomasi).}$$

Agar X to'plam va ρ akslantirish metrika tashkil qilsa, ular birgalikda metrik fazo deyiladi va (X, ρ) ko'rinishda yoziladi. Metrikani (X, ρ) metrik fazoda ikki element yoki ikki nuqta orasidagi masofa deb tushuniladi.

1.2.2-misol. X to'plam sifatida R^1 - sonlar to'g'ri chizig'i yoki X - haqiqiy sonlar to'plami R^1 ni olsak hamda ixtiyoriy x va y sonlar uchun $\rho(x, y) = |x - y|$ desak, u holda, ma'lumki, bu ρ metrikaning hamma aksiomalarini qanoatlantiradi. Demak, $(R^1, |x - y|)$ metrik fazo tashkil qiladi.

1.2.3-misol. R^n - ko'p o'lchovli sonlar fazosi. X sifatida

$\{x = x_1, \dots, x_n : x_i \in R^1, i = \overline{1, n}\}$ ko'rinishdagi to'plamni olaylik. Bu to'plamning ikki x va y elementlari orasidagi metrikani(masofani)

$\rho_{x,y} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} = \sqrt{x_1 - y_1 + \dots + x_n - y_n}^2$ formula bilan aniqlaymiz, bu yerda $x = (x_1, \dots, x_n) \in X$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in X$.

Ma'lumki, bu ρ metrika tashkil qiladi. Bu fazo n o'lchovli sonlar fazosi deb yuritiladi va R^n ko'rinishda belgilanadi.

Xususiyl holda, agar $n = 2$ bo'lsa, R^2 da Evklid tekisligidagi metrika

$\rho_{x,y} = \sqrt{x_1 - y_1^2 + x_2 - y_2^2}$, $n = 3$ bo'lsa, R^3 da Evklid fazosidagi metrika $\rho_{x,y} = \sqrt{x_1 - y_1^2 + x_2 - y_2^2 + x_3 - y_3^2}$ ko'rinishlarda bo'ladi.

1.2.4-izoh. Bu X to'plamda ko'p hollarda metrika $\rho_{x,y} = \max x_i - y_i$ ko'rinishda ham aniqlanadi.

1.2.5-misol. Diskret metrik fazo. Faraz qilaylik, X bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy to'plam bo'lsin. X to'plamda ikki element: x va y orasidagi metrika (masofa)ni quyidagicha aniqlaymiz:

$$\rho_{x,y} = \begin{cases} 0, & \text{agar } x = y; \\ 1, & \text{agar } x \neq y. \end{cases}$$

Bu $\rho(x,y)$ metrika tashkil qiladi va diskret metrika deyiladi. (X, ρ) f diskret metrik fazo deb yuritiladi.

Shuni aytish kerakki, bu ko'rinishda fazoni metrikalashtirish doim ham mazmunli bo'lavermaydi. Shu sababli doimo fazoni diskret bo'lma- n metrika bilan ta'minlash mazmunliroq bo'ladi va ko'p o'rganiladi.

1.2.6-izoh. Agar A to'plam (X, ρ) metrik fazoning ixtiyoriy bo'shbo'lmagan to'plamostisi bo'lsa, A to'plamning ixtiyoriy x_1 va x_2 elementlari uchun bu ikki element orasidagi masofani (metrikani) $\rho_A(x_1, x_2) = \rho(x_1, x_2)$ deb olsak, u holda A to'plamostida metrika bo'ladi. Bu metrika ρ_A indutsirlangan metrika deb

yuritiladi. (A, ρ_A) metrik fazo esa, (X, ρ) metrik fazoning fazoostisi deb yuritiladi. Agar A va B to'plamlar (X, ρ) ning bo'sh bo'lmagan to'plamostilari bo'lsa, bu A va B to'plamlar orasidagi masofa sifatida $\rho(A, B) = \inf_{x \in A, y \in B} \rho(x, y)$ son qabulqilingandir. Xususiyl holda $\rho(x_0, A) = \inf_{x \in A} \rho(x_0, x)$ soni x_0 nuqtadan A to'plamgacha bo'lgan masofa deb ataladi. Xullas, M to'plamning diametri deb $diam M = \sup_{x, y \in M} \rho(x, y)$ songa aytiladi. Bu yerda $M \subset X$.

Nihoyat, agar $diam M < \infty$ o'rinli bo'lsa, M to'plam chegaralangan to'plam deyiladi. Metrik fazolarga doir misollar ba'zi hollarda matematik analizga doir masalalarni hal qilishda yuzaga chiqmoqda.

1.2.7-misol. $[0, 1]$ kesmada uzluksiz bo'lgan barcha funksiyalar to'plamini olaylik. Bu to'plam $C_{[0, 1]}$ ko'rinishda belgilanadi. Agar $x(t), y(t)$ funksiyalar $C_{[0, 1]}$ ning ixtiyoriy uzluksiz funksiyalari bo'lsa, ular orasidagi masofani $\rho_{x, y} = \max_{t \in [0, 1]} |x(t) - y(t)|$ shaklda aniqlaymiz. Matematik analiz kurslaridan ham ma'lumki, bu ρ funksiya $C_{[0, 1]}$ da metrika tashkil qiladi. $C_{[0, 1]}$ uzluksiz funksiyalar fazosi deb ataladi.

1.3-§ Topologik fazolar va metrik fazolarda uzluksiz akslantirishlar.

Uzluksiz akslantirishlar topologiyaning eng asosiy va ko'p qo'llaniladigan tushunchalaridan biri hisoblanadi.

X va Y lar har xil topologik fazolar deylik.

1.3.1.Ta'rif. Agar $f: X \rightarrow Y$ akslantirishda, $y_0 = f(x_0)$ obrazning ixtiyoriy V atrofi uchun x_0 nuqtaning shunday U atrofi topilsa va u $f(U) \subset V$ ni qanoatlantirsa, u holda f akslantirish X topologik fazoning $x_0 \in X$ nuqtasida uzluksiz deyiladi.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, y_0 nuqta atrofining proobrazi x_0 nuqta uchun atrof bo'la oladi.

Agar $f: X \rightarrow Y$ akslantirish X fazoning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, f akslantirish X fazoda uzluksiz deyiladi.

Uzluksiz akslantirishga trivial misol sifatida $i_x: X \rightarrow X$ ayniy akslantirishni olish mumkin. Bu akslantirish X ning har bir x nuqtasiga yana shu $i(x) = x$ nuqtasini mos qo'yadi.

Bundan ko'rinadiki, u har bir nuqtada uzluksizdir.

1.3.2.Misol. Agar $\sin: \mathbb{R}^1 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ni olsak, ya'ni har bir $x \in \mathbb{R}$ ga $\sin x$ ni mos qo'ysak, bu akslantirish uzluksizdir.

1.3.3.Misol. Agar $\arctg: \mathbb{R}^1 \rightarrow (-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2})$ akslantirishni olsak, bu akslantirish uzluksiz va biektiv akslantirishdir. Bunga teskari akslantirish $tg: (-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}) \rightarrow \mathbb{R}^1$ ham uzluksizdir.

Uzluksiz akslantirishlar quyidagi asosiy xossaga ega bo'lib, bu xossa ularni to'la tavsiflaydi.

1.3.4.Teorema. $f: X \rightarrow Y$ akslantirish uzluksiz bo'lishi uchun Y dagi ixtiyoriy ochiq $V \subset Y$ to'plamning $f^{-1}(V)$ proobrazi (asli) X fazoda ochiq to'plam bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bizga ma'lumki, ochiq to'plamlarning to'ldiruvchisi yopiq bo'lganligidan va uzluksiz akslantirishlar ta'rifidan quyidagini tasdiqlash mumkin.

1.3.5.Teorema. $f: X \rightarrow Y$ akslantirish uzluksiz bo'lishi uchun Y fazodagi ixtiyoriy

yopiq to'planning proobrazi X fazoda yopiq bo'lishi zarur va yetarlidir.

Uzluksiz akslantirishga misol sifatida quyidagini aytishimiz mumkin: ixtiyoriy $f: X \rightarrow Y$ akslantirishda X fazo diskret fazo bo'lsa, yoki Y antidiskret fazo bo'lsa, bu akslantirish doimo uzluksiz bo'ladi.

Bulardan xulosa qilib aytishimiz mumkinki, $f: X \rightarrow Y$ ning uzluksiz bo'lishi bu fazolardagi topologiyalarga bog'liq ekan. Masalan, bir X to'plamda ikki xil topologiyani olsak, u holda $i_X: X \rightarrow Y$ ayniy akslantirish doimo uzluksiz bo'lavermaydi.

Uzluksiz akslantirishlarning oddiy, biroq muhim xossalari biri shuki, bir necha uzluksiz akslantirishlarning kompozitsiyasi yana uzluksiz akslantirishdan iborat bo'ladi.

1.3.6. Teorema. Agar $f: X \rightarrow Y$ va $g: X \rightarrow Z$ uzluksiz akslantirishlar bo'lsa, u holda ularning kompozitsiyasi $h = g \circ f: X \rightarrow Z$ uzluksiz bo'ladi.

Topologiyaning ko'pgina masalalarini bayon qilishda ochiq va yopiq akslantirishlar sinfi juda muhim ahamiyatga egadir.

1.3.7. Ta'rif. Agar uzluksiz $f: X \rightarrow Y$ akslantirishda, X dagi har bir ochiq to'planning (mos ravishda yopiq to'planning) aksi Y to'plamda ochiq (mos ravishda yopiq) to'plam bo'lsa, ochiq (mos ravishda yopiq) akslantirish deyiladi.

Bir vaqtda ham ochiq, ham yopiq akslantirishga misol sifatida $i_X: X \rightarrow X$ ayniy akslantirishni olsak, $i_X: A \rightarrow X$ shaklidagi joylash-tirishda doimo ochiq to'planning aksi ochiq, yopiq to'planning aksi yopiq to'plamdir, bunda $A \subset X$.

Ochiq akslantirishlarning muhim sinfi sifatida ochiq to'plamlarda aniqlangan kompleks o'zgaruvchili golomorf funksiyalar sinfini ko'rsatish mumkin. Bundan tashqari, topologik guruhda aniqlangan gomeomorfizmlar ham mavjuddir.

1.3.8. Misol. Ixtiyoriy $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}^1$ uzluksiz akslantirishni olsak, bu akslantirish doimo yopiq akslantirish bo'ladi. Lekin u doimo ochiq akslantirish bo'lavermaydi.

Misol. $P: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ proeksiyalashni olsak, bu akslantirish $p(x_1; x_2) = x_1$ formula bilan aniqlanadi va ochiq akslantirish bo'ladi. Ya'ni, markazi (x_1, x_2) nuqtada bo'lgan ochiq doira proeksiyasi markazi x , da bo'lgan intervaldan iboratdir. Agar

R^2 da $x_1x_2 = 1$ giperbolani olsak, bu giperbola yopiq to'plamdir.

Yopiq to'plamlarga misol keltirganda tekislikdagi ixtiyoriy ikkinchi tartibli chiziq yopiq to'plam ekanligini ta'kidlagan edik. Bu to'plamlardan ba'zilarining proeksiyasi $R^1 \setminus \{0\}$ dan iborat bo'lib, bu yopiq to'plam emas. Demak, bu akslantirish yopiq akslantirish emas.

1.3.9.Misol. Agar $f: R^1 \rightarrow R^1$ uzluksiz funksiyani $f(x) = 1/(1 + x^2)$ formula bilan aniqlasak, bu uzluksiz akslantirish bo'lib, ochiq ham, yopiq ham emasdir. Shundan $f(R^1) = (0; 1]$ to'plam R^1 da ochiq ham, yopiq ham emasligi ma'lum bo'ladi.

1.3.10.Teorema. Uzluksiz $f: X \rightarrow Y$ akslantirish ochiq bolishi uchun X fazoda ixtiyoriy x_0 nuqtaning U atrofi aksi (obrazi) $y_0 = f(x_0)$ nuqta uchun Y fazoda ochiq atrof bo'lishi zarur va yetarlidir.

Ochiq va yopiq akslantirishlar ta'rifidan quyidagini keltirishimiz mumkin.

1.3.11.Teorema. Ochiq (yopiq) akslantirishlar kompozitsiyasi ochiq (yopiq) akslantirish bo'ladi.

Akslantirishning yopiq bo'lishi uchun quyidagi fakt ham o'rinlidir.

1.3.12.Teorema. $f: X \rightarrow Y$ akslantirish yopiq bolishi uchun ixtiyoriy $A \subset X$ to'plam uchun $f(A) = \overline{f(A)}$ shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Topologiya fanida gomeomorf akslantirish tushunchasi muhim o'rinlardan birini egallaydi. Gomeomorf akslantirish topologik strukturalarni farqlashsiz o'rganishni tavsiya etadi. Bu akslantirish natijasida topologiyaning fundamental masalasi - qaysi topologik strukturalar o'zaro izomorf ekanligi aniqlanadi.

1.3.13.Ta'rif. Agar f va f^{-1} lar bir vaqtda o'zaro uzluksiz bo'lsa, $f: X \rightarrow Y$ biaktiv akslantirish gomeomorf akslantirish yoki gomeomorfizm (ba'zi hollarda topologik akslantirish) deyiladi.

Topologik fazo X bilan topologik fazo Y lar orasida kamida bitta gomeomorf (topologik) $f: X \rightarrow Y$ akslantirish mavjud bo'lsa, birinchisi ikkinchisiga gomeomorf yoki topologik ekvivalent deyiladi. Topologik ekvivalent yoki gomeomorf fazolar $X \approx Y$ yoki $X \sim Y$ ko'rinishda belgilanadi.

Gomeomorfizmga $ind_x: X \rightarrow X$ ayniy akslantirishni trivial misol qilib keltirsa bo'ladi. Shuning bilan birga, tekshirib ko'rish mumkinki, to'g'ri chiziqda aniqlangan ixtiyoriy monoton funksiya ham gomeomorf akslantirish bo'ladi.

1.3.14.Misol. R^n fazoda radiusi 1 ga teng bo'lgan B ochiq sharni olsak, $f: R^n \rightarrow B$ akslantirishni $f(x) = x/(1 + \|x\|)$ formula bilan aniqlasak, bu yerda $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$; $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2$. Bu akslantirish biektivdir. Teskari akslantirish $f^{-1}: B \rightarrow R^n$ esa $f^{-1}(x) = x/(1 - \|x\|)$ formula bilan aniqlanadi. f va f^{-1} lar uzluksizdir. Shu sababli f - gomeomorfizm.

Agar X topologik fazo Y topologik fazoning birorta to'plamostisiga gomeomorf bo'lsa, ya'ni $f: X \rightarrow Y_0 \subset Y$ gomeomorfizm bo'lsa, u holda X fazo Y fazo-ga topologik joylashgan yoki X fazo Y fazoda topologik yotadi yoxud Y fazo X fazoni o'zida saqlaydi, deyiladi. Bunday gomeomorfizm joylash yoki joylash-tirish deyiladi.

Topologik fazolarning gomeomorf akslantirishlarda o'zgarmay qola- digan xossalari ulaming topologik xossalari deb yuritiladi. Shu sababli topologiyani shunday akslantirishlarda fazoning topologik xossalarini o'rganuvchi fandır, desak ham bo'ladi.

1.3.15.Teorema. $f: X \rightarrow Y$ ochiq (mos ravishda yopiq) biektiv akslantirish gomeomorfizmdir.

Natija. $f: X \rightarrow Y$ biektiv akslantirish gomeomorfizm bo'lishi uchun $f(A) = \overline{f(A)}$ bo'lishi zarur va yetarlidir. Shuni aytib o'tish kerakki, gomeomorfizmnı ikki fazo orasidagi munosabat sifatida qarasak, gomeomorfizm munosabati ekvivalentlik munosabatidir. Gomeomorfizm tushunchasidan kengroq bo'lgan lokal gomeomorfizm tushunchasini ham bilish talab etiladi.

1.3.16.Ta'rif. Agarda ixtiyoriy x va $y=f(x)$ juftlik uchun shunday $U(x)$ va $V(y)$ atroflar topilib, $f: U(x) \rightarrow V(y)$ gomeomorfizm bo'lsa, bu $f: X \rightarrow Y$ akslantirish lokal gomeomorfizm deyiladi.

1.3.17.Misol. $f: R^1 \setminus \{0\} \rightarrow R^1 \setminus \{0\}$ akslantirishni $f(x) = x^2$ formula bilan olsak, u lokal gomeomorfizmnı tashkil qiladi.

II bob. Kompakt va bikompakt topologik fazolar.

2.1. Kompakt topologik fazolar.Misollar.

Topologik fazolarda kompaktlik va unga doir misollar.

X topologik fazo bo'lib Y uning biror qism fazosi bo'lsin. Ochiq to'plamlarning $\{G_\alpha : \alpha \in A\}$ sistemasi uchun $Y \subset \bigcup_{\alpha \in A} G_\alpha$ bo'lsa, u holda bu sistema Y to'plamning ochiq qoplamasi deb ataladi.

Agar topologik fazoning ixtiyoriy ochiq qoplamasidan chekli qoplama ajratib olish mumkin bo'lsa u holda bu topologik fazo kompaktli deyiladi. T_2 aksiomasini qanoatlantiruvchi kompaktli topologik fazoni kompakt deb ataymiz. Ya'ni, T_2 - aksiomasi (ajratishning ikkinchi yoki Xausdorf aksiomasi): X topologik fazoning ixtiyoriy har xil X va Y nuqtalari o'zaro kesishmaydigan O_x va O_y atroflarga ega. M to'plamning qism to'plamlaridan iborat $\{A\}$ sistemadan xoxlagancha olingan chekli sondagi to'plamlarning kesishmasi bo'sh bo'lmasa, u holda $\{A\}$ sistema markazlasgan deyiladi.

Agar X topologik fazoning har bir cheksiz qism to'plami kamida bir limit nuqtaga ega bo'lsa, u holda bu fazo sanoqli – kompaktli deyiladi.

2.1.1.misol Kompaktli X topologik fazoning istalgan cheksiz qism to'plami kamida bir limit nuqtaga ega bo'lishini isbotlang.

Yechimi: Aksinchasiga faraz qilamiz. Ya'ni birorta ham limit nuqtaga ega bo'lmagan cheksiz $M \subset X$ to'lam mavjud bo'lsin. U holda M to'plamdan bitta ham limit nuqtaga ega bo'lmagan sanoqli

$M_1 = \{x_1, x_2, \dots\}$ to'plam ajratib olish mumkin. Natijada yopiq

$M_n = \{x_n, x_{n+1}, \dots\}$ to'plamlar kesishmasi bo'sh bo'lgan markazlashgan sistema hosil bo'ladi. Bu X fazoning kompaktli bo'lishiga zid, ya'ni farazimiz noto'g'ri.

2.1.2.misol. Kompaktli X topologik fazoning istalgan yopiq F qism to'plami kompaktli bo'lishini isbotlang.

Yechimi: F qism fazoning yopiq qism to'plamlaridan iborat istalgan $\{F_\alpha\}$ markazlashgan sistemani olamiz. Bu sistemaga tegishli har bir F_α

To'plam X fazosida yopiq bo'ladi. X kompaktli bo'lganligidan $\bigcap F_\alpha \neq \emptyset$
Demak, 2.1.1.bo'yicha F kompaktli bo'ladi.

2.1.3.misol X Hausdorf fazosining xoxlagan kompakt K qism to'plami yopiq bo'lishini isbotlang.

Yechimi: X Hausdorf fazo bo'lganligidan $\forall x \in K$ va $\forall y \notin K$ nuqtalarning o'zaro kesishmaydigan U_x va V_y^x atroflari topiladi. $\{U_x: x \in K\}$ sistema K uchun ochiq qoplama bo'ladi. K kompakt bo'lgani uchun $\{U_x: x \in K\}$ qoplamaning chekli $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}$ qism qoplamasi mavjud. Bu qism qoplamadagi hech bir to'plam bilan y nuqtaning

$$V_y = V_y^{x_1} \cap V_y^{x_2} \cap \dots \cap V_y^{x_n}$$

atrofi kesishmaydi, ya'ni

$$V_y \cap (U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n}) = \emptyset$$

$$K \subset U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n}$$

munosabat o'rinli bo'lgani uchun $y \notin K$. Bundan K to'plamning yopiq ekanligi kelib chiqadi.

Kompakt fazolar

Bizga X topologik fazo berilgan bo'lsin. Bu topologik fazoning ochiq qism to'plamlaridan tuzilgan $\{A'_s\}_s \in S$ oila uchun $\bigcup_{s \in S} A'_s = X$

Shart bajarilsa, $\{A_s\}_s \in S$ qism to'plamlar oilasini X topologik fazoning ochiq qoplamasi deb ataymiz. $\{A'_s\}_s \in S$ oila X topologik fazoning qism qoplamasi deyiladi.

Agar $S \subset S'$ va $\forall S \subset S'$ uchun $A'_S = A'_S$ bo'lsa X topologik fazoning har bir qism qoplamasidan chekli qism qoplama ajratib olish mumkin bo'lsa, X kompakt fazo deyiladi, ya'ni X topologik fazoning har qanday $\{U_s\}_s \in S$ qoplamasi uchun shunday $\{S_1, S_2, \dots, S_n\} \subset S$ topilib, $X = \bigcup_{i=1}^n U_{S_i}$ bo'lsa X kompakt bo'ladi.

$F = \{F_s\}_{s \in S}$ to'plamlar oilasi markazlashgan deyiladi, agar $F \neq \emptyset$ va har qanday chekli $S_1, S_2, \dots, S_n \in S$ lar uchun $F_{S_1} \cap F_{S_2} \cap \dots \cap F_{S_n} \neq \emptyset$ bo'lsa.

1.teorema X topologik fazo kompakt bo'ladi, faqat va faqat X ning har bir yopiq qism to'plamlaridan tuzilgan markazlashgan oilaning X dagi keshishmasi bo'sh bo'lmasa.

2. teorema. Kompakt fazoning ixtiyoriy yopiq qism fazosi kompakt bo'ladi.

3.teorema. Agar X Tixonov fazosining A kompakt qism fazosi bo'lsa, u holda har bir $B \in X \setminus A$ yopiq to'plam uchun shunday uzluksiz $f: X \rightarrow I$ akslantirish topiladiki,

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar } x \in A \text{ bo'lsa} \\ 1, & \text{agar } x \in B \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

bo'ladi

4.teorema. X Hausdorf fazosining har bir kompakt qism fazosi X da yopiq to'plam bo'ladi.

5. teorema. Har bir kompakt Hausdorf fazo normal fazo bo'ladi.

6. teorema. Kompakt fazoning uzluksiz obrazi kompakt bo'ladi.

Misol. R^2 tekisligida ikkita konsentrik aylana

$G_i = \{(x, y) \in R^2, x^2 + y^2 = i\}$ larni va ularning birlashmasi $X = C_1 \cup C_2$ ni qaraylik. Bunga $i=1, 2, \dots$ C_1 aylana $(0,0)$ nuqtadan C_2 nuqtaga proyeksiyalovchi akslantirishni P bilan belgilaymiz,

X to'plam topologiyani atroflar sistemasi $\{B(z)\}_{z \in X}$ orqali aniqlaymiz. Bunga agar $z \in C_1$ bo'lsa $B(z) = \{U_j(z)\}_{j=1}$ va $z \in C_2$ bo'lsa, $B(z) = \{z\}$ bo'lsin. Bunda $U_j = V_j V_p(V_j / \{z\})$, bunda $V_j = C_1$ aylanani o'rtasi z nuqtada bo'lgan uzunligi $1/j$ bo'lgan yoyi

$B_{p1})$ har qanday $x \in X$ uchun $B(x) \neq \emptyset$ va $\forall U \in B(x)$ uchun $x \in U$

$B_{p2})$ Agar $x \in U \in B(y)$ bo'lsa u holda shunday $V \in B(x)$ topiladiki, $V \subset U$ bo'ladi.

$B_{p3}) \forall U_1, U_2 \in B(x)$ uchun shunday $U \in B(x)$ mavjudki, $U \subset U_1 \cap U_2$ bo'ladi.

$\{B(z)\}_{z \in X}$ oila $B_{p1}) - B_{p3})$ shartlarni qanoatlantiradi. $\{B(z)\}_{z \in X}$ oila yordamida xosil qilingan topologiyaga ko'ra X Hausdorf fazo bo'ladi. X fazo Aleksandrovning ikki aylanasi deyiladi. X topologik fazo kompakt fazo bo'ladi.

7.teorema. Har bir X cheksiz kompakt uchun $X \leq \exp X(x)$ tengsizlik o'rinli.

8.teorema. Agar X kompakt fazo bo'lsa, u holda uning har bir cheksiz to'plami hech bo'lmaganda bitta limit nuqtaga ega bo'ladi.

Lokal kompakt fazolar va ularning xossalari.

9.tarif. Agar X topologik fazoning ixtiyoriy x nuqtasi uchun shunday U atrofi mavjud bo'lib U^* to'plam X kompakt fazoostisi bo'lsa, u holda X fazoga lokal kompakt deyiladi.

10.tarif. Har bir lokal kompakt Hausdorf fazosi Tixonov fazosi bo'ladi.

Isboti: x nuqta X lokal kompakt Hausdorf fazosining ixtiyoriy fazosi bo'lib, $F - X$ dagi yopiq to'plam bo'lsin, bunda $x \in F$ x nuqtaning shunday U atrofini olamizki, uning uchun U^* -kompakt bo'lsin. U holda $F_0 = U^* \setminus U$ ($U^* \setminus F$) to'plam U^* fazoning yopiq qism to'plami bo'ladi. $x \in U^* \setminus F_0$ ekanligidan shunday $f_1: U^* \rightarrow I$ funksiya mavjudki, uning uchun $f_1(x) = 0$ va $f_1(F_0) \subset \{1\}$ munosabatlar o'rinli.

$U^* \cap (X \setminus U) = U^* \setminus U \subset F_0$ ekanligidan f_1 funksiya va barcha $y \in X \setminus U$ lar uchun $f_2(y) = 1$ qonun bilan aniqlovchi $f_2: (X \setminus U) \rightarrow I$ o'zgarmas funksiya kombinatsiyasi bo'lgan f funksiya uzluksiz bo'ladi. Ravshanki, bu uchun $f(x) = 0$ va $f(F) \subset \{1\}$ munosabat o'rinli bo'ladi.

11.teorema. X lokal kompakt Hausdorf fazoning har bir A kompakt fazoostisi va A ni o'z ichiga olgan $V \subset X$ ochiq to'plam uchun, shunday ochiq, $U \subset X$ topiladiki, bunda U^* - kompakt, hamda $A \subset U \subset U^* \subset V$ munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Isboti: Har bir $x \in A$ uchun x nuqtaning $V_x \subset V$ bo'ladigan V_x atrofini va W_x^* kompakt bo'ladigan bo'ladigan W_x^* atrofini olamiz. $U_x = V_x \cap W_x^*$ to'plam uchun U_x^* to'plam, W_x^* kompakt fazoda yopiq bo'lishi uchun kompakt bo'ladi. U holda shunday chekli $\{x_1, x_2, \dots, x_k\} \subset A$ to'plam topiladiki, uning uchun

$$A \subset U = U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_k} \text{ o'rinli bo'ladi.}$$

$$\text{Demak, } U^* = U_{x_1}^* \cup U_{x_2}^* \cup \dots \cup U_{x_k}^*$$

To'plam kompakt bo'ladi va

$$U^* = V_{x_1}^* \cup V_{x_2}^* \cup \dots \cup V_{x_k}^* \subset V$$

munosabat bajariladi. Teorema isbotlandi.

Yuqoridagi teoremadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Natija: Lokal kompakt Hausdorf fazosi X ning har bir kompakt fazoostisi A_1 va A ni o'z ichida saqlovchi har bir V ochiq to'plam uchun $x \in A$ da $f(x) = 0$ va $x \in X \setminus V$ da

$f(x)=1$ bo'ladigan uzluksiz $f:X \rightarrow I$ funksiya mavjud bo'ladi, hamda barcha $a < 1$ lar uchun $f^{-1}([0, a])$ to'plam kompakt bo'ladi. Quyidagi teorema lokal kompakt Hausdorf fazosidagi nuqtalarning xarakterini baholaydi.

12.teorema. Lokal kompakt Hausdorf fazosidagi ixtiyoriy x nuqtaning xarakterini U ko'rinishdagi eng kichik kordinal songa teng, bu yerda U sistema uchun $\cap U = \{x\}$ tenglik o'rinli bo'adigan X dagi ochiq to'plamlar oilasi.

Isbot: $\{x\} = \bigcap_{s \in S} V_s$ bo'lsin, bunda $V_s - X$ da ochiq va $|S| \leq \tau$ Teoremani isbotlash uchun $\aleph(x, X) \leq \tau$ ekanligini ko'rsatish yetarli. $\tau \geq \aleph_0$ deb faraz qilamiz.

Chunki, agar τ chekli bo'lsa, u holda x nuqta X dagi yakkalangan nuqta bo'ladi va $\aleph(x, X) = 1 \leq \tau$ bajariladi.

11.teoremadan $\{x\} = \bigcap_{s \in S} U_s^*$ ga ega bo'lamiz. Bunda $U_s - X$ ning shunday atrofi bo'lib U_s^* kompakt fazo bo'ladi. x ning har bir U atrofi s uchun

$$U_{s_1} \cap U_{s_2} \cap \dots \cap U_{s_k} \subset U_{s_1}^* \cap U_{s_2}^* \cap \dots \cap U_{s_k}^* \subset U$$

Munosabat o'rinli bo'ladigan chekli $(S_1, S_2, \dots, S_k) \subset S$ to'plam topiladi.

Demak, $\{U_s\}_s \in S$ oila elementlaridan barcha chekli qismlari X dagi ketmaydi va $\aleph(x, X) \leq \tau$. Teorema isbotlandi.

13.teorema. Har bir lokal kompakt Hausdorf fazosi uchun $nw(x)=w(x)$

Isboti: $w(x) \leq nw(x)$ tengsizlikni balarishni ko'rsatish yetarli

$$nw(x) = \tau \geq \aleph_0$$

deb faraz qilishimiz mumkin.

$N - X$ dagi tor bo'lib $|N| = \tau$ elementlaridan tuzilgan $\{M_s\}_s \in S$ oila X ni qoplaydi. 11.teoremaga ko'ra har bir $s \in S$ uchun shunday ochiq $U_s \subset X$ to'plam topiladiki $M_s^* \subset U_s$ bo'lib $U_s^* - kompakt bo'ladi.$

$$nw(U_s^*) \leq nw(x) = \tau$$

bo'lgani uchun $w(U_s) = \tau$ bo'ladi, ya'ni X fazoning U_s fazoostisining quvvati τ dan kichik bo'lgan B_s bazaga ega $\bigcap_{s \in S} B_s$ birlashma ham quvvati $\leq \tau$ bo'lgan baza bo'ladi. Demak, $w(x) \leq \tau$ Teorema isbotlandi.

Natija: Agar lokal kompakt Hausdorf fazosi bo'lsa, u holda X ning har bir fazoostisini $F \cap V$ ko'rinishda tasvirlasa bo'ladi. Bunda F, X da yopq V da esa X da ochiq va lokal kompakt.

Isboti: Teoremani isbotlash uchun agar Hausdorf fazosi lokal kompakt bo'lsa, u holda uning ochiq fazoostilari, amda yopiq fazoostilari ham lokal kompakt bo'lishini ko'rsatish yetarli. Chunki, $F \cap V$ fazo, X fazoning yopiq fazoostisi bo'ladi. $F - X$ lokal kompakt fazoning yopiq fazoostisi bo'lsin. U holda har bir $x \in F$ uchun x ning shunday U atrofi topiladiki, U^* kompakt bo'ladi. $F \cap U$ kesma ham X fazoda x ning atrofi bo'ladi va bu atrofning yopilmasi

$$(F \cap U)^* \cap F = (F \cap U)^*$$

F da kompakt bo'ladi (U^* kompakt fazoning yopiq fazoostisi bo'lgani uchun)

Lokal kompakt Hausdorf fazosining ochiq fazoostisi ham lokal kompakt bo'lishi, A bir nuqtali to'plam uchun 11 teoremaning tatbiqi kelib chiqadi.

14.teorema. X Hausdorf fazosining lokal kompakt fazoostisi M , M to'plamning X dagi yopilmasi M^* da ochiq to'plam bo'ladi.

Demak, M ni $F \cap U$ ko'rinishda tasvirlash mumkin, bunda F X da yopiq, V esa X da ochiq.

Isboti: X Hausdorf fazosining lokal kompakt va hamma yerda zich fazoostisi M ning X da ochi ekanini ko'rsatish yetarli. Har bir $x \in M$ nuqta M fazoostida $U^* \cap M$ to'plam kompakt bo'ladigan U atrofga ega. $U \subset U^* \cap M$ dan $U \subset U^* \cap M \subset M$ ga ega bo'lamiz. W to'plam X dagi $U = M \cap W$ tenglik bo'ladigan ochiq to'plam bo'lsin. U holda $x \in W \subset W^* = (M \cap W)^* = U^* \subset M$ munosabat o'rinli bo'ladi. Bundan har bir $x \in M$ nuqta X fazoda M fazoostida yotuvchi W atrofga ega ekanligi kelib chiqadi. Demak, M to'plam X da ochiq to'plam bo'ladi. Teorema isbotlandi. Oxirgi ikkita teoremadan uyidagi natija kelib chiqadi.

Natija: X Hausdorf fazosining lokal kompakt fazosining fazoostisi M lokal kompakt bo'lishi uchun uni $F \cap V$ ko'rinishda tasvirlab bo'lishi mumkinligi zarur va yetarlidir, bunda F X da yopiq, V X da ochiq.

Natija: Hausdorf fazosining lokal kompakt bo'lishi uchun uning biror kompakt fazoning fazoostisiga gomeomorf bo'lishi zarur va yetarlidir.

2.2. Bikompakt topologik fazolar. Misollar.

2.2.1-ta'rif. Agar topologik fazoning ixtiyoriy ochiq qoplamasidan (qoplama elementlari ochiq to'plamlar), chekli qoplamaosti ajratib olish mumkin bo'lsa, bu topologik fazo bikompakt deyiladi.

Xausdorf bikompakt fazolar sinfi bikompaktidir.

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, ixtiyoriy trivial topologik fazo bikompakt fazo ekan. Ixtiyoriy diskret fazo bikompakt fazo bo'lishi uchun uning elementlari chekli bo'lishi zarur va yetarlidir.

2.2.2-misol. Zarisskiy topologiyasi kiritilgan ixtiyoriy cheksiz X to'plamni olaylik. Bu topologik fazo, ta'kidlandiki, Xausdorf fazosi emas. Lekin bu fazo bikompakt fazo bo'ladi. Haqiqatan ham, X fazoning ixtiyoriy $S = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ ochiq qoplamasini olaylik. Bu topologik fazo xususiyatiga ixtiyoriy $\alpha \in A$ uchun U_α to'plamlar cheksiz to'plamlardir.

Shu sababli shunday $\alpha_0 \in A$ olamizki, $U_{\alpha_0} \neq X$ va $X - U_{\alpha_0} = F_{\alpha_0}$ to'plam chekli to'plamdan iborat. Aytaylik, $F_{\alpha_0} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ bo'lsin, bu yerda $x_i \in X$, $i = \overline{1, n}$. S jamlanma qoplama bo'lganligi sababli shunday $U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ lar X fazoning chekli qoplamasi bo'ladi. Demak, bu fazo bikompakt fazo ekan.

2.2.3-ta'rif. Agar topologik fazoning ixtiyoriy sanoqli ochiq qoplamasidan chekli qoplamaostini ajratish mumkin bo'lsa, bu topologik fazo sanoqli-kompaktli fazo deyiladi.

Sanoqli-kompaktli fazoning quyidagi tavsifini isbotsiz keltiramiz.

2.2.4-teorema. Topologik T_1 fazo sanoqli-kompaktli bo'lishi uchun uning ixtiyoriy cheksiz to'plamostisi limit nuqtaga ega bo'lishi zarur va yetarlidir.

2.2.5-ta'rif. Agar topologik fazoning ixtiyoriy qoplamasidan sanoqli qoplamaosti ajratib olish mumkin bo'lsa, bunday topologik fazo final-kompaktli deyiladi.

Bundan ko'rinadiki, bikompaktlilik ikkita sanoqli-kompaktlilik hamda final-kompaktliliklarning mantiqiy birlashmalaridan iborat ekan. Bikompaktlilik atamasi ham shundan kelib chiqqan.

Shuni ta'kidlashimiz mumkinki, fazoostining nasliy xossaga ega bo'lish xususiyati sanoqli-kompaktlik, final-kompaktlik va bikompaktlilikning yopiq to'plamostilarida o'rinli bo'ladi. Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

2.2.6-teorema. Regulyar va final-kompaktli fazo normaldir.

2.2.7-teorema. Ixtiyoriy bikompakt normaldir.

Isbot. 2.2.6-teoremaga asosan, ixtiyoriy bikompaktning regulyar ekanligini ko'rsatish yetarlidir. Ixtiyoriy $x \in X$ va $F \subset X$ yopiq to'plamni olamiz, bu yerda $x \in \bar{F}$. U holda ixtiyoriy $y \in F$ nuqta uchun x va y nuqtalarning $O_x(y), O_y$ o'zaro kesishmaydigan atroflari mavjud. Bu yerda $\{F \cap O_y : y \in F\}$ jamlanma F to'plamning qoplamasini tashkil qiladi. Ta'kidlaganimizga ko'ra, bikompaktlilik yopiq to'plamlarda nasliy bo'lganligi sababli, $\{F \cap O_y : y \in F\}$ qoplamadan chekli $\{F \cap O_{y_1}, \dots, F \cap O_{y_n}\}$ qoplamaosti ajratib olish mumkin. Endi $O_x = \bigcap_{i=1}^n O_x(y_i)$ va $O_F = \bigcup_{i=1}^n O_{y_i}$ larni olamiz. Bu to'plamlar x nuqta va F to'plamning o'zaro kesishmaydigan atroflari bo'ladi.

Quyidagi ikki teoremani isbotsiz keltiramiz.

2.2.8-teorema. Ixtiyoriy sanoqli-kompaktli metrik fazo sanoqli bazaga ega.

2.2.9-teorema. Ixtiyoriy sanoqli-kompaktli metrik fazo bikompaktidir.

Bu ikki teorema va yuqorida keltirilganlardan ko'rinadiki, metrik fazolarda sanoqli-kompaktlik va bikompaktlik bir xil ekan. Shu sababli bundan keyin metrik bikompaktlilikni kompakt deb ataymiz.

2.2.10-teorema. Sonlar to'g'ri chizig'i R^1 da ixtiyoriy kesma kompaktidir.

Isbot. To'g'ri chiziq R^1 da $[0,1]$ kesmani olaylik va $[0,1]$ ning ixtiyoriy $S = \{U_\alpha : \alpha \in A\}$ ochiq qoplamasi bo'lsin, bu yerda ixtiyoriy $\alpha \in A$ uchun $U_\alpha \subset R$, U_α – ochiq to'plamlardir. Endi bu S qoplamaning chekli qoplamaostisi mavjudligini ko'rsatamiz, agar S sistemaning yopiq $[0, x_0]$ kesmani qoplovchi chekli sistemaostisi mavjud bo'lsa Bu holda $[0,1]$ kesmaning $x_0 \in [0,1]$ nuqtasini belgilangan deymiz. Barcha belgilangan nuqtalar to'plamini M bilan belgilaymiz.

Ma'lumki, $x=0$ nuqta belgilangan nuqtadir, ya'ni $0 \in M$. Bu yerda $M \neq \emptyset$. Endi $\eta = \sup M$ nuqtani olaylik. η nuqtaning belgilangan ekanligini ko'rsatamiz, ya'ni $\eta \in M$. Agar $\eta \in U_{\alpha_0}$ bo'lsa, u holda U_{α_0} ning ochiq to'plam ekanligi tufayli shunday $\xi \in M$ topiladiki, u uchun $0 < \xi < \eta$ va $[\xi, \eta]$ kesma butunlay U_{α_0} da yotadi. ξ nuqtaning belgilangan ekanligidan S sistemaning shunday chekli

$U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ qism sistemasi topiladiki, bu qism sistema $[0, \xi]$ kesmani qoplaydi. Shu sababli $U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ qism sistema $[0, \eta]$ ni qoplaydi. Demak, $\eta \in M$.

Endi biz η ning $[0, 1]$ kesma ikkinchi uchi bilan ustma-ust tushishini ko'rsatishimiz kerak. Faraz qilaylik, $\eta \neq 1$. U holda U_{α_0} to'plamning ochiq ekanligidan shunday $\eta' \in (\eta, 1)$ topiladiki, uning uchun $[\eta, \eta'] \subset U_{\alpha_0}$. Binobarin, qism sistema $U_{\alpha_0}, U_{\alpha_1}, \dots, U_{\alpha_n}$ elementlari birlashmasi $[0, \eta]$ ni qoplaydi. Bundan $\eta' \in M$. Bu esa, $\eta = \sup M$ ga ziddir.

2.3.Kompakt va bikompakt topologik fazolarda uzluksiz akslantirishlarning xossalari.

2.3.1-teorema. Bikompakt fazolarning uzluksiz obrazi bikompakt fazodir.

Isbot. $f : X \rightarrow Y$ uzluksiz akslantirish berilgan bo'lsin. Bu yerda X bikompakt fazo va Y ixtiyoriy fazo. $T = \{V_i : i \in J\}$ sistema Y topologik fazoning ixtiyoriy ochiq qoplamasi bo'lsin. f akslantirishning uzluksizligiga ko'ra, $S = \{U_i = f^{-1}(V_i) : i \in J\}$ sistema X bikompakt fazoning ochiq qoplamasini tashkil qiladi. X ning bikompakt ekanligidan S qoplama chekli $\bar{S}$ qism qoplamani o'z ichida saqlaydi. $\bar{S}$ qoplamaga kiruvchi barcha ochiq to'plamlarning obrazi chekli qism qoplama tashkil qiladi. Bu qoplamani $\bar{T}$ bilan belgilaymiz. $\bar{T}$ qoplama T qoplamaning qism qoplamasidir. Demak, Y fazo bikompakt fazo ekan.

2.3.2-misol. Agar X birorta bikompakt Y fazoning faktor fazosi bo'lsa, u holda X bikompakt fazo bo'ladi.

Haqiqatan ham, X fazo Y ning uzluksiz proeksiyasidan iborat bo'ladi. Demak, X bikompakt fazo ekan.

2.3.3-misol. X topologik fazo sifatida R^1 to'g'ri chiziqni olaylik. Bu fazoning $\{(-n, n) : n \in N\}$ qoplamasidan chekli qoplamani ajratib bo'lmaydi. Shu sababli R^1 fazo kompakt fazo emas. Quyidagi ikki teoremani isbotsiz keltiramiz.

2.3.4-teorema. R^n fazoning ixtiyoriy yopiq va chegaralangan to'plamostisi kompaktdir.

2.3.5-teorema. Kompakt fazolarning ixtiyoriy sistemasi $\{X_\alpha : \alpha \in A\}$ ning Tixonov ko'paytmasi $\prod_{\alpha \in A} X_\alpha = X$ bikompaktdir.

2.3.6-misol.

a) S^n – sfera; $T^n = S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ – tor;

b) RP^n – proektiv fazo;

d) S^n / U_p – linza fazosi;

e) $I^n = [0, 1] \times [0, 1] \times \dots \times [0, 1]$ – kub;

f) M^2 – Miyobius varag'i biokompakt fazolardir.

Haqiqatan ham, S^n – sfera, T – tor, I^n – kub, M^2 – Miyobius varag‘i yopiq va chegaralangan bo‘lganligi uchun kompaktdir. RP^n proektiv fazo esa, S^n ning syurektiv obrazi bo‘lgani uchun bikompaktdir. Linza fazosi S^n/U_p ham S^n ning faktor fazosi bo‘lganligi tufayli bikompaktdir.

Lokal bikompakt fazolarning Aleksandrov kengaytmasi.

Topologik fazolarning, ayniqsa, regulyar bo‘lsa, regulyar fazolarning, qolaversa, metrik fazolarning turli kengaytmalari mavjud. Bu kengaytmalar fazoni o‘zining hamma yerida zich saqlaydi va kengaytmadagi topologiya shunday topologiyaki, natijada, fazoning topologiyasi indutsirlangan topologiya bilan ustma-ust tushadi. Boshqacha aytganda, topologik fazo shunday to‘plamlar bilan boyitiladiki, uning fazoostisidagi topologiya berilgan topologiya bilan sug‘orilgan bo‘ladi.

Regulyar va to‘la regulyar fazoning turli-tuman kengaytmalari mavjud, ular u yoki bu xossalarga ega bo‘ladi. Masalan, to‘la regulyar fazolarning Stoun – Chex kengaytmasi mavjud bo‘lib, bu kengaytma maksimal kengaytma deb yuritiladi. Maksimal kengaytma deyilishiga asosiy sabab, bu kengaytmadan uning boshqa kengaytmalariga uzluksiz akslantirish mavjud ekanligidir.

Lokal bikompakt fazolarni olsak, bu fazolar bir nuqtali minimal kengaytmaga ega bo‘ladi. Shuni ta’kidlab o‘tish mumkinki, faqat lokal bikompakt fazolar bir nuqtali kengaytmalarga egadir. Fazoning kengaytmalari, ayniqsa, bir nuqtali kengaytmalar nazariyasiga P.S. Aleksandrov tomonidan asos solingan va mazmunli o‘rganilgan. Kengaytmalar, asosan, bikompakt kengaytmalar keng o‘rganilgan. Kengaytmalarning o‘rganilishi va kiritilishi turli-tuman masalalarni yechishda qo‘l kelmoqda.

2.3.7-ta’rif. X topologik fazoning bikompakt kengaytmasi deb shunday bikompakt bX topologik fazoga aytiladiki, u:

1. $X \subset bX$, $\overline{X} = bX$, ya’ni X fazo $b(X)$ da zich to‘plamdir.
2. X fazoning topologiyasi $b(X)$ fazodagi indutsirlangan topologiyadan iborat shartlarini qanoatlantiradi.

Topologik fazoning bikompakt kengaytmasiga kengaytirilgan kompleks sonlar to‘plamini klassik misol qilib keltirish mumkin, ya’ni $\overline{C} = C \cup \{\infty\}$. $\overline{C}$ to‘plam, ma’lumki, S^2 sferaga gomeomorfdir.

Endi lokal bikompakt Xausdorf topologik fazosi X berilgan bo'lsin. Bu fazoni bitta boshqa ξ nuqta bilan boyitamiz (to'ldiramiz).

Natijada, $\tilde{X} = X \cup \{\xi\}$ to'plamga ega bo'lamiz. X to'plam $\tilde{X}$ fazoda ochiq to'plamni tashkil qiladi. Endi yangi ξ nuqtaning ochiq atrofini aniqlash yetarli bo'ladi. $\tilde{X}$ fazoda ξ nuqtaning ochiq atrofi deb, $\xi \cup B : B$ to'plamning X fazodagi bikompaktligiga aytiladi. To'plamlar nuqtalarining atrofi sifatida o'zining mavjud bo'lgan atrofini olamiz. Yangi hosil bo'lgan fazo bX bilan belgilanadi. Bu $b(X)$ fazo Aleksandrov bikompaktifikatsiyasi deb yuritiladi. Hosil bo'lgan yangi $b(X)$ fazo quyidagi ajoyib xossalarga ega:

1. X fazo $b(X)$ da zich to'plamdir.
2. $b(X)$ bikompakt fazodir.
3. $b(X)$ fazo X ning minimal kengaytmasidir, ya'ni $b(X) \setminus X = \xi$.
4. $b(X) \setminus X$ to'plam $b(X)$ fazoda yopiq to'plamni tashkil qiladi va bu to'plam o'simta deb yuritiladi.
5. $b(X)$ yagona bir nuqtali kengaytmadir.
6. $b(X)$ fazo Xausdorf fazosi bo'ladi.
7. X fazo $b(X)$ da ochiq to'plamdan iboratdir.

Bunday kengaytmalar uchun quyidagi teorema o'rinalidir.

2.3.8-teorema. Bir nuqtali bikompakt kengaytma $b(X)$ Xausdorf fazosi bo'lishi uchun X fazoning lokal bikompakt va Xausdorf fazosi bo'lishi zarur va yetarlidir.

Ilova.

1. ***Xulosa*** –Conclusion.

Third decision formed from two exact decisions.

2. ***Hukm*** –decision.

Comparative complex thinking in which subject is defined by its exact sign.

3. ***Teorema*** –theorem.

Mathematical suggestion, which true is fixed on facility proof.

4. ***Aksioma*** –axiom

Offer, taken without proof. Here where the truth is allowed.

5. ***Postulat*** –postulate

Offer, in which is expressed certain requirement and must satisfy certain nation or certain relations between nation.

6. ***To'g'ri teorema*** –straight line theorem given any theorem given any theorem.

7. ***Teskari teorema*** –indirect theorem which appears as a result of exchange by places condition and conclusion in given theorem.

8. ***Qarama-qarshi teorema*** –theorem contrast to bring “unless it's A, that not will be B”. to “If it's A, that will be B”.

Xulosa.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.

1. I.A.Karimov “Yuksak ma’naviyat-yengilmas kuch” Toshkent.Ma’naviyat. 2008 y.
2. I.A.Karimov “Barkamol avlod orzusi” Toshkent. “Sharq” nashriyot-matbaa konserni bosh tahririyati 1998 y.
3. I.A.Karimov “Barkamol avlod-O’zbekiston taraqqiyotining poydevori”. Toshkent. 1998 y.
4. O’zbekiston Respublikasi “Ta’lim to’g’risida” gi qonuni. Toshkent. Sharq 1997 y.
5. O’zbekiston Respublikasi “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi”. Toshkent. Sharq. 1997 y.
6. T.F.Jo’rayev “Topologiyaga kirish. Funktorlar. O’lchamlar. Chiziqlar” . Toshkent. “Tafakkur-Bo’stoni” 2012 y.
7. Р.Энгелькиг “Общая топология”. Москва. “Мир”. 1986 г.
8. Нармонов. А “Дифференциал геометрия”ю тошкентю 2003 й.
9. Борисович Ю.Г,Близняков Н.М, Израилевич Я.Аб Фоменко Т.Н “Введение в топологию учебюпособие” Наукая Физматлитю 1995 г.
10. [http:// vilenin.narod.ru//Mm/books/](http://vilenin.narod.ru//Mm/books/)
- 11.<http://www.allmath.ru/>
- 12.<http://www.pedagog.uz/>
- 13.<http://www.ziyonet.uz/>
14. <http://window.edu.ru/window/>