

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI
NIZOMIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT PEDAGOGIKA
UNIVERSITETI
FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

“Himoyaga ruxsat etilsin”

Fakulteti dekani, f.-m.f.n.

_____ G'.F.Djabbarov
“ ____ ” _____ 2014 yil

“5140100-matematika” ta'lim yo'nalishi 4-kurs talabasi

RAJABOVA Dilnoza Maxmaraximovnaning

“FAZODA SFERAGA NISBATAN INVERSIYA”

mavzusidagi

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Talaba:_____D.M.Rajabova

Ilmiy rahbar: “Matematika va uni
o'qitish metodikasi” kafedrası,
dotsenti f.-m.f.n.

_____X.X.Nazarov

Taqrizchilar:

“Matematika va uni o'qitish
metodikasi” kafedrası dotsenti,
f.-m.f.n.

_____D.E.Davletov

TTYSI qoshidagi 2-sonli akademik
litsey matematika o'qituvchisi

_____B.Jumayev

“Himoyaga tavsiya etilsin”

“Matematika va uni o'qitish metodikasi”

kafedrası mudiri professor,

f.-m.f.d. _____R.B. Beshimov

“ ____ ” _____ 2014 yil

Toshkent 2014 yil

MUNDARIJA

Kirish.	2
1-bob Tekislikda inversiya va uni xossalari.	
§ 1.1 Inversiyaning ta’rifi va turlari	7
§ 1.2 Nuqtani inversion akslantirish va inversiyaning xossalari. Aylanaga inversion mos figura	10
2-bob Sferaga nisbatan inversiya.	
§ 2.1 Sferaga nisbatan inversiya va uni xossalari.....	24
§ 2.2 Inversiyada egri chiziqlar orasidagi burchakning o’zgarmasligi	28
§ 2.3 Streografik proeksiya ta’rifi va xossalari	33
§ 2.4 Streografik proeksiya va inversiya.....	41
Xulosa	48
Foydalangan adabiyotlar.	
Ilova	

Kirish

Bugungi kunda oldimizga qo'ygan buyuk maqsadlarimizga, ezgu niyatlarimizga erishishimiz, jamiyatimizning yangilanishi, hayotimizning taraqqiyoti va istiqboli amalga oshirilayotgan islohotlarimiz, rejalarimizning samarasi taqdiri - bularning barchasi, avvalambor, zamon talablariga javob beradigan yuqori malakali, ongli mutaxassis kadrlar tayyorlash muammosi bilan chambarchas bog'liq.

I.A.Karimov

Mavzuning dolzarbligi. O'zbekiston Respublikasidagi milliy va ijtimoiy–tarixiy taraqqiyotning tezkor surati, ro'y berayotgan ijtimoiy hodisalar mazmuni, fan texnika va texnologiya sohalarida qo'lga kiritilgan yutuqlarning ta'lim sohasiga faol tadbiq etilishi yosh avlodni tarbiyalashda o'ziga xos yondashuvni qaror toptirish zaruriyatini olib chiqmoqda. O'zbekiston Respublikasining “Ta'lim to'g'risida”gi qonuni, “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi” ning qabul qilinishi jamiyatda uzluksiz ta'lim tizimini joriy etish ta'lim muassasalari faoliyatini takomillashtirish, ta'lim jarayonining faol subyekti o'quvchi va o'qituvchi o'rtasidagi munosabat mohiyatining yangicha yo'nalishi va mazmunga tayanish zarurligini ko'rsatmoqda.

Prezident I.A.Karimov O'zbekiston Respublikasining Oliy Majlisi IX sessiyasida (1997-yil 29-avgust)da so'zlagan nutqida ta'lim jarayoni darslikdan boshlanishi haqidagi haqiqatga to'xtalib shunday degan edi: ”Yangi darsliklarni zamonaviy pedagogik va axborot texnologiyalarini o'z vaqtida ishlab chiqish va joriy etishni ta'minlashni alohida nazorat ostiga olish zarur”[5].

Bozor munosabatlariga o'tish sharoitida o'quvchilarning sog'lom fikr, yangicha tafakkur, ilmiy bilim bilan qurollantirishda innovatsion texnologiyalardan foydalanishni taqozo etmoqda. Ta'lim jarayoniga innovatsion texnologiyalarni joriy etish o'quvchilarning muammolarni izlab topish, ularni hal qilish loyihalarini ishlab chiqish, ularni joriy etish bilan bog'liq jarayonlarni mustaqil ravishda bajarishga ko'maklashadi.

O'zbekiston Respublikasining Prezidenti I.A.Karimovning "O'zbekiston mustaqillikka erishish ostonasida" nomli kitobida ilm-fan imkoniyatlaridan to'laroq foydalanish to'g'risidagi o'zining fikrlarini quyidagi so'zlar bilan bayon etgan: "Hozir Respublika har qachongidan ham ko'ra ilgarilab ketishi, o'sishi yangi sifat bosqichlariga ko'tarilishi juda zarur. Buning uchun, avvalo, ilm-fanda ham, texnikada ham, texnologiyada ham, ishlab chiqarishni tashkil etishda ham shitob bilan ishlash shunga yarasha odamlar ongida, dunyoqarishida ham o'zgarishlar bo'lishi kerak. Endilikda ilm-fan yangi yo'llar ochishi, sifat jihatidan yangi texnologiyalarni jadallik bilan yaratishi, jamiyatning yangi holatga o'tishini taminlashi lozim" [4].

Fan samaradorligini sifat jihatdan oshirishga quruq da'vatlar bilangina erishish mumkin emas. Ilmiy kadrlarga munosabatni ham tubdan o'zgartirish, ularning ijtimoiy maqomini qat'iyan oshirish, chuqur struktura o'zgarishlari qilish zarur.

Fanni malakali kadrlar bilan ta'minlash, xodimlarning professional bilimdonligi darajasini oshirish, ularning qobiliyatlarini ro'yobga chiqarish uchun barcha sharoitlarni yaratish, ilmiy jarayonni jadallashtirishning asosiy omilidir.

Talim tiziming rivojlantirish darajasi bo'yicha O'zbekiston dunyoning 141 mamlakati orasida ikkinchi o'rinni band etgan[1].

Fanni malakali kadrlar bilan ta'minlash, xodimlarning professional bilimdonligi darajasini oshirish, ularning qobiliyatlarini ro'yobga chiqarish uchun barcha sharoitlarni yaratish, ilmiy jarayonni jadallashtirishning asosiy omilidir [2].

Bugungi kunda O'zbekistonda ta'lim tarbiya sohasi davlat siyosati darajasiga ko'tarilib, mutlaqo yangicha qarash barpo etildi desak hech ham mubolag'a bo'lmaydi. Mustaqillik yillarida ta'lim-tarbiya tizimini isloh qilish, kadrlar tayyorlashni zamon talablari darajasiga ko'tarish sohasida muhim chora tadbirlar amalga oshirib borilmoqda. O'zbekiston hukumati ta'limga islohatlarning barcha bosqichlari uchun ham ustuvor soha deb qarab kelmoqda.

Yoshlarimiz iste'dod, bilim va intellektual salohiyat bobida hech kimdan kam bo'lmaslikka intilmoqdalar. Bu, albatta, yurtimizda navqiron avlod vakillarini har tomonlama qo'llab-quvvatlash, ularning iqtidorini kashf etish va yuzaga chiqarishga yuksak e'tibor qaratilayotganligi samarasidir. Zero, mamlakatimizda "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi"ga muvofiq, umumta'lim maktablaridan tortib, o'rta mahsus kasb-hunar o'quv maskanlarigacha - barchasida ta'limning yangicha, o'ziga hos uslublari joriy qilindi. Ayni jihat esa intiluvchan yoshlarning yutuq hamda muvaffaqiyatlarga erishishini ta'minlash, jamiyatning turli jabhalarida xizmat qiladigan yetuk malakali mutahassislar tayyorlashda beqiyos ahamiyat kasb etayotir [6].

Har bir davlatning kuchi uning ilmiy-texnikaviy salohiyati bilan belgilanadi. Mamlakatimizning, umuman olganda barcha davlatlarning texnika va texnologiyalarda erishadigan yutuqlari bevosita matematika va fizika fani bilan bog'liq. Yoshlarimizning matematika va geometriya qonunlarini yaxshi anglashi, voqelikni ilmiy jihatdan to'g'ri tushunishi va amaliyotga qo'llay bilishi lozim [3].

Xususan, masalalarni o'rganish ilmiy dunyoqarashni shakillantirishga sezilarli hissa qo'shadi. Geometrik qonuniyatlarni bilish yordamida ko'plab hayotni yengilashtiruvchi masalalarni yechimini topa olamiz.

Bitiruv malakaviy ishining maqsadi. Inversiya, fazoda sferaga nisbatan inversiya, xossalari, tadbirlarini o'rganish .

Bitiruv malakaviy ishining ob'yekti. Fazodagi almashtirishlar.

Bitiruv malakaviy ishining predmeti. Fazoda sferaga nisbatan inversiya va uni tadbiqlari;

Bitiruv malakaviy ishining vazifalar.

- Sferaga nisbatan inversiya va uni xossalari.
- Inversiyada egri chiziqlar orasidagi burchakning o'zgarmasligi.
- Streografik proeksiya ta'rifi va xossalari
- Streografik proeksiya va inversiya.

Bitiruv malakaviy ishining ilmiy yangiligi: Mazkur bitiruv malakaviy ishida, geometrik masalalarni oson usullarda yechish, geometrik isbotlashlarda qulayliklar yaratish.

1-BOB. Tekislikda inversiya va uni xossalari

1.1§ Inversiyaning ta'rifi va turlari

Inversiya so'zi latinchada *inversio* so'zidan olinib, buning ma'nosi teskarisini ag'darish yoki o'rinlarini akslantirish demakdir.

Inversiya — muhim geometrik akslantirishlardan biri bo'lib, u boshqa metodlar yordamida yechilishi qiyin bo'lgan konstruktiv masalalarni osonroq masalaga keltirib yechishga imkon beradi. Inversiya geometriyaning boshqa ko'pgina sohalarida va ba'zi bir mexanizmlarning, masalan, turli inversorlarning tuzilishi va ishlatilishini nazariy asoslashda ishlatiladi

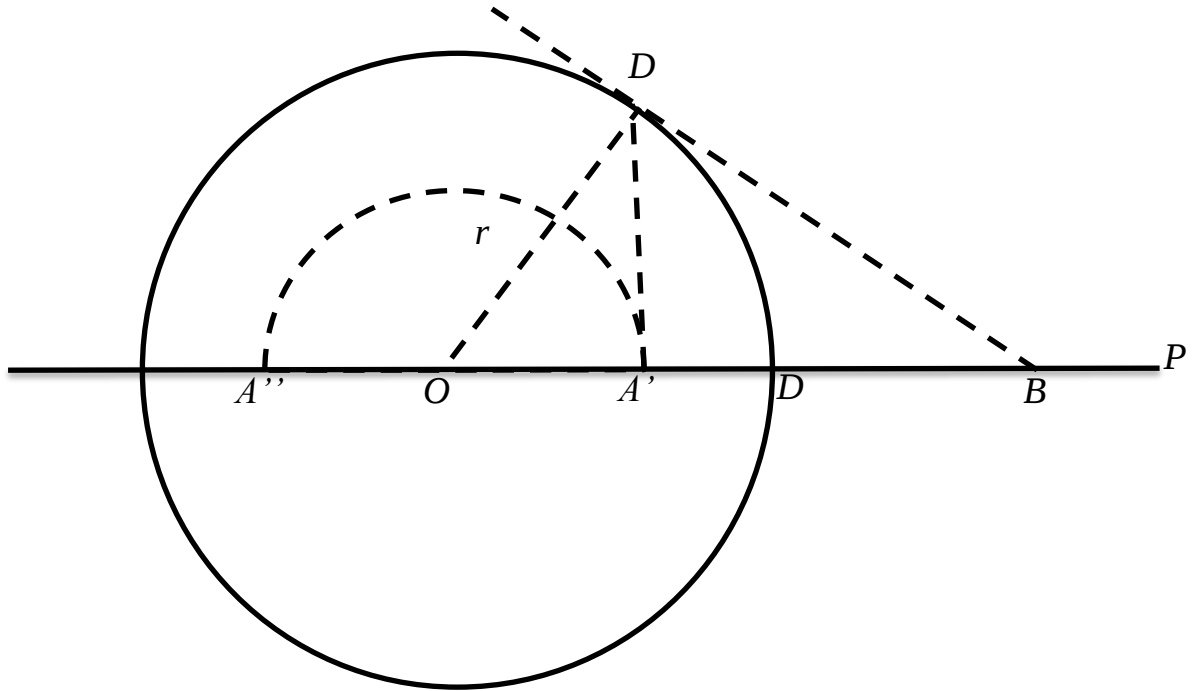
Ta'rif. Agar biror aylana markazidan chiqqan nurning ikki nuqtasidan shu aylana markazigacha bo'lgan masofalarning ko'paytmasi aylana radiusining kvadratiga teng bo'lsa, bunday ikki nuqta bu aylanaga (yoki uning markaziga) nisbatan inversion mos nuqtalar deyiladi.

Bu ta'rifga ko'ra, biror $u(0, r)$ aylana tekisligidagi (O nuqtadan boshqa) A va A' nuqtalar shu aylanaga nisbatan inversion mos bo'lishi uchun bular quyidagi talablarni qanoatlantirishi shart:

- 1) A' nuqta OA nurda yotadi,
- 2) $|OA| \cdot |OA'| = r^2$ munosabat mavjud, (1)
- 3) O nuqta A va A' nuqtalar oralig'ida yotmaydi.

Yuqorida aytilgan u aylana - inversiyaning asosiy aylanasi yoki inversiya aylanasi deyilib, bu aylananing markazi - inversiya markazi (yoki qutbi) deyiladi; inversiya aylanasi radiusi - inversiya radiusi, radiusning kvadrati - inversiya darajasi (yoki koeffitsienti) deyiladi.

Ta'rif. $u(O, r)$ aylana tekisligidagi (O dan boshqa) har bir A nuqtani OA nurda yotgan va $|OA| \cdot |OA'| = r^2$ shartni qanoatlantiruvchi A' nuqtaga o'tkazuvchi akslantirish - inversion almashtirish yoki inversiya deyiladi (1-chizma).



1-rasm

Biz bunday akslantirishni, qisqacha, ushbu

$$I_0^{r^2}(A) = A' \quad (2)$$

simvol orqali belgilaymiz va A nuqtaning O markazli va r^2 darajali inversiyasi A' nuqtadir deb o'qiymiz.

Ta'rif. F' figuraning hamma nuqtalariga inversion mos bo'lgan nuqtalardan tuzilgan F' figura F figuraga inversion mos figura deyildi, yoki qisqacha, F figuraning inversiyasi F' figuradir, deb aytiladi va uni quyidagicha yoziladi:

$$I[F] = F' \quad (2')$$

Agar u (O, r) aylananing radiusi $r = 1$ bo'lsa, (1) munosabat

$$|OA| \cdot |OA'| = 1 \quad (1')$$

ko'rinishda bo'ladi. Bundan:

$$|OA| = \frac{1}{|OA'|} \text{ yoki } |OA'| = \frac{1}{|OA|}.$$

Demak, OA va OA' kesmalarning qiymatlari bir-biriga teskari. SHuning uchun inversion akslantirish teskari radiuslar akslantirishi deb ham yuritiladi.

Agar OA' kesma o'rniga unga qarama-qarshi yo'nalishdagi $|OA''| = |OA'|$ kesmani manfiy hisoblab olsak, bu holda (1) munosabat quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$|OA| * |OA''| = -r^2. \quad (3)$$

Aylana markazigacha bo'lgan masofalari orasidagi munosabat (3) dagi kabi tenglik bilam ifodalangan A va A'' nuqtalar *inversion qarama-qarshi* nuqtalar deb yuritiladi.

(1) munosabatni qanoatlantiruvchi inversiya *musbat darajali inversiya* yoki *giperbolik inversiya* deyilib, (3) ni qanoatlantiruvchi inversiya esa *manfiy darajali inversiya* yoki *elliptik inversiya* deyiladi. 163- chizmadagi A nuqtaning giperbolik inversiyasi A' nuqta, elliptik inversiyasi esa A'' nuqta bo'lib, ular O markazga nisbatan o'zaro simmetrikdir. A , A' va A'' nuqtalar orasidagi munosabatni quyidagicha yozish mumkin:

$$I_o^{r^2}(A) = A'$$

$$I_o^{-r^2} = A''$$

$$Z_o(A') = A''.$$

O 'sha uch nuqta orasidagi munosabatni yana ushbu shaklda yozish mumkin:

$$I_o^{r^2}(A) * Z_o(A') I_o^{-r^2}.$$

Demak, inversiya markaziga nisbatan har bir giperbolik inversiyani simmetrik akslantirish orqali o'sha inversiya aylanasi nisbatan elliptik inversiyaga keltirish mumkin. Shuning uchun bu ikki inversiyadan bittasini, masalan, giperbolik inversiyani o'rganilsa kifoya.

1.2§ Nuqtani inversion akslantirish va inversiyaning xossalari. Aylanaga inversion mos figura

Inversion nuqtalarning ta'rifiga asosan inversiya aylanasi tekisligida yotgan (inversiya markazidan boshqa) har qanday nuqta uchun shu aylanaga nisbatan inversion mos nuqta topish mumkin.

Inversiya aylanasi tekisligida yotgan biror nuqtani inversion almashtirish usulini inversiyaning ta'rifidagi ushbu:

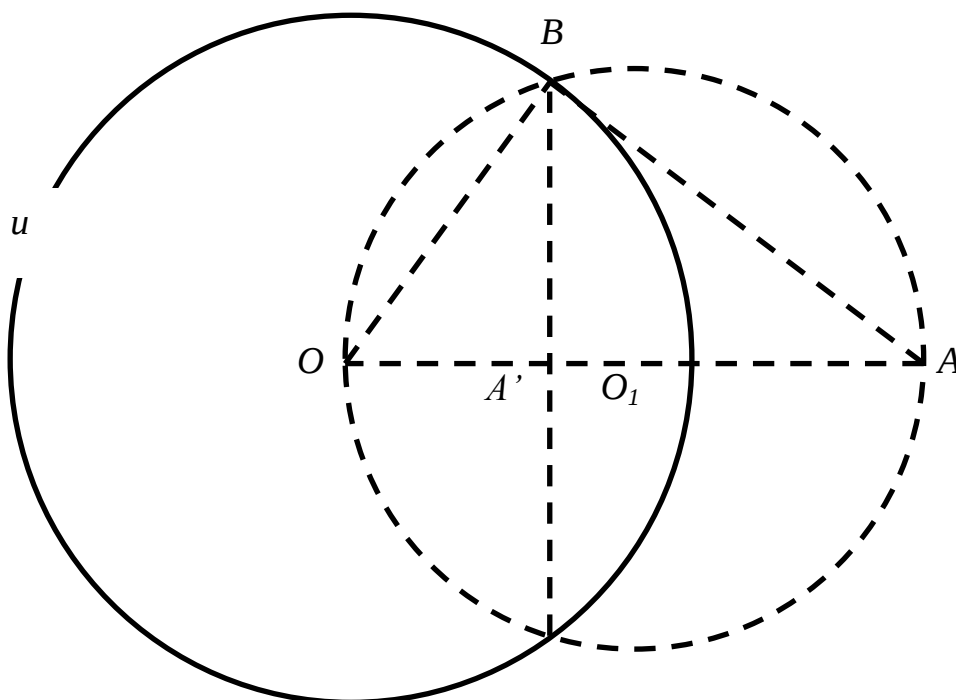
$$|OA \cdot OA'| = r^2 \quad (1)$$

formuladan keltirib chiqarish mumkin.

Bu formulaga ko'ra, 2- chizmadagi OAB uchburchakning $|OB| = r$ kateti ayni vaqtda (O, r) inversiya aylanasi radiusi bo'lib, undagi O nuqta esa o'sha katetning bir uchi bo'lishi bilan birga, u inversiya markazi hamdir. Bundan uchburchak to'g'ri burchagining B uchi inversiya aylanasi yotishi, ya'ni AB kesma (O, r) aylana OB radiusining B uchida urinma ekanligi ma'lum bo'ladi.

Bu muhokamadan, berilgan A nuqtadan berilgan (O, r) aylanaga nisbatan inversion mos A' nuqtani topish usuli kelib chiqadi:

- I. Inversiya aylanasi u (O, r) dan tashqarida berilgan A nuqtani inversion almashtirish uchun OA kesmani diametr qilib yordamchi aylana chiziladi (2-chizma).



Ikki aylananing o'zaro kesishgan B va S nuqtalarini tutashtiruvchi BS vatar OA nur bilan kesishib, izlanuvchi A' nuqtani beradi. Haqiqatan, yasalishiga ko'ra to'g'ri burchakli ABO uchburchakda $(BA') \perp (OA)$ bo'lgani uchun

$$|OA| \cdot |OA'| = |OB|^2.$$

II. Inversiya aylanasi ichida berilgan A' nuqtani inversion almashtirish uchun OA' nurga uning A' nuqtasidan perpendikulyar o'tkaziladi; bu perpendikulyarning inversiya aylanasi bilan kesishgan S (yoki S) nuqtasi orqali shu aylanaga urinma o'tkaziladi. Bu urinma bilan OA' nurning kesishuvidan hosil bo'lgan A nuqta A' nuqtaning inversiyasi bo'ladi. Bu ham yuqoridagidek 2- chizmaning yasalishidan foydalanib isbot qilinadi.

III. Agar berilgan nuqta inversiya aylanasi yotsa, unga inversion nuqta shu nuqtaning o'zi bo'ladi.

Inversion almashtirish quyidagi xossalarga ega:

I. Inversion mos nuqtalar orasida o'zaro inversion moslik mavjud, ya'ni agar A' nuqta A nuqtaga inversioi mos bo'lsa, A nuqta ham A' nuqtaga inversion mos bo'ladi.

Bu xossani qisqacha bunday ko'rsatish qulayroq:

Agar $I_0^{r^2}(A) = A'$ (1) mavjud bo'lsa, u holda $I_0^{r^2}(A') = A$ (2) ham mavjud bo'ladi.

Haqiqatan, agar (2) ni inkor etsak,

$$I_0^{r^2}(A') = B \quad (3)$$

mavjud deyishga to'g'ri keladi.

Inversiyaning ta'rifiga ko'ra: (1) dan $|OA| \cdot |OA'| = r^2$ va (3) dan esa $|OA'| \cdot |OB| = r^2$ o'rinli bo'ladi.

Bu ikki tenglikdan $|OB| = |OA|$, ya'ni faraz qilingan B nuqta A nuqtaning o'zginasi ekanligi ma'lum bo'ladi.

Demak, A va A' nuqtalar orasida ikki karra inversion moslik - o'zaro inversion moslik mavjud deya olamiz. Bu inversion moslikning involyutsionmoslik ekanini ko'rsatadi.

II. A nuqta OA nur bo'yicha O markazdan cheksiz uzoqlashgan sari, A' nuqta O markazga cheksiz yaqinlashadi va, aksincha. Buning to'g'riligi

$$|OA'| = \frac{r^2}{|OA|}$$

munosabatdan anglashiladi. Tenglikning o'ng tomonidagi kasrning surati noldan farqli o'zgarmas miqdor bo'lgani uchun kasrning maxraji cheksiz o'sishi bilan, kasrning qiymati nolga intiladi. Lekin A nuqta O markaz bilan ustma-ust tushganda $|OA| \cdot |OA'| = r^2$ shartni qanoatlantiruvchi hech qanday A' nuqtani topib bo'lmaydi, shu sababli Yevklid tekisligida inversiya markaziga inversion mos nuqta bo'lmaydi.

SHuning uchun inversiyani o'rganishda, inversiya aylanasi tekisligini bu aylananing markazisiz qaraladi (inversiya markazini «o'yib olib tashlangan» deb tasavvur etiladi).

III. Tekislik nuqtalarini inversion akslantirishda:

- a) inversiya aylanasi nuqtalari o'z o'rnini o'zgartmaydi;
- b) inversiya aylanasi tashqarisidagi nuqtalar inversiya aylanasi ichkarisidagi nuqtalarga o'tadi;
- v) inversiya aylanasi ichidagi (markazdan boshqa) nuqtalar inversiya aylanasi tashqarisidagi nuqtalarga o'tadi.

Haqiqatan, bu jummalarning to'g'riligini $|OA| \cdot |OA'| = r^2$ (1) dan kelib chiqarish mumkin:

a) A nuqta inversiya aylanasi yotganida $|OA| = r$ bo'lib, (1) ga asosan $|OA'| = r$ bo'ladi, ya'ni A nuqtaning inversiyasi shu nuqtaning o'zi bo'ladi. Bundan inversiya aylanasi nuqtalari qo'shaloq nuqtalardan iboratligi, ya'ni ular inversiyada o'z o'rinlarini o'zgartirmasligi ma'lum bo'ladi;

b) agar A nuqta inversiya aylanasi tashqarida yotsa, ya'ni $|OA| > r$ bo'lsa, (1) munosabat o'rinli bo'lishi uchun $OA' < r$ bo'lishi shart, ya'ni A' nuqta albatta,

inversiya aylanasi ichida yotadi, va, aksincha $|OA| < r$ bo'lsa, (1) ga ko'ra $|OA| > r$ bo'lishi shart, ya'ni A nuqta albatta aylana tashqarisida yotishi kerak.

IV. Inversion almashtirishda inversiya markazidan chiqqan nurning aylana ichidagi bo'lagi uning tashqi bo'lagiga o'tadi va, aksincha.

Buning to'g'riligi III xossaning «a» va «b» punktlaridan ma'lum bo'ladi.

V. Inversiya aylanasi radiusi cheksiz kattalashib borgan sari inversiya - shu aylanaga nisbatan simmetrik bo'ladi. Haqiqatan, inversiya aylanasi radiusi cheksiz ortib, aylana to'g'ri chiziqqa yaqinlashgan sari, inversion akslantirishning limitdagi to'g'ri chiziqqa nisbatan bajarilgan simmetrik akslantirishdan farqi deyarli qolmaydi.

Bunga ishonish uchun 1- chizmadagi OA nur bilan aylanani kesishgan nuqtasini D orqali belgilab, yana quyidagi shartlarni ham qabul qilaylik:

agar $|DA| = a$ desak; $|OA| = |OD| + |DA| = r + a$ bo'ladi;

agar $|A'D| = a$ desak, $|OA'| = |OD| - |OA'| = r - b$ bo'ladi.

$|OA|$ va $|OA'|$ kesmalarning keyingi ifodalarini (1) formulaga qo'ysak,

$$(r + a) * (r - b) = r^2$$

tenglik hosil bo'ladi.

Bu tenglikdan

$$a - b = \frac{ab}{r} \quad (4)$$

tenglik kelib chiqadi.

Endi bundagi r cheksiz orta borsa, ya'ni aylana to'g'ri chiziqqa intilsa (4) tenglikning o'ng tomoni nolga intilib,

$$a - b = 0 \text{ yoki } a = b \quad (5)$$

tenglik hosil bo'ladi.

VI. Bir markazga nisbatan turli darajalarda ketma-ket bajarilgan ikki inversiya o'sha markazga nisbatan bajarilgan gomotetiya, ya'ni

$$I_0^{r^2} 1 (A) + I_0^{r^2} 2 (A) = H_0^{\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} (A).$$

Haqiqatan

$$I_0^{r_2^2} 1 = |OA| * |OA'| = r_1^2, \quad (1)$$

$$I_0^{r_2^2} 2 = OA' * OA'' = r_2^2 \quad (2)$$

(2) tenglikni (1) ga hadlab bo'lsak, quyidagi chiqadi:

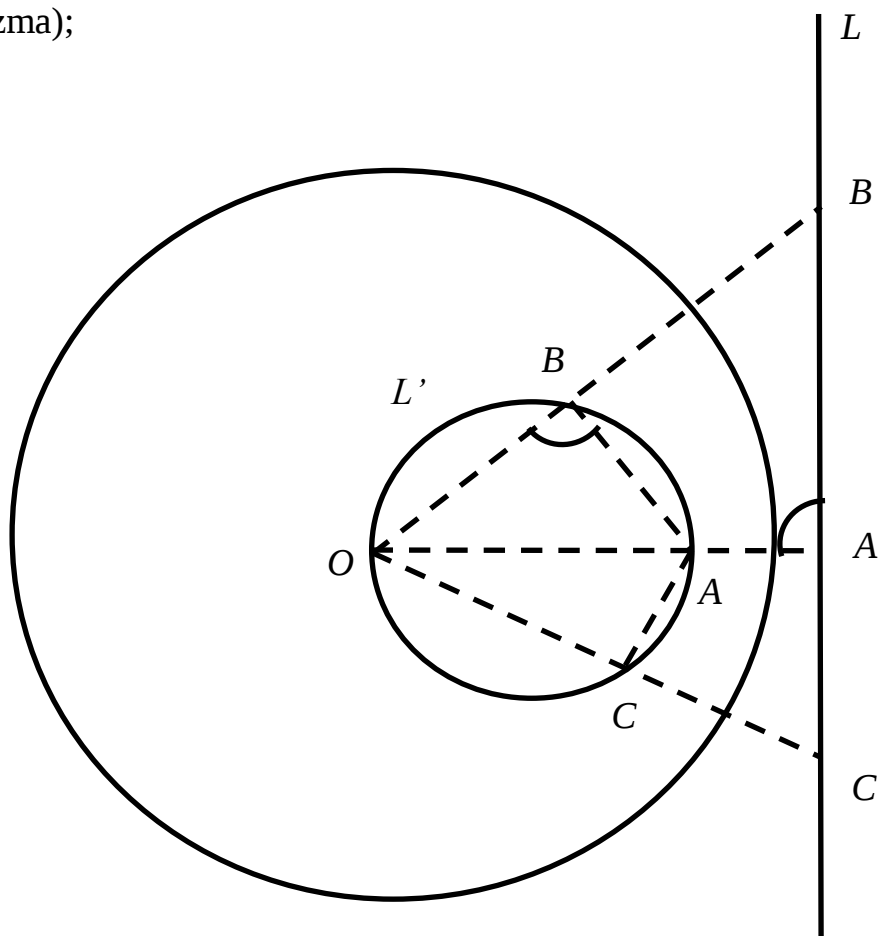
$$\frac{|OA''|}{|OA|} = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2. \quad (3)$$

Endi aylanaga inversion mos figuralarni va ularni yasashini ko'rib chiqamiz.

1-Teorema. *Inversiya markazidan o'tuvchi aylanaga inversion mos figura inversiya markazidan o'tuvchi to'g'ri chiziqdir.*

Haqiqatan, 3- I chizmadagi i aylanaga inversion figura, inversiya involyutsion moslik bo'lgani uchun l to'g'ri chiziq bo'ladi.

Demak, inversiya markazidan o'tuvchi l aylanaga inversion mos to'g'ri chiziq quyidagicha yasaladi: dastavval ikkala aylananing markazlar chizig'i o'tkaziladi (3- chizma);



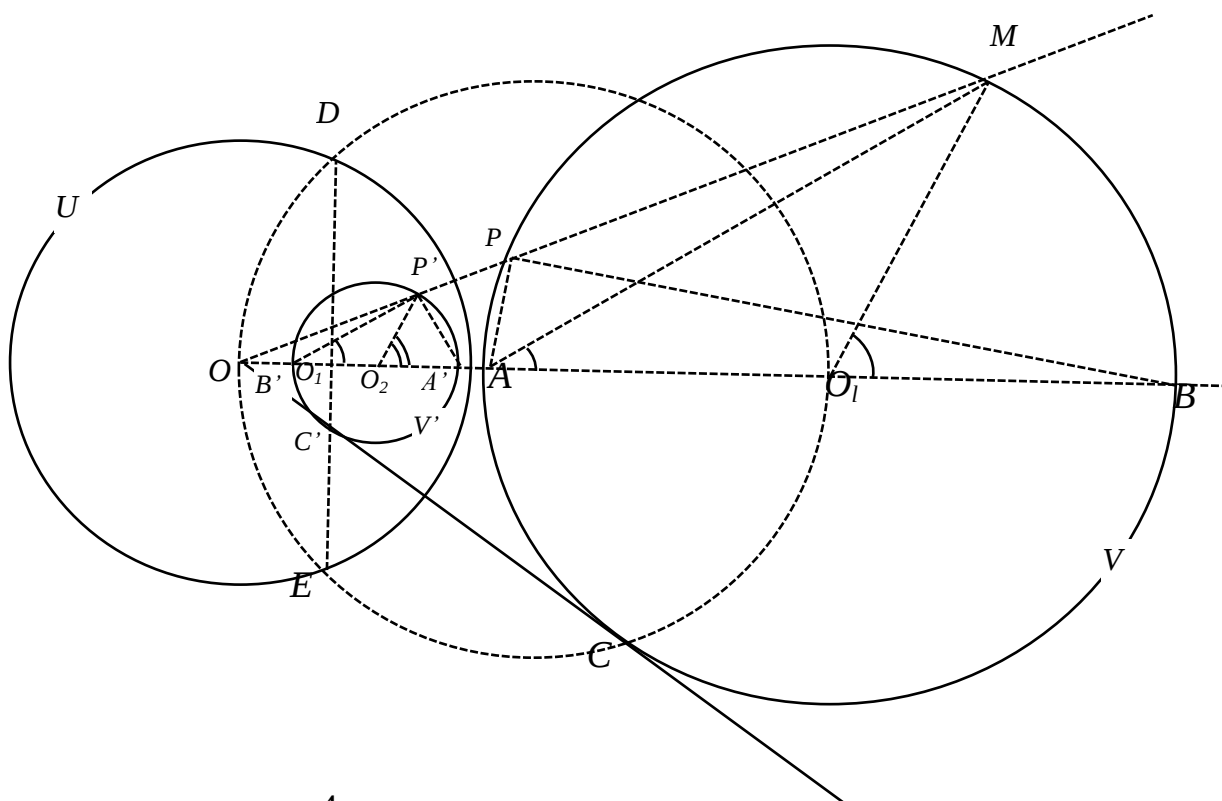
3-rasm

bu chiziqning berilgan l' aylana bilan kesishgan (inversiya markazidan boshqa) A' nuqtasini inversion almashtirib, A nuqta topiladi, so'ngra OO_1 to'g'ri chiziqqa uning A nuqtasi orqali l perpendikulyar o'tkaziladi.

2 - Teorema. *Inversiya markazidan o'tmovchi aylanaga inversion mos figura o'sha markazdan o'tmovchi aylanadir.*

Inversiya markazi ayni vaqtda inversion aylanalarining gometyetiya markazi ham bo'ladi.

Buni isbot qilish uchun $i(O, r)$ inversiya aylanasi bilan berilgan $v(O_1, r_1)$ aylananing markazlar chizigini chizamiz (4-chizma).



4-rasm

Markazlar chizig'i v aylanani A va B nuqtalarda kessin. Bu nuqtalarni i aylanaga nisbatan inversion almashtiraylik.

A va B nuqtalarga inversion mos nuqtalar A' va B' bo'lsin. $A'B'$ kesmani diametr qilib v' aylana chizamiz. Keyingi aylana berilgan aylanaga inversion mos bo'ladi. Buning to'g'riligini isbot qilaylik. v aylanadagi ixtiyoriy P nuqtaga i aylanaga

nisbatan inversion bo'lgan P' nuqtani topib, bu nuqtaning v' aylanaga qarashli bo'lishini ko'rsatamiz. P' nuqtaning v' aylanada yotishiga ishonish uchun uni A' va B' nuqtalar bilan tutashtirishdan hosil bo'lgan $A'P'B'$ burchakning to'g'ri burchak ekanligi isbot qilinsa kifoya. Buning uchun $A'P'B'$ burchakning to'g'ri burchak bo'lgan APB burchakka tengligi - isbot qilinsa bas.

4- chizmaning tuzilishiga tayanib, mana bu tengliklarni yozamiz:

$$\angle OPB \cong \angle OB'P'$$

$$\angle OPA \cong \angle OA'P'$$

Bu tengliklarning birinchisidan ikkinchisini ayirsak, quyidagi tenglik chiqadi:

$$(\angle OPB - \angle OPA) \cong (\angle OB'P' - \angle OA'P').$$

Chizmaning tuzilishiga muvofiq, bu tenglikning chap tomoni $APB = 90^\circ$ ga va o'ng tomoni esa $A'P'B'$ burchakka teng bo'lgani uchun keyingi burchakning ham to'g'ri burchak ekanligi ma'lum bo'ladi.

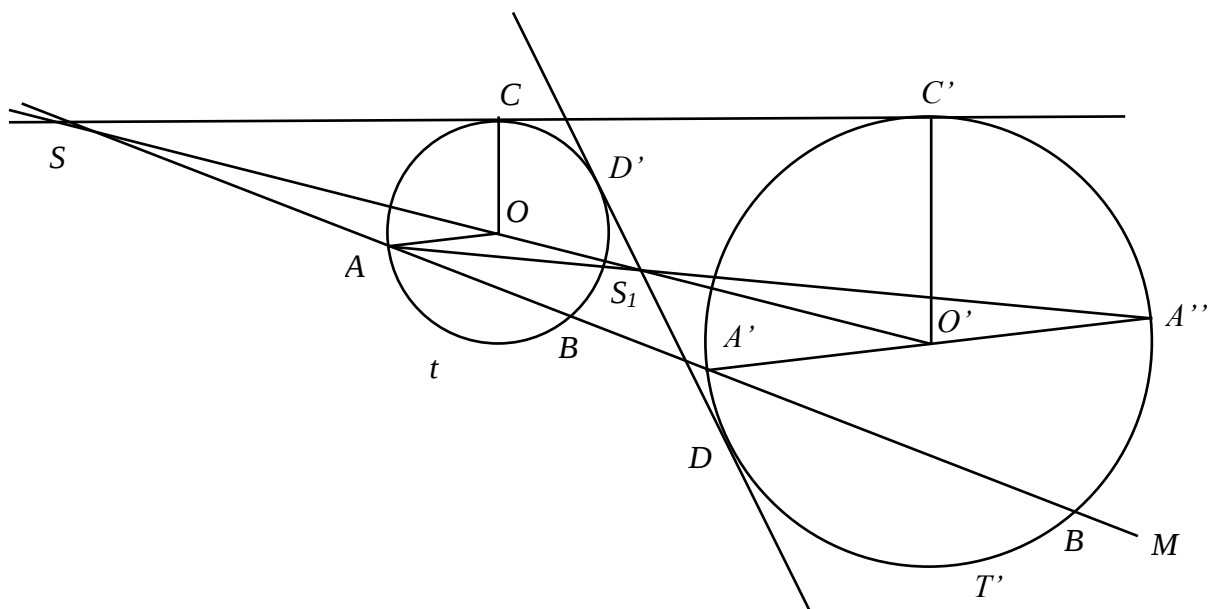
Shuning bilan teoremaning birinchi qismi isbot bo'ladi. Demak, P nuqta v aylana bo'yicha harakat qilganda P' nuqta $A'B'$ diametr bilan chizilgan v' aylan bo'yicha harakat qiladi.

Agar v' aylanada yotuvchi ixtiyoriy bir nuqta olsak, u v aylanada yotuvchi biror nuqtaga inversion mos bo'lishini ko'rsatish mumkin. Shuning uchun v aylanaga inversion figura v' aylana bo'ladi. 5- chizmada O_1 nuqtaga inversion mos nuqta O'_1 nuqtadir.

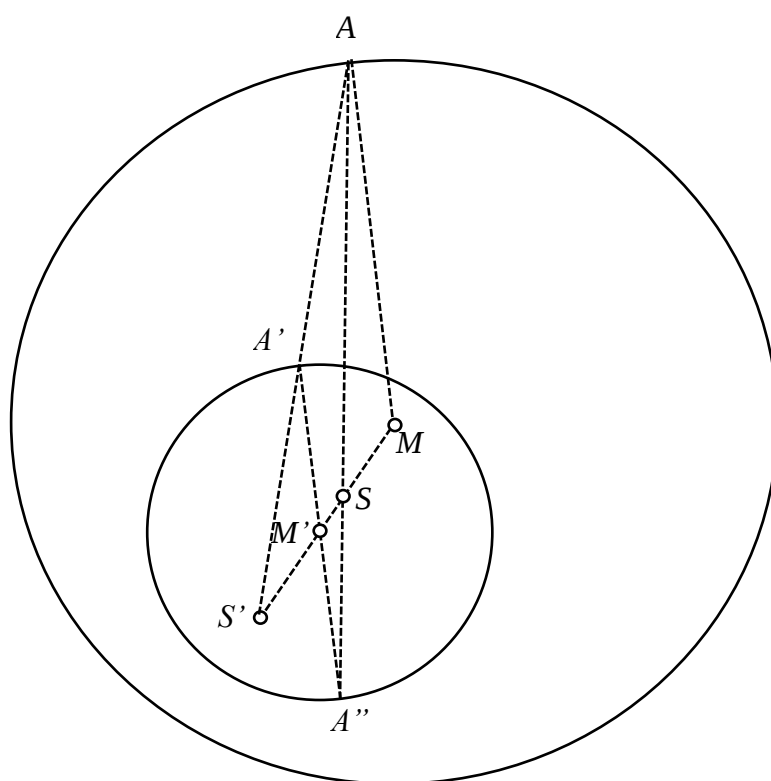
Bunda shuni ham aytib o'tish lozimki, inversion mos v va v' aylanalarning markazlari umuman o'zaro inversion mos bo'lmaydi.

Endi teoremaning ikkinchi qismini isbot qilaylik.

Ma'lumki, ikki aylanadagi parallel radiuslarning uchlari orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq bilan markazlar chizig'ining kesishish nuqtasi o'sha ikki aylananing o'xshashlik markazi bo'ladi.



5-Rasm



6-Rasm

SHuning uchun OP to'g'ri chiziqning P' va M nuqtalarini O_2 va O_1 markazlar bilan tutashtiruvchi $P'O_2$ va MO_1 radiuslarning o'zaro parallel bo'lishini isbot qilsak kifoya. $\angle OPB \cong \angle OB'P'$ bo'lgani uchun ularga qo'shni burchaklar ham kongruent bo'ladi, ya'ni

$$\angle BPM \cong \angle O_2 B'P'.$$

Umumiy MC yoyga tiralganliklari uchun quyidagi ichki chizilgan burchaklar ham kongruent bo'ladi:

$$\angle BAM \cong \angle BPM.$$

Bu ikki tenglikdan:

$$\angle O_2 B'P' \cong \angle BAM.$$

Bularning har biridan 2 marta katta bo'lgan markaziy burchaklarni ham bir-biriga quyidagicha tenglashtira olamiz:

$$\angle A' O_2 P \cong \angle B O_1 M.$$

SHuning uchun $P'O_2$ va MO_1 radiuslar o'zaro parallel bo'lib, MP' bilan markazlar chizig'ining kesishgan O nuqtasi v va v' aylanalarning gomotetiya markazi bo'ladi. Bunda parallel radiuslar markazlar chizig'ining bir tomonida bo'lgani uchun O nuqta tashqi o'xshashlik markazi bo'ladi.

Shunday qilib, chizmadagi P' nuqta P nuqtaga inversion mos va M nuqtaga esa gomotetik mosdir. Agar OM kesuvchini O markaz atrofida aylantirib, uni inversion mos ikki aylanaga umumiy urinma holatiga keltirsak, M nuqta P nuqta bilan birlashib, bitta P urinish nuqtasini hosil qiladi; P' nuqta ham ikkinchi aylanadagi urinish nuqtasiga aylanadi. Demak, inversion mos bo'lgan ikki aylanaga inversion markazidan o'tkazilgan umumiy tashqi urinmaning P va P' urinish nuqtalari o'zaro inversion va gomotetik mos bo'ladi.

Keyingi teoremaga ko'ra inversiya markazidan o'tmovchi aylanani inversion almashtirish uchun quyidagi yo'llardan birini ishlatish mumkinligi ma'lum bo'ladi:

Birinchi yo'l. Inversiya aylanasi bilan berilgan v aylananing OO_1 markazlari chizig'i o'tkaziladi (4- chizma). Bu chiziqning berilgan aylana bilan kesishgan A va B nuqtalarini inversion akslantirib, A' va B' nuqtalar topiladi. So'ngra $A'B'$ kesmani diametr qilib v' aylana chiziladi.

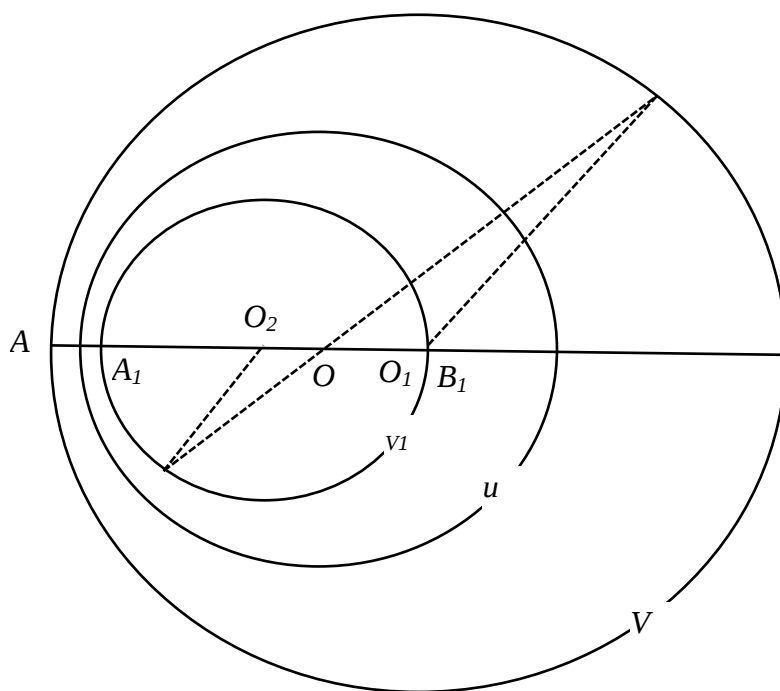
Ikkinchi yo'l. Berilgan v aylananing OO_1 to'g'ri chiziqda yotmagan biror P nuqtasini inversion akslantirib, P' nuqta topiladi (4- chizma) OP nurning v aylana bilan kesishgan ikkinchi nuqtasi M ni aylananing O_1 markazi bilan tutashtiriladi. P' nuqtadan $(P'O_2) \parallel (MO_1)$ to'g'ri chiziq o'tkaziladi. Bu to'g'ri chiziqning OO_1 to'g'ri chiziq bilan kesishuvidan izlangan aylananing O_2 markazi hosil bo'ladi. O_2 markazdan O_2P' radius bilan chizilgan v' aylana berilgan v aylananing inversiyasi bo'ladi.

Endi, uchrashi mumkin bo'lgan xususiy hollarni ko'rib o'taylik.

I. Agar (4- chizmadagi kabi) v aylana inversiya aylanasi i bilan umumiy nuqtaga ega bo'lmasa va undan tashqarida yotsa v aylanaga inversion mos v' aylana i aylananing ichida joylashib, i bilan umumiy nuqtaga ega bo'lmaydi.

Bu holda inversiya markazi O nuqta inversion aylanalarining tashqi o'xshashlik markazi bo'ladi.

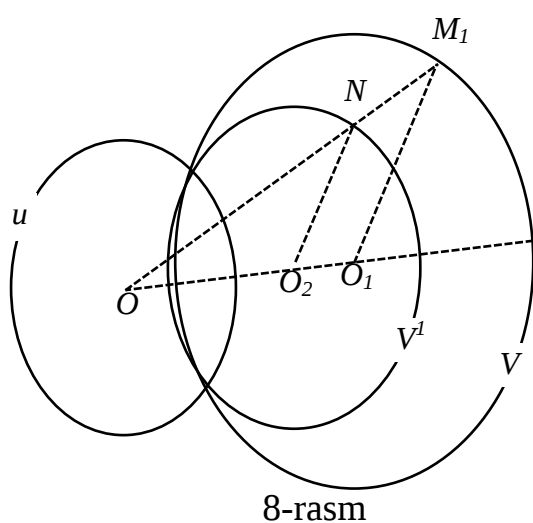
II. Agar (7- chizmadagi kabi) i aylana berilgan v aylananing ichida yotsa, v' aylana i aylananing ichida joylashib O nuqta v' ning ichida yotadi va bu nuqta inversion v va v' aylanalarining ichki o'xshashlik markazi bo'ladi.



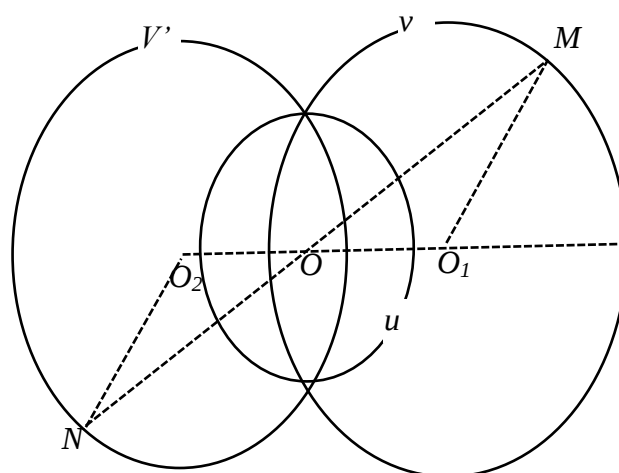
7-Rasm

III. Agar 8 va 9- chizmalardagi kabi i va v aylanalar o'zaro kesishsa, v' aylana ularning kesishish nuqtalaridan o'tadi.

Bu holda inversiya markazi inversion aylanalarining ba'zan tashqi va ba'zan ichki o'xshashlik markaziga to'g'ri keladi.

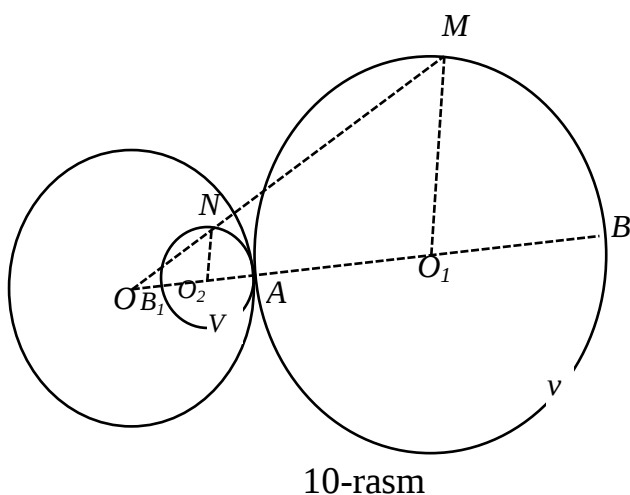


8-rasm

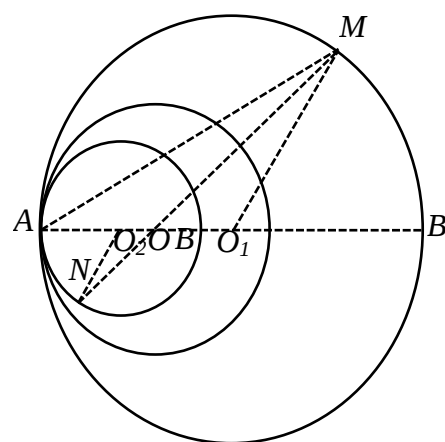


9-Rasm

IV. Agar i aylana v bilan biror nuqtada urinsa, v' ham unga o'sha nuqtada urinadi (10 va 11- chizma).



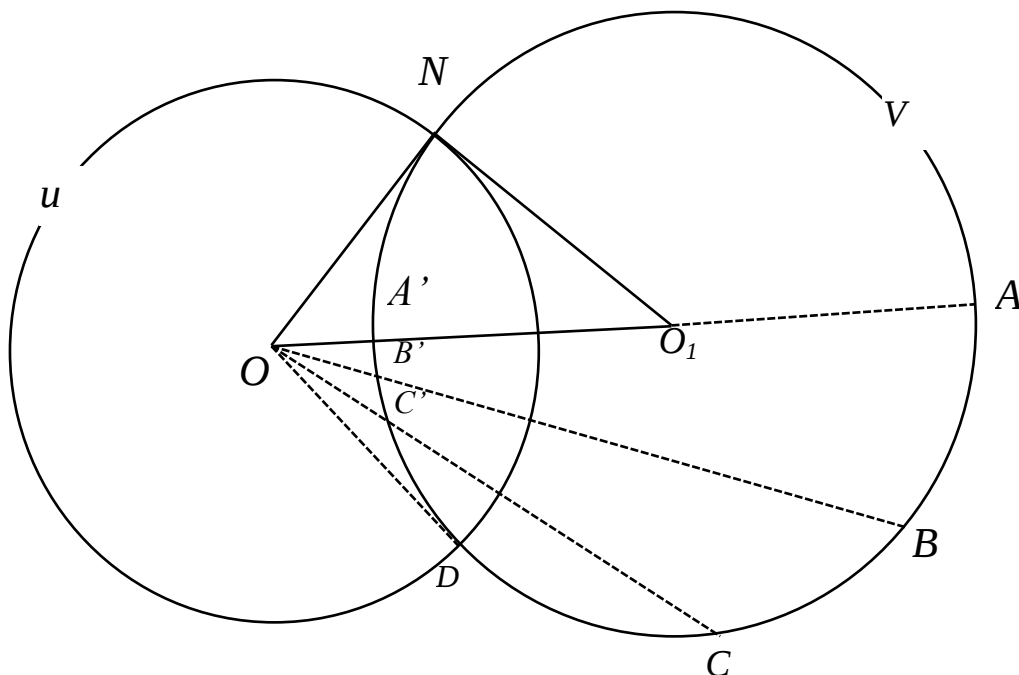
10-rasm



11-rasm

v va v' aylanalar tashqi urinuvchi bo'lganlarida inversiya markazi tashqi o'xshashlik markaziga to'g'ri kelib (10- chizma), ular ichki urinuvchi bo'lganlarida esa O markaz ichki o'xshashlik markaziga to'g'ri keladi (11- chizma).

V. Agar i aylana v ga ortogonal bo'lsa, v' aylana v bilan ustma- ust tushadi; haqiqatan, i aylananing markazidan v ga o'tkazilgan kesuvchi va urinmalarning xossalriga muvofiq (12- chizmadan) quyidagilarni yozsak bo'ladi:



12-rasm

$$|OA| * |OA'| = |OB| * |OB'| = |OC| * |OC'| = |ON|^2 = |OD|^2.$$

Bulardan quyidagilar ma'lum bo'ladi:

$$I(A) = A', I(B) = B', I(C) = C',$$

bularga tayanib, $I[DAN] = DA'N$ deyish mumkin.

Demak, inversiya aylanasi bilan ortogonal kesishgan aylananing tashqi va ichki bo'lagi o'zaro inversion mos bo'ladi.

Yuqorida ko'rilgan hollarni quyidagicha umumlashtirish mumkin:

Inversiya markazi yo ikkala inversion mos aylanalarning tashqarisida yotadi (8 va 10- chizma), yoki ikkalasining ham ichkarisida yotadi (7, 9, va 11- chizmalar);

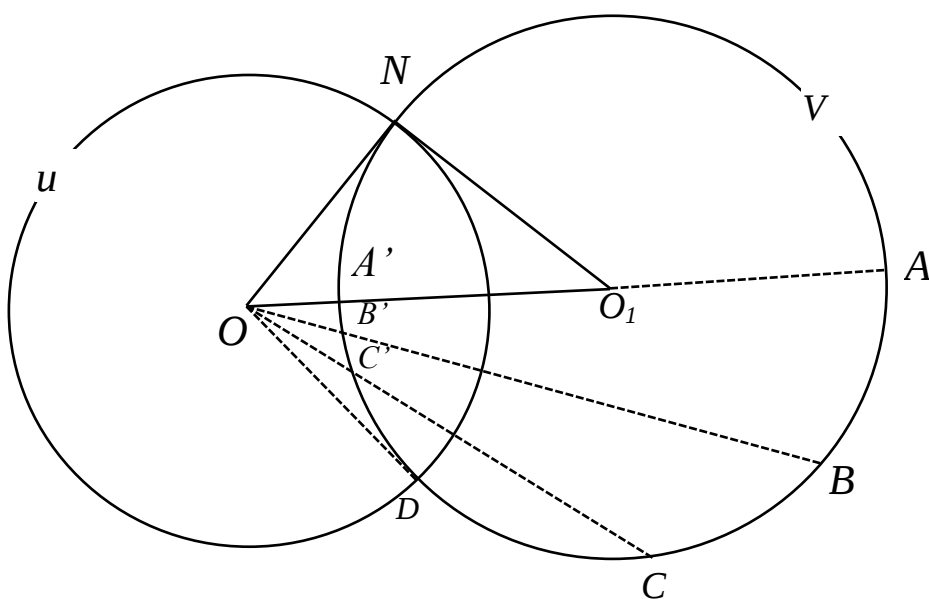
birinchi holda inversiya markazi inversion aylanalarga tashqi gomotetik markazi bo'lib, ikkinchi holda esa ularga ichki gomotetik markazi bo'ladi.

VI. Inversiya aylanasi kontsentrik aylana unga kontsentrik bo'lgan ikkinchi aylanaga akslanadi va inversiya markazi inversion aylanalarning ichki va tashqi gomotetik markazlari bo'ladi. Bunda: agar akslanuvchi v aylana inversiya aylanasi katta bo'lsa unga mos v' aylana i dan kichik bo'ladi va, aksincha v aylana cheksiz kattalashib to'g'ri chiziqqa intilgan sari v aylana kichrayib inversiya markaziga intiladi, v aylana inversiya aylanasi yaqinlashgan sari v' aylana ham unga yaqinlashib boradi.

Inversiya aylanasi o'z-o'ziga mos bo'lgani uchun uning hamma nuqtalari ham o'z-o'ziga mosdir.

VII. Ikki inversion mos A va A' nuqtalardan o'tuvchi hamma aylanalar inversiya aylanasi ortogonal bo'lgan aylanalarning elliptik dastasini tuzadi va $OA'A$ to'g'ri chiziq bu dastaning radikal o'qi bo'ladi (13- chizma).

13- chizmada berilgan $i(O, r)$ aylanaga nisbatan inversion mos bo'lgan A va A' nuqtalardan o'tuvchi hamma aylanalar birortasini, masalan, $v'(O_1, r)$ aylanani i ga ortogonalini isbot qilaylik. Buning uchun quyidagi tenglikning mavjudligini isbot qilinsa kifoya:



13-rasm

$$|OO_1|^2 = r^2 + r_1^2 \quad (1)$$

Chizmaning tuzilishiga ko'ra quyidagilar mavjud:

$$OO_1 = OA' + A'O_1 = OA' + r_1. \quad (2)$$

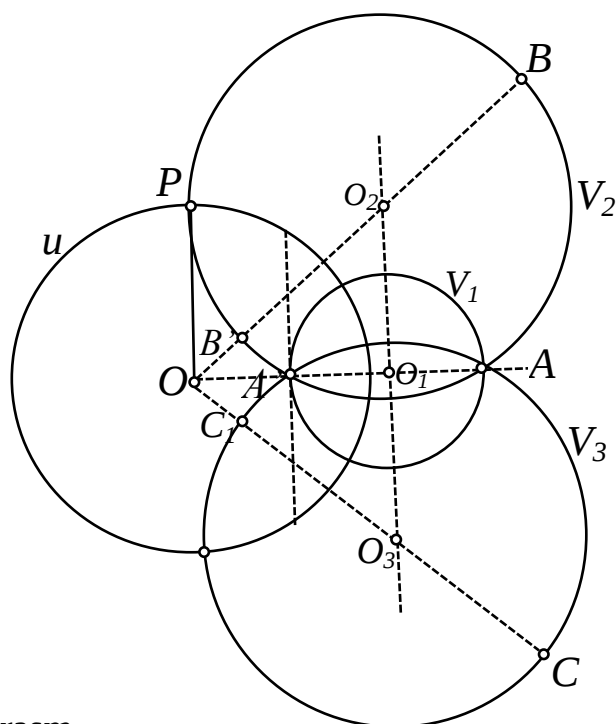
$$OO_1 = OA - AO_1 = OA - r_1. \quad (3)$$

Bu ikki tenglikni hadlab ko'paytirib, berilgan $|OA| \times |OA'| = r^2$ munosabatni e'tiborga olsak, izlanuvchi (1) tenglik kelib chiqadi.

A va A' nuqtalardan o'tuvchi boshqa aylanalarga nisbatan ham (1) tenglikning mavjudligini shunday isbot qilish mumkin. Lekin, bunda quyidagini nazarda tutish kerak:

$$|OB| * |OB'| = |OC| * |OC'| = \dots = |OA| * |OA'| = r^2 \quad (4)$$

Bu (4) munosabatsdan ko'rinadiki, inversiya markazi bo'lgan O nuqta A va A' nuqtalardan o'tuvchi hamma aylanalarga nisbatan bir xil darajaga ega, ya'ni O nuqtadan bu aylanalarga o'tkazilgan hamma urinmalarning kesmalari bir-biriga teng va urinish nuqtalarining geometrik o'rnini inversiya aylanasi iboratdir (bunga inversiya aylanasi bilan OA urning kesishish nuqtasi kirmaydi).



14-rasm

2-BOB. Sferaga nisbatan inversiya

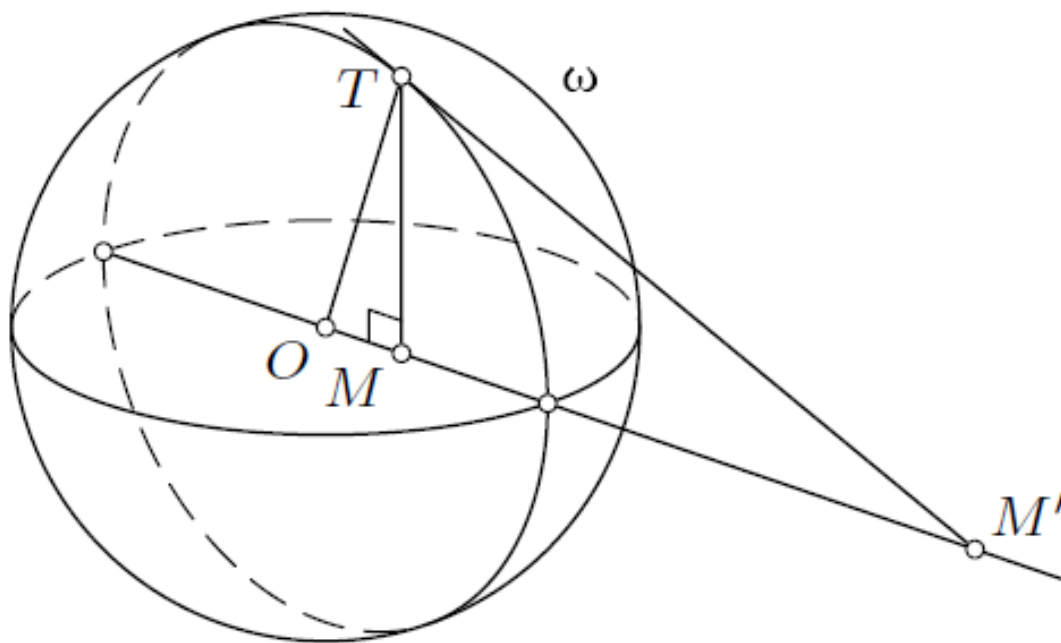
2.1§ Sferaga nisbatan inversiya va uni xossalari.

Fazodagi markazi O nuqtada bo'lib radiusi R bo'lgan sferaga nisbatan inversiya deb fazoning shunday almashtirishiga aytiladiki bunda har bir O dan farqli M nuqta OM nurda yotuvchi shunday M' nuqtaga o'tadiki bunda

$$OM \cdot OM' = R^2 \quad (1)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Yuqoridagi sfera inversiya sferait deyilad, O nuqtaga inversiya markazi, R inversiya radiusi deyiladi.



1-rasm

Bu ta'rifdagi M va M' nuqtalar teng kuchli hisoblanadi, ya'ni agar $M \rightarrow M'$ bo'lsa u holda, $M' \rightarrow M$ bo'ladi bitta inversiyaga nisbatan. Buning ma'nosi shuni berilgan sferaga nisbatan inversiyaga nisbatan teskari almashtirish ham bu inversiya bilan ustma ust tushadi. Shuning uchun inversiya involyusion almashtirish bo'ladi.

Inversiyada w sferidagi nuqtalar o'z o'ziga o'tadi.

OM to'g'ri chiziqni o'z ichiga oluvchi ixtiyoriy tekislik w sferani uning katta aylanasi bo'ylab kesadi . Shuning uchun sferaga nisbatan inversiyada M nuqtaning obrazi M'ni yasash masalasi kesimdagi katta aylanaga nisbatan inversiyada M nuqtaning obrazini yasash masalasiga keladi .

Xuddi tekislikdagi inversaning koordinatalardagi ifodasiga o'xshash tarzda fazodagi $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ sferaga nisbatan inversaning formulasi keltirib chiqariladi. Agar M' (x' , y' , z') nuqta M (x,y,z,) nuqtaning obrazi bo'lsa u holda quydagilar inversiyaning koordinatalardagi ifodasi bo'ladi :

$$x' = \frac{R^2 x}{x^2 + y^2 + z^2} , \quad y' = \frac{R^2 y}{x^2 + y^2 + z^2} , \quad z' = \frac{R^2 z}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2)$$

Sferaga nisbatan inversiyada A va B nuqtalarning obrazlari orasidagi A' B' masofa A B masofa orqali quydagicha ifodalanadi:

$$A'B' = AB \frac{R^2}{OA * OB} \quad (3)$$

Endi fazoda sferaga nisbatan inversiyada tekislik va sferalar to'rg'i chiziq va aylanalarning akslari bo'lishini ko'rib chiqamiz.

O nuqtadan ya'nidan inversiya markazidan o'tadigan tekislik (to'g'ri chiziq) O nuqtani hisobga olganda o'z o'ziga akslanadi.

Inversiya markazidan o'tuvchi S'sferaning aksi bu sfera va inversiya sferasi markazlaridan o'tuvchi to'g'ri chiziqqa perpendikulyar tekislik bo'ladi bu tekislik inversiya markazidan $\frac{R^2}{2r}$ masofada joylashgan, bu yerda r – S' sferaning radiusi. Shunisi qiziqki inversiya markazidan o'tadigan tekislikning aksi inversiya markazidan o'tuvchi sfera bo'ladi. Bu sferaning diametri OA kesma bo'ladi, bu yerda A nuqta O markazning berilgan tikislika ortogonal proeksiyasi.

Inversiya markazidan o'tmaydigan J sferaning aksi J' bo'ladi. Bu xosil qilingan J' sfera inversiya markazidan o'tmaydi. W, J, J' sferalarning markazlari bir to'g'ri chiziqda yotadi. J va J' sferalarning markazlari w sferaga nisbatan inversiyada bir biriga mos emas.

To'g'ri chiziq va aylanalar tekisliklar va sferalarning kesishgan chiziqlari bo'lgani uchun quydagi tasdiqlar o'rinli:

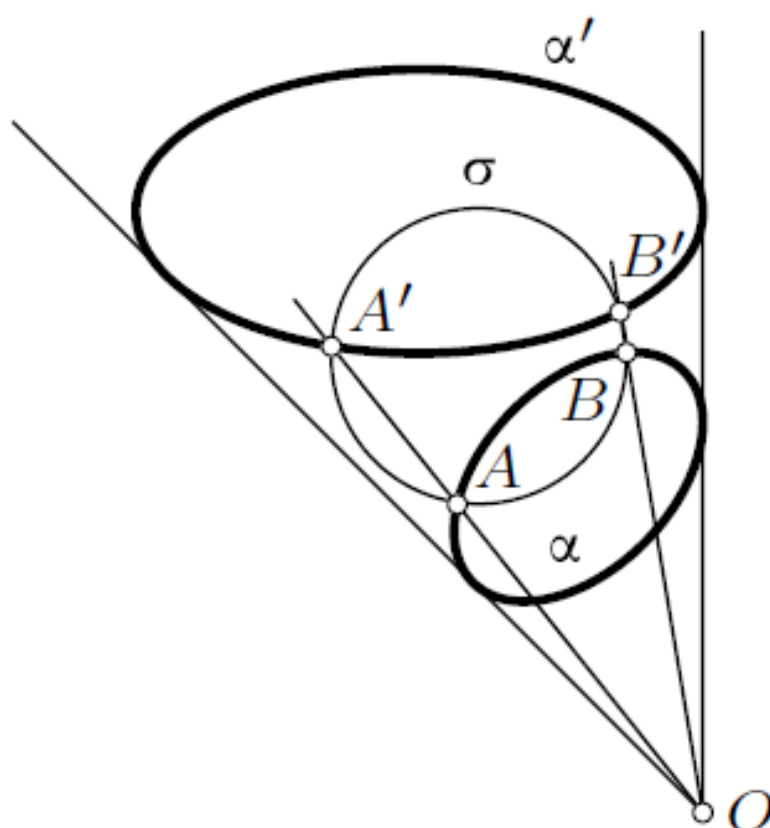
Agar aylana inversiyaning markazidan o'tsa uning aksi to'g'ri chiziq bo'ladi, aks holda agar aylana inversiya markazidan o'tmasa uning aksi aylana bo'ladi.

Agar j sfera inversiya sferasi w ga ortogonal bo'lsa j sfera bu inversiyada o'z o'ziga o'tadi.

Agar w sferaga nisbatan inversiyada o'zaro inversion mos ikkita nuqta J sferada yotsa u holda J va w sferalar o'zaro ortogonal bo'ladi.

Teorema: Ikkita inversion mos aylanalar bitta sferaga yoki bitta tekislikka tegshli bo'ladi.

Isbot: Agar α va α' aylanalar bitta tekislikda yotsa isbot ravshan. α aylananing A va B nuqtalari va inversiya markazi O nuqta bitta to'g'ri chiziqda yotmasin.



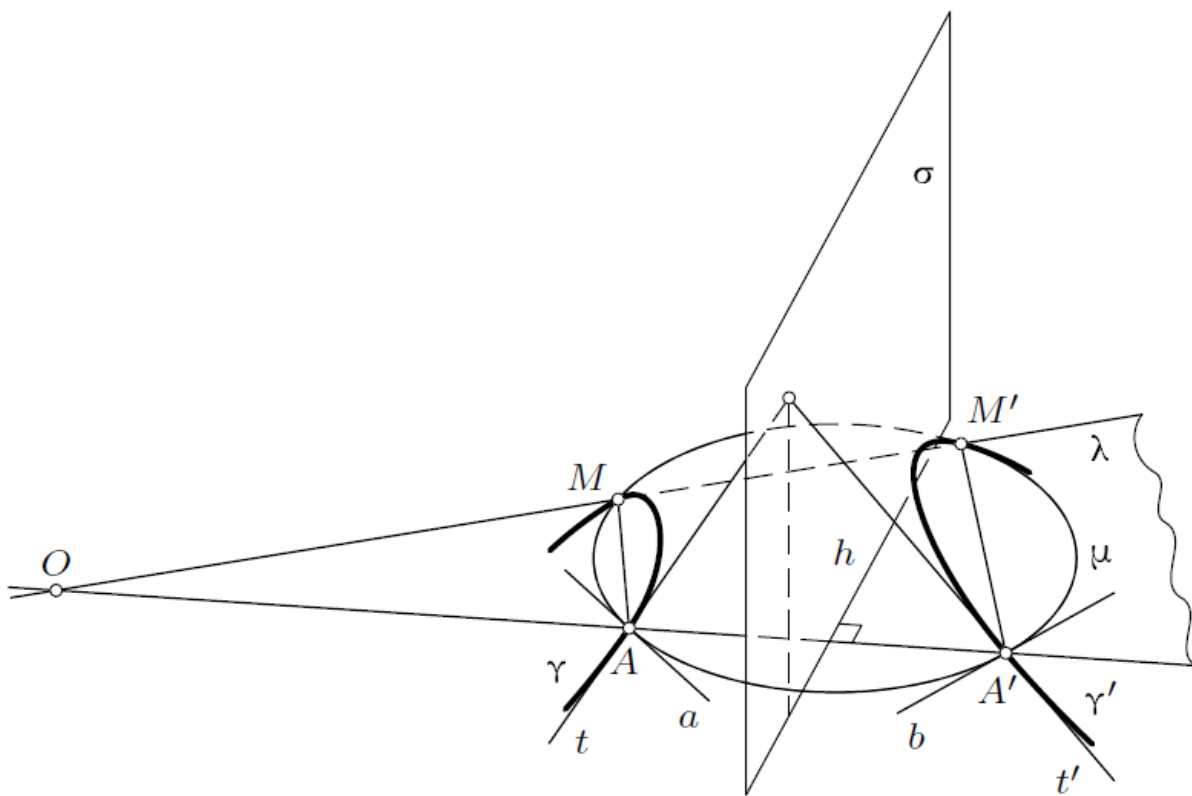
2-rasm

A va B nuqtalarning akslari A' va B' nuqtalar α' aylanaga tegishli bo'ladi .
 A, B, A', B' , nuqtalar bitta δ aylanada yotadi. α va δ aylanalar ikkita umumiy A
va B nuqtalarga ega , shuning uchun bitta S' sferani aniqlaydi . Bu sfera
inversiyada o'ziga akslanadi. Shu ikki inversiya sferasi W ortogonal bo'ladi. W
sfera markazi O ning S' sferaga nisbati darajasi
 $OA * OA' = R^2$, ya'ni W sfera radiusining kvadratiga teng demak α aylana
tegishli bo'lgan

2.2. Inversiyada egri chiziqlar orasidagi burchakning o'zgarmasligi.

Tekslikdagi inversiya kabi fazodagi sferaga nisbatan inversiyada ham ikkita egri chiziqlar orasidagi burchak saqlanadi. Bu xossa bevosita quyidagi limmadan kelib chiqadi.

Lemma. Agar J' egri chiziq J egri chiziqning fazodagi inversiyaga nisbatan aksi bo'lsa u holda, $JvaJ'$ egri chiziqlarga mos ravshda $AvaA'$ nuqtalarda o'tkazilgan t va t' urinmalar bu nuqtalarning simmetriya teksligi α ga nisbatan simmetrikdir.



3-rasm

Isbot. M va M' nuqtalar J va J' egri chiziqlarning berilgan inversiyaga nisbatan mos huqtalari bo'ladi. U holda A,A',M,M' nuqtalar bitta μ aylanada yotadi. Ava A' nuqtalarga a va b urinmalar AA' kesmaga o'kazilgan o'rta perpendikulyar h ga nibatan simmetrikdir. Agar M nuqta J egri chiziq bo'ylab harakatlanib A nuqtaga yaqinlashsa u holda M' nuqta J' egri chiziq bo'ylab A' nuqtaga yaqinlashadi. Natijada λ tekslikda umumiy AA' vatarga ega bo'lgan μ

aylanalar to'plamini hosil qilamiz. Bunda AA' vatarga o'tkazilgan barcha h perpendikulyarlar $AvaA'$ nuqtalar simmetriya teksligi α ga tegshli bo'ladi. μ o'zgaruvchi aylanaga o'tkazilgan o'zgaruvchiga o'tkazilgan o'zgaruvchi a va b urinmalar α tekslikka nisbatan simmetirik bo'ladi.

Egri chiziqqa o'tkazilgan urinmaning aniqlanishiga ko'ra J chiziqqa o'tkazilgan A nuqtadagi t urinma AM kesuvchining $M \rightarrow A$ dagi limit holatidir, bunda $a \rightarrow t$ va $b \rightarrow t'$ (chunki $M' \rightarrow A'$). J egri chiziqqa tegishli M nuqtaning ixtiyoriy holatida ham a va b to'ri chiziqlar α tekslikka nisbatan simmetrik bo'lgani uchun, t va t' urinmalar limit holatida ham α tekslikka nisbatan simmetrik bo'ladi.

Yuqoridagi isbotlangan limmadan inversiyada egri chiziqlar orasidagi burchakning o'zgarmaslkigi kelib chiqadi. Haqiqatdan ham, biz umumiy A nuqtaga ega bo'lgan φ va β egri chiziqlar berilgan bo'lsin. To'g'ri chiziqlarning φ' va β' akslari A' nuqtada kesishadi.

φ va β egri chiziqqlarga A nuqtada o'tkazilgan urinmalar orasidagi burchak, φ' va β' egri chiziqqlarga A' nuqtada o'tkazilgan urinmalar orasidagi burchakka teng, chunki A va A' nuqtalarning simmetriya teksligiga nisbatan bu burchaklar simmetriyadir.

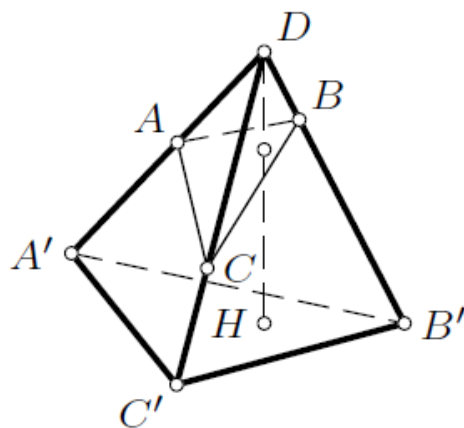
Endi tetraedr hajmi uchun Shtaudt formulasini isbotlashda fazodagi sferaga nisbatan inversiyaning tadbir'ini ko'rib chiqamiz.

ABCD tetraedr berilgan bo'lib $AD=a$, $DB=b$, $DC=c$, $BC=a_1$, $CA=b_1$, $AB=c_1$, va R-tetraedrga tashqi chizilgan sfera radiusi bo'lsin. Biz

$$6VR=Q \quad (4)$$

$$\text{bunda, } 16Q^2 = (aa_1 + bb_1 + cc_1)(bb_1 + cc_1 - aa_1)(cc_1 + aa_1 + bb_1)$$

Markazi D nuqtada va ixtiyoriy nuqtada r radiusli inversiyani qaraymiz.



4-rasm

Bu inversiyada O nuqtada va radiusi R bo'lgan sfera bub u inversiyada tekislikka tasvirlanadi va bu tekislikda tetraedrning A'B'C' uchlarining akslari A',B',C', nuqtalar yotadi. U holda $2R = \frac{r^2}{DH}$ (bunda DH- tetraedr balandligi) tenglik o'rinli bo'ladi.

Shuningdek

$$\frac{V_{A'B'C'D'}}{V_{ABCD}} = \frac{DA' \cdot DB' \cdot DC'}{DA \cdot DB \cdot DC}$$

Yoki

$$\frac{S_{A'B'C'D'} \cdot DH}{3V} = \frac{DA' \cdot DB' \cdot DC'}{DA \cdot DB \cdot DC} \quad (5)$$

Tenglik o'rinli.

Inversiyaning xossasiga ko'ra:

$$DA' = \frac{r^2}{a}, \quad DB' = \frac{r^2}{b}, \quad DC' = \frac{r^2}{c}, \quad \text{va}$$

$$B'C' = \frac{r^2 \cdot BC}{DB \cdot DC} = \frac{r^2 \cdot a_1}{bc} = \frac{r^2 \cdot aa_1}{abc},$$

$$C'A' = \frac{r^2 \cdot bb_1}{abc}, \quad A'B' = \frac{r^2 \cdot bb_1}{abc}$$

munosabatlarni yozishimiz mumkin.

proporsional va proporsionallik koeffisienti $k = \frac{r^2}{abc}$ ga teng. Shuning uchun

$$S_{A'B'S'} = k^2 Q, \quad k^2 = \frac{r^4}{(abc)^2}$$

(5) tenglikdagi o'zgaruvchilarni o'rniga qo'ysak

$$\frac{k^2 Q}{2R \cdot 3V} = \frac{r^6}{abc \cdot abc} \text{ tenglik o'rinli bo'ladi.}$$

Bundan $6VR = Q$ ga ega bo'lamiz, bu yerda Q – tomonlari aa_1, bb_1, cc_1 bo'lgan uchburchak yuzi.

Endi to'rtburchaklar uchun kosinuslar teoremasi xisoblanuvchi Bretshnayder teoremasini stereometrik umumlashganini isbotini fazodagi inversiya yordamida ko'rib chiqamiz.

Bizga ABCD tetraedr berilgan bo'lsin. Markazi D uchda va ixtiyoriy r radiusli inversiyani ko'rib chiqamiz. ABCD tetraedrga tashqi chizilgan sfera bu inversiyada A'B'C' tekislikka asoslanadi. A'B'C' uchburchak uchun kosinuslar teoremasiga ko'ra

$$A'C'^2 = A'B'^2 + B'C'^2 - 2A'B' \cdot B'C' \cos A'B'C'.$$

(3) formulaga ko'ra

$$A'C' = AC \cdot \frac{r^2}{DA \cdot DC}, \quad A'B' = AB \cdot \frac{r^2}{DA \cdot DB}, \quad B'C' = BC \cdot \frac{r^2}{DB \cdot DC}$$

A'B' va B'C' to'g'ri chiziqlar DAB va DBC aylanalarining akslari bo'lgani uchun ular D inversiya markazida o'tkazilgan urinmalarga paralil mos ravshda paralil bo'ladi. Shuning uchun $\angle A'B'C'$ burchak urinmalar orasidagi burchakka teng, yani DAB va DBC aylanalar orasidagi φ burchakka teng.

Quyidagi tenglikdan o'rniga quyishlardan so'ng quydagilarni hosil qilamiz:

$$AC^2 \cdot \frac{r^4}{DA^2 DC^2} = AB^2 \cdot \frac{r^4}{DA^2 DB^2} + BC^2 \cdot \frac{r^4}{DB^2 DC^2} - \frac{2r^4 AB \cdot BC \cdot \cos \varphi}{DA \cdot DB^2 DC}.$$

Bu tenglikni soddalashtirib:

$$(AC \cdot BD)^2 = (AB \cdot CD)^2 + (BC \cdot DA)^2 - 2AB \cdot BC \cdot CD \cdot DA \cdot \cos \varphi,$$

(6) bunda φ -DAB va DBC aylanalar orasidagi burchak.

(6) tenglik tashqi ko'rinishidan yassi ABCD to'rtburchak uchun Bretshnayder teoremasi bilan bir ko'rinishga ega bo'lib, bunda φ to'rtburchakning $\angle A$ va $\angle C$ burchakning yig'indisiga teng.

Natija: Tetraedrning ikkita yog'iga tashqi chizilgan aylanalar qanday burchak ostida kesishsa qolgan ikkita yog'iga tashqi chizilgan aylanalar ham shunday burchak ostida kesishadi.

Haqiqatdan ham (6) tenglik ABCD to'rtburchakning CA va BD diagonallariga nisbatan simmetrikdir. DAB va DBC aylanalar orasidagi burchakni DAC va BAC aylanalar orasidagi burchak bilan almashtirib (6) tenglikdagi qolgan elementlarni o'zgarishsiz qoldiramiz.

2.3§ Stereografik proeksiya ta'rifi va xossalari

Stereografik proeksiya deb sferaning biror S nuqtasidan bu nuqtaga diametral qarama-qarshi S' nuqtada urinuvchi α tekislikdagi proeksiyasiga aytiladi.(5-rasm)

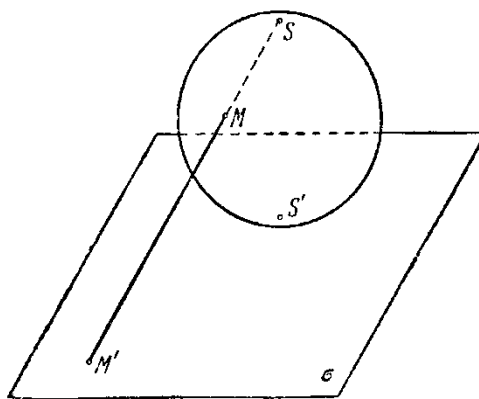


Рис. 1.

5-rasm

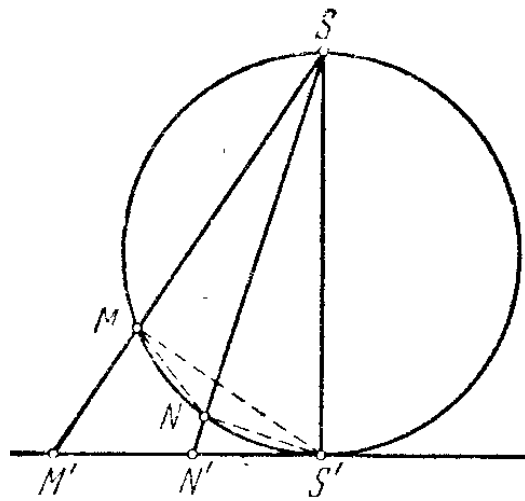
Bu proeksiyalashning xossalari, agar α tekislikni unga parallel biror tekislik bilan almashtirsak o'zgarmaydi. Bu α ga parallel tekislik proeksiya markazidan o'tmasligi kerak. Odatda bu tekislik sifatida sferaning diametral tekisligi olinadi.

Stereografik proeksiyaning quyidagi uchta xossalarini ko'rsatamiz:

A) Sferada yotuvchi aylana α tekislikka aylana sifatida, yoki aylana proeksiya markazidan o'tsa to'g'ri chiziq sifatida tasvirlanadi.

Bu xossa isbotiga o'tishdan oldin sferadagi M nuqtadan uning proeksiyasi α tekislikdagi M' proeksiyasiga o'tish SS' diametr orqali o'tuvchi tekislikda bajariladi.

Shuning uchun dastlab diametr orqali o'tuvchi tekislikdagi aylananing to'g'ri chiziqqa stereografik proeksiyasini qaraymiz.(6-rasm)



6-rasm

Lemma. Aylanani to'g'ri chiziqqa stereografik proeksiyalashda aylanadagi M va N nuqtalar to'g'ri chiziqning M' va N' nuqtalarga proeksiyalansin, u holda $\angle SMN = \angle SN'M'$ va $\angle SNM = \angle SM'N'$ bo'ladi.

Haqiqatdan ham, umumiy o'tkir burchakka ega bo'lgan SMS' va SS'M' to'g'ri burchakli uchburchaklar o'xshashdir, shuning uchun $\frac{SM}{SS'} = \frac{SS'}{SM'}$, ya'ni $SM \cdot SM' = (SS')^2$. Xuddi shunday SNS' va SS'N' uchburchaklarni qarasak, bu uchburchaklar umumiy NSS' o'tkir burchakka ega. Bundan $SN \cdot SN' = (SS')^2$. Xosil qilingan tengliklardan

$$SM \cdot SM' = SN \cdot SN' \quad (7)$$

yoki

$$\frac{SM}{SN'} = \frac{SN}{SM'} \quad (8)$$

ekanligini topamiz.

(2) proeksiyadan SMN va SN'M' uchburchaklar umumiy MSN o'tkir burchakka ega bo'lgani uchun o'xshashdir, bundan $\triangle SMN$ da $\angle SMN$ va $\angle SNM$ burchaklar mos ravishda SN'M' uchburchakning $\angle SN'M'$ va $\angle SM'N'$ burchaklariga tengligi kelib chiqadi.

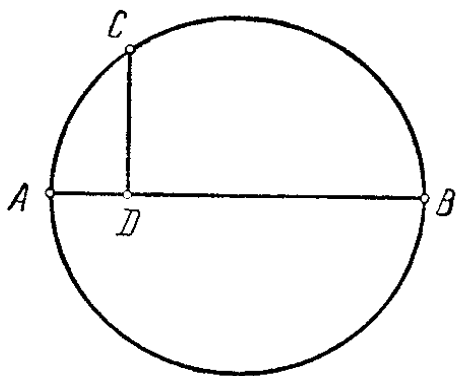
Endi stereografik proeksiyaning yuqoridagi (A) xossasini isbotlaymiz. Agar sferadagi aylana S nuqta orqali o'tsa, u holda u bu nuqta orqali o'tuvchi tekislikda yotadi va uning α tekislikka S' nuqtadan proeksiyasi bu tekisliklarning kesishish chizig'idan iborat bo'ladi, yani to'g'ri chiziqdan. Agar sferadagi S nuqtadan o'tmasa u holda SS' to'g'ri chiziq va bu aylananing markazi orqali o'tuvchi

tekislik ikkinchi rasmda tasvirlangan tekislik bo'ladi. Aylananing diametri esa MN kesmadan iborat. U holda bu aylana nuqtalarni proeksiyalovchi to'g'ri chiziqlar uchi S'' nuqtada bo'lgan og'ma konusning yasovchilari bo'ladi.

Agar to'g'ri konusning faqat gina ososiga parallel kesimida aylana xosil bo'lsa, og'ma konusda bu ikki xil kesimda bo'ladi. Bittasi asosiga parallel tekislik bilan kesimidan iborat, ikkinchi kesimini xosil qilish uchun quydagi xossaga murojat qilamiz; Agar aylananing ixtiyoriy C nuqtasidan AB diametrini CD perpendikulyar tushirsak

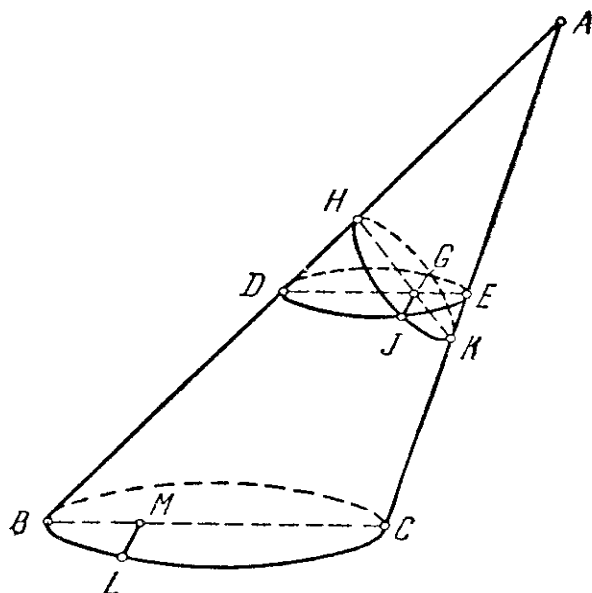
$$AD \cdot DB = CD^2 \quad (3)$$

tenglik o'rinli bo'ladi va aksincha agar egri chiziqning biror C nuqtasi va AB to'g'ri chiziq uchun (3) tenglik bajarilsa bu egri chiziq aylana yoki aylananing



bo'lagi bo'ladi. (7-rasm)

Endi uchi A nuqtada bo'lgan va asosining diametri BC bo'lgan og'ma konusni qaraymiz. Bu yerda BC to'g'ri chiziqni konusning uchidan uning asosiga tushirilgan perpendikulyarning asosidan o'tadi deb faraz qilamiz (8-rasm).



8-rasm

Konusni ABC tekislikga perpendikulyar va uni HK to'g'ri chiziq bo'ylab kesuvchi tekislik bilan kesamiz. Bunda H va K nuqtalar konus sirtida yotadi va $\angle AHK = \angle ACB$, $\angle AKH = \angle ABC$ bo'ladi. Bu kesuvchi tekislik konus sirtini HJK egri chiziq bo'ylab kesadi bu HJK egri chiziqning aylana ekanligini ko'rsatamiz. Buning uchun bu egri chiziqning ixtiyoriy J nuqtasi va konus asosi aylanasi ixtiyoriy L nuqtasini qaraymiz va bu nuqtalardan ABC tekislikka JG va LM perpendikulyarlar tushiramiz. JG va LM to'g'ri chiziqlar bitta tekislikka perpendikulyar bo'lganligi uchun o'zaro parallel bo'ladi. G nuqta orqali BCga parallel DGE to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. Shuningdek DE va JG to'g'ri chiziqlar orqali tekislik o'tkaziladi. $DE \parallel BC$ va $JG \parallel LM$ bo'lgani uchun biz o'tkazgan tekislik konusning asosiga parallel bo'ladi va undan aylanma kesimni xosil qiladi. Ammo (3) xossaga ko'ra bu aylanma kesim uchun

$$DG * GE = JG^2 \quad (4)$$

tenglik o'rinli.

Boshqa tomondan $\angle AHK = \angle ACB$, bu DE va BC larning parallelligidan bu burchaklar $\angle AED$ ga ham teng.

Xuddi shuningdek $\angle AKH = \angle ABC = \angle ADE$ bo'lib, u holda $\angle HDG = \angle EKG$ va $\angle DHG = \angle KEG$.

Shuning uchun $\triangle EGK$ va $\triangle HGD$ larning G uchdagi burchaklari teng bo'lgani uchun ular o'xshash.

Bu burchaklar o'xshashligidan

$$\frac{HG}{GD} = \frac{EG}{GK}$$

yoki

$$DG * GE = HG * GK$$

bo'lib, (4) tenglikka ko'ra

$$HG * GK = JG^2 \quad (5)$$

(5) va (3) tenglikka o'xsxhashko'rinishda bo'lgani uchun HJK egri chiziqli aylana bo'ladi.

HJK tekislikka parallel bo'lgan ixtiyoriy tekislik bilan konusning kesishi shu xossaga ega bo'lgani uchun biz og'ma konusning aylana xosil qiladigan kesimlari oilasini xosil qildik.

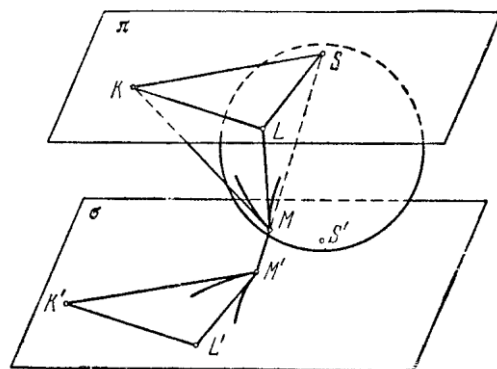
2-chi rasimdagi $SM'N'$ va SNM uchburchaklar 4-rasmdagi ABC va AHK uchburchaklar kabi joylashgani uchun $SM'N'$ va SNM uchburchaklar burchaklari tengligidan og'ma konusning sferaga S' nuqtada urinuvchi tekislik bilan kesishish diametri $M'N'$ bo'lgan aylana bo'ladi. (A) xossa isbotlandi. sferadagi biror aylananing proektsiyasi bo'ladi.

(A)xossani isbotlashdagi mulohazalarni yuritib bu konusning sfera bilan kesimi aylana bo'lishini va bu kesim tekisligi konus asosiga parallel bo'lmasligini isbotlash mumkin.

Stereografik proektsiyada MN diametrli aylana $M'N'$ diametrli aylananing markaziga proektsiyalanmaydi. Haqiqatdan ham L - MN diametrning o'rtasi L' esa bu nuqtaning tekislikdagi proektsiyasi bo'ladi. (9-rasm)

Egri chiziqlar orasidagi burchak deganda bu egri chiziqlar kesishgan nuqtasidan o'tkazilgan urunmalar orasidagi burchak tushuniladi.

Sferaning M nuqtasidan ikkita egri chiziq o'tkazamiz. M nuqtadan o'tgazilgan urunmalar sferaga S nuqtada urinuvchi π tekislikni K va L nuqtalarda kesadi.



(10- rasm).

K va L nuqtalarni S nuqta bilan tutashtiramiz ,u holda $KM = KS$ tenglik sferaga bitta nuqtaga o'tkazilgan sifatida teng bo'ladi. Xuddi shuningdek $LM = LS$ tenglik xam urunli shuning uchun umumiy KL tomonga ega bo'lgan KLM va KLS uchburchaklarda mos tomonlari o'zaro teng bo'ladi.

Bundan esa bu uchburchaklarning burchaklari tengligi xususan $\angle KML = \angle KSL$ bo'ladi. Sferadagi egri chiziqlar α tekislikka M' nuqtadan o'tuvchi ikkita egri chiziq sifatida proeksiyalanadi va bu egri chiziqlar orasidagi burchak urunmalar orasidagi burchaka teng. M'K' va M'L' urunmalar MK va ML urunmalarining proeksiyalari bo'ladi. Bu urinmalar SKM va SLM tekisliklarining α tekislik bilan kesishishidan hosil bo'ladi. Ammo SKM va SLM tekisliklar α proeksiyar tekislikka parallel bo'lgan π tekislikni SK va SL to'g'ri chiziq bo'ylab kesadi. Demak M'K' va M'L' to'g'ri chiziqlar mos ravishda SK va SL to'g'ri chiziqlar parallel bo'ladi va $\angle K'M'L' = \angle KSL$ bo'ladi. $\angle KSL = \angle KML$ ekanligidan $\angle K'M'L' = \angle KML$ kelib chiqadi.

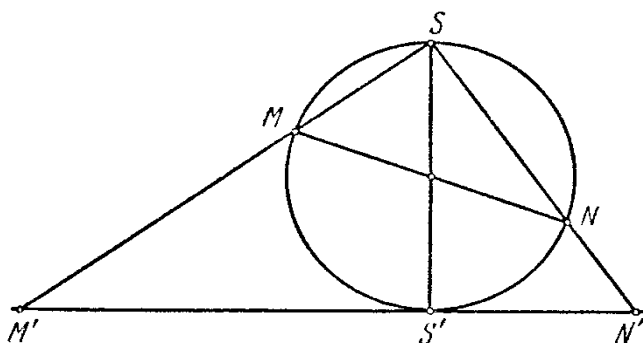
(B) xossa isbotlandi.

V) sferani qutbi orqali o'tuvchi diametr atrofida biron bir burchakka bursak α tekislikda bu tekislikning sferaga urinishi nuqtasi atrofida shu burchakka burish sodir bo'ladi.

Bu xossa bevosita sferadagi biron M nuqtani uning M' proeksiyasiga o'tish SS' diametric orqali o'tuvchi tekislikda bajarilishidan va sferani biror α burchakka burishda SS' orqali o'tuvchi tekislikning proeksiyalar tekisligi bilan kesishgan chizig'i ham shu burchakka buriladi.

2.4§ Stereografik proeksiya va inversiya

Stereografik proeksiyada sferaning diametral qarama qarshi nuqtalari qanday nuqtalarga proeksiyalanishini topamiz. Sferaning diametral qarama qarshi M va N nuqtalari stereografik proeksiyada α tekislikdagi M' va N' nuqtalarga proeksiyalansin. (11- rasm)



11-rasm

Agar bir sfera radiusini R orqali belgilasak u holda

$$S'M' * S'N' = 4R^2 \quad (6)$$

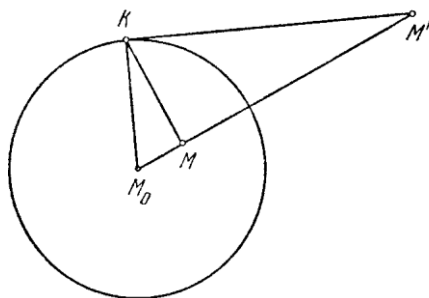
tenglik bajaralishini ko'rsatamiz.

Xaqiqatdan ham aylananing MN diametriga tiralgan MSN burchak to'g'ri burchak bo'lgani uchun M' S N' uchburchakda S burchak ham to'g'ri. SS' kesma to'g'ri burchakli M' S' N' uch burchakning balandligi bo'lgani uchun $S'M' * S'N' = (SS')^2$ tenglik o'rinli bu tenglikda SS'ni 2R orqali belgilasak (6) tenglik xosil bo'ladi.

M' nuqta α tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa (S'dan farqli) M'nuqtaga biror N' nuqtani quydagiga mos quyamiz: M' nuqtani S' bilan tutashtiramiz, M'S to'g'ri chiziqni sfera bilan kesishgan M nuqtasini topamiz, M nuqtaga diametirni qarama qarshi N nuqtani topamiz va N nuqtani α tekislikka

proeksiyasi N' ni topamiz. Bu bilan biz tekislikning S' farqli ixtiyoriy M' nuqtasini bu tekislikning biror N' nuqtasiga almashtirishga ega bo'lamiz.

Yuqoridagi almashtirish tekislikdagi inversiya almashtirishi bilan uzviy bog'likligini ko'rsatamiz: Aylanaga nisbatan inversiyaning qanday bajarilishini ko'rib chiqamiz tekislikda markazi M_0 nuqtada bo'lgan va radiusi R bo'lgan aylana berilgan bo'lsin. (12- rasm chiziladi).



12-rasm

Bu aylanaga nisbatan inversiya deb tekislikning shunday almashtirishiga aytiladiki bunda tekislikning M_0 dan farqli ixtiyoriy M nuqtasi M_0M to'g'ri chizida M_0 ning M nuqtada yotgan tomonidagi shunday nuqtaga o'tadiki bunda

$$M_0M * M_0M' = R^2 \quad (7)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Inversiyada aylana ichidagi nuqtalar aylana tashqarisidagi nuqtalarga o'tadi va aksiga tashqaridagi nuqtalar ichki qismiga o'tadi. Aylanadagi nuqtalar o'z o'ziga o'tadi.

Biz yuqoridagi ko'rib α tekislikning S' nuqtadan farqli M' nuqtasini N' nuqtaga o'tkazuvchi almashtirish markazi S' nuqtada bo'gan va radiusi $2R$ aylanaga nisbatan inversiyadan M' S' to'g'ri chiziqdagi N' nuqtaning S' nuqtadan M' nuqtaga qarama qarshi tomonda (6) tenglik bilan aniqlanuvchi masofadan yotishi bilan farq qiladi. Bu almashtirishni ko'rsatilgan inversiya va S' nuqtaga nisbatan almashtirishnin ketma ket bajarish bilan xosil bo'ladi. Demak tekislikda markazi M_0 nuqtada va radiusi R bo'lgan aylanaga nisbatan ixtiyoriy inversiyani ketma ket bajarilgan to'rtta almashtirish bilan bajarsa

bo'ladi: radiusi $\frac{R}{2}$ bo'lgan va tekislika M_0 nuqtada urinuvchi sferaga nisbatan stereografik proeksiyaga teskari almashtirish bu almashtirishda α tekislikning M nuqtasi sferadagi biror bir nuqtaga o'tadi, bu sferaning deamtral qarama qarshi nuqtaga o'tg'azadi, keyingisi sferadagi xosil bo'lgan nuqtani α tekislika stereografik proeksiyalash va olingan nuqtani M_0 dan akslantirish.

(A) xossaga ko'ra sferadagi aylanalar α tekislikka aylanani ko'rinishida va to'g'ri chiziq ko'rinishida tasvirlanadi va aksincha α tekislikdagi ixtiyoriy aylana va to'g'ri chiziqni sferadagi biror aylananing proeksiyasi deb qarash mumkin. Sferaning deamtral qarama qarshi nuqtalarga o'tishda esa sferadagi aylanalarga o'tadi va tekislikdagi nuqtaga nisbatan akslantirishda aylana va to'g'ri chiziqlar aylana va to'g'ri chiziqlarga o'tadi. Yuqoridagilardan inversiyaning quydagi xossasi kelib chiqadi.

A') aylana va to'g'ri chiziqlar inversiyada yani aylana va to'g'ri chiziqlarga o'tadi.

Agar aylana va to'g'ri chiziqlar inversion almashtirishda faqat to'g'ri chiziqlarga o'tishi uchun ularning M_0 nuqtadan o'tishi zarur va yetarlidir.

Stereografik proeksiyaning (B) xossasiga ko'ra sferadagi egri chiziqlar orasidagi burchak bu egri chiziqlarning α tekislikdagi proeksiyalari orasidagi burchaka teng bo'ladi.

Bundan inversiyaning quydagi muhim xodisasi kelib chiqadi.

B') inversiyada egri chiziqlar orasidagi burchak ularning proeksiyalar orasiga teng bo'ladi.

Tekislikda aylanaga nisbatan inversiyaning aniqlanishiga o'xshash tarzda fazodagi sferaga nisbatan inversiyani aniqlash mumkin.

Markazi M_0 nuqtada va radiusi R bo'lgan sfera berilgan bo'lsin. Fazoning M_0 dan farqli M nuqtasi M_0M to'g'ri chiziqdagi shunday M' nuqtaga tasvirlanadiki bunda (7) tenglik bajariladi.

Fazodagi sferaga nisbatan inversiyada ham (A') va (B') xossalar o'rinli bo'ladi.

A'') sfera va tekisliklar inversiya va tekisliklarga o'tadi.

Sferaga nisbatan inversiyada aylana va to'g'ri chiziqlar to'g'ri chiziqlarga o'tadi, sfera va tekisliklar bu inversiyada agar M_0 nuqtada o'tkisha va faqat shu xoldagina tekislik bo'lib tasvirlanadi.

Stereografik proeksiya va sferaga nisbatan invetsiya orasida bog'liqlik bor. Bu bog'liqlik quyidagidan iborat: agar biz markazi S' va radiusi SS' bo'lgan sferaga nisbatan inversiyani bajarsak u holda, SS' diametrli sfera bu sferaga S nuqtada urinuvchi α tekislikka o'tadi va bunda xosil bo'ladigan sferaning α tekislikka akislanishi sferaning α tekislikka stereografik proeksiyasi bilan ustma ust tushadi.

Haqiqatdan ham oldin ko'rsatganimizdek sferaning ixtiyoriy α tekislikka proeksiyalovchi M nuqtasi va unga mos keluvchi M' nuqta uchun

$$SM * SM' = (SS')^2$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglik esa M' nuqta M nuqtadan S markazi va SS' radiusli sferaga nisbatan stereografik proeksiya yordamida xosil qilinishini bildiradi.

Masalalar

1-masala. O markazli inversiyada markazidan o'tuvchi tekislik o'z-o'ziga o'tishini isbotlang.

Isbot. R^2 – qaralayotgan inversiyaning darajasi bo'lsin. Boshi O nuqtada bo'lgan nurni qaraymiz va unda koordinatalar kiritamiz. U holda x koordinatali nuqta $\frac{R^2}{x}$ koordinatali nuqtaga o'tadi. Shuning uchun boshi O nuqtada bo'lgan nur inversiyada o'z – o'ziga o'tadi.

2-masala. O markazli sferaga nisbatan inversiyada markazdan o'tmaydigan tekislik, O nuqtadan o'tadigan sferaga o'tadi.

Isbot. A – O nuqtadan berilgan tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosi bo'lsin. X nuqta esa bu tekislikning boshqa nuqtasi bo'lsin. Isbotlash uchun $\angle OX^*A^* = 90^0$ ekanini isbotlash yetarli. Ravshanki

$$OA^* : OX^* = \frac{R^2}{OA} : \frac{R^2}{OX} = OX : OA \text{ ya'ni } \triangle OX^*A^* \triangle OAX.$$

Shuning uchun $\angle OX^*A^* = \angle OAX = 90^0$. OA^* diametrli sferaning O dan farqli ixtiyoriy u nuqtasi tekislikning nuqtasining obrazi bo'ladi. Tekislikning bu nuqtasi OU nurning tekislik bilan kesishgan nuqtasi bo'ladi.

3 – masala. O markazli sferaga nisbatan inversiyada O nuqtadan o'tmaydigan sfera yana sferaga o'tishini isbotlang.

Isbot. A va B nuqtalar O nuqtadan va S markazdan o'tadigan to'g'ri chiziq berilgan S sferani kesadigan nuqtalar, x esa S ning ixtiyoriy nuqtasi. $A^*X^*B^* = 90^0$ ekanini isbotlash yetarli. $OA * OA^* = OX * OX^*$ va $OB * OB^* = OX * OX^*$ tengliklardan $\triangle OAX \triangle OX^*A^*$ va $\triangle OBX \triangle OX^*B^*$ ekanligi kelib chiqadi. Bulardan esa orientirlangan burchaklar orasida quyidagi munosabat o'rinli:

$$\angle A^*X^*, OA^* = \angle OX, XA \text{ va } \angle OB^*, X^*B^* = \angle XB, OX.$$

Shuning uchun

$$\angle A^*X^*, X^*B^* = \angle A^*X^*, OA^* + \angle OB^* X^*B^* = \angle OX, XA + \angle XB, OX = \angle XB, XA = 90^0.$$

4-masala. O markazli inversiyada S sfera S^* sferaga o'tsin. O nuqta S ni S^* ga o'tkazuvchi gomotetiyaning markazi bo'lishini isbotlang.

Isbot. A_1 nuqta S sferaning nuqtasi bo'lsin, A_2 nuqta esa O A_1 to'g'ri chiziqning S sfera bilan ikkinchi kesishish nuqtasi bo'lsin. Agar O A_1 to'g'ri chiziq S ga urinma bo'lsa u holda $A_2 = A_1$ bo'ladi. $d = O A_1 * O A_2$ kattalik S' sferani kesuvchi barcha to'g'ri chiziqlar uchun bir xil ekanligini ko'rsatish mumkin. Agar R^2 inversiyaning darajasi bo'lsa u holda, $OA_1^* = \frac{R^2}{OA_1} = \frac{R^2}{d} = OA_2$.

Shunday qilib agar O nuqta S' sfera ichida joylashsa u holda, A_1^* nuqta A_2 nuqtaning sferadan tashqarida yotsa u holda, A_1^* nuqta O markazli va $\frac{R^2}{d}$ koeffsientli gomotetiyadagi obrazi bo'ladi.

5-masala. Tetraedrning ikkita yog'iga tashqi chizilgan aylanalar orasidagi burchak qolgan ikkita yog'iga tashqi chizilgan aylanalar orasidagi burchakka tengligini isbotlang.

Isbot. ABCD tetraedr berilgan bo'lsin. Markazi tetraedrning D uchida bo'lgan inversiyani qaraymiz. DAB, DAC va DBC yoqlarga tashqi chizilgan aylanalar bu inversiyada $A^* B^*$, $A^* C^*$ va $B^* C^*$ to'g'ri chiziqlarga o'tadi, ABC yoqqa tashqi chizilgan aylana bu inversiyada $A^* B^* C^*$ uch burchakka tashqi chizilgan S' aylanaga o'tadi. Inversiyada egri chiziqlar orasidagi burchaklar saqlangani uchun (to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak ham) $A^* B^*$ va S' aylana orasidagi burchak $A^* C^*$ va $B^* C^*$ to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakka teng.

Bu munosabat aylanaga A^* nuqtada o'tkazilgan urinma va $A^* B^*$ vatar orasidagi burchak aylanaga ichki chizilgan $A^* C^* B^*$ burchakka tengligidan kelib chiqadi.

6 – masala. To'rtta S_1, S_2, S_3, S_4 sferalar berilgan . S_1 va S_2 sferalar A_1 nuqtada S_2 va S_3 sferalar A_2 nuqtada S_3 va S_4 sferalar esa A_3 nuqtada, S_4 va S_1 sferalar esa A_4 da urinadi. A_1, A_2, A_3 va A_4 nuqtalar bitta aylanada (yoki bitta to'g'ri chiziqda) yotishini isbotlang.

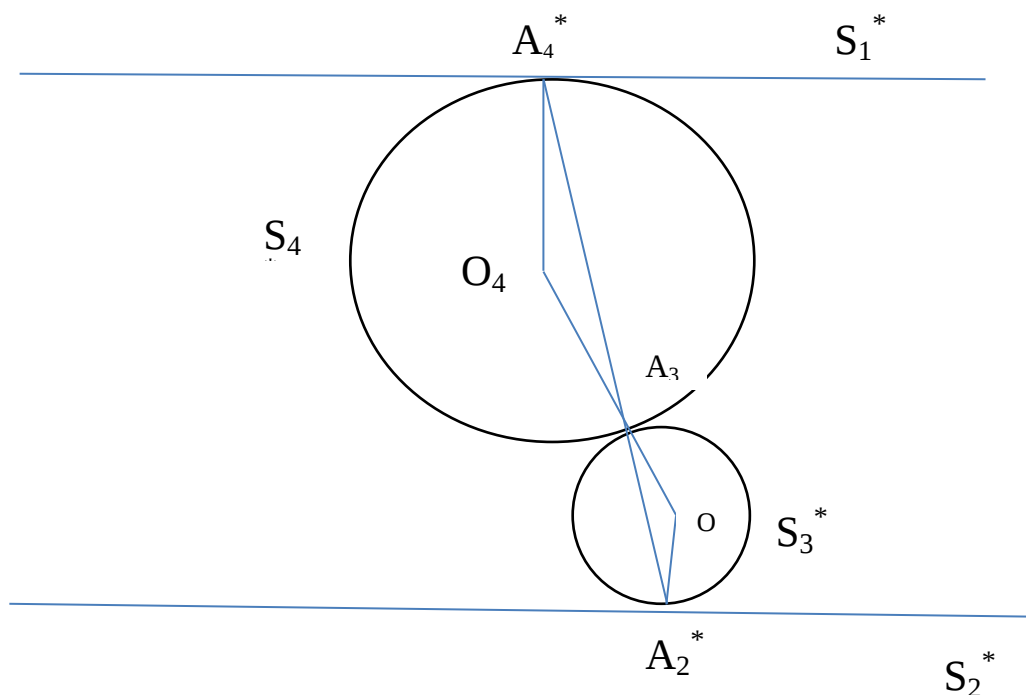
Isbot. A_1 markazli inversiyani qarayamiz. Bu inversiyada S_1 va S_2 sferalar o'zaro parallel S_1^* va S_2^* tekisliklarga o'tadi. $S_2^* S_3^*$ va S_4^* nuqtalar bitta to'g'ri

chiziqda yotishini ko'rsatamiz. Bu yerda $A_2^* \text{---} S_2^*$ tekislikni va S_3^* sferani urinish nuqtasi,

$A_3^* \text{---} S_3^*$ va S_4^* sferani urinish nuqtasi, $A_4^* \text{---} S_1^*$ tekislikning va S_4^* sferani urinish nuqtasi. $A_2^* O_3$ va $A_4^* O_4$ parallil kesmalarni o'z ichida saqlovchi tekislik bilan kesimni qaraymiz, bu yerda O_3 va O_4 lar S_3^* va S_4^* sferalarning markazlari. U holda, A_3^* nuqta $O_3 O_4$ kesmada yotadi. Shunning uchun u kesim tekisligiga tegishli.

O_3 va O_4 uchlardagi burchaklarni qaraymiz. Bu burchaklar $A_2^* O_3 A_3^*$ va $A_3^* O_4 A_4^*$ teng yonli uchburchaklarning uchlardagi burchaklar bo'ladi.

$A_3^* O_3 \parallel A_4^* O_4$ bo'lgani uchun yuqoridagi burchaklar teng bo'ladi. Bundan $\angle O_4 A_3^* A_4^* = \angle O_3 A_3^* A_2^*$ tenglik kelib chiqadi. Demak $A_2^* A_3^*$ va A_4^* nuqtalar bitta nuqtada yotadi.



XULOSA.

Geometriyani o'qitishdan maqsad- tekislikdagi va fazodagi shakllarning xossalarni sistemali ravishda o'rgatish va bu xossalarni hisoblash yo'li bilan yechiladigan hamda konstruktiv xarakterdagi masalalarni yechishda qo'llanish yo'li bilan o'quvchining fazoviy tasavvurlarini, mantiqiy tafakkurlarini rivojlantirish, hosil qilingan bilimlarni yer ustidagi o'lchashda, har xil qurilmalarni sirtlarini va hajmlarini aniqlashda va shuning kabi amaliy ishlarni bajarishda foydalanishni o'rgatishdir.

Sistemali ravishda masalalar yechib borish nazariyani ongli va puxta o'zlashtirishga yordam beradi, uning amaliy qiymatini ko'rsatadi, shu bilan birga masala yechish o'quvchini mantiqiy tafakkurini, ijodiy tashabbuskorliklarini, faxm-farosatlarini, tarbiyalaydi hamda ularga bir qancha zarur amaliy mahorat va malakalar beradi.

Bunda geometrik masalalarni yechishda uni qulay usullar orqali ishlash masalani yechimini topishni osonlashtiradi. Masalalarni o'rganish ilmiy dunyoqarashni shakllantirishga sezilarli hissa qo'shadi. Geometrik qonuniyatlarni bilish yordamida ko'plab hayotni yengilashtiruvchi masalalarni yechimini topa olamiz. Geometrik isbotlashlarda, geometrik o'rinlarni topishda, ayniqsa elementar geometriyaning ko'pgina formulalarini isbotlashda induksiya metodi qo'l keladi. Geometriyada fazoda sferaga nisbatan inversiya tadbiqlari geometrik masalalarni yechishni osonlashtiradi. Shu sababdan mazkur bitiruv malakaviy ishida geometriyada fazoda sferaga nisbatan inversiya tadbiqlarini bir nechta masalalarda ko'rib chiqdik.

Ushbu bitiruv malakaviy ishini akademik litsey va kasb-hunar kollejlari uchun tadbiq qilish mumkin deb hisoblayman.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

RO'YXATI

1. I.A.Karimov O'zbekiston: milliy istiqlol, iqtisod, siyosat va mafkura.-T.: O'zbekiston, 1996.-366 b.
2. I.A. Karimov Bizdan ozod va obod vatan qolsin.-T.: O'zbekiston, 1996.-380 b.
3. I.A.Karimov O'zbekiston XXI asr bo'sag'asida: xavfsizlikka tahdid, barqarorlik shartlari va taraqqiyot kafolatlari.-T.: O'zbekiston, 1997.-326 b.
4. I.A. Karimov Yuksak ma'naviyat yengilmas kuch.-T.: Ma'naviyat, 2008.-176 b.
5. Barkamol avlod-O'zbekiston taraqqiyotining poydevori.O'zbekiston
6. Respublikasi Prezidenti Islom Karimovning O'zbekiston Respublikasi Oliy majlis IX sessiyasida so'zlagan nutqi.-T.: Sharq, 1998.-64b
7. O'zbekiston Respublikasining "Kadrlar tayyorlash milliy dasturi" /Barkamol avlod-O'zbekiston taraqqiyotining poydevori.-T.: Sharq, 1998.32-64 b B.
8. Готман Э.Г. , Скопец З.А. Задача геометрии численных задач аналитическим методом. □ М.: Просвещение, 1979.
9. Кокетер С.М. , Грейтцер С.Л. Новые встречи с геометрией. □ М.: Наука,1978.
10. Атанасян Л. С. и др. Геометрия 10–11. — М.: Просвещение, 1992.
11. Нумович Н. В. Геометрические места в пространстве и задачи на построение. — М.: Учпедгиз, 1962.
12. Понарин Я. П. Элементарная геометрия. Т. 1. — М.: МЦНМО, 2004
13. Понарин Я. П. Преобразования пространства. — Киров: Вятский госпедуниверситет, 2000.
14. Прасолов В. В., Шарыгин И. Ф. Задачи по стереометрии. — М.: Наука, 1989.
15. Розенфельд Б. А., Сергеева Н. Д. Стереографическая проекция. — М.: Наука, 1973
16. Otajonov. R. K. Geometrik yasash metodlari. Toshkent – 1978

17. Заславский А. Геометрические преобразование, МЦНМО, 2002
18. <http://www.allmath.ru>
19. <http://www.pedagog.uz>
20. www.ziynet.uz .

ILOVA

ENGLISH	UZBEK
Sphere	sfera
Space	fazo
Straight line	to'gri chiziq
Square	kvadrat
Hemisphere	yarim sfera
Surface	tekislik
Surface area	tekislik yuzasi
Tetragon	to'rtburchak
Tetrahedron	tetraedr
Unambiguous	birqiyamatli
Triangle	uchburchak
Trapezoid	trapetsiya
Triangular	uchburchakli
Vector	vector
Acute angle	o'tkir burchak
Area	yuza
Central angle	markaziy burchak
Central symmetry	markaziy simmetriya
Perpendicular	perpedikulyar
Oblique	og'ma
Obtuse angle	o'tmas burchak
Obtuse triangle	o'tmas burchakli uchburchak
Octagon	sakkiburchak
Opposite	qarama qarshi
Parabola	parabola
Consecutive	ketma ket
Isosceles	teng yonli

Arc length	yoy uzunligi
Arbitrary	ixtiyoriy
Arc	yoy
Chord	Vatar
chord method	Vatarlar usuli
Circle	Aylana, doira
circle formula	Aylana tenglamasi
Circumcenter	Aylana markazi
circumscribed figure	Tashqi chizilgan figura
Closed	Yopiq, chegaralangan
complete induction	To'liq induksiya
complete solution	To'liq yechim
Congruence	Kongruentlik, o'xshashlik
congruent angles	Mos burchaklar
congruent figures	Mos figuralar
congruent polygons	Mos ko'pburchaklar
congruent segments	Mos kesmalar
conic, conic section	Konik kesim
diagonal	Diagonal
diagonal element	Diagonal elementi
diagonal matrix	Diagonal matrisa
diameter	Diametr
diametrically opposite	Diametral qarama-qarshi
difference	Ayirma
incenter	Ichki chizilgan aylana markazi

