МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН
ТАШКЕНТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ им. НИЗАМИ
ФИЗИКО – МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

“Разрешить к защите”
Декан факультета, к.ф.-м.н.
_____________ Г.Ф.Джаббаров
“____” __________________ 2014 г.

Студент направления“5140100-математика”

Умурзаков Фаррух Ихтиярович
ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

на тему: **Методика изучения объемов многогранников в курсе стереометрии**”

Выполнил(а):_________Ф.И. Умурзаков
Научный руководитель:
Старший преподаватель кафедры
«“Математика и методика ее
преподавания” »
к.п.н. _________________М. Баракаев
Рецензенты:
Старший преподаватель кафедры
«“Математика и методика ее
преподавания” »
к.ф.-м.н.______________Д.Э.Давлетов

Заместитель директора «Колледжа
предпринимательства» по учебной части
________________________М. Хасанова

“Допустить к защите”
Заведующий кафедрой “Математика
и методика ее преподавания”
д.ф.-м.н. _____________ Р.Б.Бешимов
“____” __________________ 2014 г.

Ташкент 2014 год

Содержание

Введение

«...все мы осознаем, что достижение поставленных сегодня перед нами великих целей, благородных устремлений, обновления общества, эффект и судьба наших реформ, осуществляемых во имя прогресса и будущего, результаты наших намерений – все это неразрывно связано, прежде всего, с проблемой подготовки высококвалифицированных, сознательных кадров, специалистов, отвечающих требованиям времени» («Гармонично развитое поколение – основа прогресса Узбекистана», г.Ташкент, 1997 г.).

«Необходимо заблаговременно, уже сегодня приступать к определению места работы каждого будущего выпускника, организовать для них прохождение практики на будущем рабочем месте, другими словами, обеспечить их закрепление за конкретным рабочим местом» (Из доклада Президента страны на заседании Кабинета Министров Республики Узбекистан, посвященном итогам социально-экономического развития за 2010 год и задачам на 2011 год).

Основной задачей модернизации образования является повышение его доступности, качества и эффективности. Это предполагает точный и правильный подход ко всему образовательному процессу, приведение его в соответствие с требованиями времени. В настоящее время традиционный взгляд на содержание обучения математике, ее роль и место в общем образовании пересматриваются и уточняются. Наряду с подготовкой учащихся, которые в дальнейшем в своей профессиональной деятельности будут пользоваться математикой, важнейшей задачей обучения становится обеспечение некоторого гарантированного уровня математической подготовки всех школьников независимо от специальности, которую они изберут в дальнейшем.

Для продуктивной деятельности в современном информационном мире требуется достаточно прочная базовая математическая подготовка, поэтому изучение темы «Объемы фигур» очень актуально, так как они необходимы для изучения смежных дисциплин, для продолжения образования.

Тема «Объемы » – одна из центральных тем в курсе стереометрии средней школы. Проблема организации уроков по изучению объемов многогранников одна из самых актуальных, так как она занимает значительную часть в курсе стереометрии. Если педагог не знает методики, особенностей проведения уроков по тому или иному учебнику, то в классе не может идти речи об усвоении программного материала по математике.

Вопрос о необходимости любого школьного предмета, о необходимости того или иного его раздела сводится к вопросу о его практической надобности и значении в развитии личности.

Понимание того, что практически нужно в геометрии и что в данном предмете может служить развитию личности, должно определять и содержание предмета, и постановку его преподавания.

Ни один предмет ученики так ни готовы воспринимать, как наглядную геометрию, в то же время, ни один предмет не начинают изучать в школе с таким опозданием, как геометрию. Процесс геометрического образования должен быть непрерывным (не допускать периодов бездействия), равномерным (не допускать перегрузок на каких-либо этапах), разнообразным.

Во всяком подлинно геометрическом предложении, будь то аксиома, теорема или определение, неразрывно присутствуют эти два элемента: наглядная картина и строгая формулировка, строгий логический вывод. Там, где нет ни одной из двух сторон, нет и подлинной геометрии.

Именно при изучении многогранников и их объемов решение данной задачи выступает наиболее ярко, и их рассмотрению должно быть уделено больше внимания, потому что многогранники дают особенно богатый материал для развития пространственных представлений, для развития того соединения живого пространственного воображения со строгой логикой, которая составляет сущность геометрии.

Объектом выпускной квалификационной работы является процесс обучения стереометрии в академических лицеях.

Предмет исследования – изучение объемов многогранников в курсе стереометрии.

Основная *цель* исследования – разработать методические рекомендации по изучению темы «Объемы многогранников» в курсе стереометрии по учебникам.

Гипотеза исследования: изучение объемов многогранников в курсе стереометрии в *академических лицейях* будет более эффективным, если:

- формировать понятие объема на наглядно-интуитивном уровне с привлечением жизненного опыта учащихся;
- целенаправленно работать по формированию понятия объема и навыков решения основных типов задач в академических лицеях;
- систематически обращаться к задачам на объемы многогранников в академических лицеях;
- проводить факультативные курсы.

Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие *задачи:*

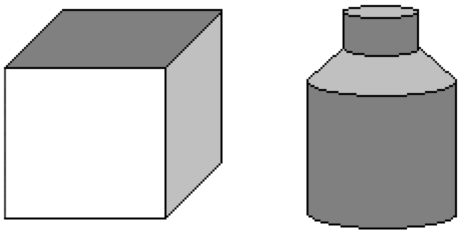
- проанализировать программу по математике для академических лицеев и ряд учебников по геометрии в соответствии с программой;
- проанализировать учебно-методическую и научно-педагогическую и математическую литературу по теме исследования;
- выделить различные подходы к определению понятия «Объемы многогранников»
- рассмотреть методические аспекты изучения темы «Объемы многогранников»
- составить план факультативных занятий по теме «Объемы многогранников»;
- провести опытное преподавание.

Глава 1. Теоретические основы изучения темы «Объемы многогранников» в курсе геометрии

§ 1 Различные подходы к определению объема многогранников

Задача определения объемов тел относится к глубокой древности. Она возникла в связи с практической деятельностью людей. Говоря простым языком, объем – это часть пространства, занимаемая телом. Точнее: объем – некоторая физическая, а именно геометрическая величина, характеризующая то свойство тел, что они трехмерны или занимают часть пространства. С понятием величины мы много раз встречались в физике и в геометрии.

Прежде всего, величины можно измерять, получая при этом именованные числа. Будем считать, что величина, или именованное число, которое ее выражает, – это одно и то же.



Тогда: 1) величина не может принимать отрицательных значений; 2) если тело (или носитель величины) разбито на части, то сумма величин частей равна величине целого. Величины одного рода можно складывать; 3) для двух величин одного рода существует отношение – отвлеченное число, которое не зависит от способа измерения величин.

Рассмотрим конкретный пример.

Представим себе два сосуда: один в форме куба, а второй произвольной формы (рис. 1). Пусть оба сосуда доверху наполняются жидкостью. Допустим, выяснилось, что для наполнения первого сосуда понадобилось m кг жидкости, а для наполнения второго сосуда понадобилось n кг жидкости. Естественно считать, что второй сосуд в $\frac{m}{n}$ раз больше первого. Число, указывающее, во сколько раз второй сосуд больше первого, мы будем называть объемом второго сосуда. Первый сосуд является единицей измерения. Из этого определения понятия объема получаются следующие его свойства:

- Во-первых, так как для заполнения каждого сосуда требуется определенное количество жидкости, то *каждый сосуд имеет определенный объем.*

- Во-вторых, для заполнения равных сосудов потребуется одно и то же количество жидкости. Поэтому *равные сосуды имеют равные объемы.*

- В-третьих, если данный сосуд разделить на две части, то количество жидкости, необходимое для заполнения всего сосуда, состоит из количества жидкости, необходимой для заполнения его частей. Поэтому *объем всего сосуда равен сумме объемов его частей*.

По данному определению для того, чтобы узнать объем сосуда, надо заполнить его жидкостью. В жизни, однако, требуется решать обратную задачу. Требуется узнать количество жидкости, необходимой для заполнения сосуда, не производя самого заполнения. Если бы мы знали объем сосуда, то количество жидкости мы бы получили, умножая объем сосуда на количество жидкости, необходимой для заполнения единицы объема.

Тело мы будем называть *простым,* если его можно разбить на конечное число тетраэдров, то есть треугольных пирамид. В частности, такие тела как призма, пирамида, вообще выпуклый многогранник, являются простыми.

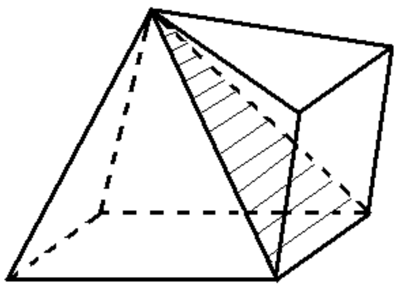


Рис. 2

Рассмотрим другое определение объема многогранников.

Число, характеризующее величину внутренней области многогранника, называется объемом многогранника.

Смежными многогранниками называются такие многогранники, которые имеют одну или несколько общих граней, причем остальные точки каждого из многогранников расположены вне другого (рис. 2).

Условимся рассматривать объем многогранника как величину, обладающую следующими свойствами:

1. Два равных многогранника имеют один и тот же объем, независимо от их расположения в пространстве.
2. Объем многогранника, представляющего собой сумму двух смежных многогранников, равен сумме объемов этих многогранников.
3. Если из двух многогранников первый содержится целиком внутри второго, то объем первого многогранника не превосходит объема второго.

Многогранники, имеющие равные объемы, называются *равновеликими*. За единицу объема принимается объем куба, ребро которого равно единице длины (мм, см, дм, м и т.п.).

Естественно, такие определения понятия объема многогранников даются на строгом математическом языке. Рассмотрим подходы к определению понятия объемов многогранников в академических лицеях.

Существуют два подхода к определению объема:

1 подход. Понятие объема вводится аксиоматически. Объем – это положительная величина, численное значение которой обладает следующими свойствами:

- равные тела имеют равные объемы;

- если тело разбито на части, являющиеся простыми телами, то объем этого тела равен сумме объемов его частей;

- объем куба, ребро которого равно единице длины, равен единице.

Причем, как говорилось выше, перед понятием объема проговаривается аналогия с понятием площади.

2 подход. Понятие вводится конструктивно. Будем считать, что каждое из рассматриваемых нами тел имеет объем, который можно измерить с помощью выбранной единицы измерения объемов. За единицу измерения объемов примем куб, ребро которого равно единице измерения отрезков. Куб с ребром 1 см. называют кубическим сантиметром и обозначают $см^3$.

Дальнейшее изучение происходит по-разному.

В общеобразовательных школах понятие объема фигуры употребляется по существу как первичное, неопределяемое. У учащихся формируется убежденность в том, что окружающие их физические тела имеют определенный объем, это убеждение по интуиции переносится и на геометрические тела. По отношению к кубу и прямоугольному параллелепипеду предлагаются формулы, которые иллюстрируются (для случая целых измерений) с помощью разбиения данной фигуры на единичные кубики. Такое разбиение можно условно считать первым в школьном курсе подходом к определению понятия объема; число единичных кубов, составляющих прямоугольный параллелепипед (в частности куб), принимается за числовое значение объема соответствующей фигуры.

§ 2 Цели изучения темы «Объемы многогранников» в курсе стереометрии

Широкие возможности для развития пространственных представлений открываются при использовании различных наглядных пособий и ИКТ. Можно организовать работу по изготовлению наглядных пособий силами учащихся. Эта работа потребует от них и определенных знаний, и достаточно развитого пространственного воображения. Работа по изготовлению самодельных учебных наглядных пособий проводится под руководством учителя в классе, во внеурочное время, в кружках. Помимо положительного влияния на усвоение курса математики, такая работа содействует повышению эффективности урока. Иное дело, когда учитель злоупотребляет демонстрацией наглядных пособий. Этим он избавляет учеников от необходимости напрягать, упражнять воображение и в результате мешает его развитию.

Использование наглядных моделей многогранников способствует решению разных дидактических задач. Они будут полезны на уроках геометрии. Наборы многогранников (каркасные модели, деревянные, из бумаги) демонстративны, дают необходимые представления о форме. Они могут служить объектами для измерения и определения площадей поверхностей и объемов. Тела из стекла прозрачны и позволяют видеть элементы фигур, сечения тела, которые показываются либо стеклянными вкладышами, либо с помощью натянутых нитей. Эти модели могут демонстрироваться целому классу. С ними полезно поработать и отдельному ученику, пропустившему урок или занятому решением задач.

Полезно иметь в кабинете и разбирающиеся наборы геометрических тел, сделанные из картона или плотной бумаги. Учащиеся могут самостоятельно изготовить развертки многогранников. Достаточная прочность фигуры в сборке может быть достигнута даже без клея. При необходимости модель можно разобрать.

Также при изучении многогранников и их объемов можно использовать различные рабочие и справочные таблицы. Рабочие таблицы – это такие таблицы, по материалу которых можно организовать активную мыслительную деятельность учащихся как по усвоению нового теоретического материала, так и по его закреплению. С помощью рабочих таблиц возможно осуществить выполнение большого числа упражнений, способствующих выработке и закреплению у учащихся определенных навыков. По ним можно проводить опрос учащихся или создать проблемную ситуацию перед классом. В отличие от рабочих таблиц, справочные таблицы, то есть таблицы для запоминания, предназначены для длительного воздействия на зрительный аппарат учащихся. Такие таблицы могут быть вывешены в кабинете математики на длительное время. Таким образом, основным свойством справочных таблиц является (помимо наглядности, которая в ряде случаев играет важную роль) их дидактическая направленность. Таблицы эти предназначены для принудительного воздействия на память учащегося с целью запоминания основных фактов, формул, графиков и др. Примером таких таблиц может служить таблица «Вычисление площадей и объемов многогранников», в которой изображены различные виды многогранников и указаны формулы вычисления объема и площади поверхности для каждого вида.

Также нельзя забывать и про такие средства обучения как компьютерные средства, которые могут быть эффективно применены при изучении многогранников и их объемов.

Нередко наглядные средства рассматривают лишь как временную опору при начальном усвоении знаний. Сторонники такой оценки роли наглядных средств полагают, что модели в этом случае приучают учащихся к очевидности и поэтому не способствуют развитию логического мышления. Выдвигается даже дидактическое правило: чем старше учащиеся, тем меньше моделей должно применяться в преподавании математики. Принять такую точку зрения и вытекающее из нее дидактическое правило нельзя, так как они несостоятельны. Правильно понимаемое применение наглядных средств не только уместно, но и необходимо на всех ступенях обучения.

Таким образом, готовясь к конкретному уроку, учитель выбирает те средства, с которыми легче организовать необходимую работу учащихся, то есть наиболее простые в данный момент для их восприятия.

Чтобы некоторая материальная модель позволяла организовать усвоение того или иного понятия, она должна не только правильно его отражать, но и быть простой для восприятия учащимися.

Таким образом, чтобы достигнуть основной цели изучения многогранников – это развитие пространственных представлений и пространственного воображения учащихся – необходимо использовать на уроках геометрии наглядность и ИКТ.

Данная цель реализуется через правильно подобранный задачный материал и разумное сочетание логики и интуиции учащихся. Заданный материал по теме «Объем многогранников» дает возможность применения различных методов. Одна и та же задача может быть решена по-разному. Целенаправленная работа учителя по решению «опорных» задач (задач, часто встречающихся и являющихся элементами других задач по теме «Объем многогранников»), по обучению умению применять различные методы при их решении, по отбору задач для демонстрации эффективности того или иного метода решения дает ощутимые результаты.

Материал учебника, различных пособий представляет учителю богатые возможности для дальнейшего развития логического мышления учащихся. Здесь вводятся много новых понятий, определений, доказываются теоремы, при этом возможно эффективное применение различных методов (координатный, векторный и др.). Решение задач на построение или задач, включающих построение как промежуточный элемент, требует логического обоснования, умелой записи. При работе над определением, теоремой нельзя ограничиваться воспроизведением текста учебника, нужно так организовать работу на уроке, чтобы учащиеся поняли необходимость каждого из свойств, фигурирующих в определении понятия, умели распознать понятие по его определению, умели выделять условие и заключение теоремы. Несомненную пользу принесет переформулировка изучаемых свойств объема и многогранников в терминах «если - то», «необходимо - достаточно», выявление условий применимости каждой из теорем.

Необходимо также помнить, что при изучении объемов многогранников, как и при изучении других разделов курса стереометрии, должно осуществляться разумное сочетание интуиции учащихся и логики. Педагогически нецелесообразно стремиться строго определять те понятия, о которых учащиеся имеют достаточно четкое и правильное представление из собственного жизненного опыта, а формулировки которых являются слишком громоздкими.

Выводы по главе I:

1. Основные цели изучения темы «Объемы многогранников» в курсе стереометрии – развитие пространственных представлений учащихся, освоение способов вычисления практически важных величин и дальнейшее развитие логического мышления учащихся.
2. На современном этапе обучения наиболее целесообразным является конструктивный способ введения понятия «Объем многогранников».
3. При подготовке к каждому уроку необходимо выбирать такие средства наглядности, которые позволяют легче организовать работу с учащимися по развитию пространственных представлений.
4. Для реализации основных целей изучения темы необходима тщательно продуманная система задач с практическим содержанием и задач на развитие логического мышления.

Глава 2. Методика изучения темы «Объемы многогранников»

§ 1 Пропедевтика изучения темы «Объемы многогранников»

Как по ранее действовавшей, так и по новой программе тема «Прямоугольный параллелепипед и его объем» изучается в 5 классе и увязывается с изучением законов арифметических действий. Изложение этого материала содержит максимально полное рассмотрение вопросов, связанных с первоначальными пространственными представлениями, прямоугольным параллелепипедом и понятием объема. Учебник математики должен содержать полное объяснение, позволяющее учащемуся в случае необходимости (например, в случае пропуска двух-трех уроков по болезни) самостоятельно разобраться в материале по учебнику. Поэтому при объяснении материала и при решении задач учитель вынужден сам давать дополнительные разъяснения.

Во-первых, учащиеся должны понимать, что такое прямоугольный параллелепипед. Речь идет вовсе не о том, чтобы они представляли себе прямоугольный параллелепипед как нечто похожее на коробку или брусок. У учащихся должны быть сформированы первоначальные пространственные представления: поверхность и каркас прямоугольного параллелепипеда, четверки параллельных ребер, измерения прямоугольного параллелепипеда, равенство противоположных граней, развертка и т. д.

Каким бы простым телом ни казался параллелепипед, учащимся требуется определенное время на знакомство с ним. Каждый ученик должен иметь на уроке и дома какую-нибудь модель параллелепипеда. При этом важно, чтобы учащиеся не просто рассматривали параллелепипед, но и задействовали при его изучении и другие виды восприятия. Так, они должны не только глазами, но и пальцами провести по его ребрам, «ощутить», что в каждой вершине сходятся три ребра. Взяв параллелепипед в руки так, чтобы в каждой его вершине оказалось по одному пальцу, они увидят и ощутят мышечно, что число задействованных пальцев равно 8, следовательно, у параллелепипеда 8 вершин. Аналогично можно сосчитать и число его граней. Такое использование при восприятии тела различных органов чувств помогает создать более полный его мыслительный образ.

Результатом подобного изучения параллелепипеда должно стать осознание целого ряда особенностей. Все грани прямоугольного параллелепипеда – прямоугольники, и всего их шесть; напротив друг друга расположены равные грани, таких пар равных граней три; в каждой вершине сходится три неравные грани. Аналогичные выводы можно сделать и о ребрах: всего их 12; есть равные ребра – три группы по четыре ребра; в каждой вершине сходится три ребра разной длины. Наконец, вершины: их 8, по четыре вершины в каждой из противолежащих граней. Такое всестороннее и внимательное изучение параллелепипеда, однако, не предполагает, что предлагаемые далее задания выполняются учащимися в умственном плане без опоры на модели и рисунки.

Особенностью рассмотрения параллелепипеда является комбинированный характер большинства рассматриваемых задач, который заключается не только в активной работе пространственного воображения, но и в привлечении изученных ранее понятий в новых ситуациях и сочетаниях: ломаная, составленная из ребер куба, периметр грани, площадь поверхности и др. Это создает определенные сложности для учащихся, поэтому выполнение таких упражнений требует дополнительных комментариев и разъяснений учителя.

Во-вторых, учащиеся должны получить первоначальное представление об объеме тела как о месте, занимаемом этим телом в пространстве. Эта задача нам представляется особенно важной. Учащиеся должны получить внутреннее убеждение о том, что объем – это объективное свойство окружающих предметов.

Начать изучение пункта «Объем параллелепипеда» полезно с напоминания о том, как измеряются длины и площади (выбор единицы измерения и др.)

Вывод правила вычисления объема параллелепипеда аналогичен выводу правила вычисления площади прямоугольника, поэтому сначала полезно повторить вывод последнего. Заметим, что очень важно сопроводить вывод правила нахождения объема параллелепипеда практическим выполнением учащимися описанных в учебнике действий. Полезно дать каждому учащемуся возможность повторить эти действия самостоятельно, проговаривая и поясняя их. Эти действия по заполнению пространства кубиками следует постепенно перевести в умственный план. Необходимость в них со временем отпадет и, сохраняя идею измерения пространства, учащиеся смогут сначала перейти к правилу вычисления объема параллелепипеда, а позднее и к формуле. Этим и определяется значительная доля заданий с кубиками, в которых требуется изобразить тело заданного объема, сложить (мысленно или практически) параллелепипед и определить его измерения, по изображению определить число кубиков, вошедших в коробку, и т. д. Кроме того, эти упражнения прекрасно развивают пространственное воображение: умение представить фигуру по ее описанию или изображению, выполнить с помощью нее заданные действия.

В-третьих, учащиеся должны усвоить формулу вычисления объема прямоугольного параллелепипеда. При этом они должны четко понимать, что, например, формула $V = abc$ дает не определение объема прямоугольного параллелепипеда, а способ его вычисления. Нам представляется совершенно недопустимым ответ учащихся, который чаще всего приходится слышать: «Объем прямоугольного параллелепипеда – это произведение трех его измерений».

Если к этому добавить, что указанный материал должен быть увязан с законами арифметических действий, что необходимо научить пятиклассников решать задачи, связанные с нахождение объема прямоугольного параллелепипеда, что нужно рассмотреть вопрос о единицах измерения объемов и о переходе от одних единиц к другим и что, наконец, необходимо провести заключительную контрольную работу по теме.

Учащиеся должны уметь приблизительно представлять кубические единицы измерения: 1 см^3, 1 дм^3, 1 м^3, знать, что 1 дм^3 = 1 л, представлять объемы некоторых сосудов, например, объем стакана равен 1/4л = 250 мл = 250 см^3, объем ведра равен приблизительно 10 л, объем чайной ложки – 5 см^3 или 5 мл., уметь осуществлять переход от одних единиц измерения в другие.

Перевод одних единиц в другие должен опираться на знание линейных метрических зависимостей. Полезно, если учащиеся составят табличку зависимостей между основными единицами объема, и будут пользоваться ею в дальнейшем при выполнении упражнений.

Очень важный момент в теме «Объемы» – это переход от одних единиц измерения к другим. Затруднение детей в непонимании, а что же такое «куб. ед.» (ед^3)? Отсюда большое количество ошибок при выполнении заданий типа: «Выразите в кубических сантиметрах 2 дм^3 80 см^3». Учащийся судорожно вспоминает, сколько кубических сантиметров в кубическом дециметре. Естественно, он часто ошибается и не имеет алгоритма для проверки своих знаний.

Особое место при изучении объема тел занимает обучение сравнению, в частности сравнению факта, выраженного словесно, с его интерпретацией на чертеже. Чертеж может служить опровержением какого-то общего высказывания. Учась опровергать неверные высказывания, школьники постепенно привыкают к доказательствам. А это необходимый вид деятельности при изучении геометрии.

Итак, разносторонняя работа с рисунком, чертежом не только способствует общему умственному развитию школьников, но развивает пространственное воображение, обеспечивая более полное и продуктивное изучение геометрии, и начинать эту работу необходимо в 5-6 классах при изучении математики.

Задание: 1) Имеются два сосуда вместимостью 3 л и 5 л. Как с помощью этих сосудов налить из водопроводного крана 4 л воды?

2) Какими могут быть размеры комнаты, объем которой равен 60 м^3?

3) Изготовьте каркасную модель куба объемом 1дм^3.

4) Куб с ребром 1 м разрезали на кубики с ребром 1 см и выстроили в один ряд. Какой длины получится ряд?

5) Вычислите объем вашей комнаты, где вы занимаетесь дома.

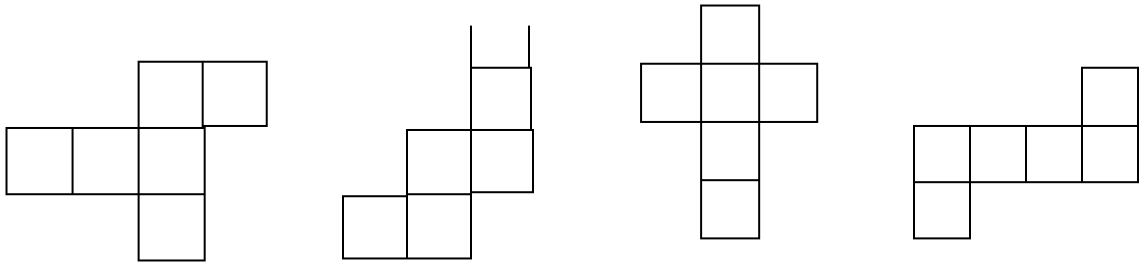
Отметим, что при изучении объемов тел необходимо уделять внимание и разверткам геометрических тел. Начать работу по изучению этого материала необходимо с практической деятельности: изготовления развертки и сворачивания ее в пространственное тело. Важно при этом обращать внимание учащихся на сам процесс сворачивания, на то, какие грани оказались противоположными, а какие – соседними, какие отрезки и точки совместились. Переход от практического решения к мысленному должен осуществляться постепенно, с учетом индивидуального развития учащихся.

Задание: 1) Куб сложен из 8 маленьких кубиков. Сколько прямоугольных параллелепипедов содержится в этом кубе?

2) Деревянный куб покрасили со всех сторон, потом распилили его на 27 одинаковых кубиков. Сколько среди них имеют одну, две, три окрашенные грани? Сколько кубиков не окрашено?

3) Из фигур выберите те тся развертками куба? (рис. 3)

Рис. 3



4) Какой длины получится полоса, если кубический километр разрезать на кубические метры и выложить их в одну линию?

5) В пустой прямоугольный бассейн, размеры которого 100 x 100 метров, налили 1 000 000 литров воды. Можно ли плавать в этом бассейне?

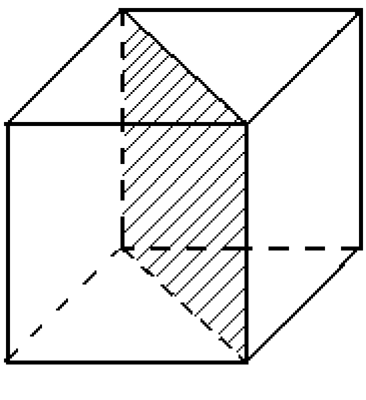
§ 2 Методика изучения темы «Объем. Объемы призмы. Объемы прямоугольного параллелепипеда»

При планировании данной темы следует предварительно разбить ее на логически законченные части. Это поможет учителю правильно организовать повторение, проводить систематически учет и контроль знаний учащихся, своевременно и постепенно готовить средства наглядности, сгруппировать умения и навыки в соответствии с указаниями программы, заблаговременно подобрать соответствующие задачи и упорядочить их, подготовить тематику и содержание самостоятельных и контрольных работ, а также другие дидактические материалы.

Тема «Объемы многогранников» изучается в академических лицеях. На уроки геометрии отводится по два часа в неделю, всего 60 часов.

Подготовительной работой к началу изучения темы «Объемы многогранников» может служить повторение темы «Многоугольники», свойств и формул площадей многоугольников, многогранников, задач на построение сечений из курса.

Учитель может включать в уроки задания типа:



1) Чему равна площадь поверхности прямоугольного параллелепипеда, у которого длины ребер, исходящих из одной вершины, равны a, b, c?

2) Вычислите площадь диагонального сечения куба, ребро которого равно 4 см (рис. 4).

3) Сколько краски потребуется, чтобы окрасить куб с ребром 2,5 см, если на покраску одного квадратного метра требуется 200 г краски?

Рис. 4

4) Вычислите площадь полной поверхности правильной четырехугольной призмы, сторона основания которой равна 3 см, а высота 7 см.

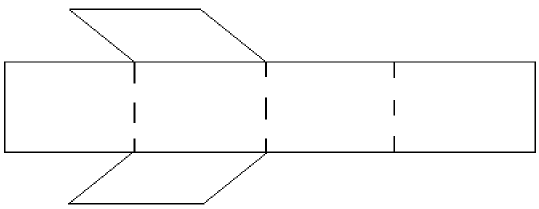


Рис. 5

5) На рис. 5 изображена развертка четырехугольной призмы. Выполните необходимые измерения и вычислите площадь полной поверхности призмы.

6) Вычислите площадь боковой поверхности правильной четырехугольной пирамиды, сторона основания которой равна 12 см, а боковое ребро 20 см (основанием правильной пирамиды является квадрат, а все боковые ребра имеют одинаковую длину).

7) Вычислите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 8,3 см, а боковое ребро – 12 см.

Основная цель уроков – ввести понятие объема тела, рассмотреть свойства объемов, теорему об объеме прямоугольного параллелепипеда и следствие об объеме прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник.

Для введения понятия объема учащимся понадобятся знания из курса планиметрии, которые необходимо повторить, а именно: понятие многоугольника, его площадь, свойства площадей, знание формул для нахождения площадей некоторых многоугольников, понятие многогранника, их виды, свойства.

Необходимо напомнить известные учащимся понятия призмы и прямоугольного параллелепипеда. Подчеркнуть, что каждая из этих поверхностей ограничивает некоторое геометрическое тело и отделяет его от остальной части пространства. Если следовать строго дедуктивному пути изложения школьного курса стереометрии по учебнику академических лицеях, надо определить такие понятия как «геометрическое тело», «ограниченность тела», «простое тело», которые лежат в основе определения объема многогранника. Однако на любом этапе обучения в средней школе следует руководствоваться принципом педагогической целесообразности при введении понятия. В данном случае, как понятие геометрического тела, так и понятие ограниченности тела, педагогически целесообразно считать интуитивно ясным для учащихся из их опыта и не давать им формально-логических определений, которые окажутся недоступными для всех учащихся. Этот материал могут прочитать самостоятельно наиболее подготовленные учащиеся, проявляющие повышенный интерес к математике.

Считаем, что полезно перед изучением определения «Объем» провести с учениками беседу по теме «Многогранники и его элементы».

1. Объясните, что такое:

а) многогранник;

б) поверхность многогранника.

2. Дан выпуклый многогранник. Что называют его гранью, ребром, вершиной?

3. Назовите известные вам многогранники. Выпуклым или невыпуклым является каждый из них? Сколько граней, ребер, вершин у каждого из них?

4. Два тетраэдра имеют общую грань и расположены по разные стороны от нее. Сколько вершин, ребер, граней имеет полученный многогранник?

5. Какие фигуры можно получить в сечении куба плоскостью, проходящей через:

а) одно из ребер;

б) одну из диагоналей;

в) одну из его вершин?

6. Приведите пример, показывающий, что объединение выпуклых фигур может не быть выпуклой фигурой.

7. Является ли пространственный крест (фигура из семи равных кубов) правильным многогранником? Сколько квадратов его ограничивает? Сколько у него вершин и ребер?

8. Обязательно ли является многогранник правильным, если все его ребра и многогранные углы равны?

После введения понятия объемов многогранников необходимо решение задач на нахождение объемов, на свойства объемов многогранников. У учителя есть выбор: или он сам подбирает необходимые задачи, или он берет задачи из учебника.

Для формирования понятия объема тела предлагается использовать следующие типы задач:

- ✓ нахождение объемов тел с помощью формул;
- ✓ нахождение элементов тел по их объему;
- ✓ вычисление объемов многогранников, используя свойство аддитивности.

Используя модели многогранников (куб, тетраэдр, параллелепипед, призма и др.) необходимо назвать его элементы: вершины, грани, диагонали граней, диагонали рассматриваемых тел. Важно, чтобы школьники усвоили эти понятия, что позволит правильно понимать формулировку задач, не смешивая названия различных элементов в процессе их решения. Также эти знания понадобятся в дальнейшем при выводе формул для нахождения объемов тел.

Доказательство теоремы разбито на два случая:

1) измерения a, b, c - конечные десятичные дроби,

2) хотя бы одно из измерений a, b, c - бесконечная десятичная дробь. При этом учитель делает ссылку, что доказательство этой теоремы не является обязательным для изучения. В первом случае (a, b, c - бесконечная десятичная дробь), учитель предлагает разбить каждое ребро параллелепипеда на равные части длины $1/10^n$, а затем через эти точки провести плоскости, перпендикулярные данному ребру. После находят объем каждого такого куба (с опорой на понятие объема), а затем по свойствам объема находят объем данного тела, то есть прямоугольного параллелепипеда.

Следствием теоремы являются обобщение полученной формулы для прямоугольного параллелепипеда и прямой призмы, в основании которой лежит прямоугольный треугольник, как произведения площади основания на высоту.

При выводе данной формулы вначале доказывают утверждение о том, что объемы двух прямоугольных параллелепипедов с равными основаниями относятся как их высоты. При доказательстве этого утверждения учитель также предлагает разбить ребро одного из параллелепипедов на большое число n равных частей, а ребро другого параллелепипеда на m равных частей. Затем через точки деления проводит плоскости, параллельные основанию. Находит для каждого из них объемы, рассматривает промежутки, в которых они находятся. А так как число n можно брать сколь угодно большим, то следовательно доказывается условие данного утверждения. Затем учитель берет куб, являющийся единицей измерения объема, и три прямоугольных параллелепипеда с измерениями: a,1,1; a,b,1; a,b,c. Обозначил их объемы и по доказанному утверждению вывел формулу.

Используя следствие теоремы и свойства объемов, доказывается формула объема прямой призмы, также в два этапа. Сначала для прямой призмы, в основании которой лежит произвольный треугольник, а затем более общий случай – для произвольной призмы. При доказательстве авторский коллектив учебника опирается на выведенную формулу объема прямой призмы, в основании которой прямоугольный треугольник. Поэтому на втором этапе учащиеся легко могут доказать формулу для произвольной прямой призмы, разбив основание на треугольники.

При доказательстве теоремы об объеме призмы, дополняет сначала её до параллелепипеда; используется свойство симметрии для того, чтобы показать, что достроенная призма симметрична исходной, а следовательно их объемы равны. Учащиеся уже умеют находить объем параллелепипеда, а площадь основания (состоящая из двух треугольников) они умеют находить еще из планиметрии. Следовательно, они смогут найти объем призмы. Далее целесообразно рассматривает произвольную призму. Сначала разбивается основание призмы на треугольники. Затем находится объем каждой такой призмы, а уже затем по определению объемов находит объем данной призмы (как сумма объемов треугольных призм, её составляющих).

§ 3 Методика изучения темы «Объемы пирамиды»

На изучение темы «Объем пирамиды» целесообразно отвести три урока.

На первом уроке следует рассмотреть доказательство теоремы об объеме пирамиды. Основная цель данного урока – вывести формулу для нахождения объема пирамиды, показать применение теории к решению задач.

Для этого необходимо предложить ученикам задачи на нахождение площади поверхности пирамиды, вспомнить основные элементы, свойства. Предложить учащимся задачи на нахождение площади основания и т.д.

Используя текст учебника, необходимо подробно разобрать, как получается выражение для площади сечения пирамиды через площадь ее основания:

$S(x)=\frac{S}{h^2}x^2$.

Вычислить интеграл $V=\int_0^h \frac{S}{h^2}x^2dx$ учащиеся могут самостоятельно.

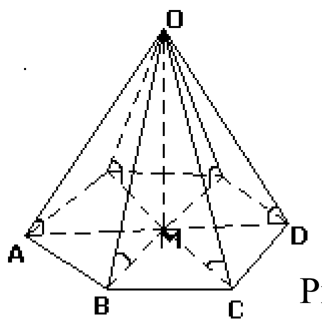


Рис. 6

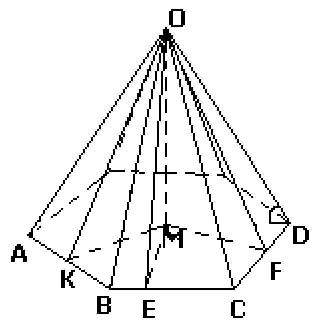


Рис.7

Второй урок можно посвятить повторению вопросов теории и решению задач.

- Докажите, что если боковые ребра пирамиды равны (или составляют равные углы с плоскостью основания), то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, описанной около основания пирамиды (рис. 6). Какие многоугольники могут быть основанием таких пирамид?

Докажите, что если двугранные углы при основании пирамиды равны (или равны высоты боковых граней, проведенных из вершины пирамиды), то вершина пирамиды проецируется в центр окружности, вписанной в основание пирамиды (рис. 7). Какие многоугольники могут быть основанием таких пирамид?

На третьем уроке выводится формула объема усеченной пирамиды как следствие теоремы об объеме пирамиды. Предлагается вывести эту формулу самостоятельно.

В конце данного урока проводится самостоятельная работа по учебнику контролирующего характера (на 6-8 мин):

Вариант I: задача № 686 (а) для $l = 10$ см, $\varphi = 30^0$.

Вариант II: задача № 688(а) для $H = 10$ см, $\beta = 60^0$.

Можно провести практическую работу (учитывается как контрольная). Учитель заранее подготавливает модели правильных пирамид (4-6) для работы в аудиториях. Модели, покупные или изготовленные учащимися, перенумеровываются и раздаются по одной. Учащийся не получает ту модель, которую он сам изготовил. Учитель имеет готовые ответы. Измерения производятся в см или в мм.

Указания даются устно:

1) Вместо буквы n поставить цифры 4 или 6.

2) Выполнить все необходимые измерения, сделать чертеж, заполнить таблицу.

3) Выражение для вычисления площади основания Q записать.

4) Все вычисления записывать в таблицу.

Модель №……… Правильная n-угольная пирамида	
Сторона основания…………………………	a (см)
Периметр основания……………………….	P (см)
Площадь основания………………………..	Q (см)
Апофема пирамиды………………………..	A (см)
Площадь боковой поверхности……………	$S_{бок}$ (см^2)
Площадь полной поверхности…………….	S (см^2)
Высота пирамиды………………………….	H (см)
Объем пирамиды…………………………..	V (см^3)

Дополнительное задание (подготавливается учителем на карточках и предлагается учащимся):

1. По развертке, данной в масштабе, вычислить действительные площадь полной поверхности и объем: 1) правильной призмы (рис. 8); 2) правильной пирамиды (рис. 9)

2.

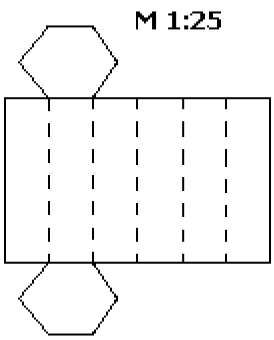


Рис.8

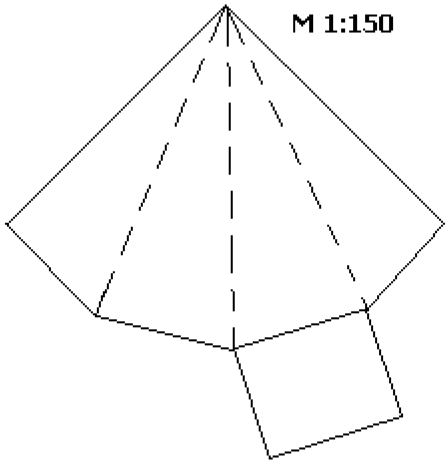


Рис.9

Указание: при выполнении в тетради чертежей пирамиды и призмы учащийся может взять произвольные размеры основных элементов.

3. Вычислить объем башни, размеры которой в метрах даны на рисунке 10.

Вывод формулы объема пирамиды в учебнике рассматривается в два этапа. Вначале предлагается рассмотреть для треугольной пирамиды, а затем – для произвольной. Проводится ось, рассматривает сечение плоскостью, выражает площадь сечения через площадь основания, применяет основную формулу для вычисления объемов (определенный интеграл). В доказательстве также используется признаки подобия. Таким образом, хорошо прослеживается связь с ранее уже изученным.

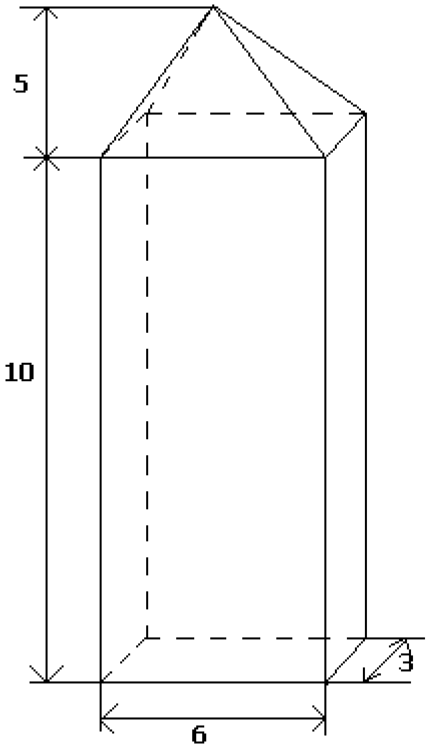


Рис.10

Следствием теоремы, в отличие от, является формула объема для усеченной пирамиды. Доказательства не приведено.

Изучение темы «Объемы многогранников» предлагается вести по схеме, отличной от предлагаемой ранее в данной работе.

Дело в том, что объемы тел – тема, вызывающая достаточно большие трудности у учащихся. В этом разделе есть четыре трудн ения теоремы: 1) об объеме прямоугольного параллелепипеда; 2) об объеме пирамиды; 3) об объеме цилиндра; 4) об объеме тела, полученного вращением криволинейной трапеции.

Выводы формул для вычисления объема каждого вида многогранника, цилиндра, конуса проводятся разными методами, что вызывает значительные трудности при их воспроизведении.

Предлагаемая мною система изучения этого раздела устраняет недостатки и создает условия для усвоения основной идеи измерения фигур в пространстве: объем фигуры может быть найден с помощью вычисления интеграла от определенным образом заданной функции.

С целью осуществления такого подхода к измерениям пространственных фигур предлагается посвятить несколько уроков обобщению изученного ранее материала об измерении отрезков и плоских фигур (о длинах и площадях) и ввести аналогичным образом измерение пространственных фигур. Рассмотрим их содержание более подробно.

Урок 1

Тема урока: обобщение свойства длин отрезков и площадей плоских фигур.

Цель урока: повторить свойства длин отрезков и площадей фигур, провести необходимые аналогии.

В начале урока необходимо повторить таблицу метрической системы мер длины, площади и объемов. Для этого удобно заготовить такую таблицу заранее (если ее нет в кабинете) и вывесить ее перед учениками (Приложение 4).

Упражнения для повторения свойств площадей фигур:

1. На рис. 11 изображен отрезок AB. Найдите длину отрезка AB, считая единицей измерения: а) сторону одной клетки; б) 1 см (отрезок CD); в) отрезок EF.

При решении этой задачи следует акцентировать внимание учащихся на том, что длина одного и того же отрезка может выражаться разными числами в зависимости от выбора единицы измерения. Но если единица измерения уже выбрана, то длина отрезка есть единственное число. При этом длина отрезка всегда положительна.

2. На рис. 12 изображена плоская фигура ABCDEF. Найдите ее площадь, приняв за единицу измерения: а)половину клетки; б) одну клетку; в) треугольник POQ.

При решении этой задачи следует обратить внимание учащихся на то, что площадь плоской фигуры есть число, которое зависит от выбора единицы измерения. Если единица измерения выбрана, то площадь фигуры единственна. Кроме того, площадь фигуры обязательно неотрицательна, какая бы фигура ни была взята в качестве единицы измерения.

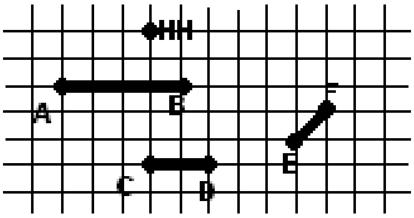


Рис.11

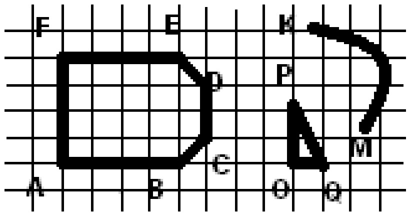
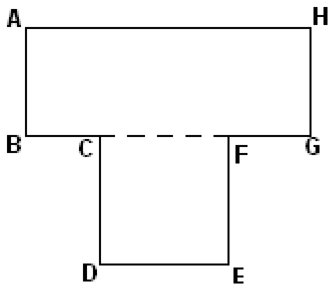


Рис.12



3. Прямоугольник имеет стороны 5 и 4 см. Какова площадь прямоугольника? Какая фигура выбрана за единицу измерения площадей и какова его площадь?

4. Плоская фигура ABCDEFGH состоит из двух прямоугольников ABGH и CDEF, площади которых соответственно 10 и 5 см^2. Найдите площадь фигуры ABCDEFGH (рис. 13).

Рис.13

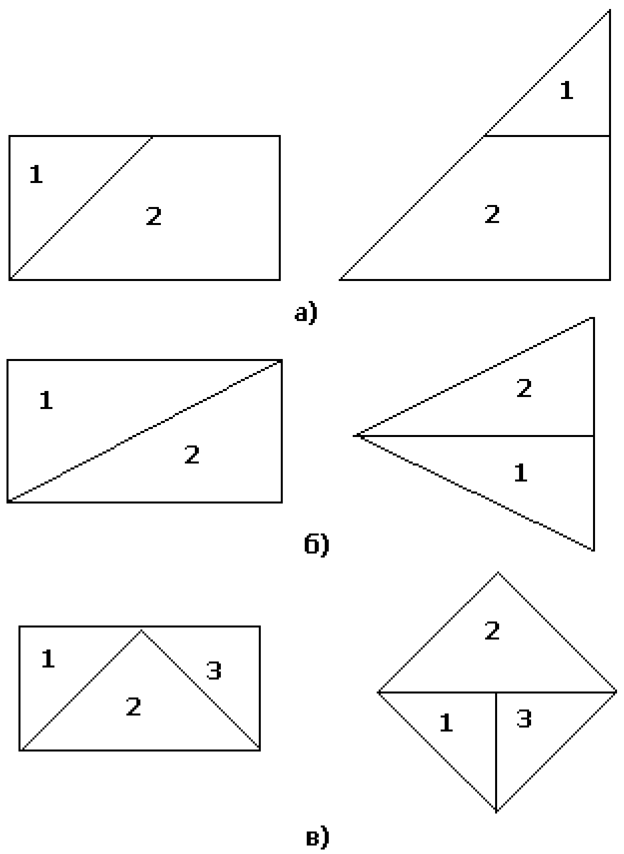


Рис.14

Решая эту задачу, мы пользуемся таким свойством площадей плоских фигур: если плоская фигура разбита на две, общая часть которых есть линия или точка, то площадь всей фигуры равна сумме площадей, ее составляющих.

5. Треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ конгруэнтны. Площадь ΔABC равна 36 см^2. Какова площадь $\Delta A_1B_1C_1$?

Решив этот комплекс задач, можно сделать выводы, сформулировав их как свойства измерения площадей плоских фигур.

Упражнение для закрепления:

1. Докажите, что два треугольника, на которые диагональ делит параллелограмм, имеют равные площади.

2.Основание прямоугольника в два раза больше его высоты. Покажите на рисунке: а) как нужно разрезать этот прямоугольник на две части, чтобы из них можно было составить прямоугольный треугольник; б) как разрезать его на две части, чтобы из них можно было составить равнобедренный треугольник; в) как разрезать его на три части так, чтобы из них можно было составить квадрат. Что можно утверждать о площадях этих фигур (рис. 14, а-в)?

Урок 2

Тема урока: объем тела.

Цель урока: сформулировать основные свойства объемов.

Измерение объемов пространственных фигур должно удовлетворять свойствам, аналогичным свойствам измерения длин отрезков и площадей плоских фигур.

Учитель формирует следующие свойства.

Каждой пространственному тел ставится в соответствие величина (объем тела), причем это соответствие удовлетворяет следующим условиям:

- объем любого тела неотрицателен;
- конгруэнтные тела имеют равные объемы;
- если тело M есть объединение тел M_1 и M_2, пересечение которых либо содержит только точки или линии поверхностей обоих тел, либо пусто, то объем тела M равен сумме объемов тел M_1 и M_2;
- объем куба, длина ребра которого равна 1, равен единице.

Упражнения для закрепления свойств объемов пространственных фигур:

1. Прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, объем которого 18 см^3, разделен сечением KLMN на два конгруэнтных тела (рис. 15). Найдите объем каждой части.

2. Из кубов, длины ребер которых равны 1 см, составлена фигура, изображенная на рис. 16. Вычислите ее объем.

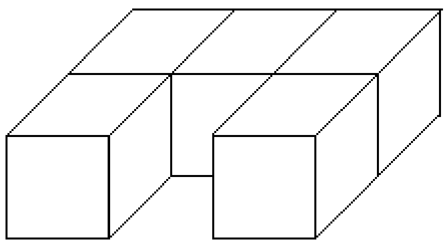


Рис. 16

4. Прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$ разделен плоскостью ACC_1A на две треугольные призмы, объем одной из которых равен 8 см^3. Найдите объем параллелепипеда.

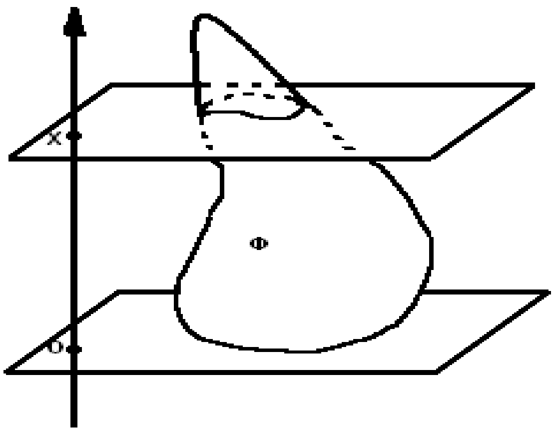


Рис.17

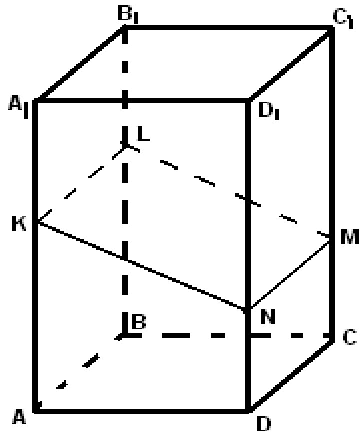


Рис.15

<u>Урок 3</u>

Тема урока: интегральная формула для вычисления объема фигуры.

Цель урока: показать построение подынтегральной функции и способ вычисления объемов фигур с помощью интеграла.

В начале урока в ходе решения ряда упражнений следует напомнить учащимся способ вычисления площадей плоских фигур с помощью интеграла: $S = \int_a^b f(x)dx$, где $f(x)$ – функция, задающая криволинейную трапецию.

После этого следует сообщить учащимся, что для вычисления объемов пространственных фигур существует аналогичный способ, к изучению которого мы и переходим.

Пусть дана пространственная фигура Ф. Выберем плоскость α таким образом, чтобы она не пересекала Ф (рис. 17).

Выберем прямую Ox, перпендикулярную плоскости α. Зададим на этой прямой координаты: за начало координат возьмем O – точку пересечения прямой Ох с плоскостью α. Положительное направление выбрано в том полупространстве, в котором расположена фигура Ф. Через точку с координатой х на этой прямой проведем плоскость α(x), параллельную плоскости α. Таким образом можно установить соответствие между плоскостями, параллельными плоскости α, и множеством действительных чисел.

Среди плоскостей данного множества есть такие, которые пересекают фигуру Ф. Первая из этих плоскостей имеет координату a, а последняя – b. Таким образом, фигура Ф заключена между плоскостями α(a) и α(b), другими словами, задана на отрезке [a,b]. Конечно, далеко не всегда фигура задана на отрезке. Она может быть задана на интервале, на дискретном множестве и т. п. Но в курсе геометрии средней школы можно ограничиться рассмотрением фигур, заданных на отрезке.

Упражнения:

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$, длина ребра которого равна 3. В качестве плоскости α выбрана плоскость ABCD, а в качестве Ох – прямая AA_1. Найдите значения a и b и укажите плоскости α (a) и α (b).

2. Дана пирамида ABCD. В качестве плоскости α выбрана плоскость BCD, а в качестве оси Ох – высота AM пирамиды. Найдите значения a и b и укажите плоскости α (a) и α (b), если AM=6.

3. Дан шар радиуса 8 см с центром в точке К. В качестве плоскости α выбрана плоскость на расстоянии 10 см от центра шара. Задайте ось Ох, найдите значения a и b и укажите плоскости α (a) и α (b).

4. Постройте функцию S(x) для шара радиуса 8 см, если плоскость α (x) проходит через центр шара.

5. Постройте функцию S(x) для конуса с высотой H и радиусом основания R, если в качестве плоскости α выбрана плоскость, параллельная основанию и проходящая через вершину конуса.

После решения этих упражнений формулируется следующее определение: объемом фигуры Ф называется интеграл от a до b функции S(x): $V(\Phi)=\int\limits_a^b S(x)dx$.

Упражнения:

6. Запишите интегральную формулу для вычисления объемов фигур, заданных в упр. 4, 5.

7. Запишите формулу для вычисления объема цилиндра высоты H и радиуса R, если в качестве плоскости α выбрана плоскость основания цилиндра.

8. Запишите формулу для вычисления объема прямоугольного параллелепипеда с измерениями m, p, n (плоскость α задайте сами).

<u>Урок 4</u>

Тема урока: интегральная формула для вычисления объема фигуры.

Цель урока: закрепить изученное на предыдущем уроке и провести доказательство обоснованности данного определения объема.

Упражнения:

1. Выведите формулу для вычисления объема призмы с высотой H и площадью основания S.

Решение. Здесь a=0, b=H, S(x)=0. Следовательно, $V(\textit{призмы})=\int\limits_0^H S(x)dx$.

2. Выведите формулу для вычисления объема пирамиды с высотой H и площадью основания Q (аналогично тому, как это делалось для конуса).

Решение. Выберем в качестве плоскости α плоскость, параллельную основанию и проходящую через вершину. Тогда a=0, b=H, $\frac{S(x)}{Q}=\frac{x}{H^2}$.

Поэтому S(x)=$\frac{Q}{H^2}x^2$. Следовательно, $V(\textit{пирамиды}) = \int_0^H \frac{Q}{H^2}x^2dx$.

Так как объемы фигур должны удовлетворять ранее перечисленным свойствам объемов, то надо показать, что при таком определении объема эти свойства выполнены.

Упражнения:

Выпишите интегральные формулы и выведите формулы для вычисления объема:

1. Призмы с высотой H и площадью основания S.
2. Пирамиды с высотой H и площадью основания Q.
3. Цилиндра с высотой H и радиусом основания R.
4. Конуса с высотой H и радиусом основания R.
5. Шара радиуса R.

После изучения всех формул для нахождения объема тел следует провести проверочную работу в виде теста.

Тест (объем прямоугольного параллелепипеда) [34]

1. Выберите неверное утверждение.

а) За единицу измерения объемов принимается куб, ребро которого равно единице измерения отрезков;

б) тела, имеющие равные объемы, равны;

в) объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению трех его измерений;

г) объем куба равен кубу его ребра;

д) объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

2. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, если его длина равна 6 см, ширина – 7 см, а диагональ – 11 см.

а) 252 см^3; б) 126 см^3; в) 164 см^3; г) 462 см^3; д) 194 см^3.

3. Основанием прямоугольного параллелепипеда служит квадрат, диагональ которого равна 6. Через диагональ основания и противолежащую вершину верхнего основания проведена плоскость под углом 45^0 к нижнему основанию. Найдите объем параллелепипеда.

а) 108; б) 216; в)27; г)54; д) 81.

4. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 5 см и 12 см, диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол 60^0. найдите объем параллелепипеда.

а) $390\sqrt{2}$ см^3; б) $390\sqrt{3}$ см^3; в) $780\sqrt{2}$ см^3; г) $780\sqrt{3}$ см^3; д) 780 см^3.

Тест (объем призмы)

1. Сторона основания правильной треугольной призмы равна $2\sqrt{3}$ см, а высота – 5 см. найдите объем призмы.

а) $15\sqrt{3}$ см^3; б) 45 см^3; в) $10\sqrt{3}$ см^3; г)$12\sqrt{3}$ см^3; д) $18\sqrt{3}$ см^3.

2. Выберите неверное утверждение.

а) Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту;

б) объем правильной треугольной призмы вычисляется по формуле $V = 0{,}25a^2h\sqrt{3}$, где а – сторона основания, h – высота призмы;

в) объем прямой призмы равен половине произведения площади основания на высоту;

г) объем правильной четырехугольной призмы вычисляется по формуле $V = a^2 h$, где a – сторона основания, h – высота призмы;

д) объем правильной шестиугольной призмы вычисляется по формуле $V = 1{,}5a^2 h\sqrt{3}$, где a – сторона основания, h – высота призмы.

3. Основанием прямой призмы является ромб, сторона которого равна 13 см, а одна из диагоналей – 24 см. найдите объем призмы, если диагональ боковой грани равна 14 см.

а) $720\sqrt{3}$ см^3; б) $360\sqrt{3}$ см^3; в) $180\sqrt{3}$ см^3; г) $540\sqrt{3}$ см^3; д) $60\sqrt{3}$ см^3.

4. Основанием прямой призмы служит треугольник со сторонами 10, 10, 12. Диагональ меньшей боковой грани составляет с плоскостью основания угол 60^0. найдите объем призмы.

а) $480\sqrt{3}$; б) $960\sqrt{3}$; в) $240\sqrt{3}$; г) 480; д) 240.

Тест (объем пирамиды)

1. Объем правильного тетраэдра равен 9 см^3. Найдите его ребро.

а) 4 см; б) $2\sqrt{3}$ см; в) $3\sqrt{2}$ см; г) 6 см; д) 3 см.

2. Выберите неверное утверждение.

а) объем пирамиды равен произведению одной третьей площади основания на высоту;

б) объем правильного тетраэдра вычисляется по формуле $V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$, где a – ребро тетраэдра;

в) объем усеченной пирамиды, высота которой равна h, а площади основания равны S и M, вычисляется по формуле $V = \frac{1}{3}h(S + M + \sqrt{SM})$

г) объем правильной треугольной пирамиды, ребро которой равно а и все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ, вычисляется по формуле $V = \frac{1}{12}a^3 tg\varphi$;

д) объем правильной шестиугольной пирамиды, ребро которой равно *а* и все боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ, вычисляется по формуле $V = \frac{\sqrt{13}}{12}a^3 tg\varphi$.

3. Найдите объем усеченной пирамиды, площади оснований которой равны 3 см^2 и 12 см^2, а высота равна 2 см.

а) определить нельзя; б) 7 см^3; в) 42 см^3; г) 14 см^3; д) 56 см^3.

4. Основанием пирамиды МАВС служит треугольник со сторонами АВ = 5 см, ВС = 12 см, АС = 13 см. Найдите объем пирамиды, если МВ$\perp$ АВС и МВ = 10 см.

а) 300 см^3; б) 260 см^3; в) 780 см^3; г) определить нельзя; д) см^3.

Углубленное изучение геометрии

Рассмотрим методические рекомендации для углубленного изучения темы «Объемы многогранников».

Теоретический материал учебника разбит на две части – основную и дополнительную. Основная часть содержит теоретические сведения (аксиомы, определения, теоремы); материал, в котором рассказано о значении наиболее важных геометрических результатов, о различных применениях стереометрии в других науках, технике, искусстве, быту, об истории геометрии.

В дополнительном материале с большей глубиной и подробностью обсуждаются самые трудные вопросы курса. Этот материал рассчитан на учащихся, особенно интересующихся математикой.

Объем прямого цилиндра

В выпускная квалификационная работе высказаны наглядные соображения, «доказательство математического утверждения с точки зрения физики». С учетом уровня класса можно предположить несколько вариантов дальнейших событий:

а) этим и ограничиться;

б) предложить желающим разобрать самостоятельно и ответить индивидуально на оценку;

в) предложить отдельным учащимся сделать сообщение о теореме на уроке. (Для этого теорему можно разбить на 4-5 частей);

г) предложить учащимся разобраться в теореме самостоятельно, а учитель организует по ней семинар в классе;

д) доказать теорему и попросить повторить «сильных» учеников на следующем уроке. И т. д.

<u>Представление объема интегралом</u>

С точки зрения методической представляется более удобным дать формулировку теоремы после доказательства, а сам вывод разбить на четыре части, примерно соответствующие бытовавшему когда-то алгоритму вывода формул и теорем дифференцирования:

1) Δx; 2) ΔV; 3) $\frac{\Delta V}{\Delta x}$; 4) $V'(x)$.

Первый способ рассуждения в теореме более аналитичен, а второй наглядный, и здесь можно «задействовать» теорему о сжатой переменной.

<u>Объемы некоторых тел</u>

Содержание параграфа – независимый вывод формул объемов четырех конкретных видов тел. При желании этот набор можно дополнить выводом формул объемов усеченного конуса (пирамиды) и шарового сегмента. Это позволяет провести с учениками групповую работу. Схема проведения таких работ состоит из нескольких этапов.

I этап. Группа разбивается на подгруппы по шесть человек. Каждому участнику подгруппы дается задание изучить вывод одной из формул (естественно, задания всем в подгруппе различные). Четыре ученика учат, а двое получают от учителя тексты, где выводятся формулы объемов усеченного конуса и шарового сегмента. (Учитель может заменить их другими формулами или вообще не давать других формул, но тогда подгруппа уменьшается до четырех человек и меняется время дальнейшей работы.) Изучив соответствующую теорему, ученик записывает ее в конспект и отыскивает ученика из своей подгруппы, также закончившего запись. Они рассказывают друг другу каждый свою теорему, записывая коротко вывод в конспекте. После этого каждый из них задает вопросы другому и отвечает на его вопросы. После этого пара «распадается», и каждый снова ищет свободного участника своей подгруппы и т. д. На все это уходит два часа. На дом ученики получают задание вывести оставшиеся формулы.

II этап. Продолжается работа в тех же подгруппах (это уже следующий урок геометрии). Однако правила меняются. Теперь каждый получает задание спрашивать вывод какой-то одной из шести формул объема и отвечает спрашиваемому соответственно одну из четырех формул (кроме той, что объяснял на том уроке, и той, что сам спрашивает). За ответ он ставит оценку. На это уходит 1 час.

III этап. И наконец, учитель может на следующем (уже четвертом) уроке вызвать по 1-2 представителя от каждой подгруппы, чтобы по жребию ответить у доски одну из теорем (можно добавить и формулы из домашнего задания). Остальные подгруппы при этом слушают, рецензируют, задают вопросы, добавляют. В итоге каждый ученик оценивается по четырем позициям: 1) запись в конспекте, 2) оценка при ответе товарищу, 3) ответ представителя из подгруппы, 4) качество вопросов и рецензий.

Элемент случайности приносит дополнительную ответственность, игровой момент и компенсируется остальными составляющими оценки.

Глава 3. Опытное преподавание

Одним из методов научного исследования наиболее подходящим для изучения и анализа интеллектуального развития подгруппы учащихся является педагогический эксперимент. В ходе его проведения предстоит выяснить, каким образом факультативные занятия влияют на изменение умственного, логического, абстрактного мышления.

На первом занятии учащимся была предложена самостоятельная работа, в которую были включены вопросы, охватывающие исследуемую тематику.

Работа №1

Задача 1.1: *Основанием прямого параллелепипеда является ромб, диагонали которого равны 24 см и 10 см. угол между меньшей диагональю параллелепипеда и плоскостью основания равен 45^0. Вычислите объем параллелепипеда.*

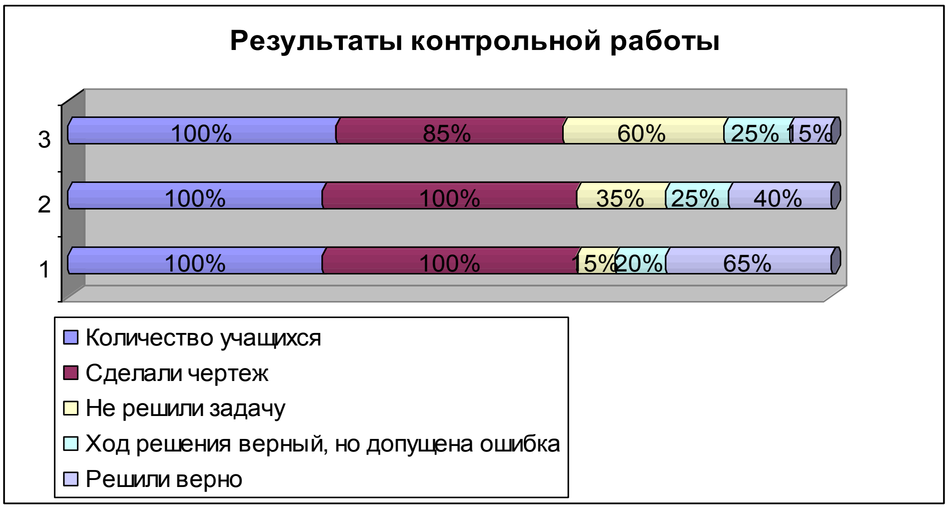
Задача 1.2: *Основанием пирамиды МАВС с равными боковыми ребрами является прямоугольный треугольник. Его гипотенуза АВ равна с,* $\angle BAC=\alpha$. *Угол между плоскостями основания и грани МАС равен* β. *Вычислите объем пирамиды.*

Задача 1.3: *В шаре радиуса R высверлена коническая воронка, ось которой совпадает с диаметром шара. Найдите объем оставшейся части шара, если угол при вершине в осевом сечении воронки равен* 2α.

В эксперименте приняли участие 20 человек. В ходе проверки и обработки данных получены следующие результаты:

№ задачи	**1**		**2**		**3**	
Количество учащихся	**20**	**100%**	**20**	**100%**	**20**	**100%**
Сделали чертеж	**20**	**100%**	**20**	**100%**	**17**	**85%**

Не решили задачу	**3**	**15%**	**7**	**35%**	**12**	**60%**
Ход решения верный, но допущена ошибка	**4**	**20%**	**5**	**25%**	**5**	**25%**
Решили верно	**13**	**65%**	**8**	**40%**	**3**	**15%**



Таким образом, уровень знаний учащихся по данной теме различен. При этом полностью справились с работой 3 человека, решили две задачи из трех – 5 человек, не справились с работой – 7 человек, остальные 5 решили одну задачу. Наиболее четкое представление учащиеся имеют о многогранниках, о способах вычисления их объема. У некоторых учеников возникли проблемы с построением чертежа, с применением правильной формулы при решении. Встретилось много вычислительных ошибок. Хотя у учеников высокий средний балл успеваемости по геометрии. Это говорит о том, что этот материал не был доведен до навыка и данной теме не уделено должного внимания.

На занятиях они изучали различные методы нахождения объемов, рассматривались новые формулы их вычисления, не выводимые в основном курсе, но знание которых требуется при решении задач, искали рациональные пути решения. Обращалось внимание и на построение чертежей по заданному условию с учетом того, чтобы изображение получилось наглядным и более простым для восприятия. Были рассмотрены дополнительные задачи, систематизированы ранее изученные понятия и включены во взаимосвязь с новыми фактами, обучение проводилось по темам, предложенным мною для факультативного изучения.

В конце изучения была проведена самостоятельная работа, которая включала в себя задачи на применение изученных формул, фактов, методов.

Работа №2

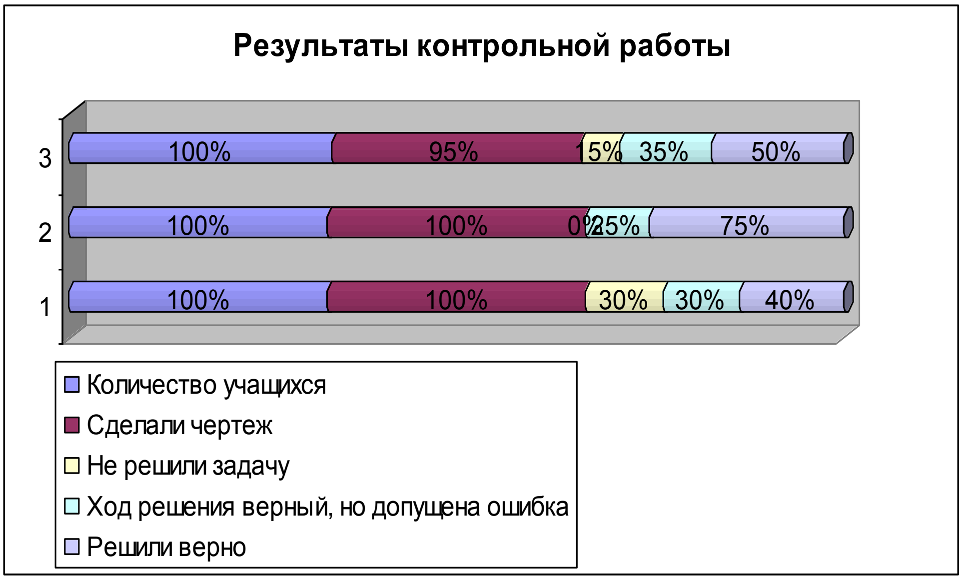
Задача 2.1: *Основанием прямой призмы является треугольник ABC, в котором AB=AC=17 см, BC=8 см. Угол между плоскостью основания и плоскостью, содержащей ребро BC и вершину* A_1*, равен* 30^0*. вычислите объем призмы.*

Задача 2.2: *Основанием пирамиды является ромб, большая диагональ которого равна 2d, а острый угол* α*. Угол между плоскостями основания и каждой боковой гранью равен* β*. Вычислите объем пирамиды.*

Задача 2.3: *Сфера с центром в вершине конуса касается его основания и делит конус на 2 равновеликие части. Найдите угол между образующей конуса и его высотой.*

В эксперименте приняли участие 20 человек. В ходе проверки и обработки данных получены следующие результаты:

№ задачи	**1**		**2**		**3**	
Количество учащихся	**20**	**100%**	**20**	**100%**	**20**	**100%**
Сделали чертеж	**18**	**100%**	**20**	**100%**	**19**	**95%**
Не решили задачу	**6**	**30%**	**0**	**0%**	**3**	**15%**
Ход решения верный, но допущена ошибка	**6**	**30%**	**5**	**25%**	**7**	**35%**
Решили верно	**8**	**40%**	**15**	**75%**	**10**	**50%**



По результатам второй самостоятельной работы можно сделать вывод, что тему объемов нужно изучать более глубоко и последовательно, чтобы овладеть методами вычисления и получить достаточно знаний для их реализации. По итогам этого исследования складывается следующая картина: с работой успешно справились 6 человек, столько же решило две из трех задач, по одной задаче осилили 4 человека, не справились с работой 4 ученика. Не смотря на это, можно наблюдать положительную тенденцию. Если при выполнении первой работы у некоторых неисправившихся не было даже идей для решения, то во второй раз таких не оказалось (они не справились с работой по причине невнимательности, допускали вычислительные ошибки). Среди решивших две задачи из трех оказались и «слабые» ученики, что особенно порадовало. На мой взгляд, это хороший показатель, так как за достаточно короткий промежуток времени были достигнуты неплохие результаты. Учащиеся показали владение методами решения задач, применяли изученные ранее факты и обобщения теорем. Нельзя не отметить и повышение интереса (особенно среди мальчиков), в результате чего учащиеся стали просить задачи потруднее. Следовательно, времени отводимого на изучение этой темы, явно не достаточно, а при систематическом изучении можно добиться усвоения материала на более высоком уровне. На наш взгляд, в лицеях с углублённым изучением целесообразно дополнить изучение объемов тел на уроках занятиями по теме в рамках факультативных и других внеклассных занятий.

Заключение

Тема «Объемы многогранников» одна из сложных, но в то же время нужных тем в курсе академических лицеях. В ней собрано и обобщено много знаний из планиметрии и стереометрии.

В ходе исследования были решены следующие задачи:

1. Рассмотрены различные подходы к определению понятия объема многогранника и определено, что целесообразно использовать конструктивный способ для введения понятия.
2. Учитывая основные цели изучения темы «Объемы многогранников», разработана методика ее изучения.
3. Для решения вопросов, которые требуют более глубокого изучения, составлен факультативный курс по данной теме.
4. Проведено опытное преподавание с целью апробации разработанной методики.

В ходе опытного преподавания получила подтверждение теоретическая гипотеза. Цель исследования была достигнута.

Исползованная литературы

1. И.А.*Каримов*. <u>О Национальной программе по подготовке кадров</u>. Т.1997 г
2. И.А. Каримов. *БЕЗ ИСТОРИЧЕСКОЙ ПАМЯТИ НЕТ БУДУЩЕГО.* Т. 1999г
3. S. Alixonov "Matematika o'qitish metodikasi" T.:O'qituvchi, 2008-yil
4. G Бескин, Л. Н. Стереометрия [Текст]: кн. для учителя / М.: Просвещение, 1960.
5. Борисов, Н. И. Как обучать математике [Текст]: пособие для учителя / М.: Просвещение, 1979.
6. Геометрия 7-11 кл. сред. шк. [Текст] / А. В. Погорелов. – М.: Просвещение,1991.
7. Геометрия 10-11 кл.: учеб. для учащихся ср. шк. [Текст] / Киселев. - М.: Дрофа, 1995.
8. Монахов, Н. И. Из опыта обучения геометрии в старших классах [Текст] / Н. И. Монахов. – М.: Просвещение, 1984.
9. Методика преподавания математики в ср. шк. Частная методика [Текст]: учеб. пособие для студентов пединститутов по специальности «Математика» / А. Я. Блох [и др.]; сост. В. И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987.
10. Методика обучения геометрии [Текст]: учебное пособие для ВУЗов / под ред. В. А. Гусева. – М.: Академия, 2004.
11. Математика 5-6 [Текст]: кн. для учителя / М.Мираахмедов. - Т.: Укитувчи, 2007, - 151 с.
12. Погорелов, А. В. Элементарная геометрия [Текст] / А. В. Погорелов. - М.: Наука, 1974.
13. Meliqulov A., Qurbonov P. Matematika. 1-2 – qism. O'qituvchi, 2003.
14. Рогановский, Н. М. Методика преподавания математики в ср. шк. [Текст] / Н. М. Рогановский [и др.]. - М.: Высшая школа, 1990.
15. Сычева, Е. И. Тесты по стереометрии // Математика в школе. - 2006. - №4. - С. 24.
16. Рыжик, В. 25000 уроков математики [Текст]: кн. для учителя / В. Рыжик. - М.: Просвещение, 1993
17. Методические рекомендации по геометрии [Текст]: кн. для учителя / С. М. Саакян, В. Ф. Бутузов. – М.: Просвещение, 2004
18. http://www.problems.ru
19. http://zadachi.mccme.ru