

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM
VAZIRLIGI
NIZOMIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT PEDAGOGIKA
UNIVERSITETI
FIZIKA-MATEMATIKA FAKULTETI

“Himoyaga ruxsat etilsin”

Fakultet dekani, f.-m.f.n.

_____ G'.F.Djabbarov

“ _____ ” _____ 2014 yil

“5140100-matematika” ta'lim yo'nalishi 4-kurs talabasi

HUSENOVA Dilara Mirzayevnaning

“**MATEMATIKADAN MODELLAR YASASHGA DOIR MASALALAR**”
mavzusidagi

BITIRUV MALAKAVIY ISHI

Talaba: _____ D.M.Husenova

Ilmiy rahbar: “Matematika va uni o'qitish
metodikasi” kafedrasi professori, f.-m.f.d.

_____ R. Beshimov

Taqrizchilar:

“Matematika va uni o'qitish metodikasi”
kafedrasi dotsenti, f.-m.f.n.

_____ D.E. Davletov

TDIU qoshidagi Chilonzor akademik litsey
matematika o'qituvchisi

_____ M.Egamov

“Himoyaga tavsiya etilsin”

“Matematika va uni o'qitish
metodikasi” kafedrasi mudiri,

f.-m.f.d. _____ R.Beshimov

“ _____ ” _____ 2014yil

Toshkent 2014 yil

MUNDARIJA

Kirish	3
1-bob. Tekislikdagi figuralarning modellarini yasashga doir masalalar	
§ 1.1. Uchburchak, to'rtburchak, ko'pburchaklarning tengdosh va teng tuzilganligini ko'rsatuvchi modellar yasash	6
§ 1.2. Aylanani teng bo'laklarga bo'lish va muntazam ko'pburchaklar yasash	10
§ 1.3. Muntazam ko'pburchaklarni ularning berilgan elementlari bo'yicha gomotetiya yordami bilan yasash	14
2-bob. Fazoviy jismlarning modellarini yasashga doir masalalar	
§ 2.1. Parallelepiped va prizmaning modellarini yasash	16
§ 2.2. Piramidalarning modellarini yasash	32
§ 2.3. Aylanish jismlarning modellarini yasash	39
3-bob. Muntazam ko'p yoqlilar, ularning yoyilmalari va elementlarini yasashga doir masalalar	
§ 3.1. Tetraedr, kubning modellarini yasash.	44
§ 3.2. Oktaedr, ikosaedrning modellarini yasash	54
§ 3.3. Dodekaedrning modellarini yasash	65
Xulosa	75
Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati	76
Mavzuga doir lug'at	78

KIRISH

Vatanimizning kelajagi, xalqimizning ertangi kuni, mamlakatimizning jahon hamjamiyatidagi obro'-e'tibori avvalambor farzandlarimizning unib-o'sib, ulg'ayib, qanday inson bo'lib hayotga kirib borishiga bog'liqdir. Biz bunday o'tkir haqiqatni hech qachon unutmasligimiz kerak.

Islom Karimov

Mamlakatimizda sog'lom va barkamol avlodni tarbiyalash, yoshlarning o'z ijodiy va intellektual salohiyatini ro'yobga chiqarish, mamlakatimiz yigit-qizlarini XXI asr talablariga to'liq javob beradigan har tomonlama yetuk shaxslar etib voyaga yetkazish uchun zarur shart-sharoitlar va imkoniyatlarni yaratish bo'yicha keng ko'lamli chora-tadbirlar amalga oshirilmoqda. Prezidentimiz tashabbusi bilan mustaqillik yillarida maktab sohasida, o'rta maxsus ta'lim tizimida, oliy ta'lim tizimida bir qator islohotlar o'tkazildi. Har qaysi davlat, har qaysi millat birinchi navbatda o'zining yuksak madaniyati va ma'naviyati bilan kuchlidir. Zero, millatni yo'q qilish uchun uni qirish shart emas, uning madaniyatini, san'atini, tilini yo'q qilsang bas. Shu boisdan prezidentimiz I.Karimov ta'lim sohasidagi islohotlarni o'zbek tiliga davlat tili maqomini berishdan boshladi. Bu esa biz yoshlarga keng imkoniyatlar eshigini ochdi [1].

Ta'lim sohasidagi islohatlar mamlakatimizda olib borilayotgan ijtimoiy-iqtisodiy islohotlarning uzviy va hal qiluvchi yo'nalishlaridan biri hisoblanadi. Prezidentimiz Islom Karimov ta'kidlaganidek "Hammamizga teran bir haqiqat ayon bo'lishi kerak – biz yurtimizning ertangi rivoji yo'lida qanday chuqur o'ylangan dasturlarni tuzmaylik, bu rejalarni bajarish uchun qanday moddiy baza va imkoniyatlarni yaratmaylik, buning uchun qanday ko'p sarmoya safarbar etmaylik, ularning barchasini amalga oshiradigan, ro'yobga chiqaradigan qudratli bir omil borki, u ham bo'lsa, yuqori malakali ishchi kuchi va yurtimizning ertangi kuni, taraqqiyoti uchun mas'uliyatni o'z zimmasiga olishga qodir bo'lgan yetuk mutaxassis yoshlarimiz desak, o'ylaymanki, hech xato bo'lmaydi"[2].

Ta'lim sohasini isloh qilishni avvalambor boshlang'ich ta'limdan boshlash zarur edi. Vaholanki, bolaning dunyoqarashi, didi, salohiyati shakllanadigan boshlang'ich sinflarda eng yetuk, eng tajribali murabbiylar biriktirib qo'yilishi lozim[3].

Shuning uchun, maktab ta'limini, o'rta-maxsus ta'lim tizimini, shu bilan birga oliy ta'limni ham tubdan isloh qilish rejalashtirilgan.

Bugungi kunda bu islohotlar davom etmoqda. O'zbekiston Respublikasi tomonidan inson huquqlari, ta'lim, bola huquqi sohasidagi jahon ilg'or tajribasini hisobga olish uzluksiz ta'lim va kadrlar tayyorlash tizimining barcha jihatlariga daxldor bo'lib, uning rivojlanishi omillaridan biridir. Kadrlar tayyorlash sohasidagi davlat siyosati insonni intellektual va ma'naviy-axloqiy jihatdan tarbiyalash bilan uzviy bog'liq bo'lgan uzluksiz ta'lim tizimi orqali har tomonlama barkamol shaxs – fuqaroni shakllantirishni nazarda tutadi[4].

O'zbekiston Respublikasi mustaqillikka erishgandan keyin barcha sohalar rivojlanish bosqichiga kirdi. Ayniqsa, akademik litsey ta'lim muassasi ta'lim-tarbiya ishlarining mazmuni, o'qitish shakli hamda o'qitish metodlari keskin o'zgardi. “Kadrlar tayyorlash milliy dasturi”da ko'rsatib o'tilganidek, o'quv tarbiya jarayonining sifatini jahon standartlari darajasiga ko'tarish, uzluksiz ta'lim tizimini takomillashtirish, yuksak ma'naviy, axloqiy, madaniy va kasbiy talablarga javob beruvchi yuqori malakali kadrlar tayyorlash va malakasini oshirish tizimini takomillashtirish ko'zda tutilgan. Ma'lumki ta'lim tizimini rivojlantirish, uning samaradorligini oshirishda DTS hamda shu asosda tasdiqlangan o'quv reja va dasturlar alohida ahamiyat kasb etadi [4].

O'zbekiston Respublikasining «Kadrlar tayyorlash Milliy dasturi»da o'quv jarayonining moddiy-texnika va axborot bazasi yetarli emasligi, yuqori malakali pedagog-kadrlarning yetishmasligi, sifatli o'quv-uslubiy va ilmiy adabiyot hamda didaktik materiallarning kamligi, ta'lim tizimi, fan va ishlab chiqarish o'rtasida puxta o'zaro hamkorlik va o'zaro foydali aloqadorlikning yo'qligi kadrlar tayyorlashning mavjud tizimidagi jiddiy kamchiliklar sirasiga kiradi, deb ko'rsatib o'tilgan.

Bitiruv malakaviy ishining dolzarbligi. Bugungi kunda matematikadan modellar yasashga doir masalalarning chuqurroq o'rgatilmayotgani o'quvchilarning tasavvur doirasining, uning dunyoqarashining rivojlanishiga to'sqinlik qiladi. Bu esa mamlakatimizda matematikadan modellar yasashga doir masalalarning dolzarbligidan dalolat beradi.

Bitiruv malakaviy ishining obekti. Geometrik figuralarning modellari.

Bitiruv malakaviy ishining predmeti. Matematikadan modellar yasashga doir masalalar va ularni hal qilish usullari.

Bitiruv malakaviy ishining maqsadi. Matematikadan modellar yasashga doir masalalarning mohiyatini ochib berish, yechish usullarini ya'ni modellarni yasashni o'rgatish, ularni o'quvchilarning fazoviy tasavvurlarini rivojlantirishda nazariy bilimlarini amaliyotda tadbiq eta olishlarini o'rgatish.

Bitiruv malakaviy ishining vazifalari:

- Ko'pburchaklarda modellar yasashga doir masalalarni o'rganish.
- Parallelepiped va prizma modellarini yasashga doir masalalarni o'rganish.
- Piramida va aylanish jismlarining modellarini yasashga doir masalalarni o'rganish.
- Tetraedr va kubning modellarini yasashga doir masalalarni o'rganish.
- Oktaedr va ikosaedr modellarini yasashga doir masalalarni o'rganish.
- Dodekaedr modellarini yasashga doir masalalarni o'rganish.

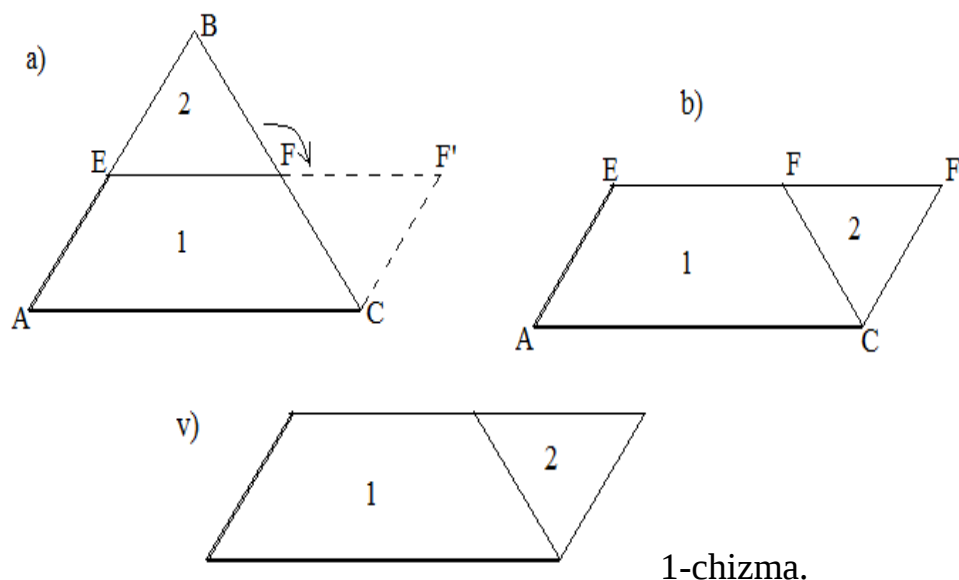
1-bob.TEKISLIKDAGI FIGURALARNING MODELLARINI YASASHGA DOIR MASALALAR

§ 1.1. Uchburchak, to'rtburchak, ko'pburchaklarning tengdosh va teng tuzilganligini kursatuvchi modellar yasash

Tekislikda yassi figuralarni o'rganishda uchburchak, to'rtburchak kabi figuralardan ko'p foydalanamiz. Berilgan figuraga tengdosh bo'lgan figuralarni yasashda ularning modellarini ko'rsatib yasab berish, o'quvchilarning tassavur doirasini kengaytiradi va xotirada saqlanib qolishga yordam beradi. Shu maqsadda yassi figuralarning modellarini yasashga doir masalalarni ko'rib chiqamiz:

1. Berilgan ABC uchburchakka (1-a chizma) teng tuzilgan parallelogrammni (1-b chizma) va ularning modellarini yasang.

Yechish. Berilgan uchburchakni o'rta chizig'I EF bo'yicha kesamiz va uning EBF bo'lagini strelka yo'nalishida F nuqta atrofida 180° ga aylantirib, 1-b chizma-dagi parallelogrammni hosil qilamiz.



1-chizma.

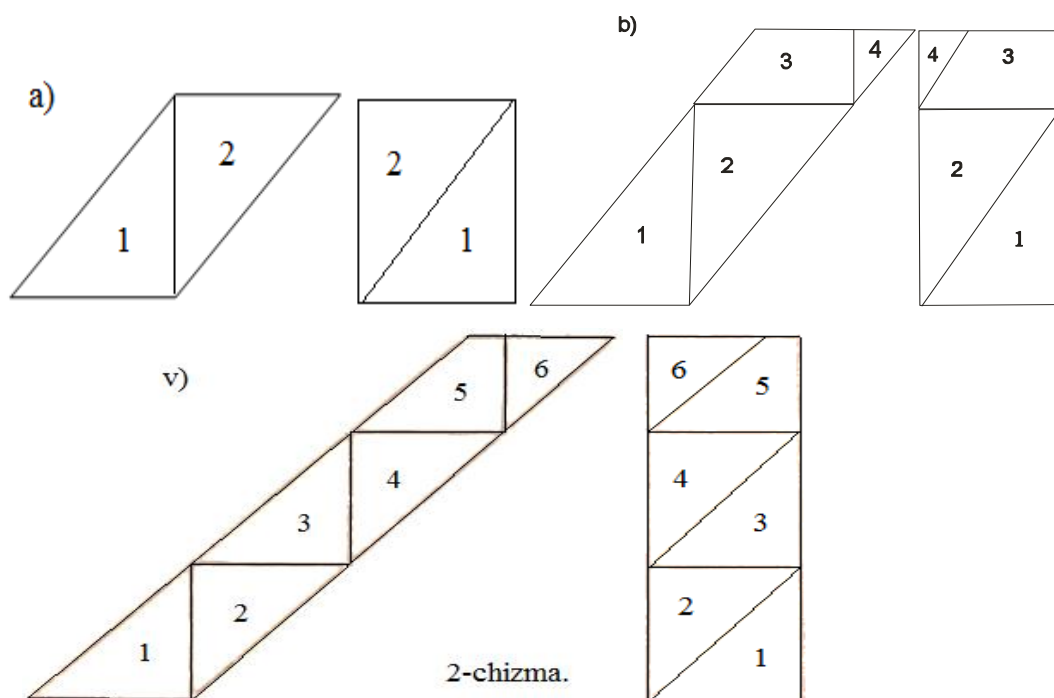
Bu masalani EBF uchburchakni E nuqta atrofida 180° ga aylantirish bilan ham yechish mumkin.

Agar bizga AEF'C parallelogramm berilgan bo'lib, unga teng tuzilgan uchburchak yasash talab qilinsa, uning biror uchi (masalan, C, 1-v chizma) va bu uchga tegishli bo'lmagan qolgan ikki tomondan istalgan birining, masalan, EF' ning o'rtasi F nuqadan o'tuvchi CF to'g'ri chiziq bo'yicha kesib, hosil bo'lgan CFF'

uchburchakni F nuqta atrofida soat strelkasiga teskari yo'nalishda 180° ga aylantir-sak, 1-a chizmadagi uchburchak hosil bo'ladi [5].

2. Berilgan parallelogrammni unga teng tuzilgan to'g'ri to'rtburchakka aylan-tiring va ularning modellarini yasang.

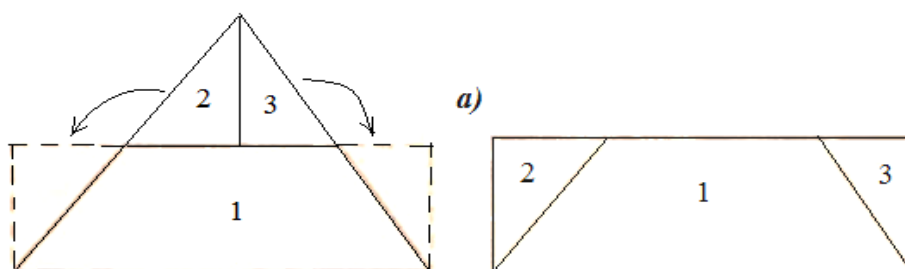
Ye ch i sh. Parallelogrammni uning asosiga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq bo'yicha kesamiz. Bu masalani yechishning turli hollari 2-a, b, v chizmalar-da ko'rsatilgan.

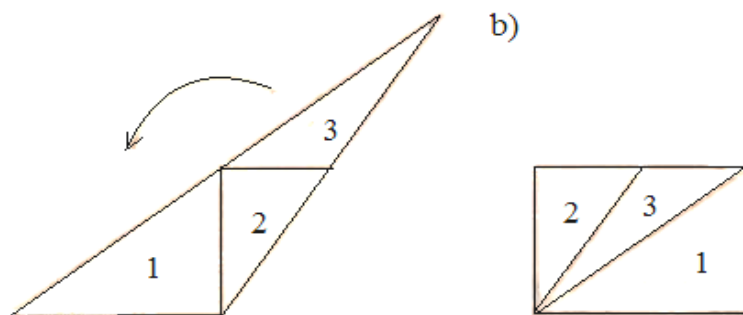


Berilgan to'g'ri to'rtburchakni unga teng tuzilgan parallelogrammga aylantirishda ham 2-chizmalardan foydalanish mumkin.

3. Berilgan uchburchakka teng tuzilgan to'g'ri to'rtburchak hamda ularning modellarini yasang.

Yechish. Berilgan uchburchak o'tkir burchakli bo'lganda uni qanday yasash lozimligi 3-a chizmada, o'tmas burchakli bo'l ganda esa 3-b chizmada kursatilgan.

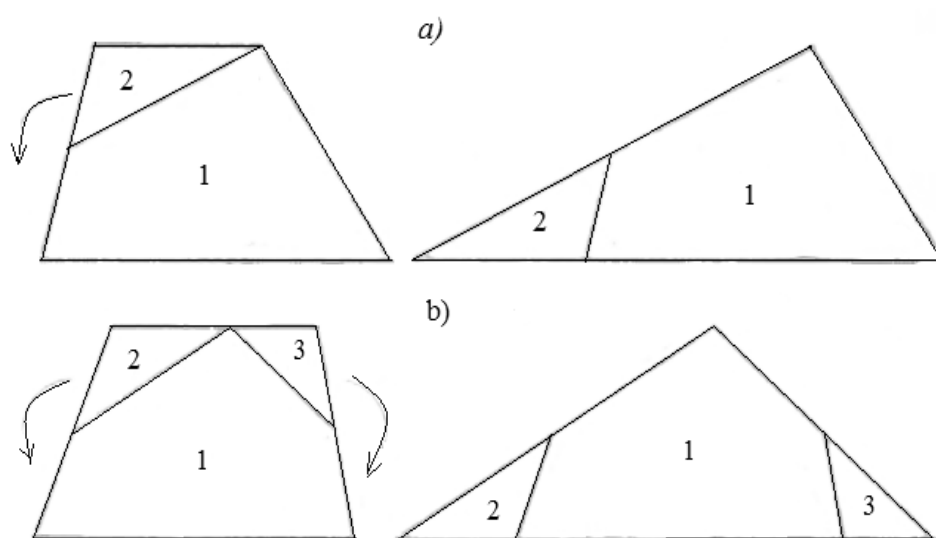




3- chizma.

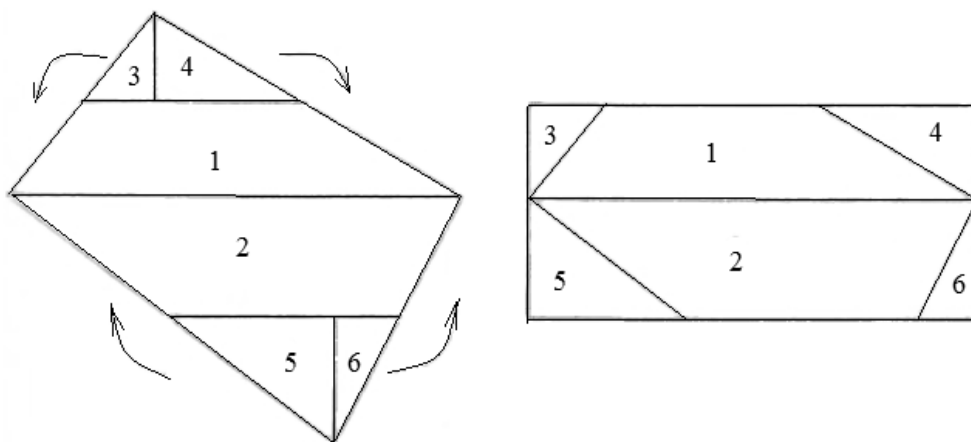
4. Berilgan trapetsiyani unga teng tuzilgan uchburchakka aylantiring va ularning modellarini yasang.

Bu masala 4-a, b chizmalarda yechib ko'rsatilgan [6].



4-chizma

5. Berilgan qavariq to'rtburchakni unga teng tuzilgan to'g'ri turtburchakka aylantirishni ko'rsatuvchi model yasang.

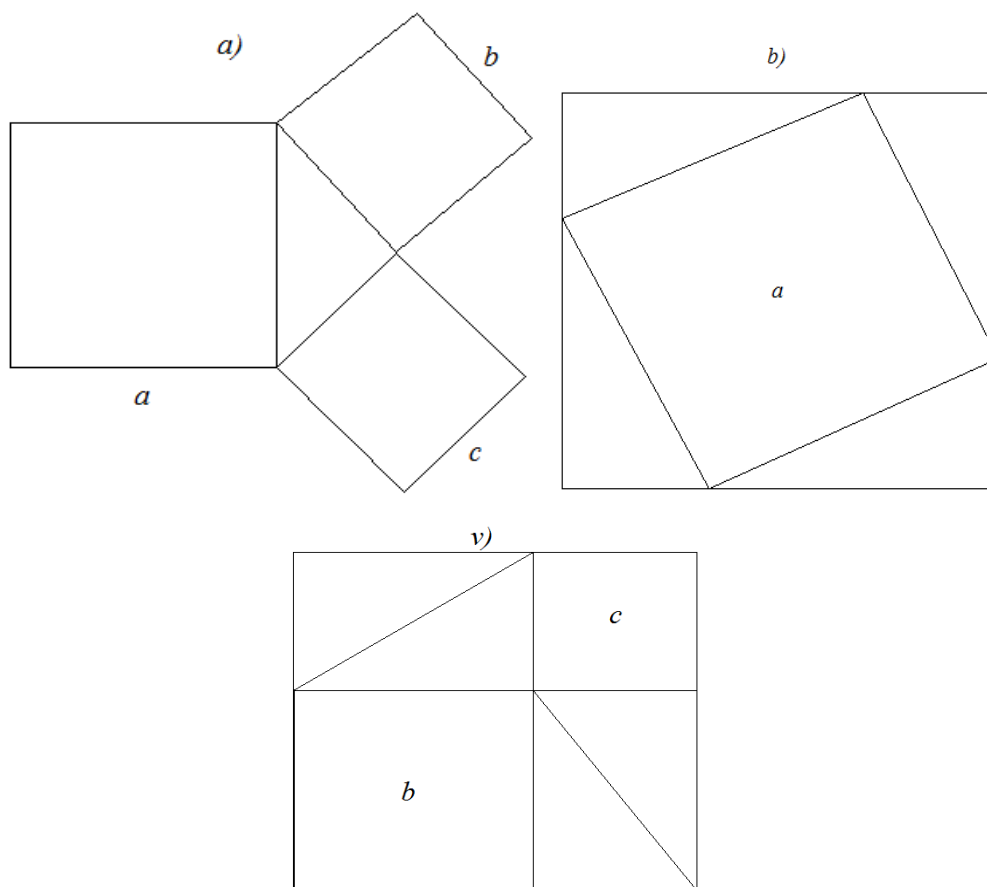


5-chizma.

Yechish. 5-chizmada ko'rsatilgan.

6. Pifagor teoremasining modelini yasang.

Bu masalaning modeli 6-a, b, v chizmalarda berilgan.

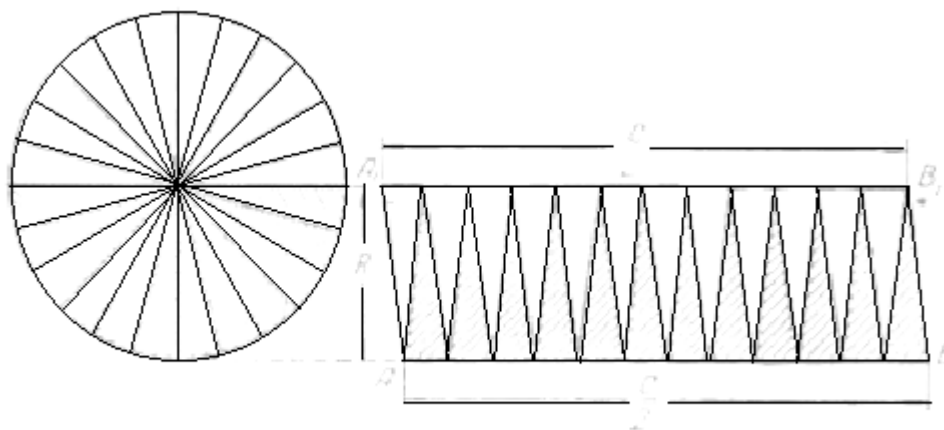


6-chizma.

7. Doira yuzini hisoblashni ko'rsatuvchi model yasang.

Yasash. Kartondan doira yasab, uni uzaro teng bo'lgan 12 yoki 24 ta sektorga bo'lamiz (7-chizma). Agar sektorlar sonini cheksiz orttira bersak, AB oralik aylana uzunligining yarmiga, ya'ni $\frac{C}{2}$ ga, AA_1B_1B shakl esa balandligi radius (R) ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchakka yaqinlasha boradi. Natijada to'g'ri to'rtburchakning yuzi doira yuziga teng bo'ladi.

$$C=2\pi R$$



7-chizma

§ 1.2. Aylanani teng bo'laklarga bo'lish va muntazam ko'pburchaklar yasash

Ko'pyoqlarning yoyilmalarini yasashda ko'pincha aylanani teng bo'laklarga bo'lish va muntazam ko'pburchaklar yasash zarur bo'lib qoladi. Maktab matematika kursida aylanani uch, to'rt, oltiga teng bo'lakka bo'lish, muntazam uch, to'rt va oltiburchaklar yasash hamda ularning tomonlarini ikkilashtirish masalalari ko'riladi. Biz quyida aylanani sirkul va chizg'ich yordami bilan teng bo'laklarga bo'lishning usullari va muntazam ko'pburchaklar yasashga doir masalalarni kursatamiz:

1. R radiusli aylanani teng besh va o'n bo'lakka bo'ling.

1-usul. O'zaro perpendikulyar bo'lgan AB va CD diametrlarni o'tkazamiz. AO kesmaning o'rtasi E nuqtani markaz qilib, radiusi EC ga teng bo'lgan CF yoy chizamiz (8-a chizma), uning OB bilan kesishgan nuqtasi F dan C gacha bo'lgan masofa R radiusli aylanaga ichki chizilgan muntazam beshburchakning bir tomoni a_5 va F dan markaz O gacha bo'lgan OF masofa R radiusli aylanaga chizilgan muntazam o'n burchakning bir tomoni a_{10} ga teng bo'ladi.

$$\text{Ya'ni: } CF = a_5 = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}};$$

$$OF = a_{10} = \frac{R}{2} (\sqrt{5} - 1).$$

Isbot. E nuqtadan EC kesma o'tkazamiz. To'g'ri burchakli EOC uchburchak hosil bo'ladi. Bu uchburchakka Pifagor teoremasini tatbiq etib, EC ni topamiz:

$$EC = \sqrt{EO^2 + OC^2}, \text{ bunda } EO = \frac{R}{2}, OC = R \text{ bo'lgani uchun}$$

$$EC = \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + R^2} = \sqrt{\frac{R^2}{4} + R^2} = \frac{R\sqrt{5}}{2};$$

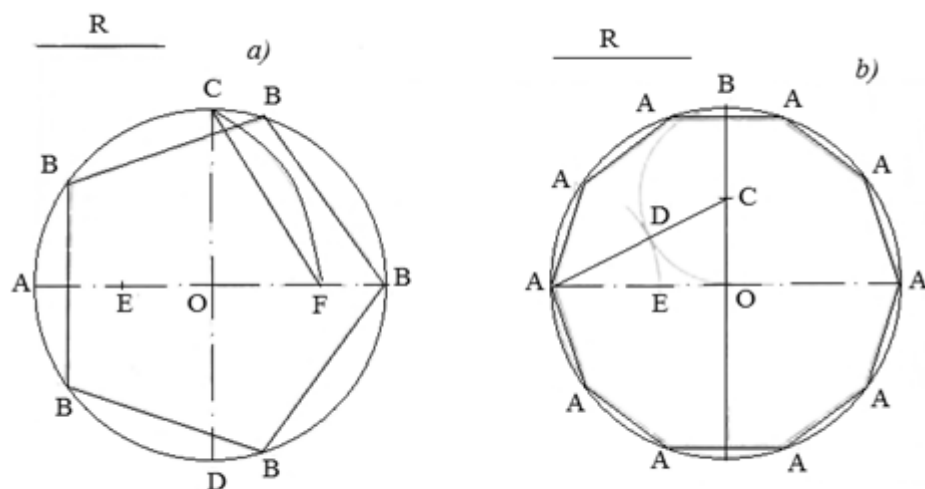
OF=EF-EO bunda EF=FC bo'lgani uchun $OF = \frac{R\sqrt{5}}{2} - \frac{R}{2} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) = a_{10}$;

To'g'ri burchakli $\triangle OCF$ dan:

$$CF = \sqrt{OC^2 + OF^2} = \sqrt{R^2 + \left[\frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)\right]^2} = \sqrt{R^2 + \frac{R^2}{4}(5 - 2\sqrt{5} + 1)} =$$

$$= \frac{R}{2} \sqrt{4 + 5 - 2\sqrt{5} + 1} = \frac{R}{2} \sqrt{10 - 2\sqrt{5}} = a_5.$$

Demak, $CF = a_5$ ekan.



8-chizma.

2-us u l. Berilgan $AO = R$ radiusli aylanani teng o'n va besh bo'lakka bo'lish uchun berilgan radius (R) ni chet va o'rta nisbatda bo'lamiz (8-b chizma), uning katta qismi berilgan radiusli aylanaga ichki chizilgan muntazam o'nburchakning bir tomoniga teng bo'ladi. AO kesmani chet va o'rta nisbatda bo'lish uchun

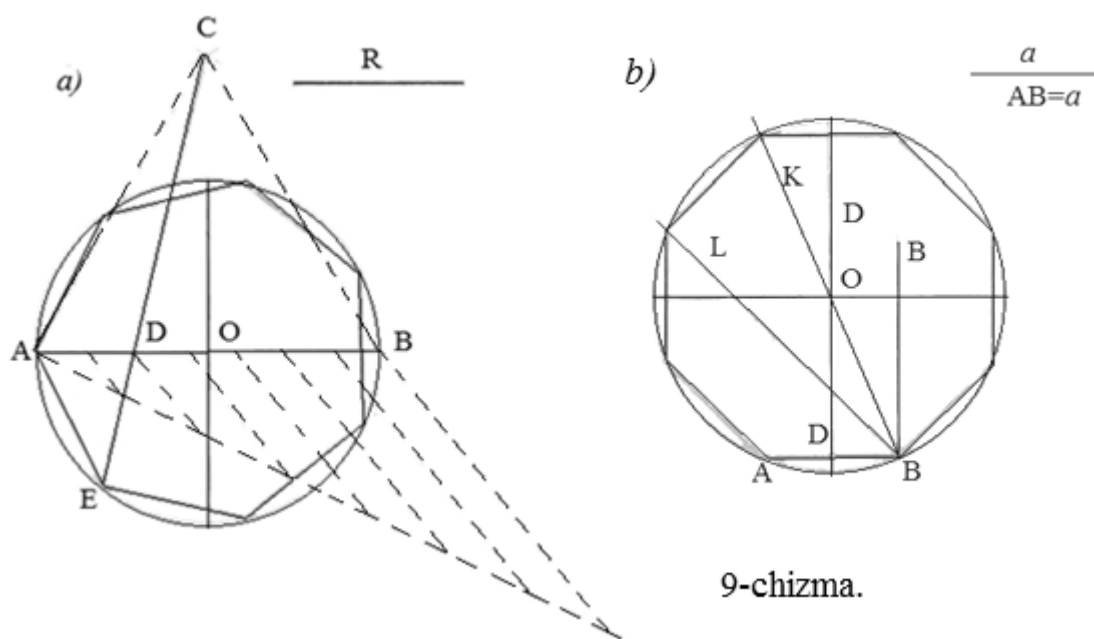
$AO \perp OB$ radiuslarni o'tkazib, OB ning o'rtasi C nutstani topib, uni A nuqta bilan tutashtiramiz. C nuqtani markaz qilib, OC ga teng radius bilan yoy chizib, AC kesmaning D nuqtasini topamiz va A nuqtani markaz qilib, AD radius bilan yoy chizamiz va bu yoyning AO kesma bilan kesishish nuqtasi E berilgan AO radiusni chet va o'rta nisbatda bo'ladi. Uning katta qismi AE , $AO = R$ radiusli aylanaga ichki chizilgan muntazam o'nburchakning bir tomoni, ya'ni

$AE = a_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$ bo'lib, uni sirkul bilan o'lchab aylananing biror nuqtasi A dan boshlab, aylanaga ketma-ket qo'yib chiqsak, aylana teng o'n bo'lakka

bo'linadi. Agar bo'linish nuqtalarini ketma-ket tutashtirib chiksak, muntazam o'nburchak, agar bo'linish nuqtalarini bittadan oralatib tutashtirib chiqsak, muntazam beshburchak hosil bo'ladi [7].

2. R radiusli aylanani n ta teng bo'lakka taqribiy bo'ling.

Yechish. AB diametrni o'tkazib, uni teng bo'laklarga (bizning misolda $n=7$ bo'lakka) bo'lamiz (9-a chizma). A va B nuqtalarni markaz qilib AB ga teng radius bilan yoylar chizamiz va ularning kesishish nuqtasi (C) ni topamiz. A va B nuqtalarni C nuqta bilan tutashtiramiz. AB diametrning bir uchidan boshlab $AD = 2\frac{AB}{n}$ kesma ajratib, C va D nuqtalar orqali to'g'ri chiziq o'tkazamiz hamda bu to'g'ri chiziqning aylana bilan kesishish nuqtasi E ni aniqlaymiz. Bunda $AE \approx a_n$. Agar a_n ni aylanaga ketma-ket qo'yib chiqsak, u taxminan n marta joylashadi.



9-chizma.

3. Berilgan tomoni a ga teng bo'lgan muntazam sakkizburchak yasang.

Yasash. Biror to'g'ri chiziq olib, unda $AB = a$ kesma ajratamiz (9-b chizma). AB ning o'rtasi D da $DD_1 \perp AB$ va AB kesmaning B nuqtasida $BB_1 \perp AB$ larni hamda $\angle ABB_1$ ning bissektrisasi (BL) ni, so'ngra $\angle LBB_1$ ning bissektrisasi (BK) ni o'tkazamiz. BK va DD_1 larning kesishish nuqtasi O ni markaz qilib, radiusi $AO = BO$ ga teng bo'lgan aylana chizamiz. Haqiqatan, berilgan a kesma, bu aylanaga roppa-rosa sakkiz marta joylashadi [8].

4. Transportir yordamida berilgan tomoni a ga teng bo'lgan muntazam n burchak yasang.

Yasash. Muntazam n burchakning bir tomoniga mos keluvchi markaziy burchak ($\alpha = \frac{360^\circ}{n}$) ni aniqlaymiz (10-a chizma). Bizning misolda $n = 7$. AB ni teng ikkiga bo'lamiz va $AO_1 \perp AC$, $OD \perp AB$ larni o'tkazamiz. Ularning kesishish nuqtasi O_1 ni markaz deb olib, AO_1 radiusli aylana chizamiz va bu aylana bilan DO_1 davomining kesishish nuqtasi O ni aniklaymiz. O ni markaz qilib radiusi OA ga teng bo'lgan aylana chizamiz, unga AB kesma n marta joylashadi.

5. Tomoni a ga teng bo'lgan muntazam n burchak yasang.

Yasash. A nuqtani markaz qilib, AB ga teng radius bilan aylana chizamiz va uni $2n$ ta teng bo'lakka bo'lamiz (10-b chizma). $BC = a_{2n}$

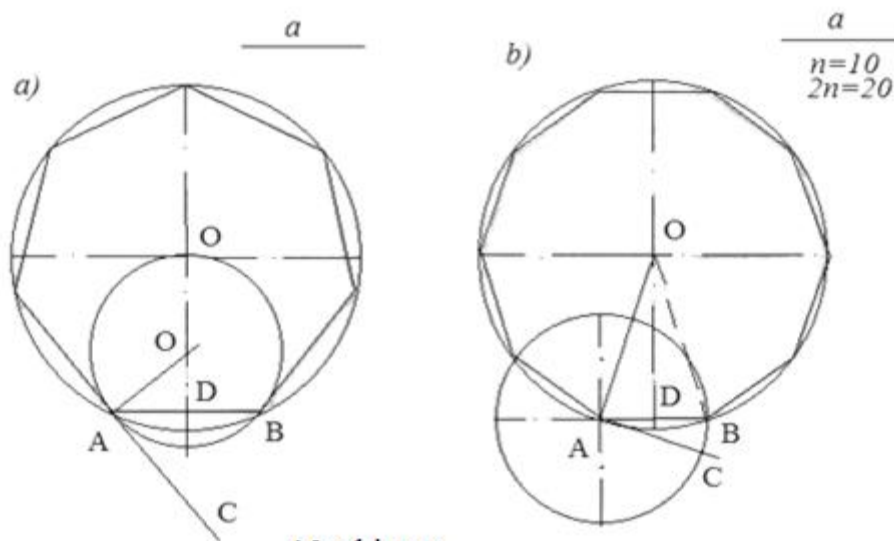
$$BC = \frac{2\pi R}{2n} = \frac{\pi R}{n}; \angle BAC = \frac{360}{2n} = \frac{180}{n}.$$

$AC \perp OA$ va AB kesmaning o'rtasi (D) dan $DO \perp AB$ o'tkazamiz. Ularning kesishish nuqtasi O ni markaz qilib, radiusi OA ga teng bo'lgan aylana chizamiz. Unga $AB = a$ kesmani ketma-ket qo'ysak, rosa n marta joylashadi. Haqiqatan,

$$\angle BOD = \angle AOD = \angle BAC = \frac{180^\circ}{n},$$

$$\angle AOB = 2 \angle AOD = 2 \cdot \frac{180^\circ}{n} = \frac{360^\circ}{n}.$$

Demak, $\angle AOB$ muntazam n burchakning markaziy burchagi ekan.

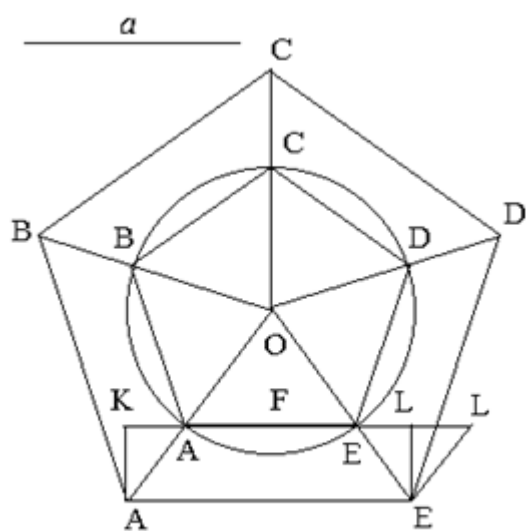


10-chizma.

§ 1.3. Muntazam ko'pburchaklarni uning berilgan elementlari bo'yicha gomotetiya yordami bilan yasash

Biz ko'p figuralarni yasashda gomotetiya va o'xshashlikdan foydalanamiz. Bunda gomotetiyadan foydalanib masalalarni yechishda ancha qulayliklarga olib keladi. Muntazam ko'pburchaklarni uning berilgan elementlari bo'yicha yasashda gomotetiyadan foydalanib ba'zi bir masalalarni ko'rib chiqamiz.

1. Gomotetiya usuli bilan tomoni a ga teng bo'lgan muntazam n burchak ($n=5$) yasang. Yasash. Ixtiyoriy radius bilan aylana chizamiz va uni teng besh bo'lakka bo'lib, ABCDE muntazam ko'pburchakni yasaymiz. Buni gomotetiya yordami bilan tomoni a ga teng bo'lgan burchakka burishning turli hollari bor, ya'ni



11-chizma.

gomotetiya markazi ko'pburchakning ichida uning bir tomonida va tashkarisida bo'lishi mumkin.

1-hol. a) gomotetiya markazi ko'pburchakning ichida bo'lsin. O nuqtadan ko'pburchakning uchlari orqali o'tuvchi nurlar chizamiz (11-chizma). Ko'pburchakning bir, tomonida, masalan, AE da $AF=FE$ kesma ajratamiz. AE ni har ikki tomonga davom ettirib, F nuqtaning har

ikki tomoniga $FK = FL = \frac{a}{2}$ kesmani joylashtiramiz.

(Agar $\frac{a}{2} < \frac{AE}{2}$ bo'lsa, AE ni davom ettirish shart emas, chunki, u vaqtda K va L nuqtalar A va E nuqtalar orasida yotadi.) So'ngra $KA_1 \perp KL$ va $LK_1 \perp KL$ larni o'tkazib, ularning OA va OE nurlar bilan kesishish nuqtalari A_1 va E_1 larni to'g'ri chiziq bilan tutashtiramiz. $A_1B_1 \parallel AB$, $B_1C_1 \parallel BC$, $C_1D_1 \parallel CD$ va $D_1E_1 \parallel DE$ larni o'tkazsak, tomoni berilgan a kesmaga teng bo'lgan muntazam n burchak ($A_1B_1C_1D_1E_1$ beshburchak) hosil bo'ladi [9].

A nuqtadan boshlab, AE bo'yicha $AL_1 = a$ kesma ajratamiz va L_1 nuqtadan AE ning ikkinchi uchi (L) dan o'tuvchi OA nurga parallel L_1E_1 kesmani o'tkazamiz. L_1E_1 ning OE bilan kesishish nuqtasi E_1 ni topamiz. So'ngra $E_1D_1 \parallel ED, D_1C_1 \parallel DC, C_1B_1 \parallel CB, B_1A_1 \parallel BA$ larni o'tkazib, tomoni a ga teng bo'lgan $A_1B_1C_1D_1E_1$ muntazam ko'pburchakni hosil qilamiz.

Gomotetiya markazi ixtiyoriy chizilgan muntazam ko'pburchak (ABCDE) ning ichida, ammo markazda bo'lmagan, gomotetiya markazi ixtiyoriy chizilgan muntazam ko'pburchak (ABCDE) ning bir tomonida (uchida, o'rtasida), gomotetiya markazi ixtiyoriy chizilgan ko'pburchakning tashqarisida bo'lgan hollarni qarab chiqishni tavsiya qilamiz.

2-bob. Fazoviy jismlarning modellarini yasashga doir masalalar

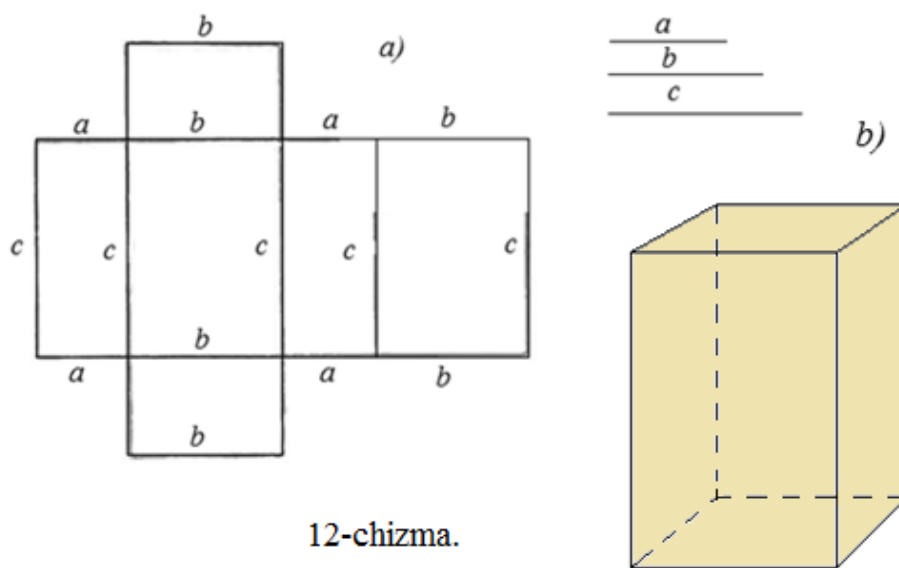
§ 2.1. Parallelepiped va prizmaning modellarini yasash

1. To'g'ri burchakli parallelepipedning modelini yasash

Biz bilamizki geometriyaning strometriya bo'limida fazoviy figuralar o'tiladi. Bu bo'limni o'tganda ko'p o'quvchilar fazoviy figuralarni tasavur qila olmaydi. Shu maqsadda o'quvchilarning tasavvur doirasini kengaytirish uchun fazoviy figuralarning modellarini ko'rsatishda ularning yoyilmalarini yassi uchburchaklar, to'rtburchaklar orqali ko'rsatib berish ancha qulayliklarga olib keladi. Ushbu bobda bazi bir fazoviy figuralarning modellarini yasashini ko'rsatib o'tamiz.

1. To'g'ri burchakli parallelepiped yoyilmasi va modelini uning uch o'lchovi (a, b, c) ga ko'ra yasang.

Yoyilmasi 12-a chizmada, qog'ozdan yasalgan modeli 12-b chizmada ko'rsatilgan.

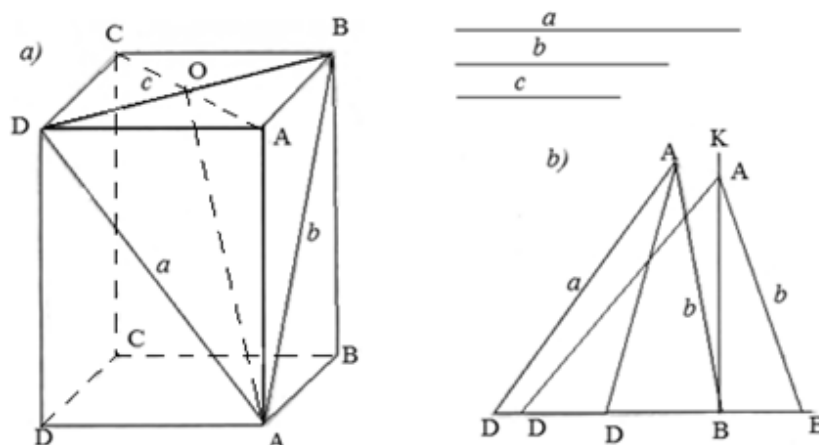


2. To'g'ri burchakli parallelepipedning bir uchidan chiqqan uchta diagonal a, b, c ga teng, uning yoyilmasini va modelini yasang.

Analiz. Faraz qilaylik, izlangan to'g'ri burchakli parallelepiped $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ yasalgan bo'lsin (13-a chizma). Uning diagonalari $AD_1 = a$, $AB_1 = b$, $AC_1 = c$ bo'lsin. $B_1 D_1$ va $A_1 C_1$ larni o'tkazsak, $D_1 B_1 = A_1 C_1 = AC = c$; $A_1 O_1 = O_1 C_1 = \frac{c}{2}$ bo'ladi. To'g'ri burchakli $\triangle AA_1 O_1$ da AO_1 - gipotenuza, a, b, c

kesmalarni tomon qilib yasalgan AD_1B_1 uchburchakning D_1B_1 tomoniga o'tkazilgan medianadir. AA_1O_1 uchburchakning AA_1 kateti izlanayotgan parallelepipedning qirrasiga teng[16].

Bu uchburchakni yasash bilan parallelepipedning qolgan qirralarini ham yasash mumkin.



13-chizma.

Yasash. Tomonlari $A'D'_1 = a$, $A'_1B'_1 = b$, $A'_1D'_1 = c$ bo'lgan $A'B'_1D'_1$ uchburchak yasaymiz (13-b chizma). $B'_1D'_1$ ning o'rtasini A' bilan tutashtiramiz. Gipotenuzasi $A'O'_1$ ga, katetlaridan biri ($O'B'_1$) $\frac{c}{2}$ ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchak yasaymiz. Buning uchun $B'_1K = O'_1B$ o'tkazib, B'_1K ni O'_1 (O'_1A') yoy bilan A'_1 nuqtada kesamiz. $A'_1B'_1$ katet izlangan parallelepipedning AA_1 qirrasiga teng bo'ladi.

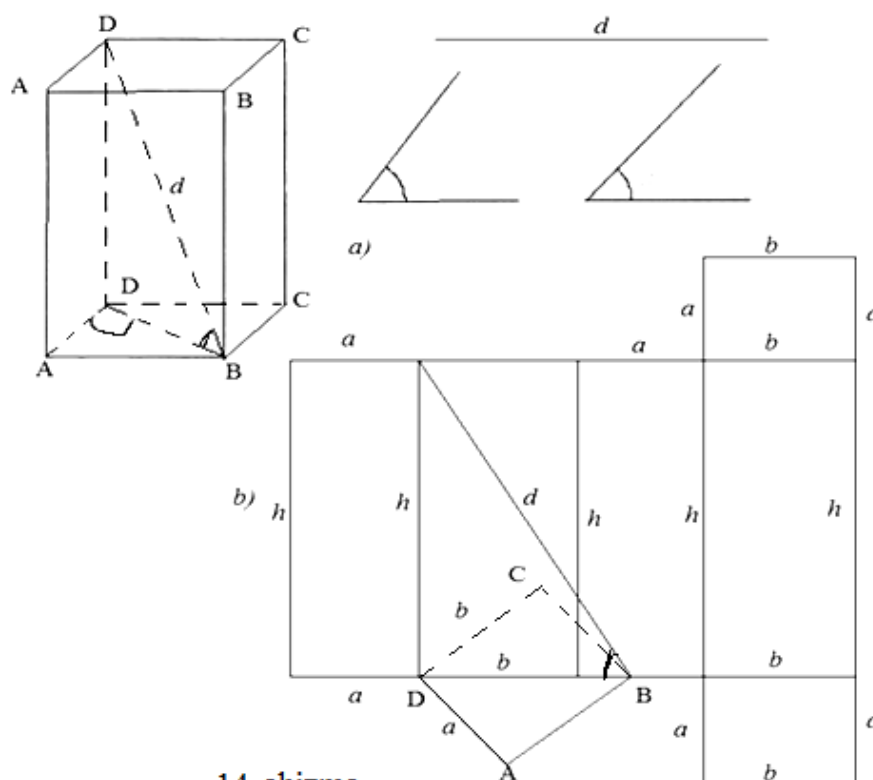
To'g'ri burchakli $A'_1B'_1B'$ uchburchakni uning gipotenuzasi b va $A'_1B'_1$ katetiga ko'ra yasaymiz. Bu uchburchak ikkinchi kateti B'_1B' ning uzunligi izlanayotgan parallelepiped AB qirrasining uzunligiga teng bo'ladi. Gipotenuzasi a va bir kateti $A'_1B'_1$ ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli $A'_1B'_1D'_1$ uchburchakni yasasak, uning ikkinchi kateta $B'_1D'_1$ ning uzunligi izlangan to'g'ri burchakli parallelepiped AD qirrasining uzunligiga teng bo'ladi. Bir uchidan chiqqan uchta qirra (AD , AA_1 va AB) ning topilgan uzunliklaridan foydalanib, izlangan to'g'ri burchakli parallelepipedning yoyilmasi va modelini yasaymiz.

3. To'g'ri burchakli parallelepipedning diagonal d asos tekisligi bilan β ,

asos diagonali esa asos tomoni bilan α burchak tashkil etadi. Parallelepipedning yoyilmasi va modelini yasang.

Yasash. Masala shartiga ko'ra $BD_1 = d$, $\angle B_1BD = \beta$, $\angle ADB = \alpha$ (14-a chizma). $\triangle BDD_1$ va $\triangle ADB$ lar to'g'ri burchakli, shuning uchun gipotenuzasi d va o'tkir burchagi β ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli $\triangle D'B'D'_1$ ni yasaymiz (14-b chizma). Bu uchburchakning bir kateti $D'D'_1 = h$, ikkinchi kateti $D'B' = b$ bo'lsin.

$\angle B'D'A' = \alpha$ ni yasab, $B'A' \perp A'D'$, $D'C' \perp A'D'$, $B'C' \perp D'C'$ larni o'tkazsak, $A'B'C'D'$ to'g'ri turtburchak hosil bo'ladi. Bu

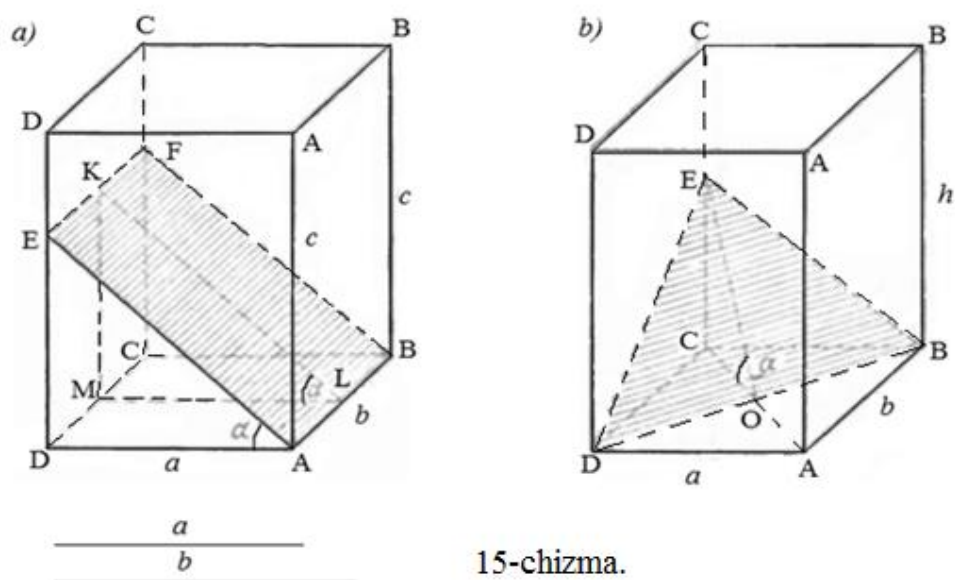


14-chizma.

izlanayotgan parallelepiped asosining kattaligiga teng bo'ladi. Uning tomonlarini a va b harflari bilan belgilaymiz. Berilgan uchta o'lchovi a , b va h ga ko'ra, parallelepiped yoyilmasi va modelini yasaymiz.

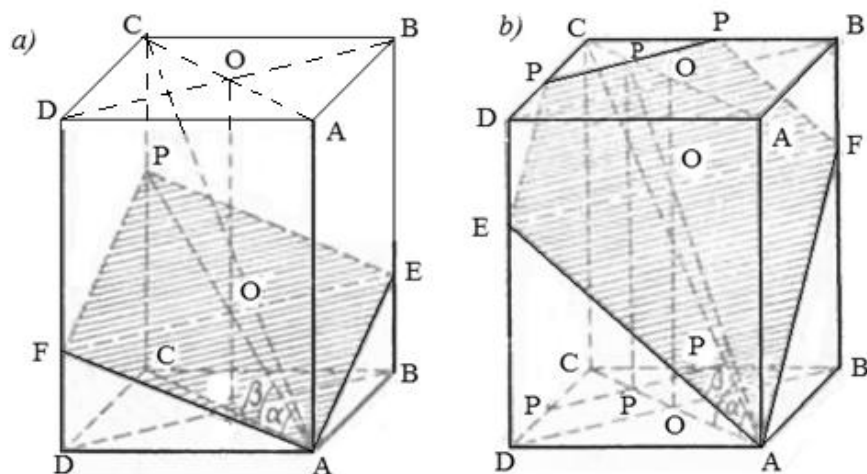
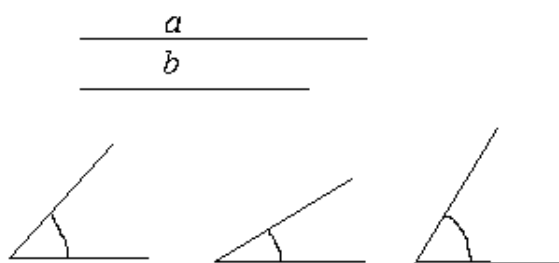
2. To'g'ri burchakli parallelepiped kesimining modelini yasash

1. To'g'ri burchakli parallelepipedning uchala o'lchovi a , b , c ga teng. Asosning AB tomonidan asos tekisligi bilan α burchak tashkil qiluvchi tekislik o'tkazilgan. Kesuvchi tekislik hamda parallelepipedning modelini yasang (15-a chizma).



2.Parallelepipedning balandligi H , asosining tomonlari a va b ga teng. Parallelepiped asosining bitta diagonalini orqali asos tekisligi bilan α burchak tashkil qiluvchi kesim o'tkazilgan. Bu kesimning kattaligi hamda parallelepipedning modelini yasang (15-b chizma).

3.To'g'ri burchakli parallelepipedning diagonalini asos tekisligi bilan α burchak tashkil qiladi. Bu parallelepiped asosining tomonlari a va b .

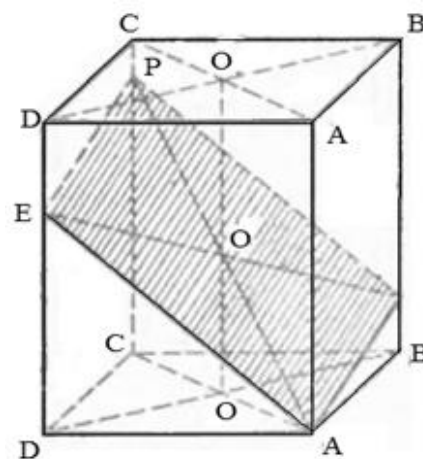


16-chizma.

Asosning bir uchidan asos tekisligi bilan β burchak hosil qiluvchi kesim o'tkazilgan. Kesimning haqiqiy kattaligi, parallelepiped yoyilmasi va modelini yasang ($\beta < \alpha$ va $\beta > \alpha$ bo'lgan hollarni qarang). AA_1C_1C diagonal kesimini yasaymiz. Bunda $\angle C_1AC = \alpha$. $\angle PAC = \beta$. $\beta = \beta_1 < \alpha$ bo'lgan hol 16-a chizmada, $\beta = \beta_2 > \alpha$ bo'lgan hol 16-b chizmada ko'rsatilgan. OO_1 o'qning AP bilan kesishish nuqtasi O'_1 dan $EO'_1 \parallel DB$ o'tkazamiz. U vaqtda $\beta_1 < \alpha$ hol uchun 16-a chizmadagi $AEPF$, $\beta < \alpha$ hol uchun 16- b chizmadagi AEP_1P_2F kesim hosil bo'ladi. Bu shakllarga qarab kesimlarning haqiqiy kattaliklarini yasash mumkin.

4. To'g'ri burchakli parallelepipedning diagonalini D ga, asosining tomonlari a va b ga teng. Asosining biror uchi A hamda BB_1 va DD_1 qirralarda berilgan E va F nuqtalar (17- chizma) orqali kesim o'tkazing. Bu kesimning haqiqiy kattaligini va parallelepipedning modelini yasang.

Asos diagonalini va OO_1 o'qni o'tkazamiz hamda E va F nuqtalarni to'g'ri chiziq yordamida tutashtiramiz. EF bilan OO_1 ning kesishish nuqtasi orqali AO'_1 ni o'tkazamiz va uni CC_1 qirra bilan kesishguncha davom ettiramiz. $AEPF$ izlangan kesim bo'ladi.



17-chizma.

Bu kesimning haqiqiy kattaligini ko'rsatmada berilgan yasashga asoslanib yasaladi.

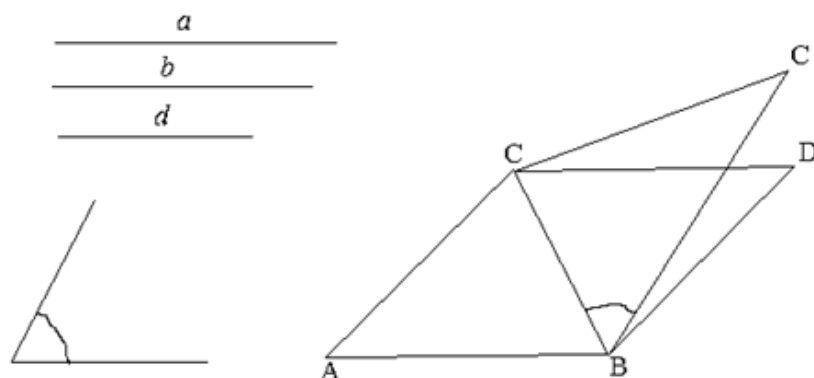
E va F nuqtalarning vaziyatiga qarab, kesim ustki asosning A_1C_1 diagonalining ixtiyoriy nuqtasidan o'tishi mumkin. Bu hollarda ham yasash o'z kuchida qolaveradi.

3. To'g'ri parallelepipedning modelini yasash

1. To'g'ri parallelepiped asosining tomonlari a va b ga, asosning kichik diagonalini esa d ga teng. Parallelepipedning kichik diagonalini asos tekisligi bilan α burchak tashkil qiladi. Parallelepipedning yoyilmasi va modelini yasang.

Yasash. Parallelepiped asosi tomonlari a , b va asosining kichik diagonalini d bo'lgan

parallelogrammdan iborat. Buni yasash uchun $AB = b$ kesma olamiz. A nuqtani markaz qilib, a ga teng radius bilan yoy, B nuqtani markaz qilib, d ga teng radius bilan yoy chizib, bu ikkala yoyning kesishish nuqtasi C_1 ni topamiz, uni A va B nuqta bilan tutashtirib, $CD \parallel AB$, $BD \parallel AC$ larni o'tkazamiz (18-chizma). ABCD parallelogramm izlangan paralelepiped asosining haqiqiy kattaligi bo'ladi.



18-chizma.

Paralelepipedning yon qirrasini yasash uchun $CC_1 \perp CB$ o'tkazamiz va $\angle CBC_1 = \alpha$ bo'ladigan qilib, BC_1 nur chizamiz. CC_1 izlangan paralelepipedning yon qirrasiga teng bo'ladi. Asosi ABDC parallelogrammga, yon qirradi CC_1 ga teng bo'lgan to'g'ri paralelepiped yoyilmasini va modelini yasaymiz.

4. Og'ma paralelepipedning modelini yasash

1. Bir uchidan chiqqan qirralari a, b, c va ular orasidagi burchak lari $(a, b) = \alpha$, $(b, c) = \beta$, $(a, c) = \gamma$ bo'lgan og'ma paralelepipedning diagonal kesimlarining haqiqiy kattaliklari yasalsin.

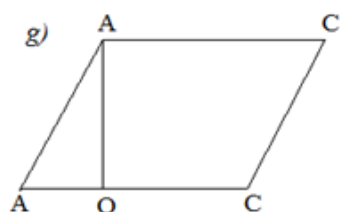
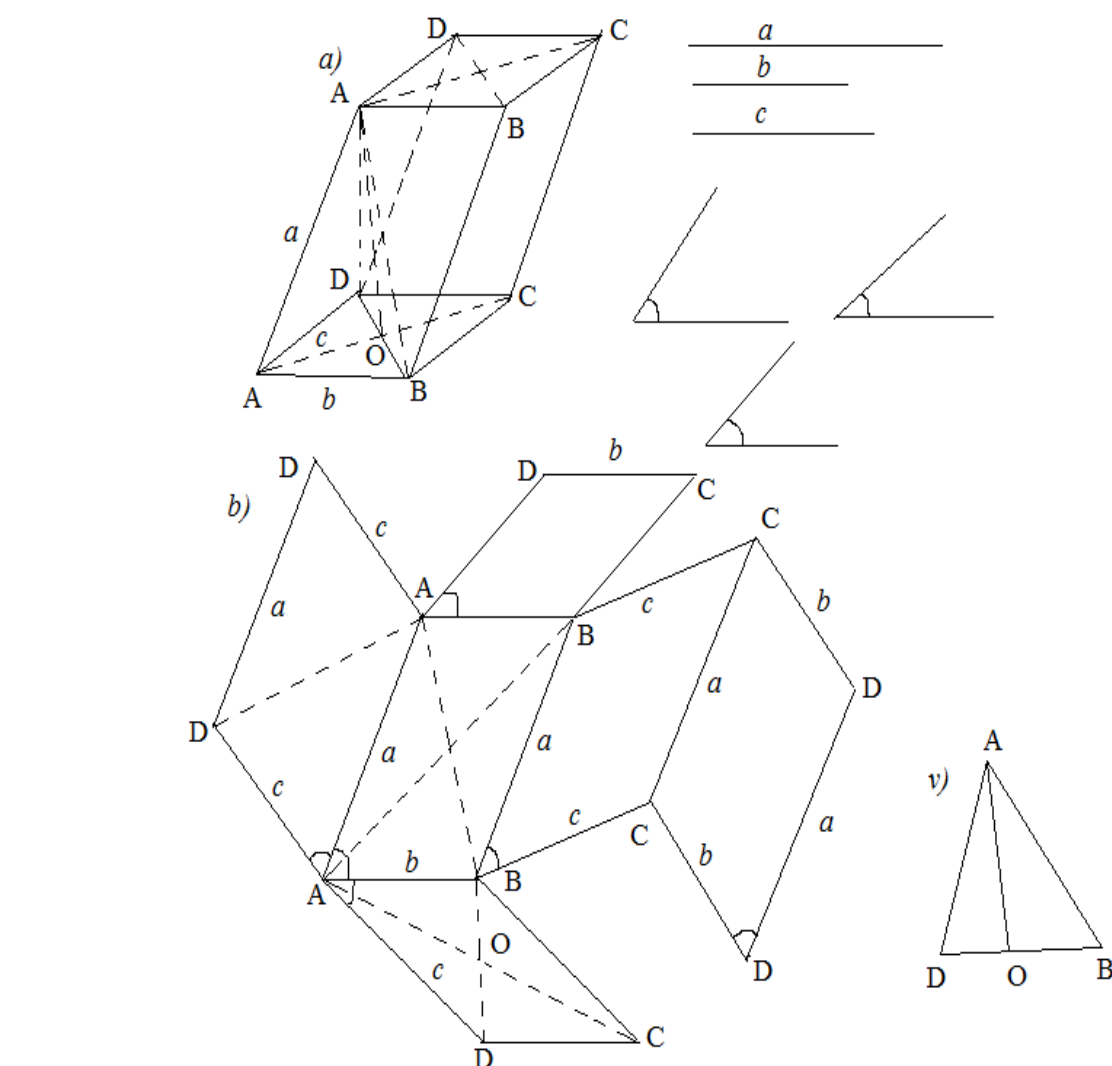
Analiz. Faraz qilaylik, berilgan shartni qanoatlantiradigan paralelepiped $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ (19-a chizma) bo'lsin. $AA_1 C_1 C$ va $BB_1 D_1 D$ diagonal kesimlarni o'tkazamiz. $AA_1 C_1 C$ kesimini aniqlash uchun $A_1 A C$ burchakning haqiqiy kattaligini yasash kerak. Buning uchun $A_1 B$, $A_1 D$ va $A_1 O$ larni o'tkazamiz. Bunda $A_1 O$ kesma $A_1 B D$ uchburchakning A uchidan o'tkazilgan mediana, $A_1 A C$ burchak esa izlangan AOA_1 uchburchakning burchagi bo'ladi.

Yasash. Berilganlarga ko'ra paralelepipedning yoyilmasini yasaymiz. Buning uchun $A'C'$, $D'B'$, $A_1'B'$, $A_1'D'$ larni o'tkazamiz (19-b chizma). Tomonlari $B'D'$, $A_1'D'$, $A_1'B'$ larga teng bo'lgan $A''_1 B''D''$ uchburchakni yasaymiz (19-v chizma).

Uning $B''D''$ tomoniga A''_1O'' medianani o'tkazamiz va asosi $A'O''$ yon tomonlari $A'A'_1$ va A'_1O'' ga teng bo'lgan $A''A'''_1O'''$ uchburchakni yasaymiz (19-g chizma). Bu uchburchakning $A'''_1A''O'''$ burchagi AA_1C_1C kesimning ham burchagidir. Bu kesimning haqiqiy kattaligi, ikki tomoni $A'C'$, $A'A'_1$ kesmalarga, ular orasidagi burchagi $A'''A''O'''$ ga teng bo'lgan parallelogrammdan iborat.

Bu parallelogrammni hosil qilish uchun $A''O'''$ ning davomida $A''O''' = O'''C''$ kesma ajratamiz.

$A''A''_1C'''_1C''$ parallelogramm izlangan kesim bo'ladi.



19-chizma.

BB_1D_1D diagonal kesimning haqiqiy kattaligini yasash uchun AB_1 , B_1C , B_1O larni o'tkazamiz. Bu vaqtda $BB_1 = a$, $AB = b$, $BC = c$, $\angle ABB_1 = 180^\circ - \alpha$, $\angle ABC = 180^\circ - \beta$, $\angle B_1BC = \gamma$ bo'lib, AA_1C_1C kesimni qanday

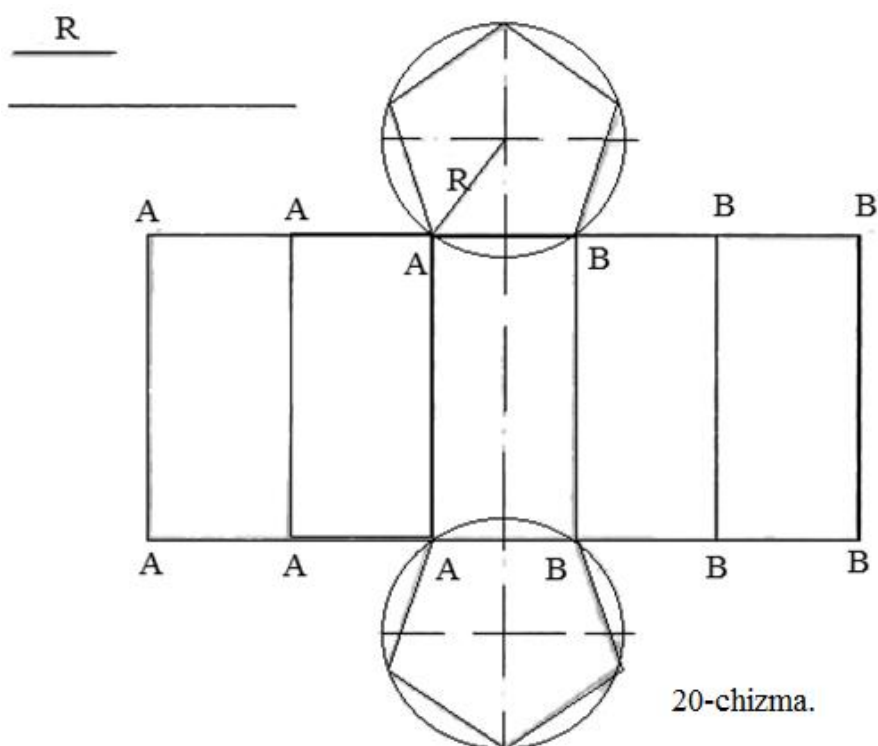
yasagan bo'lsak, BB_1D_1D ni ham shunday yasaymiz.

Tekshirish. a, b, c kesmalarning uzunliklari ixtiyoriy musbat sondagi uzunliklar bo'la oladi. $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$, $\alpha < 180^\circ$, $\beta < 180^\circ$, $\gamma < 180^\circ$ va ixtiyoriy ikki burchakning yig'indisi uchinchisidan katta bo'lishi kerak.

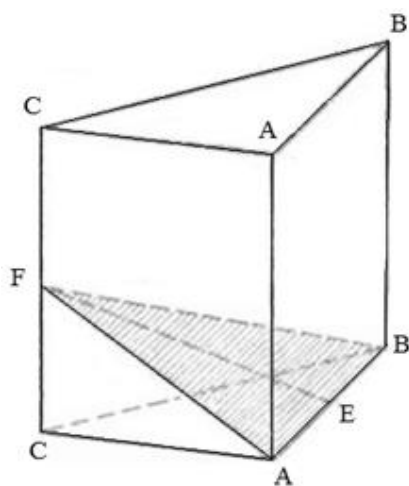
5. Muntazam prizmaning modelini yasash

1. Asosiga tashqi chizilgan aylananing radiusi R va yon qirradi h ga teng bo'lgan muntazam n burchakli prizmaning yoyilmasi va modelini yasang.

Yasash. Radiusi R ga teng bo'lgan aylana chizamiz va unga ichki muntazam n burchak yasaymiz (bizning misolda $n = 5$, 20-chizma).



Uning bir tomoni (AB) ni har ikki tomonga davom ettiramiz. A va B nuqtalardan $AA' \perp AB$, $BB' \perp AB$ larni o'tkazib, $AA' = BB' = h$ kesmalarni ajratamiz. $A'B'$ ni o'tkazib (bunda $A'B' = AB$), uni har ikki tomonga davom ettiramiz. Tomoni $A'B'$ ga teng bo'lgan muntazam n burchak yasaymiz. AB va $A'B'$ davomlarining har ikkalasiga $AB = AA_1 = A_1A_2 = \dots = A'B' = A'A_1' = \dots$ kesmalarni $(n - 1)$ martadan qo'yib chizamiz. Bo'linish nuqtalaridan mos ravishda $A_1A'_1$, $A_2A'_2$, $\dots$, $B_1B'_1$, $B_2B'_2$ $\dots$ larni o'tkazamiz va yopishtirish uchun chetlarida klapanlar qoldiramiz. Shu bilan izlangan yoyilma hosil bo'ldi.



21-chizma.

6. Muntazam prizma kesimining modelini yasash

1. Asosining tomoni a , yon qirrasini b ga teng bo'lgan uchburchakli muntazam prizma asosining bir tomoni (AB) va unga qarshi yotgan yon qirrasining o'rtasi (F) dan o'tkazilgan kesimi va modelini yasang (21- chizma).

2. Asosining tomoni a , yon qirrasini b ga teng bo'lgan olti burchakli muntazam prizmaning:

a) pastki asosining bir tomoni (AB) va uning qarshisidagi yoqning F o'rta chizig'i (E_2D_2) orqali o'tkazilgan kesimi bilan birgalikdagi (22-chizma);

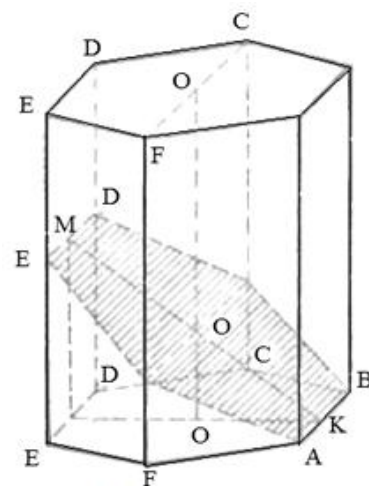
b) asoslarining ikkita qarama-qarshi diagonallari orqali o'tgan kesimi bilan birgalikdagi;

v) pastki asosining kichik diagonali va ustki asosining unga qarshi yotgan uchi orqali o'tgan kesimi bilan birgalikdagi;

g) pastki asosining katta diagonali va ustki asosining unga parallel tomoni orqali o'tgan kesimi bilan birgalikdagi;

d) ustki asosining ikkita qo'shni tomonlarining o'rtalari, pastki asosining ularga eng yaqin kichik diagonali orqali o'tgan kesimi bilan birgalikdagi;

e) pastki asosining kichik diagonali orqali asos tekisligi bilan $\alpha = 30^\circ$ hosil qilib prizmaning o'qini kesadigan kesimi bilan birgalikdagi modelini yasang.

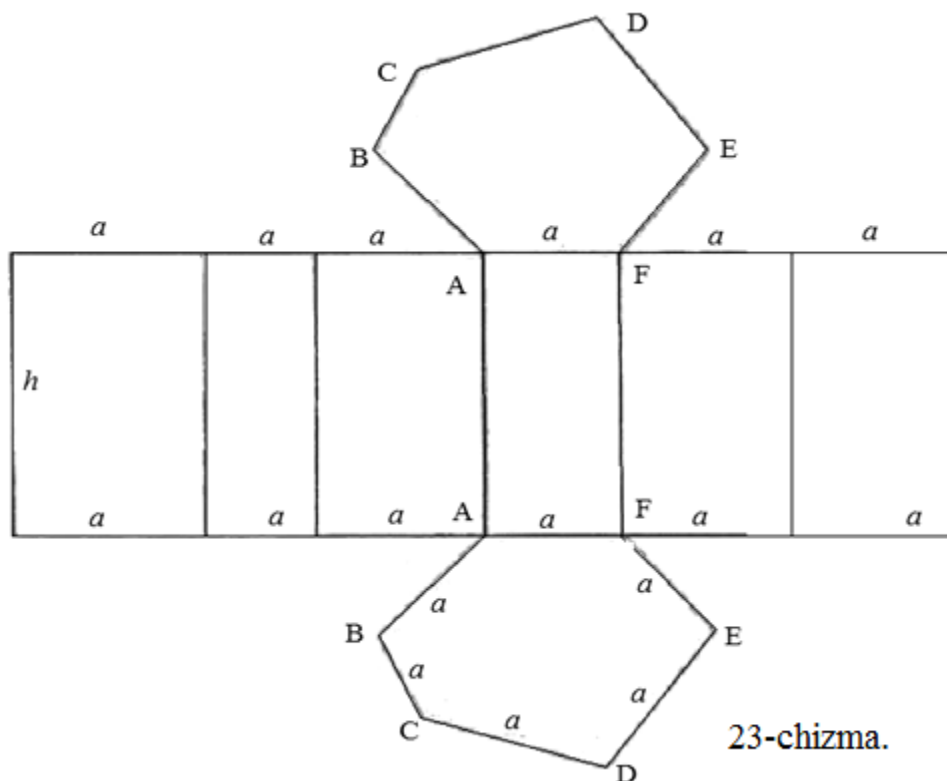


22-chizma.

7. To'g'ri prizmaning modelini yasash

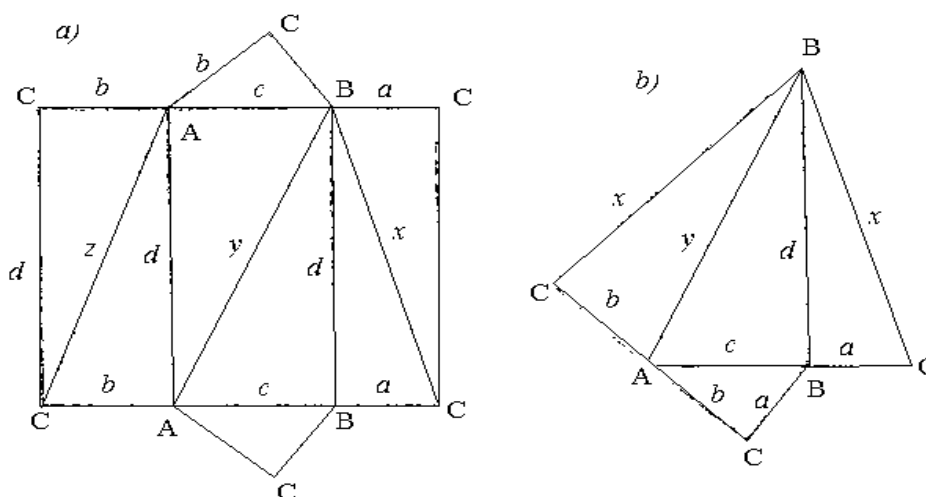
1. Asosining tomonlari $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ ular orasidagi burchaklari $(a_1a_2) = \alpha_1, (a_2a_3) = \alpha_2, (a_3a_4) = \alpha_3, (a_4a_5) = \alpha_4, (a_5a_6) = \alpha_5, (a_6a_1) = \alpha_6$ va yon qirrasini h ga teng bo'lgan to'g'ri prizmaning yoyilmasi va modelini yasang.

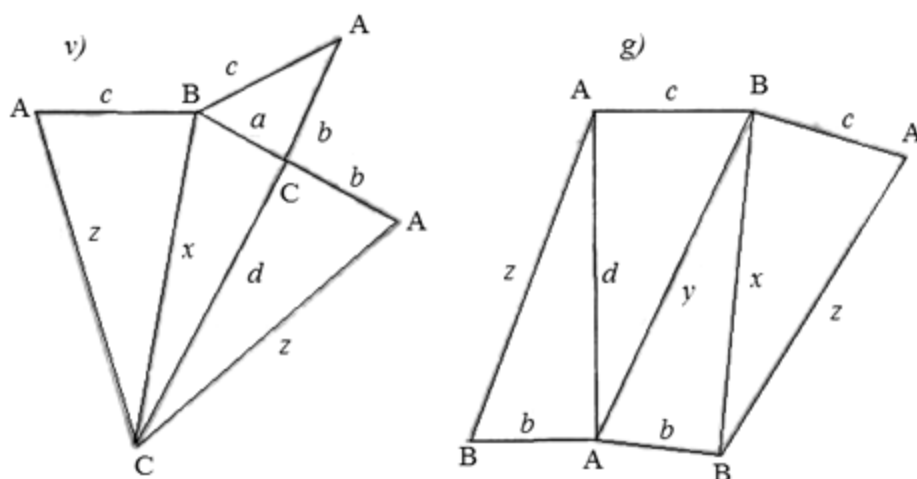
Bu prizmaning yoyilmasi 23-chizmada ko'rsatilgan.



2. Asosining tomonlari a, b, c va yon qirralari h ga teng bo'lgan uchburchakli to'g'ri prizmani umumiy B uchga ega bo'lgan uchta uchburchakli piramidaga ajrating. Ularning yoyilmalarini va modelini yasang.

Prizmaning yoyilmasi 24-a chizmada berilgan, uning yon yoqlarining diagonallarini x, y, z orqali belgilab, berilgan prizmani uch burchakli piramidalarga ajratamiz va ularning 24-b, v, g chizmadagi yoyilmasini hosil qilamiz.





24-chizma.

8. Og'ma prizmaning modelini yasash

Og'ma prizmalarning yoyilmalari va modellarini yasashga doir masalalar yechishga kirishishdan oldin, uch yoqli burchaklarga doir masalalarni yechish bilan tanishib chiqamiz, chunki u kelgusida masalalar yechish uchun zarurdir.

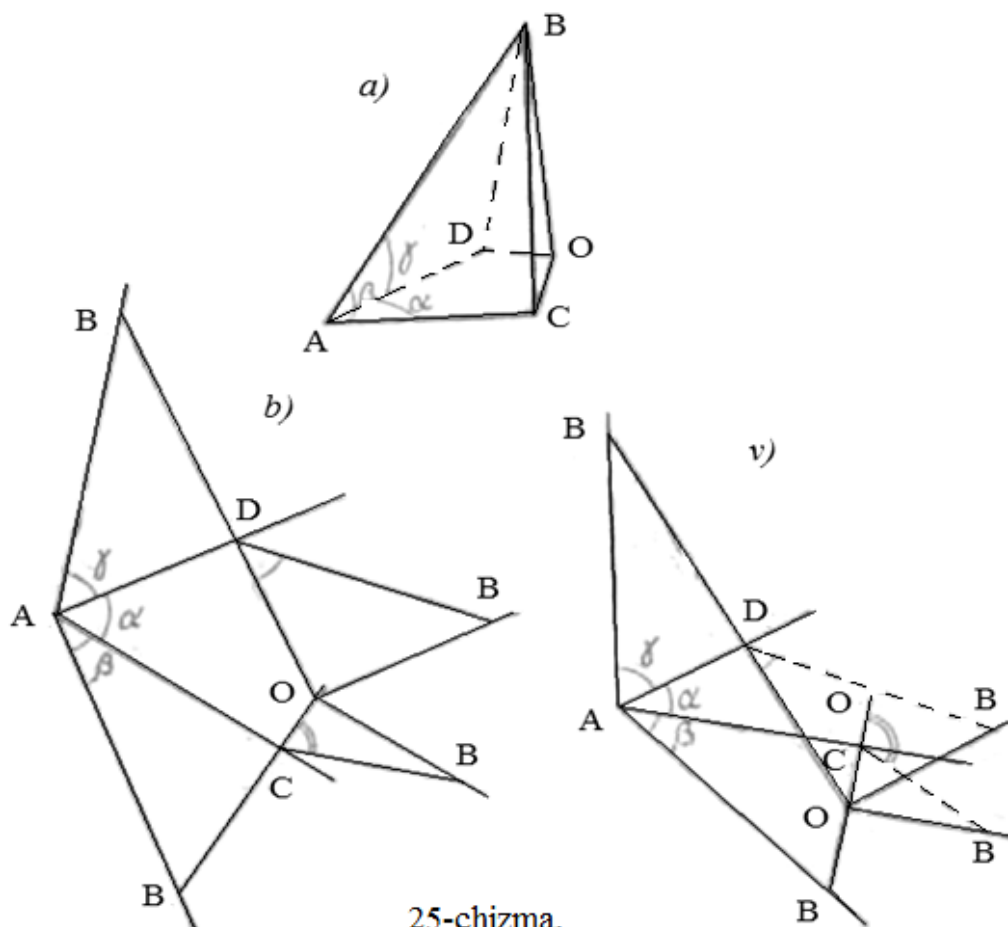
1. Chiziqli burchaklari α , β , γ bo'lgan uch yoqli burchakning ikki yoqli burchaklari (chiziqli burchagining haqiqiy kattaligi) ni yasang.

Yasash. Faraz qilaylik, ABCD tekis burchaklari $\angle CAD = \alpha$, $\angle CAB = \beta$, $\angle BAD = \gamma$ bo'lgan uch yoqli burchak bo'lsin (25-a chizma). Bu burchakning biror qirrasida yotgan B nuqtadan unga qarshi yotgan CAD burchak tekisligiga perpendikulyar qilib BO ni hamda $BO \perp AD$, $BC \perp AC$ larni o'tkazamiz. D va C nuqtalarni O nuqta bilan tutashtiramiz. U vaqtda to'g'ri burchakli uchburchak BOD va $\angle BDO$ hamda $\angle BOC$ dagi $\angle BCO$ berilgan uch yoqli burchakning ikki yoqli burchaklari bo'ladi, ya'ni

$$(\alpha, \gamma) = \angle BDO, (\alpha, \beta) = \angle BCO.$$

Izlangan burchaklarning haqiqiy kattaliklarini hosil qilish uchun $\triangle BDO$ va $\triangle BCO$ larning haqiqiy kattaliklarini va berilgan uch yoqli burchakning yoyilmasini yasaymiz (25- b chizma). Uning AB qirrasiga mos nurlarida ixtiyoriy uzunlikda $A_1B_1 = A_1B_1 = a$ kesmalarni ajratamiz va AD hamda AC larga mos nurlarga $B_1D_1 \perp A_1D_1$, $B_2C_1 \perp A_1C_1$ perpendikulyarlarni o'tkazamiz. B_1D_1 va B_2C_1 davomlarining kesishish nuqtasini O_1 bilan belgilaymiz. Bir kateti O_1D_1 va gipotenuzasi D_1B_1 ga teng bo'lgan $O_1D_1B_1$ hamda bir kateti O_1C_1 va gipotenuzasi

C_1B_2 ga teng bo'lgan $O_1C_1B_4$ to'g'ri burchakli uchburchaklarni yasasak, $O_1D_1B_3$ va $O_1C_1B_4$ burchaklari izlangan ABCD uch yoqli burchakning (α, γ) va (α, β) ikki yoqli burchaklarining chiziqli burchaklariga teng bo'ladi.



25-chizma.

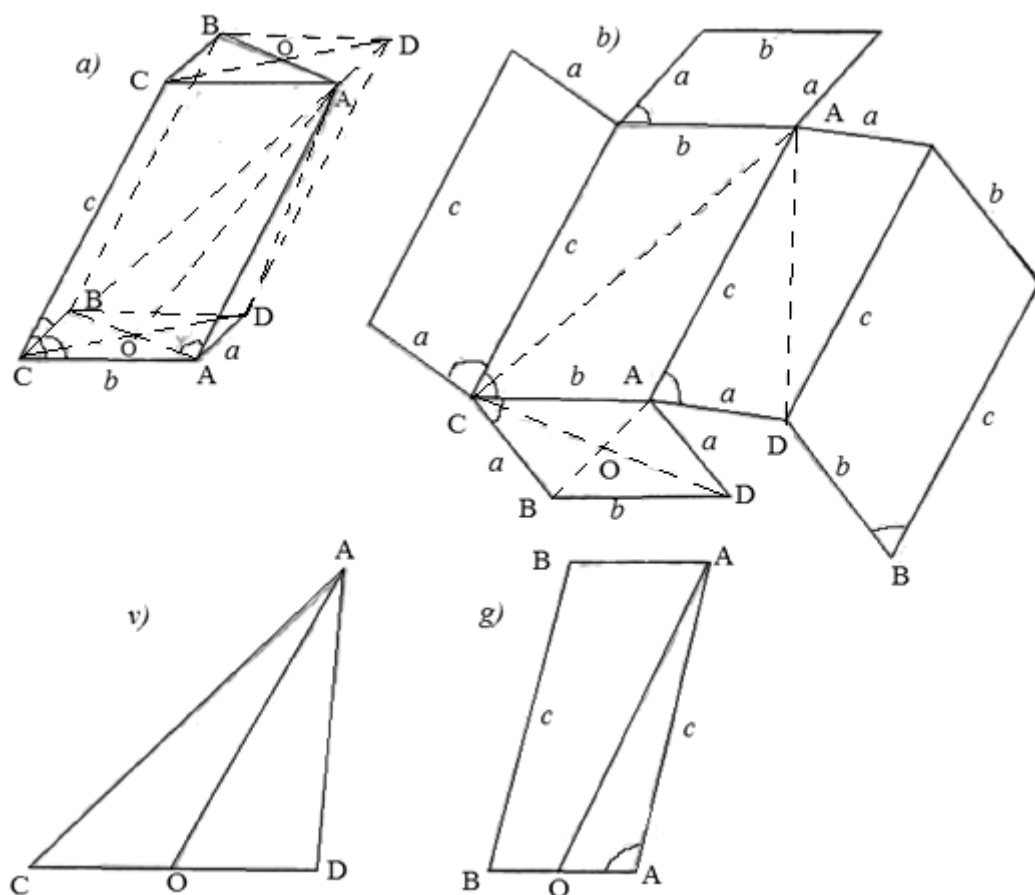
Haqiqatan, $\triangle D_1O_1B_3 = \triangle DOB$ va $\triangle B_4O_1C_1 = \triangle BOC$. Bundan $\angle B_3D_1O_1 = \angle BDO = (\alpha, \gamma)$, $\angle B_4O_1C_1 = \angle BOC = (\alpha, \beta)$ kelib chiqadi. C nuqtadan $\triangle ABD$ tekisligiga perpendikulyar tushirib yuqoridagi usul bilan (β, γ) ni ham yasash mumkin.

Tekshirish. $\alpha + \beta + \gamma < 360^\circ$, $\alpha + \beta < \gamma$, $\alpha + \gamma < \beta$, $\beta + \gamma < \alpha$ bo'lishi kerak, aks holda uch yoqli burchak hosil bo'lmaydi. Agar B_1 va B_2 nuqtalardan A_1D_1 va A_1C_1 qirralarga o'tkazilgan perpendikulyar α burchak tekisligida kesishsa, (α, β) va (α, γ) burchaklar o'tkir bo'ladi. Agar γ yoki β burchak tekisligida kesishsa, α burchak tekisligining shu burchak tekisligi bilan tashkil qilgan burchagi o'tmas bo'ladi (25-v chizma). Bunda $(\alpha, \beta) = \angle O_2C_1B_4$ bo'lib, $\angle O_1C_1B_4$ ning 180° ga to'ldiruvchisi hisoblanadi.

2. Bir uchidan chiqqan uchta qirrasi a, b, c va ular orasidagi burchaklari $(a, b) = \alpha$, $(b, c) = \beta$, $(a, c) = \gamma$ berilgan. Uchburchakli prizmaning yoyilmasi va modelini yasang.

Analiz. $ABCA_1B_1C_1$ berilgan shartni qanoatlantiradigan uchburchakli prizma bo'lsin (26-a chizma). Unda $AC=b$, $BC=a$, $CC_1=c$, $\angle ACB = \alpha$, $\angle ACC_1 = \beta$, $\angle BCC_1 = \gamma$. Bu prizmaning yoyilmasini yasashda CC_1 qirraga tegib turgan to'rt yog'i bevosita yasaladi. AA_1B_1B yog'ini qanday yasashni ko'rsatamiz. Buning uchun uchburchakli prizmani $ABCA_1B_1C_1D_1$ parallelepipedga to'ldiramiz. U vaqtda $\angle A_1AC = 180^\circ - \beta$, $\angle A_1AD = 180^\circ - \gamma$, $AD = a$, $AA_1 = c$ bo'ladi. A_1C , A_1D va A_1O larni o'tkazsak, $\triangle CA_1D$ va uning medianasi A_1O hosil bo'ladi. $\triangle A_1AO$ ning A_1AO burchagi yasalishi kerak bo'lgan yoq-parallelogrammning bir burchagidir. AA_1O burchakning tomonlari $AA_1=a$, $AO = \frac{AB}{2}$ ga teng, A_1DC uchburchakning tomonlari $ADBC$, AA_1D_1D va CAA_1C parallelogrammlarning diagonallariga teng, A_1O esa bu uchburchakning A_1 uchidan o'tkazilgan medianasidir.

Yasash. $ADBCA_1D_1B_1C_1$ parallelepipedning yoyilmasini yasaymiz (26-b chizma). Tomonlari $C'D'' = C'D'_1$, $C''A''_1 = C'A'_1$ va $A''_1D'' = A'_1D'$ bo'lgan uchburchak yasaymiz va uning A'_1O'' medianasini o'tkazamiz (26-v chizma). Tomonlari $A''_1A'' = A'_1A' = c$, $A''_1O''' = A''_1O''$ va $O'''A'' = A'O'$ bo'lgan $O'''A''_1A''$ uchburchakni yasaymiz (26-g chizma). Bu uchburchakning $A''_1A''O'''$ burchagi AA_1B_1B parallelogramm A_1AB burchagining haqiqiy kattaligiga tengdir.

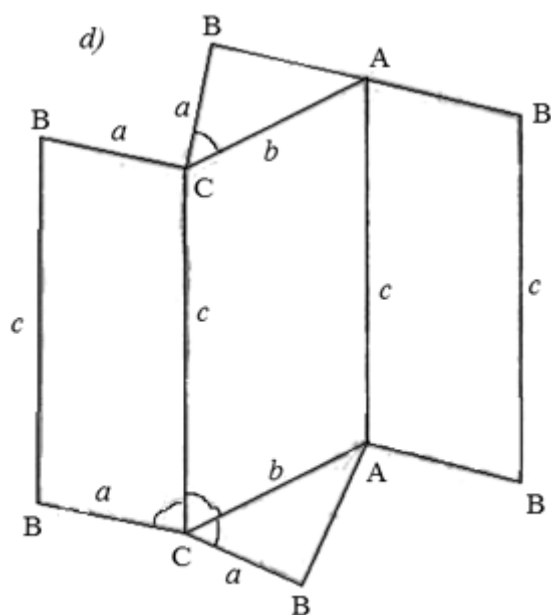


26-a,b,v,g chizma.

AA_1B_1B yoqining haqiqiy kattaligini hosil qilish uchun $A''O'''$ ni O''' nuqtadan chap tomonga davom ettirib, unda $O'''B'' = O'''A''$ kesma ajratamiz hamda $B''B'_1 \parallel A''A''_1$ va $A''_1B''_1 \parallel A''B''$ larni o'tkazamiz. Hosil bo'lgan $A''_1A''B''B''_1$ izlangan AA_1B_1B parallelogrammning haqiqiy kattaligidir. Berilgan shartni

qanoatlantiruvchi uchburchakli prizma yoyilmasi 26-d chizmada berilgan. Bunda $\angle A''_1A''B'' = \angle A''_1A''B''$, $A''B''B''_1A''_1$ parallelogramm $A''B''B''_1A''_1$ parallelogrammga teng.

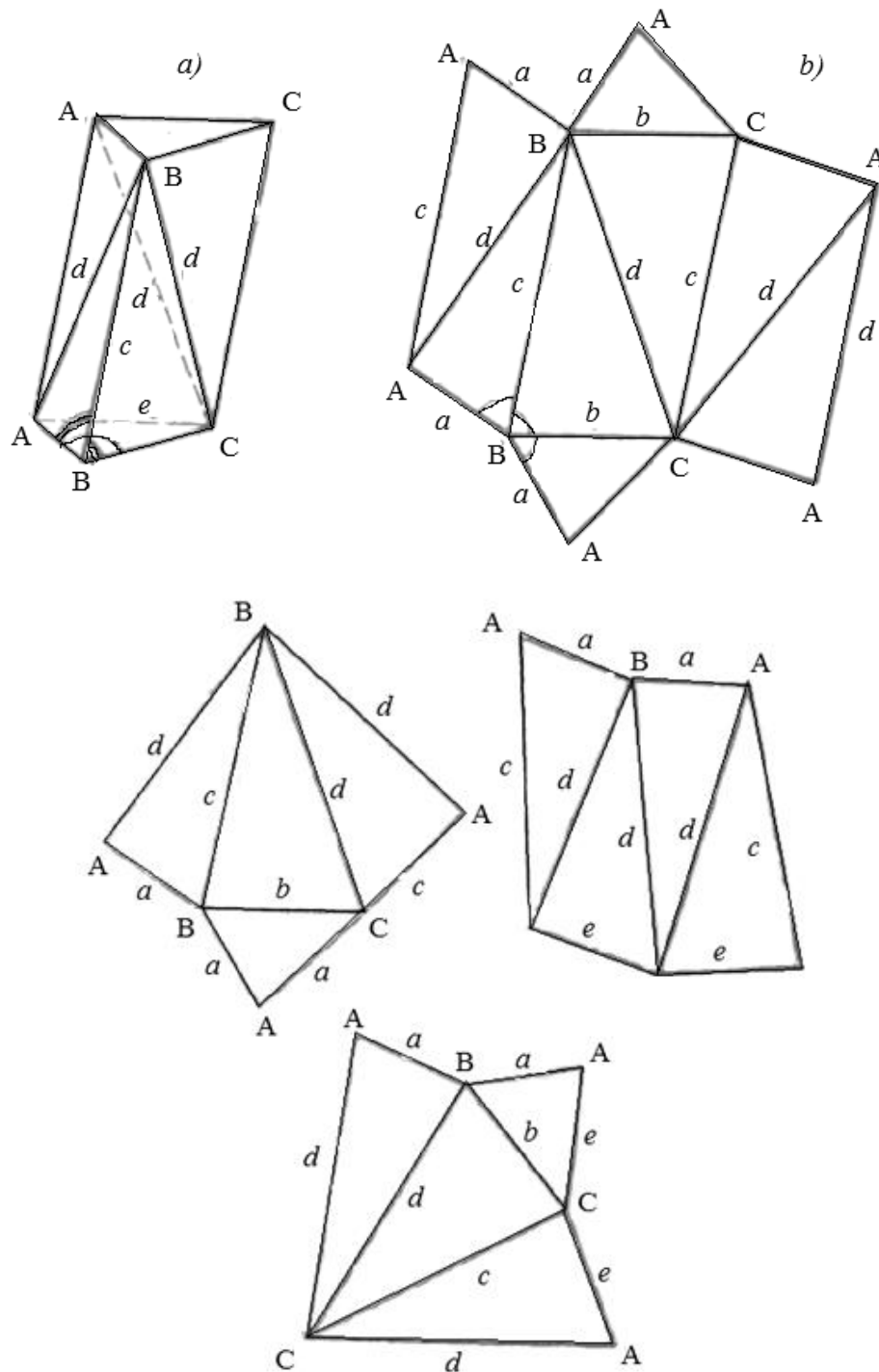
3. Uch burchakli prizmaning bir uchidan chiqqan qirralari a, b, c . Ular orasidagi tekis burchaklari $(a, b) = \alpha$, $(b, c) = \beta$, $(a, c) = \gamma$ ga teng. Bu prizmani uchta tengdosh



26-d chizma.

piramidaga ajrating va ularning yoyilmalarini yasang.

Yechish. Faraz qilaylik, 27-a chizmadagi prizma izlangan prizma bo'lsin, unda $AB = a$, $BC = b$, $BB_1 = c$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle B_1BC = \beta$, $\angle B_1BA = \gamma$ bo'lsin. Bu prizma uchta B_1ABC , B_1AA_1C , B_1A_1CC tengdosh piramidaga ajraladi.



27-chizma.

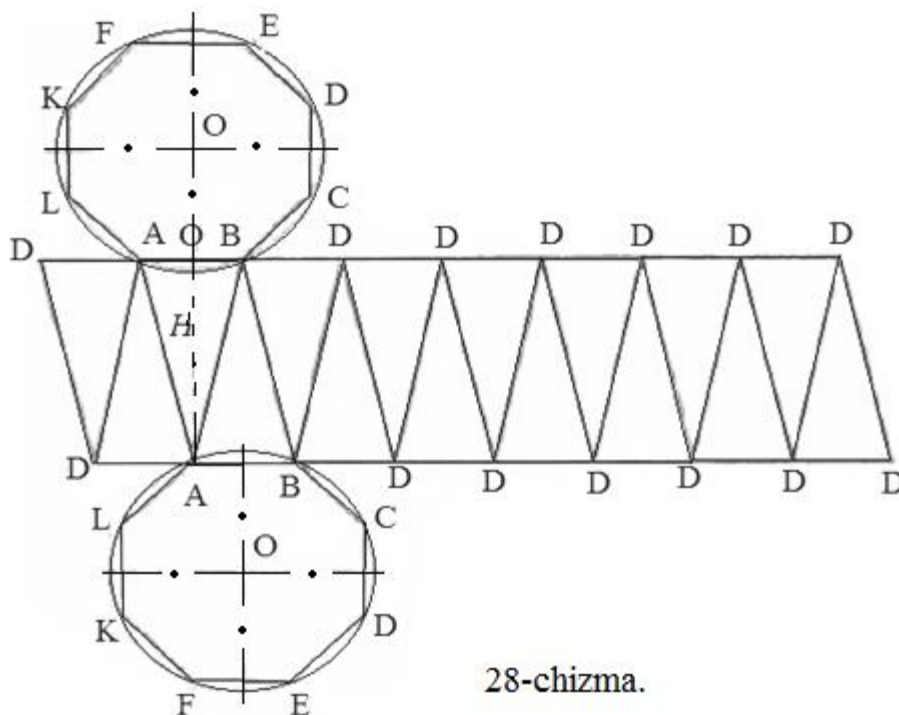
Ularning yoyilmalarini yasash uchun prizma yoqlarining diagonallari $AB_1 = d_1$, $B_1C_1 = d_2$, $AC = d_3$ larning haqiqiy uzunliklarini yasash kerak. Buning uchun

$ABCA_1B_1C_1$ uchburchakli prizmaning yoyilmasini yasaymiz (2-masala). d_1 , d_2 va d_3 diametrlarning haqiqiy yoyilmadagi kattaliklarini yasash uchun (27-b chizma) $A'B_1$, B_1C' , $C'A_1$ larni o'tkazamiz. U vaqtda $A'B_1 = d'_1$, $B_1C' = d'_2$, $C'A_1 = d'_3$ hosil bo'ladi. Keyin uchburchakli piramidalarning yoyilmalarini yasaymiz (27-b, g, d chizma).

4. Antiprizmaning asoslari tomoni a ga teng bo'lgan muntazam n burchak. Yon yoqlari balandligi H ga teng bo'lgan uchburchaklardir. Antiprizmaning yoyilmasi va modelini yasang.

Yasash. Tomoni $AB = a$ bo'lgan $ABCDEFKL$ muntazam n burchakni (bizning misolda $n = 8$) yasaymiz. Uning AB tomonining o'rtasi O nuqtadan $O_1A_1 \perp AB$ ni o'tkazib, unda $O_1A_1 = H$ kesma ajratamiz. A_1 nuqtani A va B nuqtalar bilan tutashtiramiz.

AB ni chap va o'ng tomonga davom ettirib, unda $BD_1 = D_1D_2 = D_2D_3 = \dots = AB$ kesmani n marta ($n = 8$) joylashtirib chiqamiz. Xuddi shuningdek, $A_1D'_6 \parallel AD_6$ ni o'tkazib, unda ham $A_1B_1 = B_1D'_1 = D_1D'_1 = D'_1D'_2 \dots = AB$ kesmani n marta joylashtiramiz. Bu kesmalardan biri (A_1B_1) ga tomoni a ga teng bo'lgan muntazam n burchak ($n = 8$) $A_1B_1C_1D_1E_1F_1K_1L_1$ ni yasab, D_7D_7 , AA_1 , A_1B , $BB_1 \dots$ larni o'tkazsak, izlangan yoyilma hosil bo'ladi (28- chizma).



28-chizma.

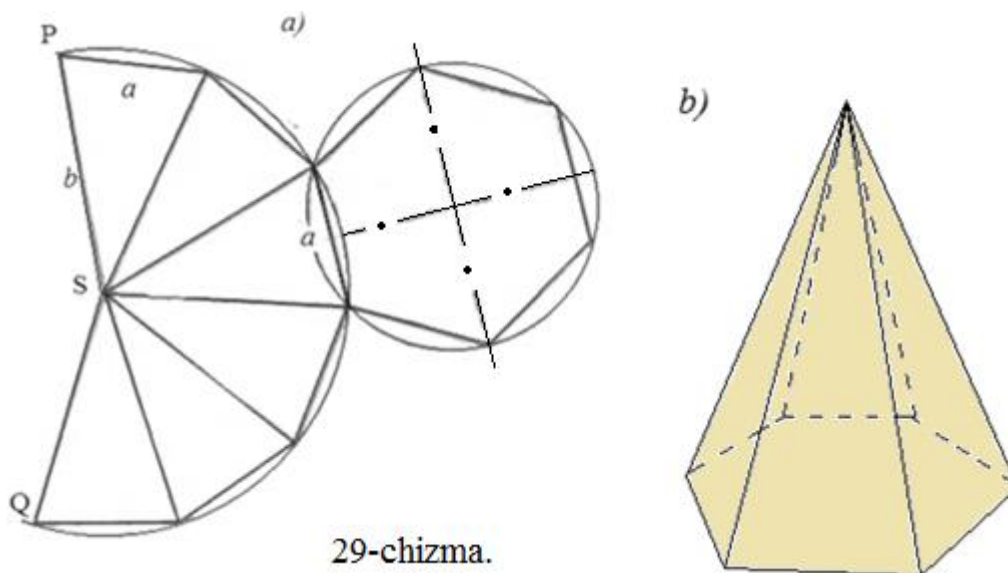
§ 2.2. Piramidalarning modellarini yasash

1. Piramida

Biz fazoviy figuralarni o'rganganimizda ularni tasavvur qilishga qiynalamiz. Lekin ularni kundalik turmushda foydalanadigan biror jism orqali tushuntirsak maqsadga muvofiq bo'ladi. Masalan, kesik konusni oladigan bo'lsak, uni og'zi berkitilgan chelakka o'xshatishimiz mumkin.

1. Asosining tomoni, a ga yon qirradi b ga teng bo'lgan muntazam n burchakli piramidaning yoyilmasi va modelini yasang.

Yasash. Radiusi b ga teng bo'lgan PQ yoy chizib va a kesmani sirkul bilan o'lchab unga n marta joylashtirib chiqamiz va bo'linish nuqtalarini ketma-ket hamda S markaz bilan tutashtirib chiqamiz (29-a chizma).



29-chizma.

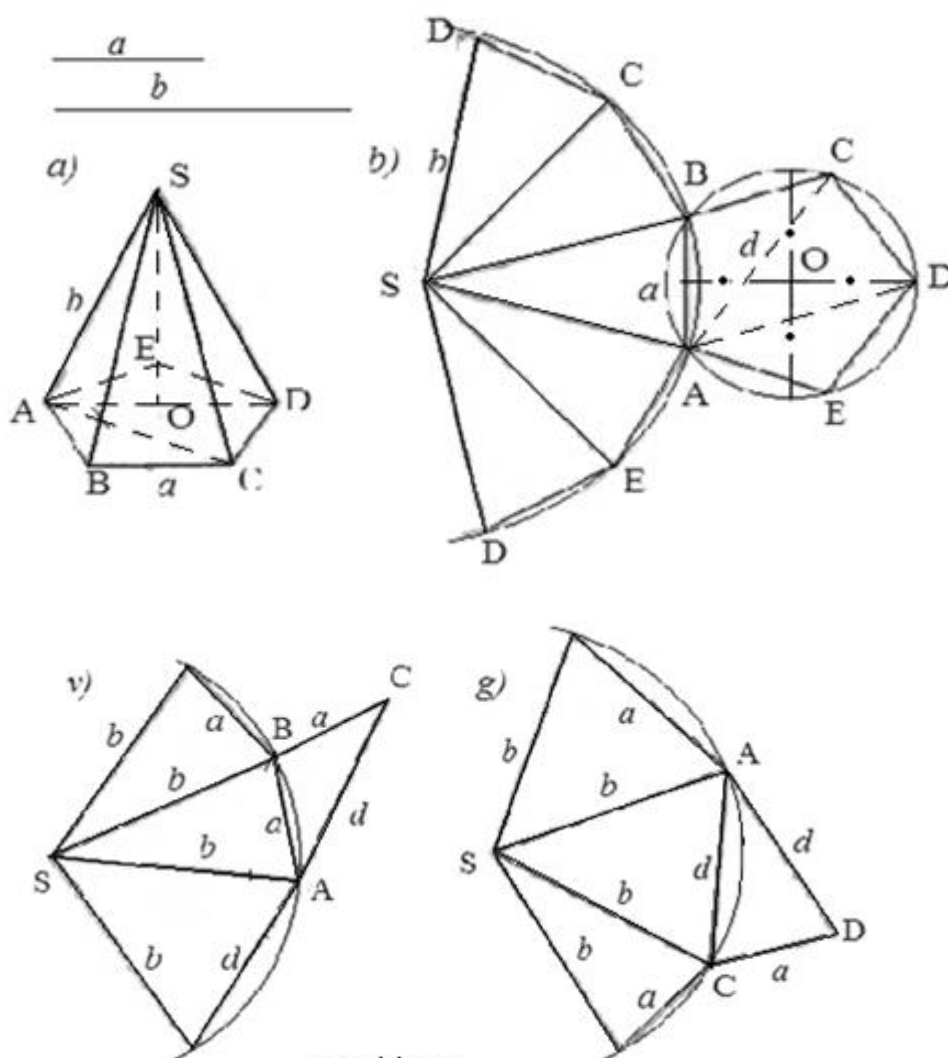
Ulardan birortasi (AB) ni tomon qilib, $AB = a$ ga teng bo'lgan muntazam n burchak yasaymiz. Shu bilan yoyilma tayyor. Modeli esa 29-b chizmada ko'rsatilgan.

2. Asosining tomoni a ga, yon qirradi b ga teng bo'lgan n burchakli muntazam piramidaning bir yon qirrasidan chiqqan diagonal kesimlarini o'tkazing. Hosil bo'lgan piramida bo'laklarining yoyilmalari va modellarini yasang.

Analiz. Faraz qilaylik, SABCDE muntazam n burchakli ($n = 5$) piramida berilgan bo'lsin (30-a chizma), uning SA yon qirradi orqali $n-3$ ta diagonal kesim o'tkazib, $n-2$ ta uch burchakli (SABC, SACD, SADE) piramidaga ajratilgan bo'l-

sin. U vaqtda bu uchburchakli piramidalarning yon qirralari berilgan kesmaga, asoslari esa SABCE prizma asosining bo'laklari (ABC, ACD, ADE) ga teng bo'ladi.

Yasash. Yon qirrasi b , asosining tomoni a bo'lgan n burchakli muntazam piramida yoyilmasini yasaymiz (30-b chizma). SABC va SAED piramidalar bir-biriga teng bo'lganidan ularning ikkalasi uchun bitta yoyilma (30-v chizma), SACD piramida yoyilmasi (30-g chizma) ni yasaymiz. Bu yoyilmalardan foydalanib piramidalarning modellarini yasash va ularni sharnir bilan birlashtirish mumkin. Bu modeldan ko'pburchakli piramidaning hajmini hisoblash usulini keltirib chiqarishda foydalaniladi.



30-chizma.

3. Asosining m tomoni a ga, yon qirrasi b ga teng bo'lgan to'rtburchakli muntazam piramidaning asosida berilgan to'g'ri chiziq va yon qirrasida berilgan

nuqta orqali o'tgan kesimi bilan birgalikdagi modelini yasang. Masalani yechishdagi turli hollarni tekshiring.

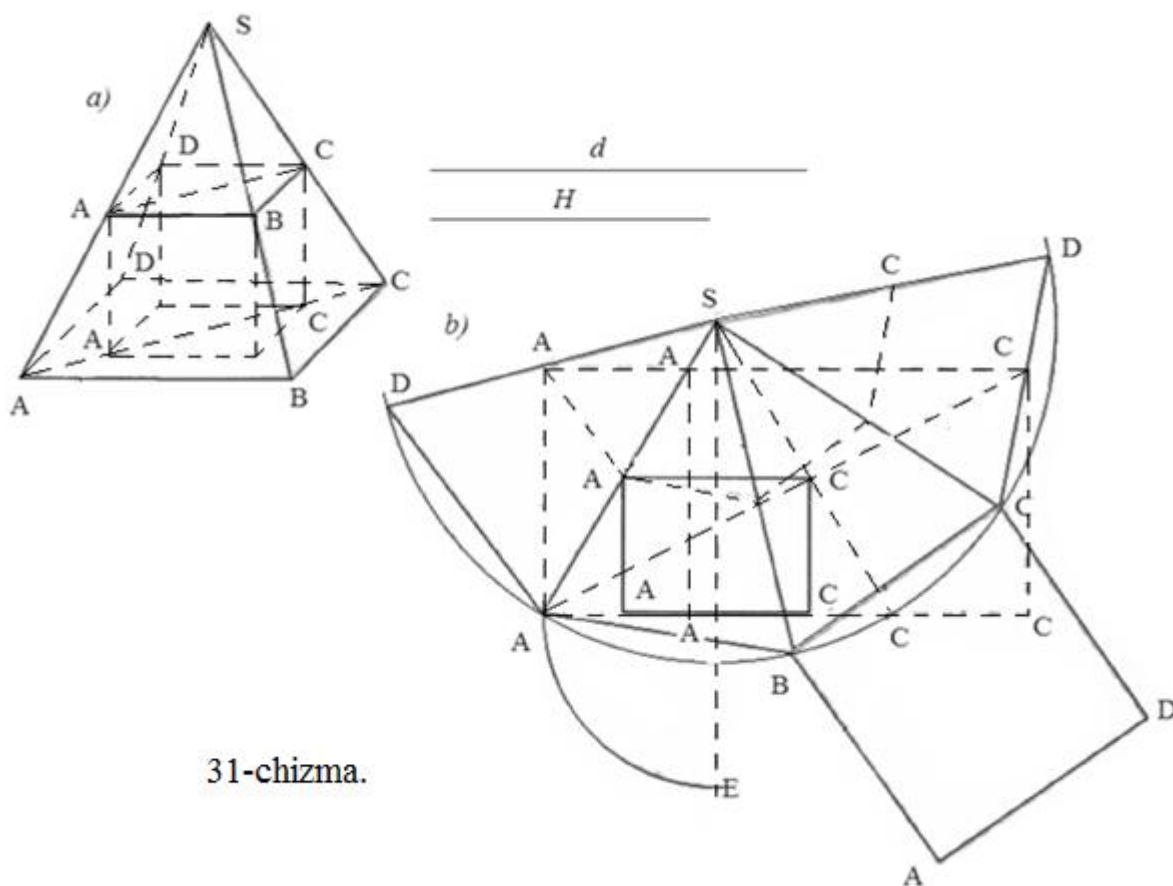
Analiz. Berilgan piramida $SABCD$ (31-a chizma), uning asosida berilgan to'g'ri chiziq A_1B_1 , yon qirrasidagi nuqta C_1 bo'lsin. A_1B_1 to'g'ri chiziq va C_1 nuqta orqali o'tgan kesimni yasash uchun SB va C_1B_1 larni B_2 nuqtada kesishguncha davom ettiramiz. B_2A_1 ni o'tkazib, uning SA_2 bilan kesishish nuqtasi E ni topamiz. D_1 nuqtani ikki usul bilan topish mumkin:

1) DA va B_1A_1 larning kesishish nuqtasi A_2 ni topib, A_2E to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. U SD qirra bilan D_1 nuqtada kesishadi;

2) A_1B_1 bilan DC ning kesishish nuqtasi C_2 ni topib, C_2C_1 to'g'ri chiziqni o'tkazamiz. U ham SD qirra bilan D_1 nuqtada kesishadi. Izlangan kesim $A_1B_1C_1D_1E$ bo'ladi.

$A_1B_1C_1D_1E$ kesimning $A_1B_1C_1D_1E$ uchlariga yoyilmada mos keluvchi nuqtalarni topib, uning haqiqiy kattaligini yasaymiz.

Yasash. Piramidaning yoyilmasini yasash uchun (31-b chizma) A_1B_1 kesmaga mos $A'_1B'_1$ kesma, C_1 nuqtaga mos C'_1 nuqta olamiz va $B'B'_1=B'B''_1$ kesma ajratib, $C'_1B''_1$ va $S'B'$ lar B'_2 nuqtada kesishguncha davom ettiramiz. $B'_2A'_1$ ni davom ettirsak, u $S'A'$ bilan E' nuqtada kesishadi.

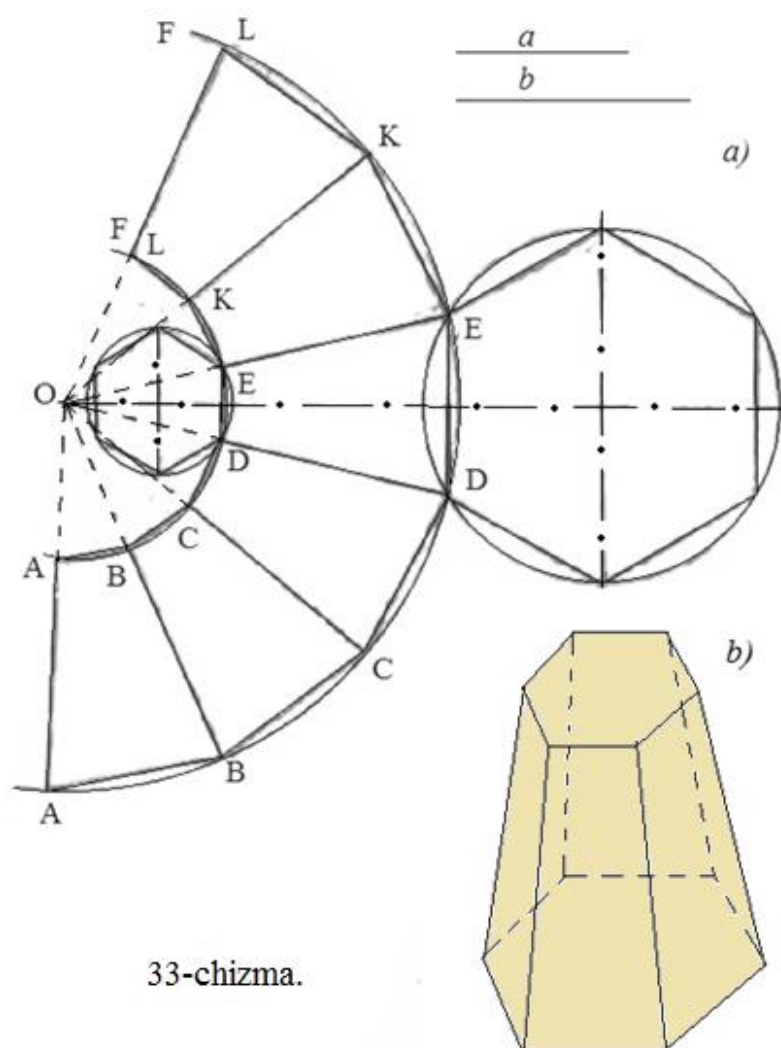


31-chizma.

$B'_1A'_1$ kesmani $D'A'$ ning davomi bilan A'_2 nuqtada kesishguncha davom ettiramiz. $D'A'$ ning davomida $A'A''_2 = A'A'_2$ kesma ajratamiz, $A''E'$ ni $S'D''$ bilan D'_1 nuqtada kesishguncha davom ettiramiz. $S'C''_1 = S'C'_1$ ni ajratib, $D'_1C''_1$ ni o'tkazamiz. O'tkazilgan $A_1B_1C_1D_1E$ kesimning yoyilmadagi izi $C''_1D'_1E'A'_1B'_1(B''_1)C'_1$ bo'ladi. Bu kesimning haqiqiy uzunligini yasash uchun kesimning ixtiyoriy ikkita diagonali C_1E , CA ni o'tkazib, ularni haqiqiy kattaliklarini yasaymiz.

4. Uch, burchakli muntazam piramidaning yon qirrasi asos tekisligi bilan α burchak tashkil etadi. Asosining tomoni a ga teng. Bu piramida ichiga teng qirrali uch burchakli muntazam prizma (Arximed prizmasi) ni shunday joylashtiringki, uning uchta uchi piramidaning yon qirralarida, qolgan uchta uchi esa piramida asosida yotsin.

Faraz qilaylik, bunday uch burchakli muntazam piramida yasalgan bo'lsin (32- chizma), bu piramidaning yoyilmasini yasaymiz. Buning uchun tomoni a ga



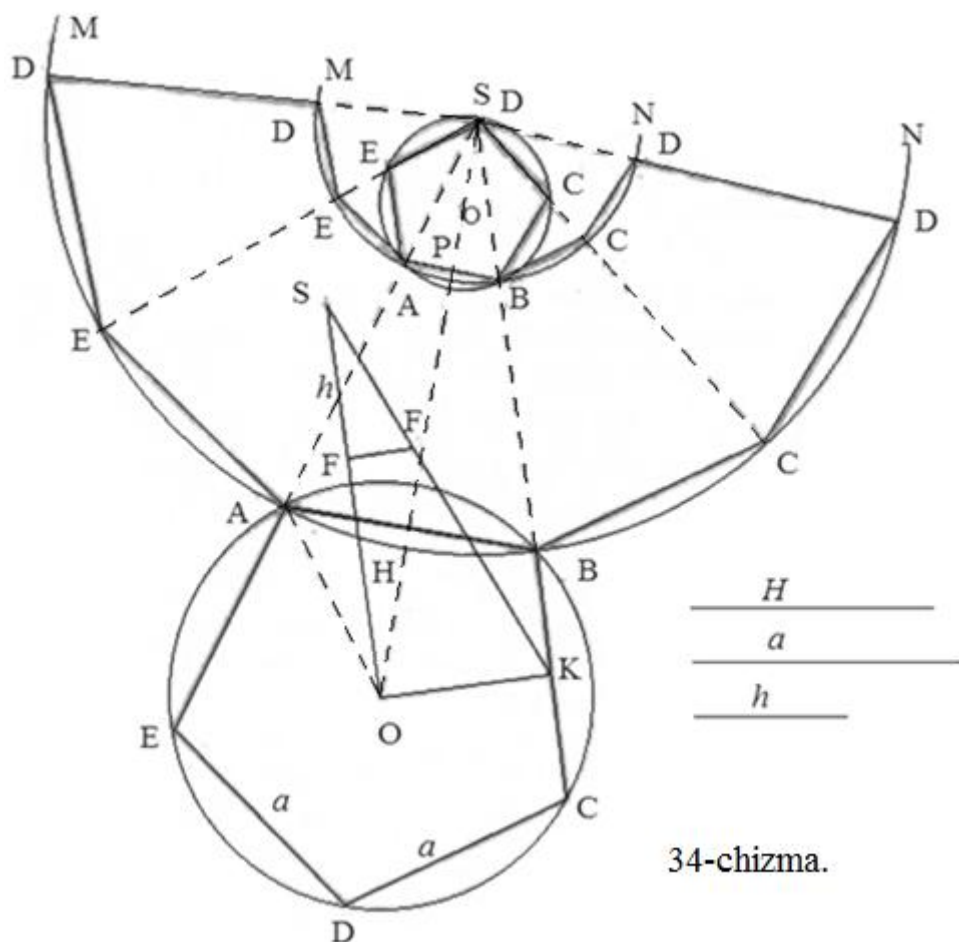
33-chizma.

Tomonlarning biri (D_1E_1) da tomoni $D_1E_1 = a_1$ ga teng bo'lgan muntazam 6 burchak va DE tomonda ham tomoni a ga teng bo'lgan muntazam 6 burchak yasaymiz. Natijada izlangan yoyilma hosil bo'ladi (33-a chizma). Bu kesik piramidaning modeli 33-b chizmada berilgan.

Masalaning yechimi cheksiz ko'p, chunki AO radiusning uzunligini $a\sqrt{3}$ kesmadan katta qilib olib, yoy chizishimiz mumkin. Agar a kesmani AF yoyga 6 marta qo'yganda, AF yoy to'liq aylanani tashkil qilsa (yoki undan ham ortib ketsa) masala yechimga ega bo'lmaydi. Bu hol $AO \leq a\sqrt{3}$ bo'lganda ro'y beradi.

2. Balandligi H , asosining tomoni a bo'lgan muntazam n burchakli piramidaning uchidan h masofada $h < H$ asosiga parallel tekislik bilan kesing. Piramidaning hosil bo'lgan bo'laklarining yoyilmalari va modellarini yasang.

Yasash. Tomoni a bo'lgan muntazam n burchak (bizning misolda $n = 5$ bo'lib, ABCDE beshburchak)ni yasaymiz (34-chizma).



34-chizma.

$OK \perp BC$, $OS \perp OK$ larni o'tkazib, $OS = H$ kesma olib, S va K nuqtalarni tutashtiramiz. A (SO) va B (SO) yoylarning kesishish nuqtasi ni markaz qilib MAN yoy chizamiz. AB ning har ikki tomoniga E', D', C', C'' nuqtalarda AB kesmani ketma-ket qo'yib chiqamiz. $SF = h$ kesma olib, $FF_1 \parallel OK$ o'tkazamiz. S_1 nuqtani markaz qilib SF_1 radius bilan M_1N_1 yoy chizamiz va uning S_1D' , S_1E' , SA , S_1B , ... kesmalar bilan kesishish nuqtalarini mos ravishda D'_1 , E'_1 , A_1 , B_1 ... lar bilan belgilaymiz. Tomoni A_1B_1 ga teng bo'lgan $A_1B_1C_1D_1E_1$ -muntazam n burchakni yasasak, kesik piramidaning yoyilmasi hosil bo'ladi. Agar $S_1D'_1E'_1 \dots D_1$ ning A_1B_1 dan pastki qismga tomoni A_1B_1 ga teng bo'lgan muntazam n burchak yasasak, kesik piramidani to'ldiruvchi piramida yoyilmasi hosil bo'ladi. Pastga muntazam n burchak yasash uchun $A_1O_1 \parallel AO$ o'tkazib, uning OS_1 bilan kesishish nuqtasi o'qni markaz qilib aylana chizamiz (chizmada ko'rsatilmagan). Kesik piramidaning ustki asosini yasash uchun, $PO_1 = PO'$ kesma olib, markazi O_1 nuqtada bo'lgan O_1A_1 radiusli aylana chizamiz va unga A_1B_1 kesmani qo'yib

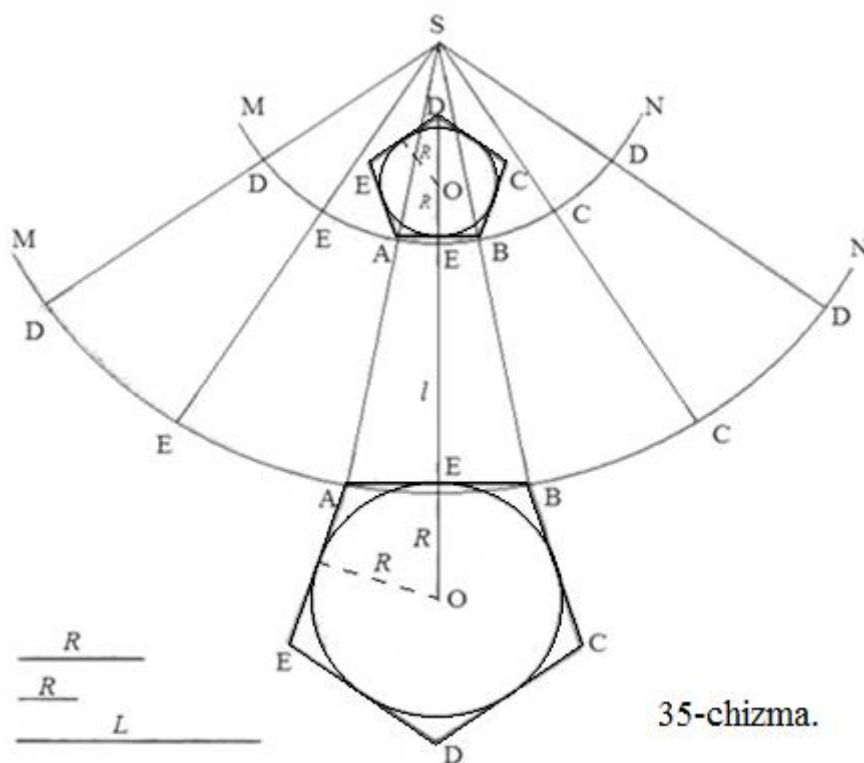
chiqsak, u roppa-rosa n marta joylashadi. Bu yoyilmalarga asosan modellarini yasaymiz.

3. Asoslariga ichki chizilgan aylanalarning radiuslari R va R_1 apofemasi l bo'lgan muntazam kesik piramidaning yoyilmasi va modelini yasang.

Yasash. Radiusi R bo'lgan aylana chizib, uning tashqarisiga muntazam n burchak (bizning misolda $n = 5$ bo'lib, $ABCDE$ beshburchak) yasaymiz.

(35-chizma). $OE \perp AB$ o'tkazib, uning davomida $EE_1 = l$ va $E_1O_1 = l$ kesmalar ajratamiz. O_1 nuqtani markaz qilib R_1 radius bilan aylana chizamiz va uning tashqarisiga bir tomoni $A_1B_1 \perp AB$ bo'lgan $A_1B_1C_1D_1E_1$ muntazam beshburchak yasaymiz. AA_1 va BB_1 larning kesishish nuqtasi S ni markaz qilib, radiusi SA bo'lgan MN yoy hamda radiusi SA_1 bo'lgan M_1N_1 yoy chizamiz. MN yoydagi A va B nuqtalardan boshlab AB kesmani qo'yib chiqamiz va M_1N_1 yoyga A_1B_1 kesmani qo'yib, $C_1D_1E_1D'_1$ nuqtalarni hosil etamiz. $D'D'_1$, $E'E'_1$, $C'C'_1$, ... kesmalarni o'tkazib izlangan yoyilmani hosil qilamiz.

Haqiqatan, bu yoyilmaning asoslariga chizilgan ichki doiralarning radiuslari R , R_1 ga, yoyilmaning apofemasi esa l ga teng.



Yoyilmadan foydalanib kesik piramidaning modelini yasash mumkin.

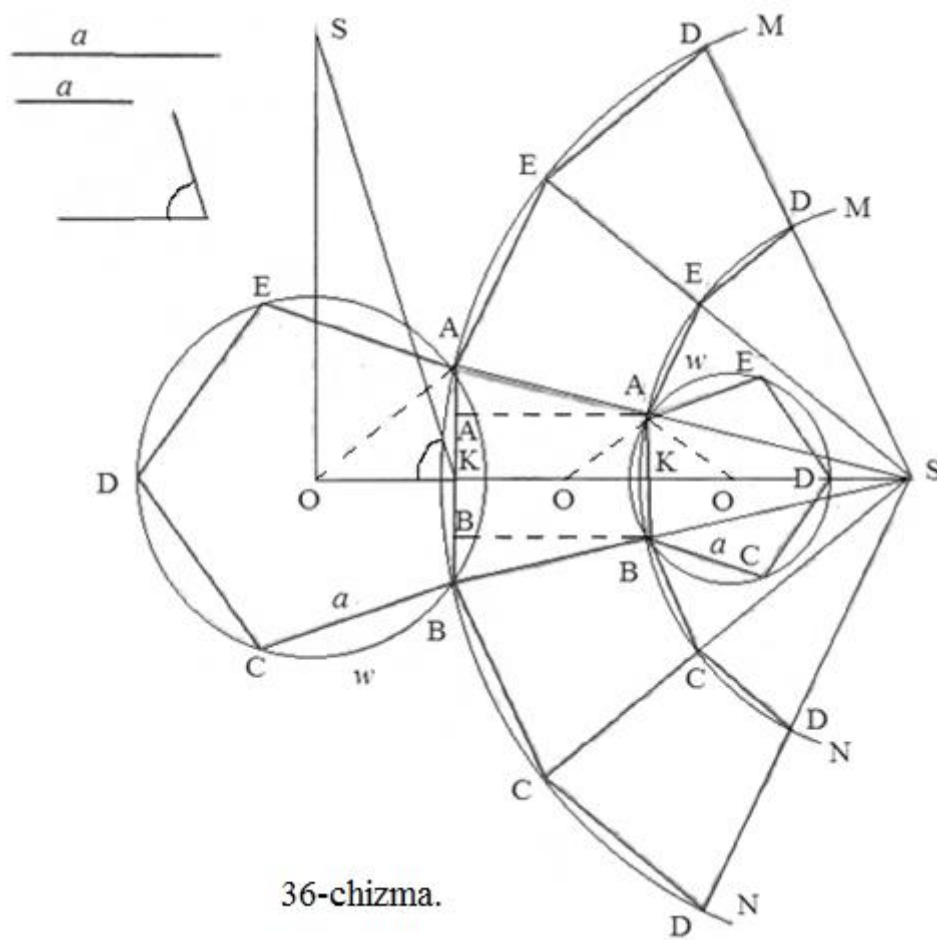
4. n burchakli muntazam kesik piramida asosining tomonlari a va a_1 , yon yoqlarining katta asos bilan kesishishidan hosil bo'lgan burchak α . Piramidaning yoyilmasi va modelini yasang.

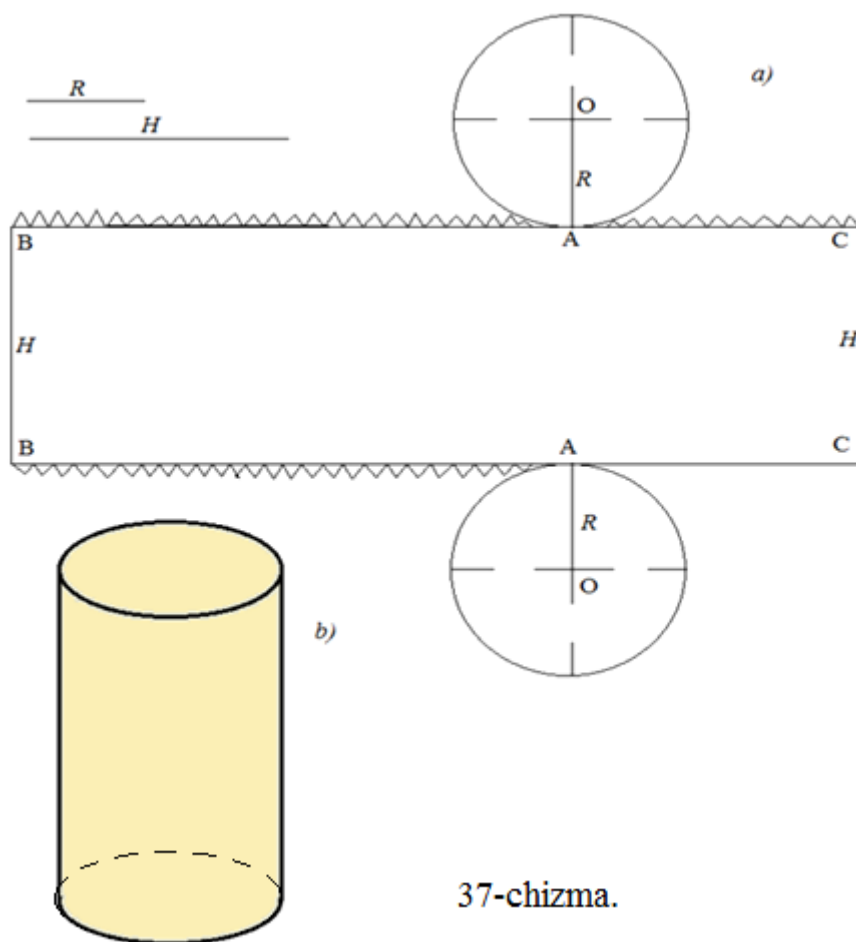
Yasash. Tomoni a ga teng bo'lgan muntazam n burchak (bizning misolda $n = 5$ bo'lib, ABCDE muntazam beshburchak) yasaymiz(36-chizma). Uning bir tomoni (AB) ga O markazdan $OK \perp AB$ va $OS_1 \perp OK$ tushiramiz. $\angle OKS_1 = \alpha$ olib, KS_1 va OS_1 lar bir-biri bilan kesishguncha davom ettiramiz. S_1K piramida apofemasiga teng bo'ladi. OK ning davomida $KS = KS_1$ kesma olib, S nuqtani markaz qilib, SA radiusli MN yoy chizamiz, unda $BC' = C'D'' = AE' = E'D' = AB$ yoylar ajratib, A, B, C,... nuqtalarni hosil qilamiz va ularni o'zaro ketma-ket hamda S nuqta bilan tutashtiramiz. AB kesmaning K nuqtasining har ikki yog'ida $KA' = KB' = \frac{a_1}{2}$ kesma ajratamiz va $A'A_1 \perp AB, B'B_1 \perp AB$ larni o'tkazib, ularning AS va BS bilan kesishish nuqtalari A_1 va B_1 ni kesma bilan tutashtiramiz. $A_1B_1 = a_1$ bo'ladi. Endi tomoni a_1 ga teng bo'lgan muntazam n burchak yasaymiz.

Buning uchun $A_1O' \parallel AO$ o'tkazib, OS da $K_1O' = K_1O'_1$ kesmalarni ajratamiz va O'_1 nuqtani markaz qilib, O'_1A_1 , radiusli aylana chizamiz. Bu aylananing B nuqtasidan boshlab, A_1B_1 ni ketma-ket qo'yib chiqsak, u aylanaga rosa n marta joylashadi.

S nuqtadan SA_1 radiusli A_1B_1 yoy chizamiz va uning $SD', SE', SA, \dots$ nurlar bilan kesishish nuqtalarini $D'_1, E'_1, A_1, \dots$ harflari bilan belgilaymiz va ularni ketma-ket tutashtirib chiqsak, izlangan n burchakli muntazam kesik piramidaning yoyilmasi hosil bo'ladi.

Haqiqatan, bu kesik piramida asosining tomonlari $AB = BS = CD = \dots = a$, $A_1B_1 = B_1C_1 = C_1D_1 = \dots = a_1$ va apofemasi asos tekisligi bilan α burchak tashkil etadi. Bu yoyilmalardan foydalanib muntazam kesik piramidaning modelini yasaymiz.



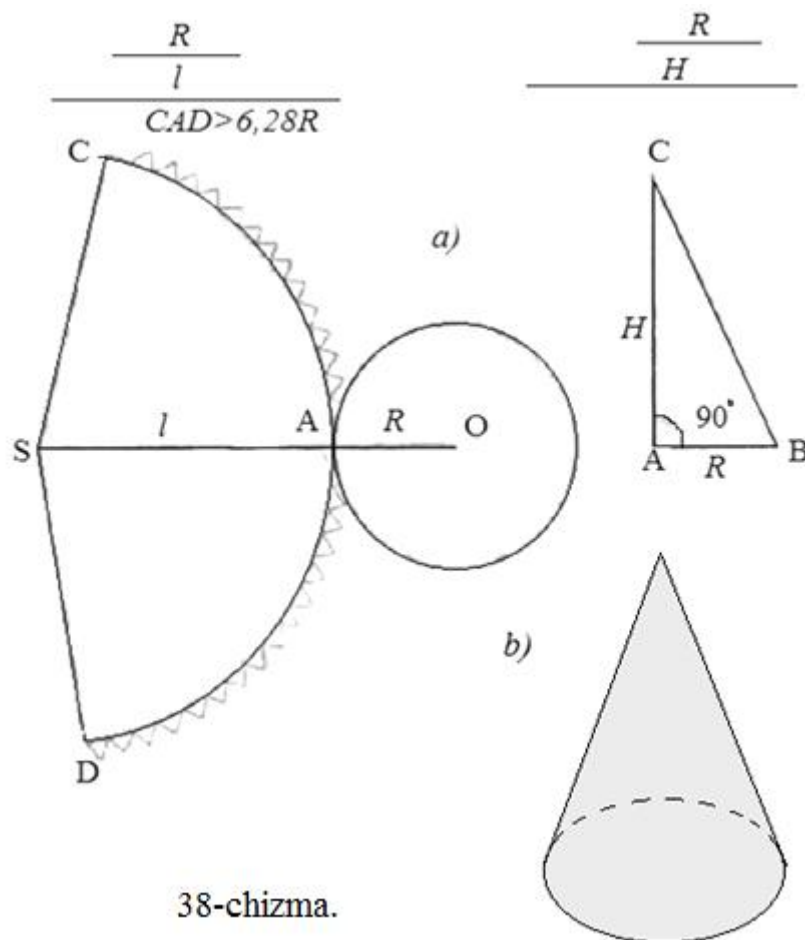


37-chizma.

2. Konusning modelini yasash

1. Asosining radiusi R , yasovchisi l bo'lgan konusning yoyilmasi va modelini yasang.

Yasash. R radiusli aylana chizamiz (38-a chizma), OA radiusning davomida $AS = l$ kesma ajratib, S nuqtani markaz qilib, l radius bilan CAD chizamiz va bu yoyga radiusni taxminan 6,5 marta qo'yib (CAD ning uzunligi $2\pi R$ ga teng bo'lishi kerak), C va D nuqtalarni hosil qilamiz. C va D nuqtalarni S markaz bilan tutashtirsak, izlangan yoyilma hosil bo'ladi. Bu yoyilmaga asosan konusning modelini yasaymiz (38-b chizma).

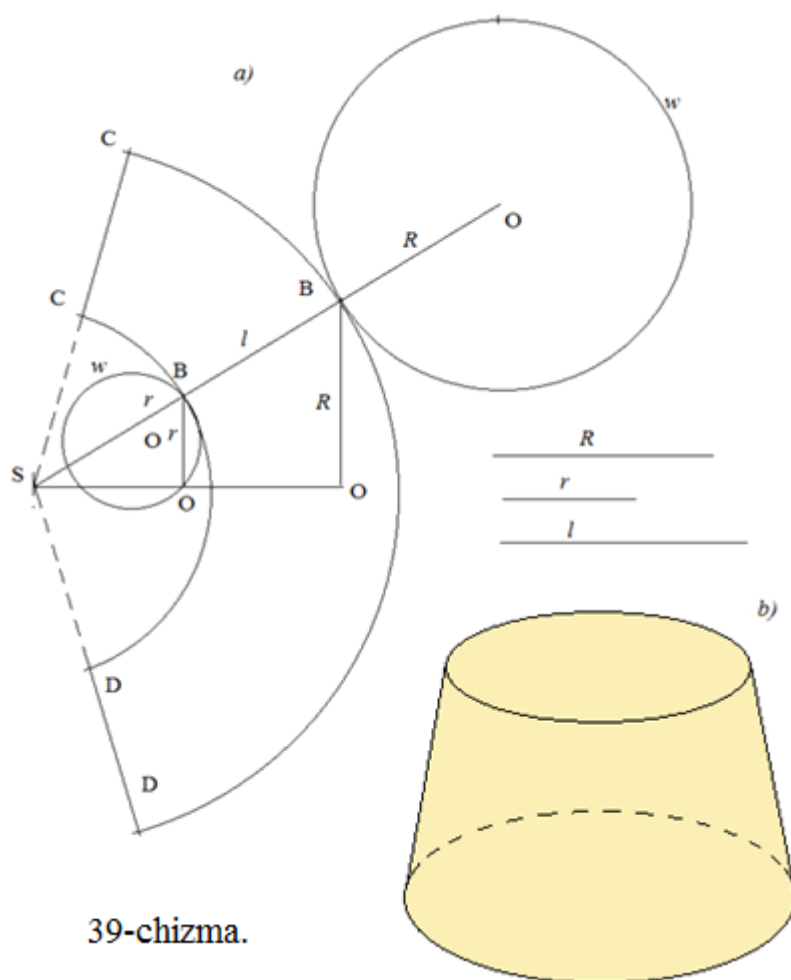


38-chizma.

3. Kesik konusning modelini yasash

1. Asosining radiuslari R va r , yasovchisi l bo'lgan kesik konusning yoyilmasi va modelini yasang.

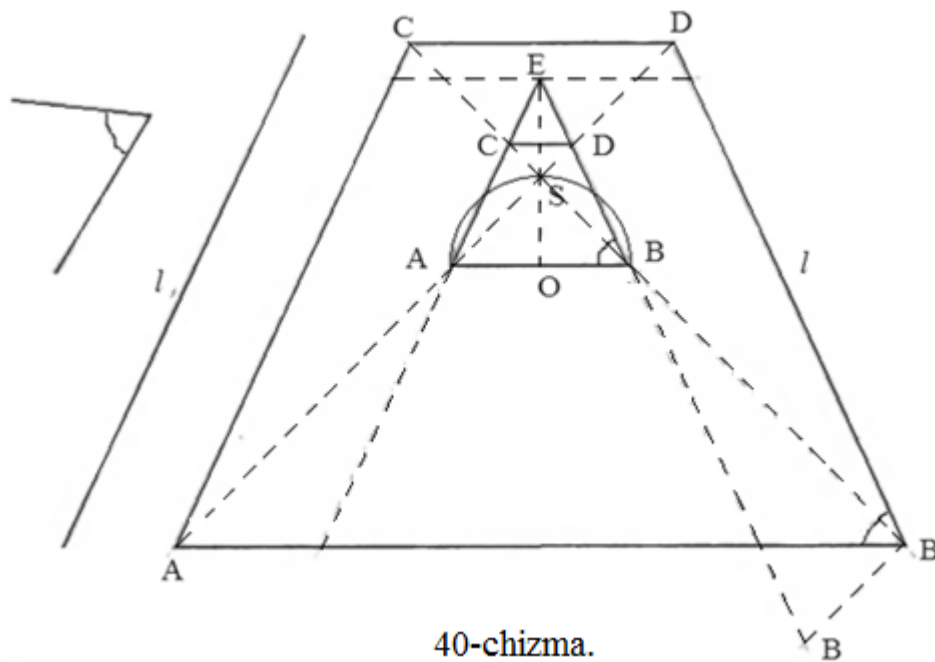
Yechish. Asoslari $OB = R$, $O_1B_1 = r$ va bitta yon tomoni $BB_1 = l$ bo'lgan BB_1O_1O to'g'ri burchakli trapetsiya yasaymiz (39-a chizma). Uning yon tomonlari OO_1 va BB_1 larni davom ettirib, ularning kesishish nuqtasi (S) ni topamiz. S nuqtani markaz qilib, SB radius bilan CBD va SB_1 radius bilan $C_1B_1D_1$ yoy chizamiz. BB_1 ning davomida $BO = R$, $B_1O_1 = r$ larni ajratib, R va r radiusli aylanalar yasaymiz. $CBD > 6.28R$ qilib, S nuqtani S va D nuqtalar bilan tutashtirsak, CDD_1C_1 polosa xamda R va r radiusli doiralar kesik konusning izlangan yoyilmasi bo'ladi. Uning modeli 39-b chizmada berilgan.



39-chizma.

2. Kesik konus o'q kesimining diagonallari o'zaro perpendikulyar, konusning yasovchisi l esa katta asos tekisligi bilan α burchak tashkil etadi. Kesik konusning yoyilmasi va modelini yasang.

Yasash. Kesik konusning uk kesimi yon tomonlari l , asosi- dagi burchagi α va diagonallari uzaro perpendikulyar bo'lgan teng yonli trapetsiyadir. Bu trapetsiyani yasash uchun asosidagi burchagi α ga teng bo'lgan ABE teng yonli uchburchakni yasaymiz (40-chizma). Bunda $AE = BE$, $\angle BAE = \angle EBA = \alpha$. AB ni diametr qilib, burchak yon tomonlarini kesuvchi yarim aylana chizamiz va bu yarim aylananing ABE uchburchakning AB tomoniga tushirilgan balandligi bilan kesishish nuqtasi S hamda A va B nuqtalar orqali to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlar uchburchak tomonlarini C va D nuqtalarda kesadi. C va D nuqtalarni kesma yordamida tutashtirsak, asosidagi burchagi α , diagonallari esa perpendikulyar bo'lgan trapetsiya hosil bo'ladi [16].



40-chizma.

Gomotetiya metodidan foydalanib, bu trapetsiyaga o'xshash, yon tomoni l ga teng bo'lgan trapetsiya yasaymiz. Buning uchun S nuqtani gomotetiya markazi deb olib, SA , SB , SC , SD , CB larni davom ettiramiz. DB_1 da $DB_1 = l$ kesma ajratib, $B_1B_2 \parallel DD_1$, $B_2D_1 \parallel B_1D_1$, $C_1D_1 \parallel CD$, A_1D_1 va A_1B_2 larni o'tkazamiz. $A_1B_2D_1C_1$ trapetsiya kesik konusning o'q kesimi bo'ladi. Bunga asosan kesik konusning yoyilmasi va modelini yasaymiz.

3-bob. Muntazam ko'p yoqlilar, ularning yoyilmalari va elementlarini yasashga doir masalalar

§ 3.1. Tetraedr, kubning modelini yasash

1.Tetraedrning modelini yasash

Barcha yoqlari o'zaro teng bo'lgan muntazam ko'pburchaklardan tuzilgan va ko'p yoqli burchaklari muntazam hamda bir-biriga teng bo'lgan qavariq ko'p yoqlilar muntazam ko'p yoqlilar deyiladi. Muntazam ko'p yoqli burchak deb, barcha tekis burchaklari o'zaro teng va barcha ikki yoqli burchaklari o'zaro teng bo'lgan qavariq ko'p yoqli burchakka aytiladi.

Qadim zamonlardan beshta muntazam qavariq ko'p yoqlilar ma'lum bo'lgan va bu ko'p yoqlilar sohasida ko'pgina ishlar qilgan grek olimi Platon nomi bilan platon jismlari deb ataladi.

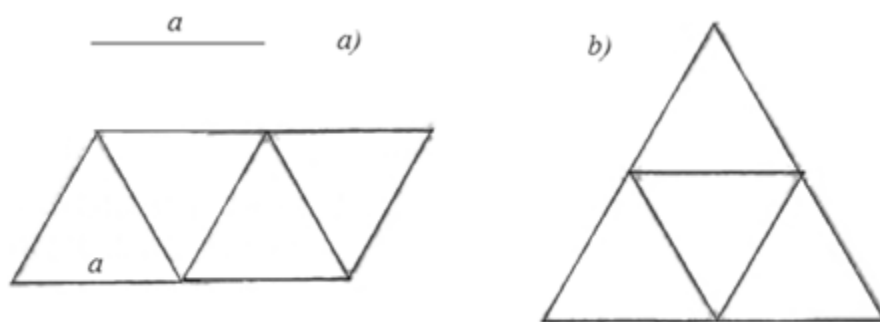
Ular quyidagilardir: I. Yoqlari muntazam uchburchaklardan tuzilgan muntazam ko'p yoqlilar. Bular uch xildir:

1) tetraedr -har bir uchida uchta yog'i birlashgan bo'lib, uning to'rtta yog'i, to'rtta uchi, oltita qirrasi bo'ladi. Qolgan ikki xilini keying boblarda ko'rib o'tamiz.

II. Geksaedr-barcha yoqlari muntazam to'rtburchakdan tuzilgan bo'lib, u faqat bir ko'rinishga ega bo'lgan muntazam ko'p yoqlidir. Uning har bir uchida 3 ta yoq birlashgan bo'lib, oltita yog'i, sakkizta uchi, o'n ikkita qirrasi bo'ladi.

Bu ko'p yoqlilarning hammasida deyarli berilgan qirraga ko'ra, muntazam ko'pburchak (tetraedr, oktaedr, ikosaedrlarda muntazam uchburchak, geksaedrda kvadrat, dodekaedrda esa muntazam beshburchak) yasashga to'g'ri keladi. Ularni sirkul va chizg'ich yordamida yasash yoki kartondan andaza yasab, uni ketma- ket qo'yish bilan ularning yoyilmalarini hosil qilish mumkin.

1.Qarrasi a ga teng bo'lgan tetraedrning yoyilmasi va modelini yasang.
Bu masalaning ikki xil yoyilmasi 41-a va b chizmalarda ko'rsatilgan.



41-chizma.

2. Tetraedrning balandligi h . Uning yoyilmasi va modelini yasang.

Yechish. 1-usul. Bizga $SABC$ tetraedr berilgan bo'lib, uning balandligi h ga teng bo'lsin va uning yon qirralari $AB = BC = AC = x$ ni topish va yasash talab etilsin (42-a chizma). Bunda AOC uchburchak to'g'ri burchakli bo'lib, unda $\angle AOS = 90^\circ$, $AS = x$,

$$\Delta ACD \text{ dan: } AD^2 = AC^2 - CD^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}; AD = \frac{x\sqrt{3}}{2};$$

$$OA = \frac{2}{3}AD = \frac{2}{3} \cdot \frac{x\sqrt{3}}{2} = \frac{x\sqrt{3}}{3}; x^2 - \left(\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)^2 = h^2$$

$$x^2 - \frac{3x^2}{9} = h^2, \quad \frac{3x^2 - x^2}{3} = h^2; \quad \frac{2x^2}{3} = h^2,$$

$$x^2 = \frac{3h^2}{2}; \quad x = \frac{h\sqrt{6}}{2}.$$

Bu kesmani yasash uchun $A_1A_7 = 3h$ kesma olib (42-b chizma), u kesmani $A_2A_3A_4A_5A_6$ nuqtalarda 6 ta teng bo'lakka bo'lamiz. Uning bir bo'lagi $A_1A_2 = \frac{3h}{6} = \frac{h}{2}$ bo'ladi. A_1A_7 ni diametr qilib, yarim aylana chizib, A_2 nuqtadan $A_2S_1 \perp A_1A_7$ o'tkazamiz, perpendikulyarning aylana bilan kesishish nuqtasi S_1 ni A_1 bilan tutashtirsak:

$$A_1S_1 = x = \frac{h\sqrt{6}}{2}.$$

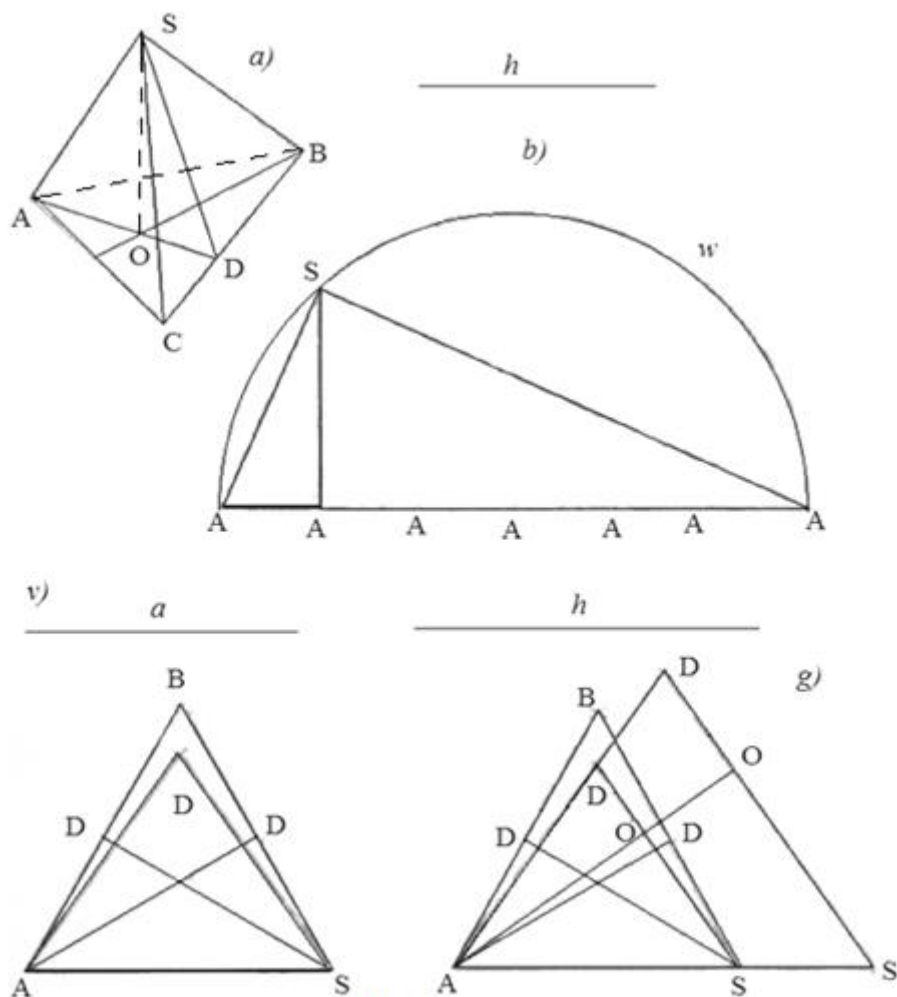
Haqiqatan, $A_1S_1A_7$ to'g'ri burchakli uchburchakning (42-b chizma) to'g'ri burchagi uchidan gipotenuzasi (A_1A_7) ga tushirilgan perpendikulyarning xossasiga asosan;

$$A_1S_1 = \overline{A_1A_2 \cdot A_1A_7} = \frac{h}{2} \cdot 3h = \frac{h\sqrt{6}}{2}.$$

A_1S_1 qirra bo'yicha tetraedr yoyilmasi va modelini yasaymiz.

2-usul. Tetraedr ikki yoqli burchagining chiziqli burchagini yasaymiz.

Faraz qilaylik, $SABC$ tetraedr berilgan bo'lib, uning qirrasi a ga teng bo'lsin. $\angle ADS$ ni yasash talab qilinadi (42-a chizma).



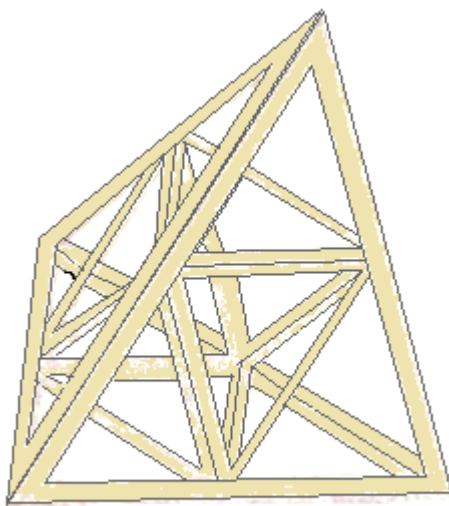
42-chizma.

Bu burchak asosi, tetraedr qirrasi $a = AS$ ga, yon tomonlari esa tomoni a ga teng bo'lgan muntazam uchburchaklar balandligi $AD = DS$ ga teng bo'lgan $\triangle ADS$ teng yonli uchburchakning uchidagi burchagidir. $\triangle ADS$ ning haqiqiy kattaligini yasaymiz. Buning uchun tomoni a ga teng muntazam ABS uchburchak yasaymiz (42-v chizma). Bu uchburchakning SD_1 va AD_2 medianalarini o'tkazamiz va A hamda S nuqtalarni markaz qilib, AD_2 va SD_1 radius bilan yoy chizamiz. Ularning kesishish nuqtasi D ni A va S nuqtalar bilan tutashtirsak, $\angle ADS$ -tetraedr ikki yoqli burchagining chiziqli burchagi bo'ladi. So'ngra yasash talab qilingan tetraedr

qirrasini aniqlaymiz. Buning uchun tetraedr ikki yoqli burchagining chiziqli burchagi (ADS) ni yasaymiz (42-g chizma). Unda $AO \perp DS$ o'tkazamiz va $AO = h$ kesma ajratib, o'tkazamiz. AD va AS larni davom ettiramiz. Yasalishi talab etilgan tetraedrning qirrasidir. Bunga asosan uning yoyilmasi va modelini yasaymiz.

3.Tetraedrni har bir uchidan chiquvchi uchta qirrasining o'rtalari orqali o'tuvchi tekisliklar bilan kesish natijasida oktaedr hosil bo'ladi. Tetraedrning qirradi a ga teng. Oktaedr yoyilmasini va oktaedr bilan tetraedrning birgalikdagi modelini yasang.

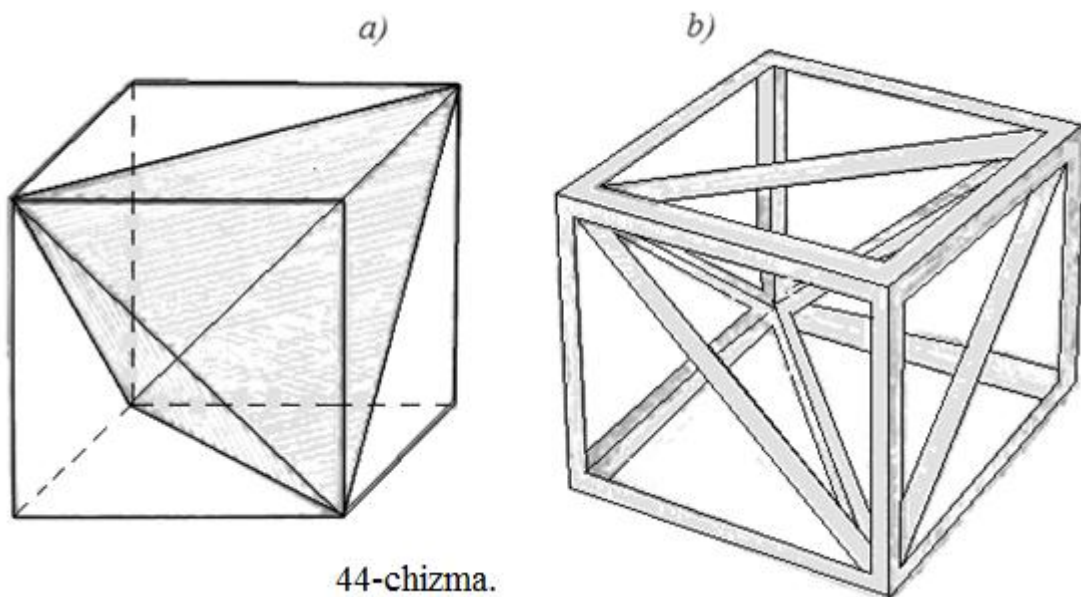
Ko'rsatma. Oktaedr qirradi $\frac{a}{2}$ ga teng. Modeli 43-chizmada ko'rsatilgan.



43-chizma.

4.Qirradi a ga teng bo'lgan tetraedrning qirralari orqali qirralarga teshshli yoqlar bilan teng ikki yoqli burchaklar tashkil qiluvchi tekisliklar o'tkazilgan, ularning kesishishidan hosil bo'lgan jismning yoyilmasi va modelini yasang.

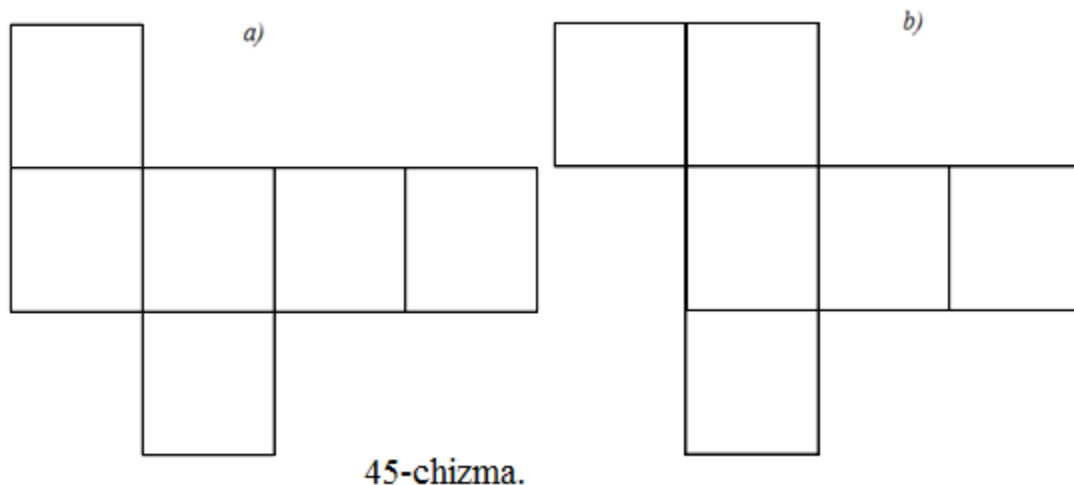
Ko'rsatma. Kesimda kub hosil bo'ladi (44-a chizma). Kub yon yog'ining diagonali tetraedr qirradi a ga, qirradi esa $\frac{1}{2} a \sqrt{2}$ ga teng bo'ladi. Modeli 44-b chizmada ko'rsatilgan.



2. Geksaedr (kub) ning modelini yasash

1. Qirrasi a ga teng bo'lgan geksaedr (kub)ning turli xil yoyilmalari va modelini yasang.

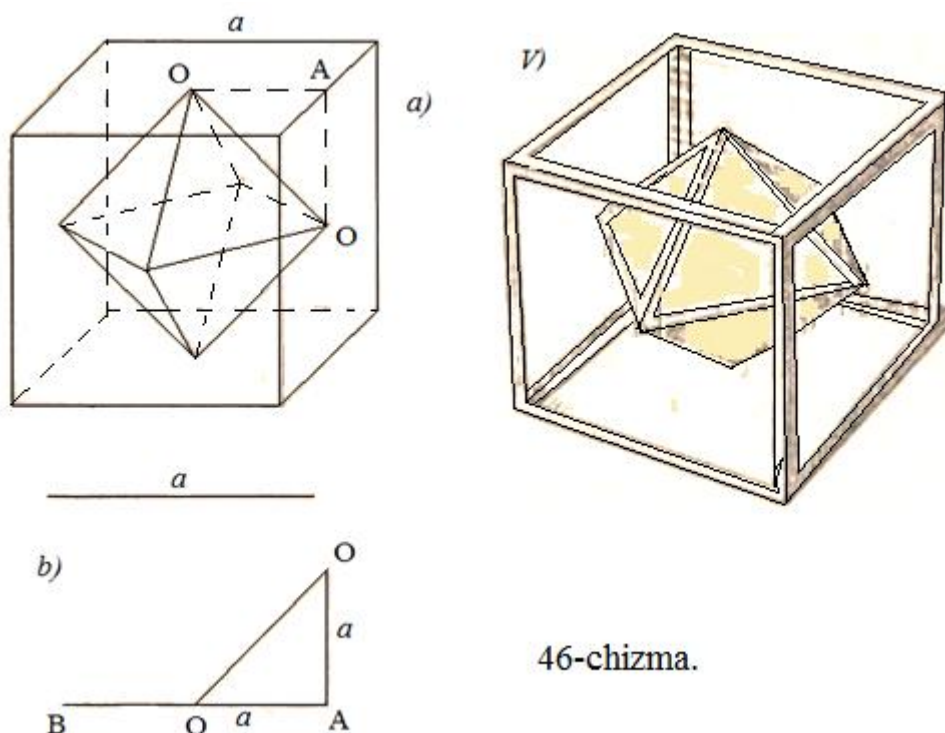
45-a va b chizmalarda geksaedrning ikki xil yoyilmasi ko'rsatilgan.



2. Agar kub yon yoqlarining markazlarini kesma yordamida, ketma-ket tutashtirsak, oktaedr hosil bo'ladi. Kubning qirrasi a ga teng. Oktaedr qirrasini toping va modelini yasang.

Yasash. Oktaedr qirrasi (O_1O)ni (46-a chizma) hisoblab topamiz. To'g'ri burchakli O_1AO uchburchakdan Pifagor teoremasiga asosan: $OO^2 = O_1A^2 + AO^2$, $O_1A = AO = \frac{a}{2}$ bo'lgani dan $O_1O = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Bu esa katetlari $\frac{a}{2}$ bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasidir (46- b chizma). Modeli 46-v chizmada berilgan



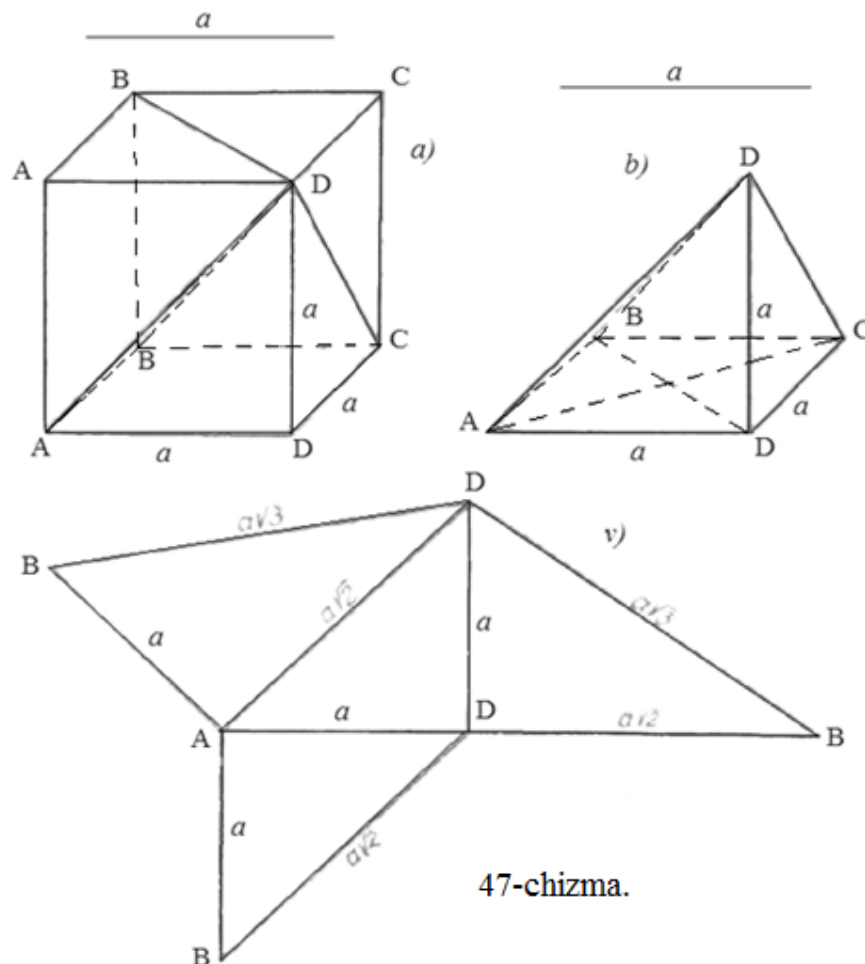
46-chizma.

3. Qirralari a ga teng bo'lgan kubni bir-biriga, tengdosh oltita uch burchakli piramidalariga ajrating. Ularning yoyilmalari va modellarini yasang.

Yechish. To'rt burchakli piramidalarning har biri (masalan, D_1ABCD) ni 47-b chizmadagidek BDD_1 diagonal kesimi bo'yicha kesamiz. U vaqtda D_1ABD va D_1BCD bir-biriga teng ikkita uchburchakli piramida hosil bo'ladi. D_1ABD ning yoyilmasi 47-v chizmada berilgan. Qolgan beshta piramidaning yoyilmasi ham xuddi shu yoyilma singaridir.

Eslatma. D_1ABCD piramidada ACD_1 diagonal kesimo'tkazilsa, bir-biriga tengdosh, lekin teng bo'lmagan uchburchakli piramidalar hosil bo'ladi.

To'rt burchakli piramidalarning qolganlarini ham shu usulda uch burchakli piramidalariga ajratish mumkin.

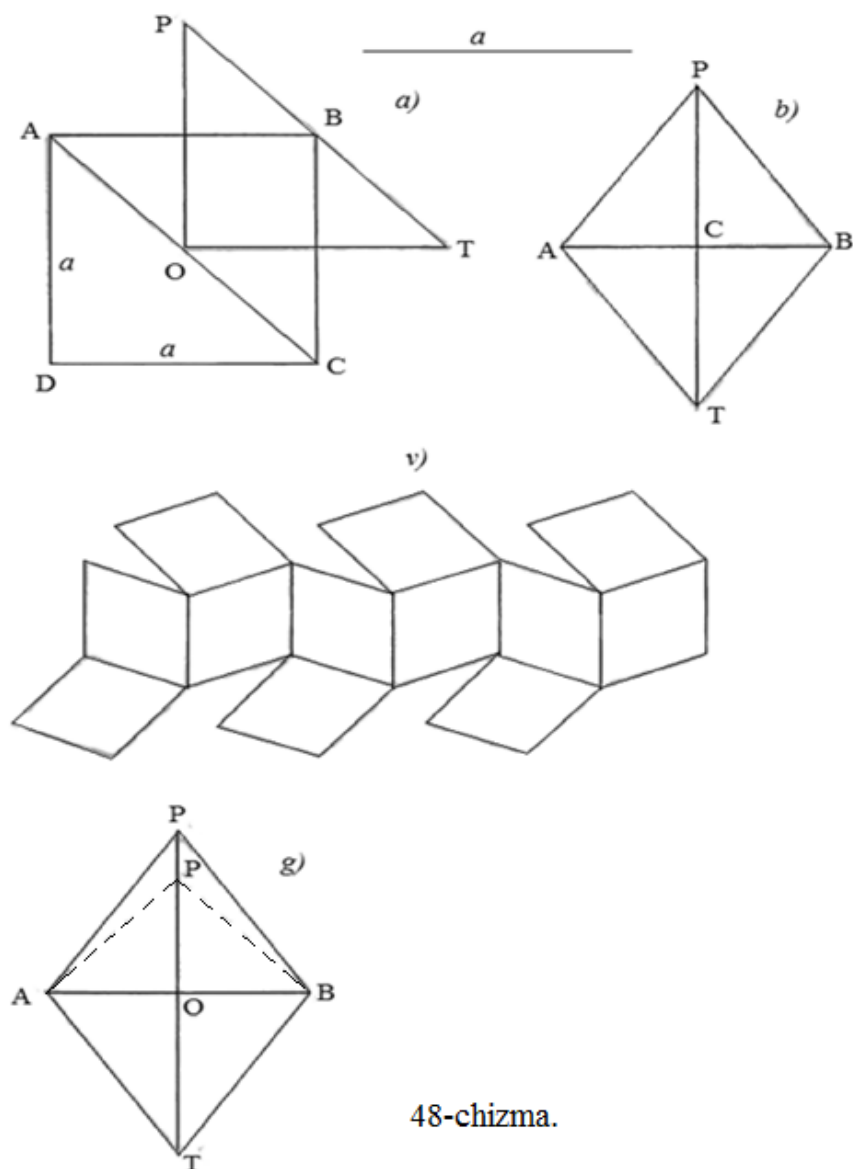


47-chizma.

3. Qirradi a ga teng bo'lgan kubning qirralari orqali shu qirralarga yopishgan yoqlari bilan teng ikki yoqli burchak hosil etuvchi tekisliklar o'tkazishdan hosil bo'lgan rombik dodekaedrning yoyilmasi va modelini yasang.

Yechish, Berilgan kubning gorizontaal proyeksiyasi - $ABCD$, yon yog'i bilan teng ikki yoqli burchak ostida o'tkazilgan tekislikning gorizontaal proyeksiyasi - PBT (48-a chizma). $PT \perp AC$ va $PT = \frac{1}{2}AC$ rombik dodekaedr bitta yog'ining katta diagonalidir. Kichik diagonalidir kubning qirradi a ga teng. $A_1B_1 = a$ va $P_1T_1 = AC = PT$ diagonalidir. Kichik diagonalidir kubning qirradi a ga teng. $A_1B_1 = a$ va $P_1T_1 = AC = PT$ diagonalidir bo'yicha $A_1P_1B_1T_1$ romb yasaymiz (48-b chizma). Qolgan romblarni ham shu tartibda ketma-ket yasab yoki $A_1P_1B_1T_1$ ni andaza qilib olib, 48-v chizmadagi yoyilmani hosil qilamiz. 48-b chizmadagi rombning katta diagonalidir $P_1T_1 = PT = AC = a\sqrt{2}$; kichik diagonalidir esa $A_1B_1 = a$; bu diagonalarga ko'ra rombnii quyidagicha ham yasash mumkin: $A_1B_1 = a$ kesma olamiz (48-g chizma) va uning o'rtasi (O_1) dan $P_2T_2 \perp A_1B_1$ o'tkazib, unda $O_1P = A_1O_1 = \frac{a}{2}$ kesma

ajratamiz. P_2T_2 ni O nuqtani markaz qilib, A_1P radiusli yoy bilan P_1 va T_1 nuqtalarda kesamiz.



48-chizma.

$A_1P_1B_1T_1$ chizma rombik dodekaedrning bitta yog'iga teng bo'ladi, ya'ni $A_1B_1 = a$; $P_1T_1 = a\sqrt{2}$.

$$\text{Haqiqatan, } \triangle A_1PO_1 \text{ dan: } A_1P = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

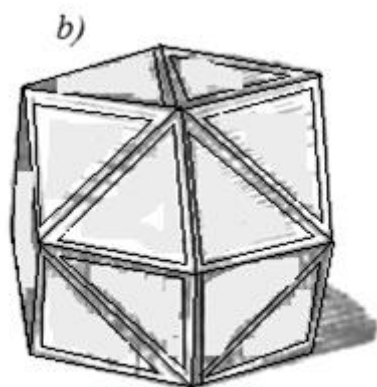
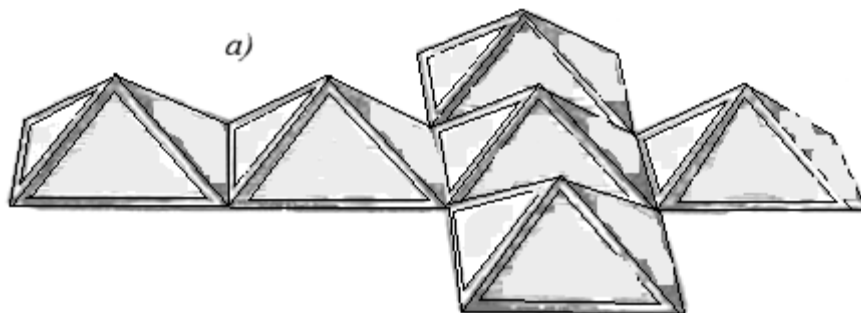
Bu rombning katta diagonali $a\sqrt{2}$ ga teng, chunki $P_1T_1 = AC = a\sqrt{2}$ edi. Rombik dodekaedrning qirrasini to'g'ri burchakli $\triangle A_1P_1O_1$ dan topamiz:

$$A_1P_1 = \sqrt{A_1O_1^2 + O_1P_1^2} = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Demak,

$$A_1P_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

2) Asosining tomonlari kubning qirrasi a ga, yon qirralari esa rombik dodekaedrning qirrasi (kub diagonalining yarmisi) ga teng bo'lgan oltita muntazam piramida (bunday piramida kyusterning birinchi piramidasi deyiladi) yasab, kub yoyilmasiga joylashtiramiz (49-a chizma).



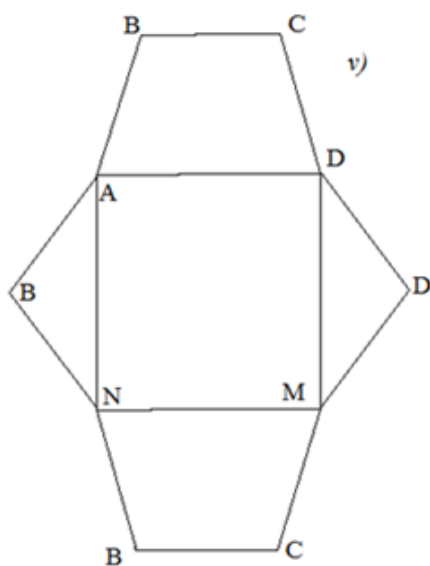
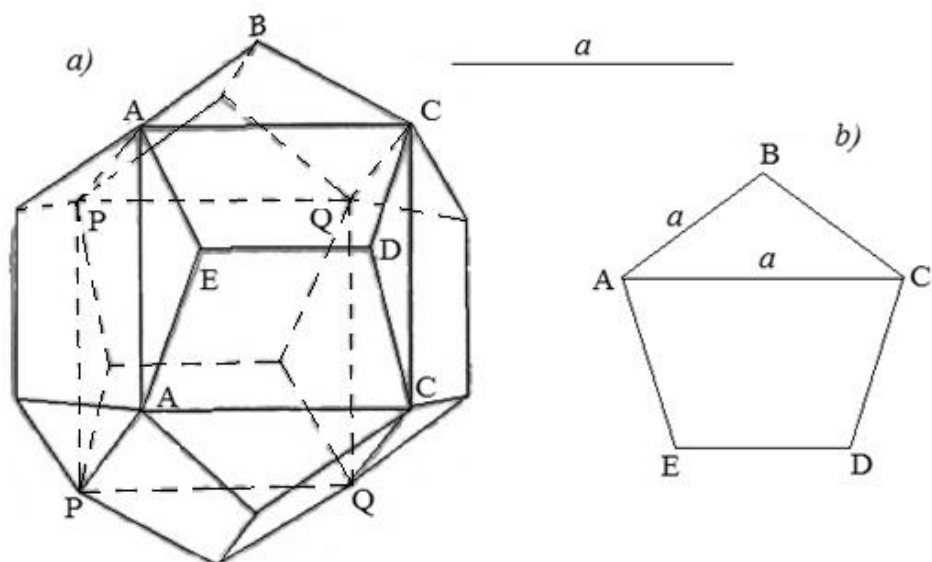
49-chizma.

Agar uni piramida uchlari yoyilma ichkarisida qoladigan qilib yopishtirsak (49-b chizma), rombik dodekaedr hosil bo'ladi. Agar piramida uchlari yoyilma ichkarisida qoladigan qilib yopishtirsak, kub hosil bo'ladi.

5. Qirrasi a ga teng bo'lgan $ACQPA_1C_1Q_1P_1$ kubning qirralari orqali shunday tekisliklar o'tkazingki, ularning kesishishidan dodekaedr hosil

bo'lsin (50-a chizma). Kubning yoqlariga qo'yganda dodekaedr hosil qiladigan jismlarning yoyilmalari va modellarini yasang.

Yasash. Qirrasi a ga teng bo'lgan kub yoqlariga qo'yiladigan jismlarning yoyilmalari quyidagicha yasaladi. Diagonali a ga teng bo'lgan muntazam beshburchak (ABCDE) yasaymiz (50-b chizma). Keyin ACDE trapesiya va ABC uchburchakni 50-v chizmada ko'rsatilgandek qilib joylashtiramiz. Unda $A_2B_1C_1D_2 = ACDE$; $\Delta D_2D_1M = \Delta ABC$ qilib olib, A_2D_2 tomoniga A_2D_2MN kvadrat yasaymiz. Bu yoyilma asosida model yasaymiz. Bunday jismdan oltitasini yasab, kubning olti yog'iga ma'lum tartibda joylashtirsak, muntazam dodekaedr hosil bo'ladi. Agar biz qirrasi muntazam dodekaedrning bir yoq diagonaliga teng bo'lgan kub yasasak, bu kub dodekaedr ichiga 50-a chizmada ko'rsatilgandek joylashar edi.



50-chizma.

§ 3.2. Oktaedr, ikosaedrning modelini yasash

1.Oktaedrning modelini yasash

Qadim zamonlardan beshta muntazam qavariq ko'p yoqlilar ma'lum bo'lganligini oldingi bobda aytib o'tgan edik.

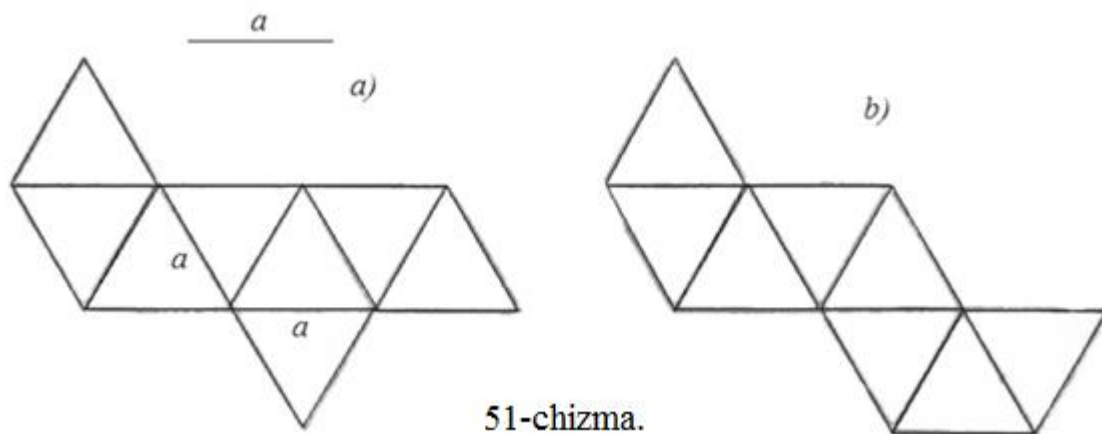
Ular quyidagilardir: I. Yoqlari muntazam uchburchaklardan tuzilgan muntazam ko'p yoqlilar. Bular uch xildir: birinchi xilini oldingi bobda ko'rsatib o'tganmiz. Endi qolgan ikkitasini ko'rib chiqamiz.

2) oktaedr-har bir uchida to'rtta yog'i birlashgan bo'lib, uning sakkizta yog'i, oltita uchi, un ikkita qirradi bo'ladi;

3) ikosaedr-har bir uchiga beshta yoq birlashgan bo'lib, uning 20 ta yog'i, 12 ta uchi, 30 qirradi bo'ladi.

1.Qirradi a ga teng bo'lgan muntazam oktaedrning turli xil yoyilmalari va modelini yasang.

Bu masalada talab etilgan yoyilmaning ikki xili 51-a va b chizmalarda ko'rsatilgan.



51-chizma.

2. Oktaedr yon yoqlarining markazlarini kesma yordamida ketma-ket tutashtirilsa, oktaedrga ichki chizilgan kubning qirralari hosil bo'ladi (52-a chizma). Oktaedrning qirrasi a ga teng. Kubning qirrasi va modelini yasang.

1-usul. Analiz. Oktaedr ikki yoqli burchagining chiziqli burchagi (BED) ni yasaymiz (52-a chizma). Bu burchak teng yonli ABED ning uchidagi burchagi bo'lib, uning asosi tomoni a ga teng bo'lgan ABCD kvadratning BD diagonaliga, yon tomonlari berilgan oktaedr yog'ining balandliklari (tomoni a ga teng bo'lgan teng tomonli uchburchak balandligi $BE = DE$) ga teng.

Oktaedrga ichki chizilgan kubning qirrasi, oktaedr ikki qo'shni yog'ining markazlari orasidagi masofa MH ga tengdir.

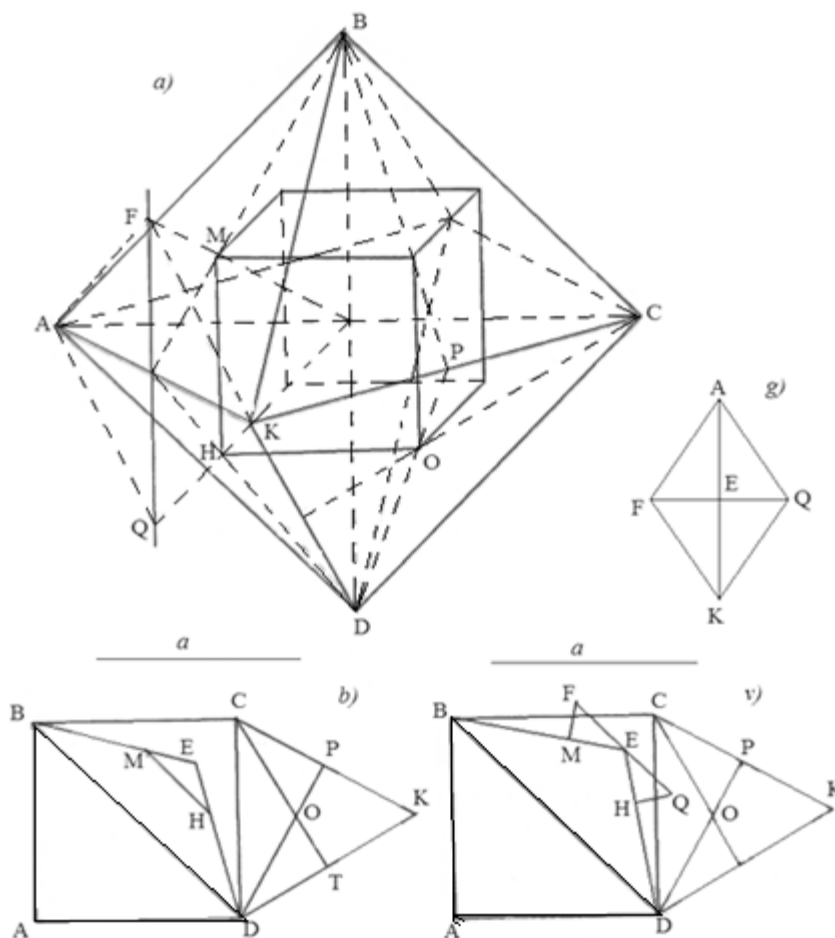
Yasash. Tomoni a ga teng bo'lgan ABCD kvadrat yasaymiz (52-b chizma). Bu kvadratning bir tomoni (CD) ga CKD teng tomonli uchburchak yasaymiz. Uning CT va DP medianalarini (ular bir vaqtda balandlik va bissektrisa ham bo'ladi) o'tkazamiz. Ular bir-biriga tengdir, ya'ni $CT = DP$. D va B nuqtani markaz qilib, DP radius bilan chizilgan yoylarning kesishish nuqtasi E ni topamiz, $\angle BED$ - oktaedrning ikki yoqli burchagi bo'ladi. Uning yon tomonlarini B va D nuqtani markaz qilib, DO radius bilan M va H nuqtalarida kesamiz. Izlangan kubning qirrasi MH bo'ladi.

2-usul. Analiz. $\triangle BED \sim \triangle MEH$ dan: $\frac{MH}{BD} = \frac{HE}{DE}$. Bunda $AB = AK = \dots = a$; $HE = OP = \frac{DP}{3}$; $DE = DP$ bo'lgani uchun $\frac{MN}{BD} = \frac{\frac{DP}{3}}{DP}$ yoki $\frac{MN}{BD} = \frac{1}{3}$.

Bundan: $MH = \frac{BD}{3}$; $\triangle ABD$ dan $BD = a\sqrt{2}$ ni topib, BD ning o'rniga qo'ysak:

$$MH = \frac{BD}{3} = \frac{a\sqrt{2}}{3}, \text{ ya'ni } MH = \frac{a\sqrt{2}}{3},$$

Yasash. Katetlari a ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli ABD uchburchak yasab, uning gipotenuzasi BD ni teng uch bo'lakka bo'lamiz, bu bo'laklardan biri oktaedrga ichki chizilgan kubning qirrasiga teng bo'ladi.



52-chizma.

3. Agar oktaedrning qirralari orqali bu qirralarga yopishgan yoqlar bilan teng ikki yoqli burchaklar hosil qiladigan qilib tekisliklar o'tkazilsa, ularning kesishishidan rombik dodekaedr hosil bo'ladi. Agar oktaedrning qirradi a ga teng bo'lsa, rombik dodekaedrning yoyilmasi va modelini yasang,

Yechish. Qirradi a ga teng bo'lgan oktaedr ikki yoqli burchagining chiziqli burchagi (BEF) ni yasaymiz. E nuqtadan $FEQ \parallel BD$ o'tkazamiz (52-v chizma). 52-b chizmadagidek M va N nuqtalarni topib, $ME \perp BE$ va $HQ \perp ED$ o'tkazamiz. Hosil

bo'lgan FEQ kesmani bir diagonal, berilgan $AK = a$ kesmani esa ikkinchi diagonal qilib AQKF romb yasaymiz (52-g chizma). Bu rombni andaza qilib (yoki sirkul va chizg'ich yordamida) ketma-ket yasab, rombik dodekaedrning yoyilmasini hosil qilamiz va shu yoyilmaga asosan modelini yasaymiz.

4. Qirradi a ga teng bo'lgan oktaedrning ichiga uchlari oktaedrning qirralarida yotadigan kubning modelini joylashtirib model yasang.

1-usul. Analiz. Faraz qilaylik, qirradi berilgan a ga teng bo'lgan $SABCD S_1$ oktaedr ichiga uchlari oktaedr qirralarida yotgan $A_1 B_1 C_1 D_1 A_2 B_2 C_2 D_2$ kub yasalgan bo'lsin (53-a chizma).

Kubning qirralarini $A_1 A_2 = B_1 B_2 = \dots = x$ deb belgilaylik. U vaqtda $A_1 B_1 C_1 D_1$ kvadratdan:

$$A_1 C_1 = x \sqrt{2}, \quad A_1 O_1 = \frac{1}{2} x \sqrt{2}.$$

$$\Delta A_1 O_1 S \text{ da } \angle A_1 S O_1 = 45^\circ; \angle S O_1 A_1 = 90^\circ \text{ bo'lganidan } S O_1 = A_1 O_1 = \frac{1}{2} x \sqrt{2}; A_1 S^2 = 2 \cdot \left(\frac{1}{2} x \sqrt{2} \right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{4} x^2 \cdot 2 = x^2.$$

$$A_1 S = x;$$

$$\Delta A A_1 A_2 \text{ da: } \angle A_1 A A_2 = 90^\circ; \angle A A_1 A_2 = \angle A A_2 A_1 = 45^\circ.$$

$$A A_2 = A A_1 = A S - A_1 S = a - x; \text{ Pifagor teoremasiga binoan:}$$

$$A_1 A_2^2 = A A_1^2 + A A_2^2;$$

bunda

$$A_1 A_2 = x; A A_1 = A A_2 = (a - x)$$

bo'lganidan

$$x^2 = 2(a - x)^2 = 2a^2 - 4ax + 2x^2;$$

$$x^2 - 4ax + 2a^2 = 0.$$

Bu kvadrat tenglamani yechamiz:

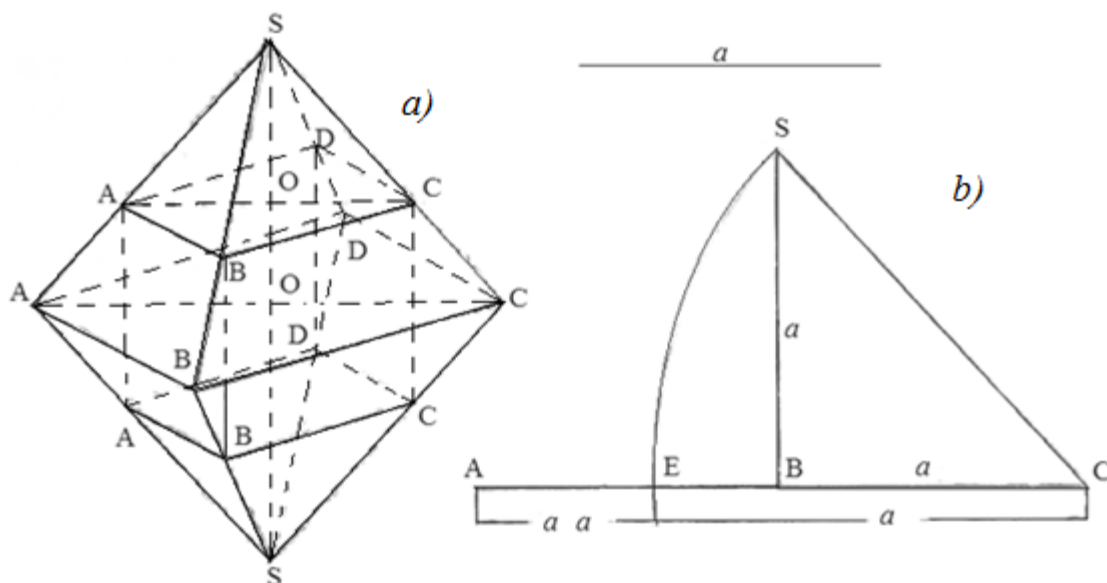
$$x = 2a \pm a \sqrt{2};$$

$$x_1 = 2a + a \sqrt{2};$$

$$x_2 = 2a - a \sqrt{2};$$

x_1 - chet ildiz, chunki x_1 kesma qirradi a ga teng bo'lgan oktaedrning tashqarisida yotadigan x_2 ildiz masalani shartini qanoatlantiradi. $x = 2a - a\sqrt{2}$ kesmani yasashimiz kerak. Bu kesma masala shartini kanoatlantiradigan kubning qirrasiga teng bo'ladi.

Yasash. Biror to'g'ri chiziqli (53-b chizma) $AC = 2a$ kesma olib, uning o'rtasi (B) dan $BS \perp AC$ tushiramiz. Shuningdek, $BS = a$ olib, C nuqtadan CS yoy bilan AS kesmani E nuqtada kesamiz. U vaqtda $AE = 2a - a\sqrt{2}$ kesma izlangan kubning qirradi bo'ladi. Isboti chizmadan ko'rinib turibdi



53-a, b chizma.

Kub qirradi (x) ning qiymatini quyidagicha ham aniqlash mumkin: 53-a chizmadagi $\triangle AA_1F$ da $\angle A_1AF = \angle AA_1F = 45^\circ$; $\angle A_1FA = 90^\circ$;

$$AA_1^2 = AF^2 + A_1F^2,$$

bunda $AF = A_1F = \frac{x}{2}$ bo'lgani uchun,

$$AA_1^2 = 2 \left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{2} \text{ yoki } AA_1 = \frac{x\sqrt{2}}{2}.$$

$\triangle A_1SC_1 \sim \triangle ASC$ dan:

$$\frac{SA_1}{SA} = \frac{A_1C_1}{AC};$$

bunda $SA = a$;

$$\triangle A_1B_1C_1 \text{ dan: } A_1C_1 = x\sqrt{2};$$

ΔABC dan: $AC = a \sqrt{2}$;

$$SA_1 = SA - AA_1 = \frac{a-x}{2} \sqrt{2}$$

bo'lgani uchun

$$\frac{a - \frac{x}{2} \sqrt{2}}{a} = \frac{x}{a \sqrt{2}};$$

buni soddalashtirsak,

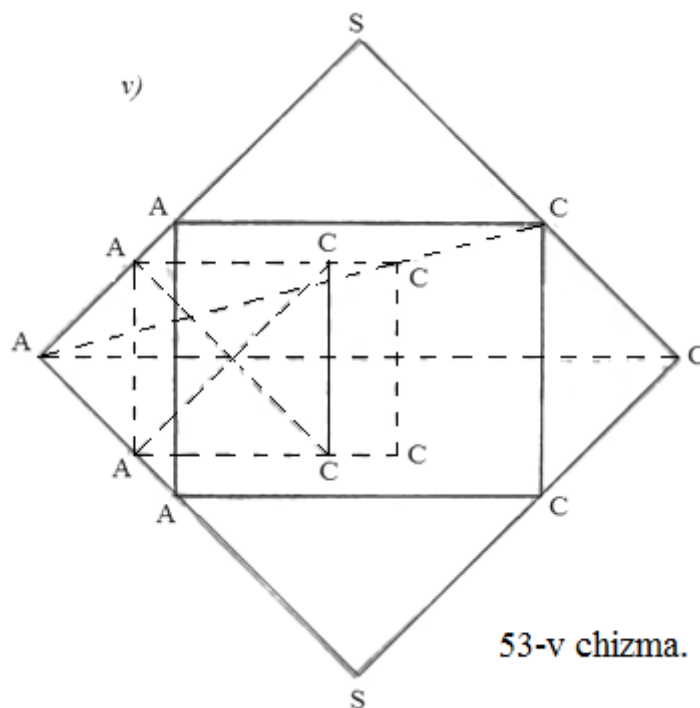
$$a - \frac{x}{2} \sqrt{2} = x \text{ bundan } x;$$

$$2a - x \sqrt{2} = 2x$$

$$2a - x \sqrt{2} = 2x .$$

2-usul. Faraz qilaylik, oktaedr ichiga kub yasalgan bo'lsin (53-a chizma). Oktaedrning $ASCS_1$ kesimi ichiga kubning $A_1C_1C_2A_2$ diagonal kesimi chizilgan. $A_1C_1C_2A_2$ kesimning $A_1A_2 = C_1C_2$ tomonlari kubning qirrasiga, $A_1C_1 = A_2C_2$ tomonlari esa kub yog'ining diagonaliga tengdir.

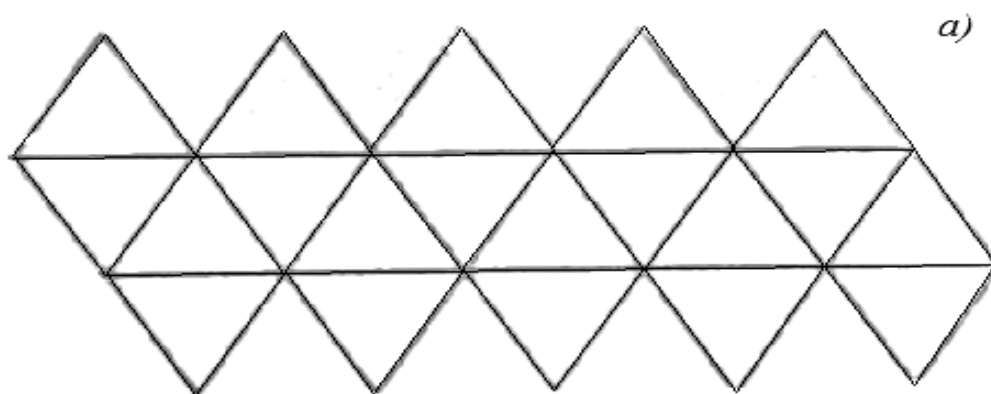
Yasash. 53-a chizmadagi $ASCS_1$ kesimning haqiqiy kattaligini yasaymiz. Bu kesim tomoni a ga teng bo'lgan $A'S'C'S'_1$ kvadratdir (53-v chizma), $A'S'$ tomonda ixtiyoriy A_3 nuqtadan $A_3A_4 \perp A'C'$ tushirib, tomoni A_3A_4 ga teng bo'lgan $A_3C_4C_3A_4$ kvadratni yasaymiz, uning A_3C_4 va A_4C_3 tomonlarida $A_3C'_3 = A_4C'_4 = A_3C_3$ kesmalarni ajratamiz.

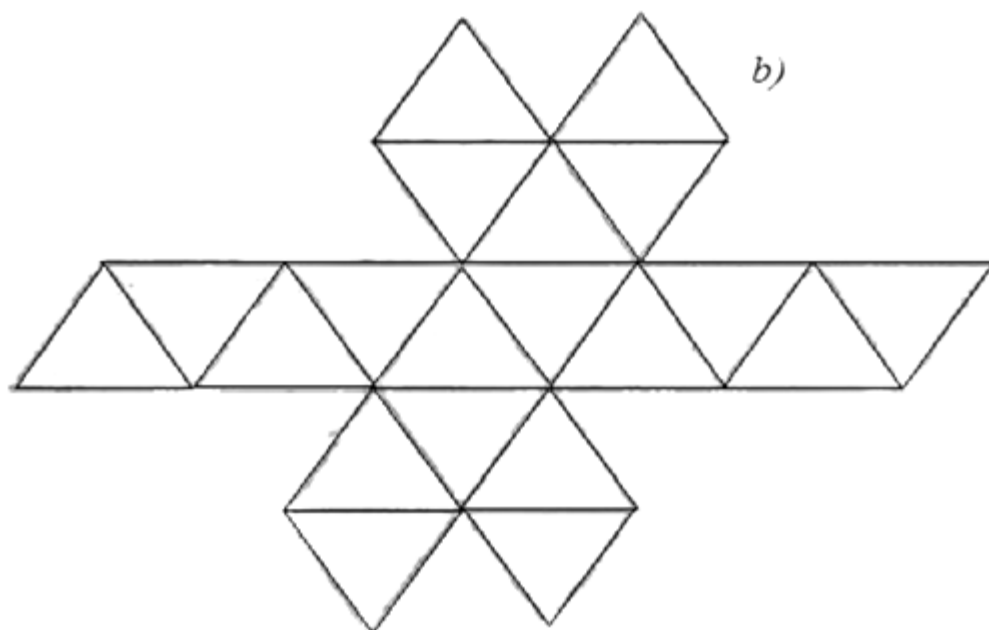


$A'C'_3$ ni uning $S'C'$ bilan kesishgan nuqtasi C'_1 dan $C'_3A'_1 \parallel A'C'$, $A'_1A'_2 \parallel A_3A_4$, $A'_2C'_2 \parallel A'C'$ larni o'tkazamiz. $A'_1C'_1C'_2A'_2$ chizma kub diagonal kesimining haqiqiy kattaligi bo'ladi. $A'_1A'_2$ ni qirra qilib kub yasasak, bu kub qirrasi a bo'lgan oktaedr ichiga masaladagi shart bo'yicha joylashadi.

2. Ikosaedrning modelini yasash

1. Qirrasi a ga teng bo'lgan ikosaedr yoyilmasi va modelini yasang.
54-a va b chizmalarda ikki xil yoyilmasi ko'rsatilgan.





54-chizma.

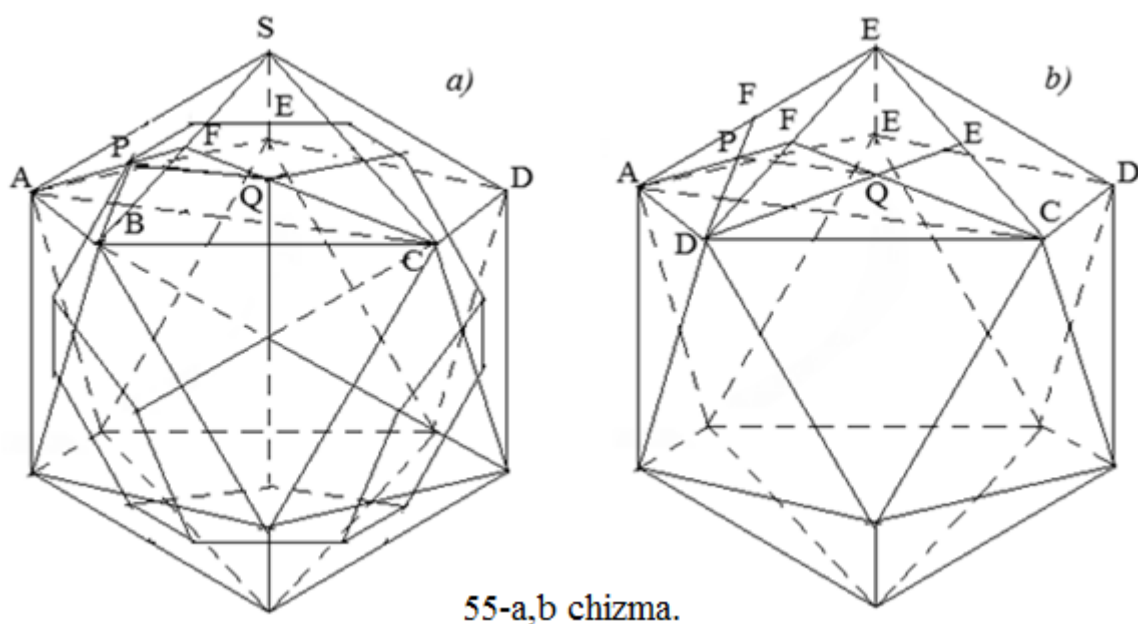
2. Ikosaedrning bir uchiga yopishgan yoqlarining markazlarini kesma yordamida ketma-ket tutashtirilsa:

- a) ichki chizilgan dodekaedr qirralari hosil bo'lishini ko'rsating;
- b) agar ikosaedrning qirrasi a ga teng bo'lsa, dodekaedrning yoyilmasi va modelini yasang;
- v) dodekaedrning qirrasi a ga teng bo'lsa, ikosaedrning yoyilmasi va modelini yasang.

Yechish. a) ikosaedrning yoqlari o'zaro teng va muntazam uchburchaklar bo'lib, bu uchburchak orasidagi ikki yoqli burchaklar o'zaro teng. Shuning uchun umumiy uchga ega bo'lgan beshta muntazam uchburchak markazlari orasidagi masofalar bir-biriga teng va bu uchburchaklar bir tekislikda yotadi. Bu kesmalar orasida hosil bo'lgan burchaklar ham bir-biriga teng bo'lganidan muntazam beshburchak hosil etadi. Ikosaedr qolgan yoqlarining markazlarini ham yuqoridagi singari tutashtirib chiqamiz. Ikosaedrning o'n ikkita uchi bor. Uning har bir uchida bittadan – o'n ikkita o'zaro teng muntazam beshburchak hosil bo'ladi. Muntazam beshburchaklar hosil etgan ko'p yoqli burchaklar ham bir-biriga teng bo'lganidan ular muntazam dodekaedr hosil qiladi (55-a chizma).

- b) dastlab ikosaedr ikki yoqli burchagining chiziqli burchagini yasaymiz.

Analiz. SB qirrali ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi SB qirraga tushirilgan AF va CF perpendikulyarlar orasidagi burchak yoki AFC teng yonli uchburchakning uchidagi burchagi bo'ladi. AFC uchburchakning AF va BF yon tomonlari berilgan ikosaedrning ASB va BCS yogining balandliklaridan, AC asosi esa tomoni berilgan a kesmaga teng bo'lgan ABCDE muntazam beshburchakning diagonalidan iboratdir (55-b chizma).



55-a,b chizma.

Dodekaedrning qirrasi ikosaedr ikkita qo'shni yoqlari (ASB va BSC) ning markazlari (P va Q) orasidagi masofa PQ ga teng. Ma'lumki, muntazam uchburchaklarning P va Q markazlari AF va CF medianalarni $AP : PF = CQ : QF = 2 : 1$ nisbatda bo'ladi.

Yasash. Tomoni berilgan a kesmaga teng bo'lgan ABCDE muntazam beshburchakni yasaymiz (55-v chizma). Uning CD tomoniga tomoni a ga teng bo'lgan muntazam uchburchak yasaymiz va uning CF_1 hamda DE_2 medianalarini o'tkazamiz. C va A nuqtalarni markaz qilib, CF_1 radiusli yoylarning kesishish nuqtasi F ni topsak, AFC burchak ikosaedr ikki yoqli burchagining chiziqli burchagi bo'ladi.

CF kesmaga C nuqtadan CQ_1 kesmani qo'yib Q nuqtani, AF kesmaga A nuqtadan CQ_1 kesmani qo'yib P nuqtani topamiz. PQ ikosaedrga ichki chizilgan dodekaedrning bir qirrasiga teng. 55-a, b chizma.

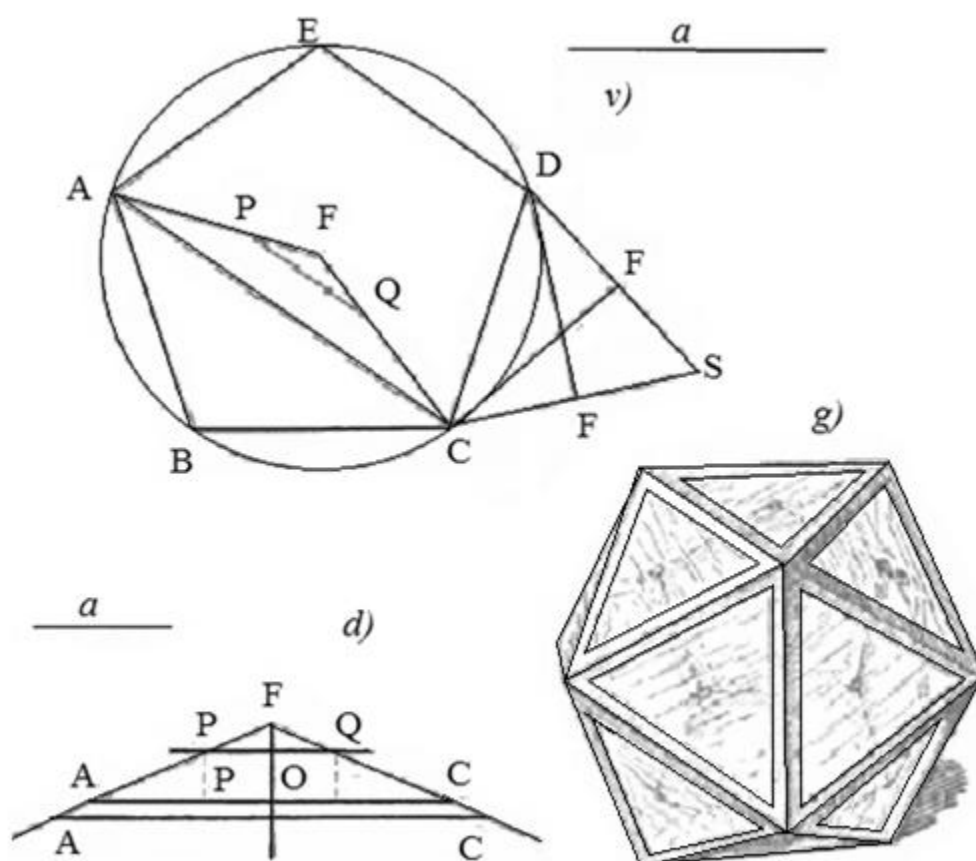
Haqiqatan ham $\angle AFC$ ikosaedr ikki yoqli burchagining chiziqli burchagidir.

Chunki AFC uchburchakning bir tomoni a ga teng bo'lgan ABCDE muntazam beshburchakning diagonali AC ga, qolgan ikki ($AF = FC = CF$) yon tomoni esa tomoni a ga teng bo'lgan muntazam uchburchakning balandligiga teng. $AP:PF=CQ:QF = 2:1$, ya'ni PQ kesma izlangan dodekaedrning bir qirrasidir.

Bu o'lchamlar bo'yicha shishadan dodekaedr yasab, uning tashqarisiga qirradi a ga teng bo'lgan ikosaedr ham yasash mumkin (55-g chizma).

v) ikosaedrning yoyilmasi va modelini yasash uchun uning ikki yoqli burchagining chiziqli burchagi AFC ni yasaymiz (b punktga qarang). Bu burchakning FO bissektrisasida $AOC \perp FO$ o'tkazamiz (55-d chizmaa). O nuqtaning har ikki tomonida $OP = OQ = \frac{a}{2}$ kesma olib, $PP_2 \perp AC$, $QQ_1 \perp LC$ larni o'tkazib, $FA_1 = 3 \cdot FP_1 = FC_1$ larni olamiz. Diagonali A_1C_1 ga teng bo'lgan muntazam beshburchakning tomonini yasaymiz.

Buning uchun A_1C_1 kesmani o'rta va chet nisbatda bo'lamiz. Uning katta bo'lagi izlangan muntazam beshburchakning bir tomoni yoki izlangan ikosaedrning qirrasiga teng bo'ladi. Bunga ko'ra ikosaedr yoyilmasini yasash oson.



55-v,g,d chizma.

3. Agar ikosaedr qirralari orqali shu qirralardan chiquvchi yoqlar bilan teng ikki, yoqli burchak tashkil qiladigan qilib tekisliklar o'tkazilsa:

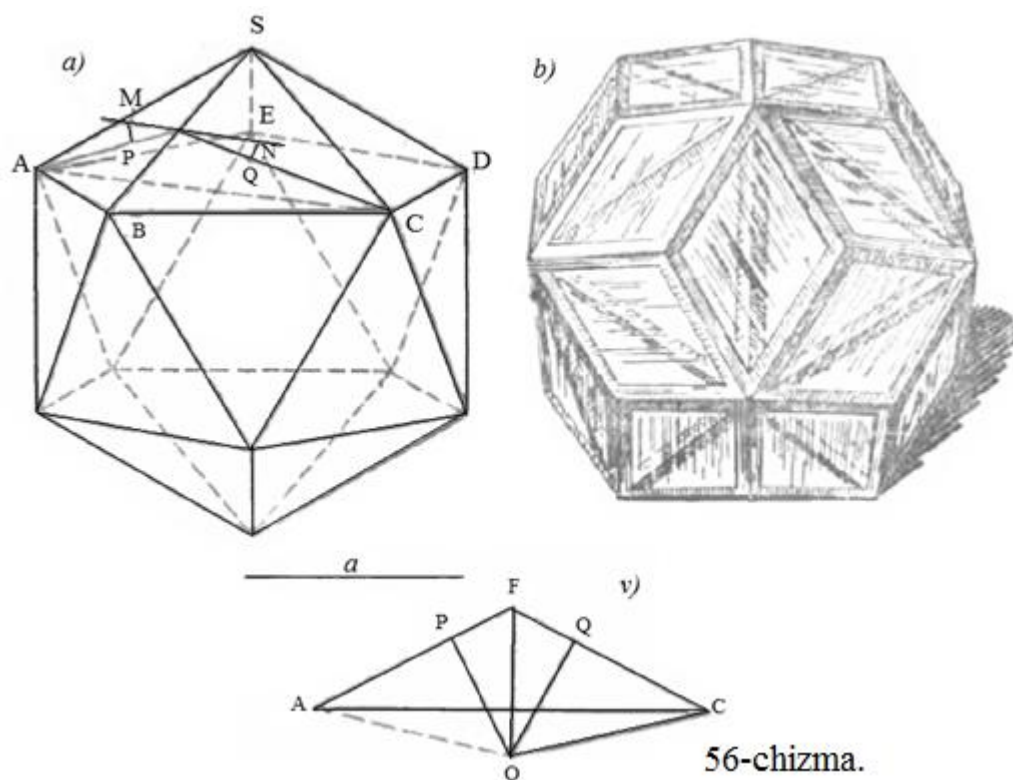
a) tekisliklarning kesishishidan rombik o'ttiz yoqli hosil bo'lishini ko'rsating;

b) agar ikosaedr qirradi a ga teng bo'lsa, rombik o'ttiz yoqlining yoyilmasi va modelini yasang;

v) agar rombik o'ttiz yoqlining bir qirradi a berilgan bo'lsa, ikosaedr qirrasini va o'ttiz yoqlining yoyilmasi hamda modelini yasang.

Yechish. a) ikosaedrning har bir qirradi orqali o'tkazilgan tekisliklarning kesishishidan romblar hosil bo'ladi. Ularning diagonallari o'zaro perpendikulyar bo'lib teng o'rtasidan bo'linadi. Bunday romblar soni o'ttizta, chunki ikosaedrning 30 ta qirradi bor. Bu ko'p yoqli rombik o'ttiz yoqli deyiladi;

b) qirradi berilgan a kesmaga teng bo'lgan ikosaedrning ikki yoqli burchagining chiziqli burchagi AFC ni yasaymiz (1- masalaning b punkti). F nuqta orqali $MFN \parallel AC$ o'tkzsak (56-a chizma),



56-chizma.

MN kesimda hosil bo'ladigan rombning kichik diagonalini bo'ylab ketadi. Romb kichik diagonalining uzunligini topish uchun, ikosaedrning ASB va BSC yoqlari medianalarining kesishish

nuqtasi P va Q lardan ($PF = QF = \frac{1}{3} AF$ nuqtadan) u yoqlarga, AF va FC larga PM va QN perpendikulyarlarni o'tkazamiz. Ularning SB qirra orqali o'tkazilgan tekislik (ya'ni MN) bilan kesishgan nuqtalarini M va N desak, MN kesma o'ttiz yoqlining bitta yog'i-rombning kichik diagonalini, berilgan $a = BS$ kesma esa uning katta diagonalini bo'ladi. Bu ikkita diagonal bo'yicha romb yasaymiz. Keyin unga teng romblar yasab, rombik o'ttiz yoqlining yoyilmasini hosil qilamiz. Qirrasi a ga teng bo'lgan ikosaedr modeli va uning tashqarisiga o'ttiz yoqli modelini yasash mumkin (56-b chizma);

v) qirrasi a ga teng bo'lgan rombik o'ttiz yoqlini yasash uchun ixtiyoriy qirrali ikosaedrga yasalgan o'ttiz yoqlining bir yog'ini yasab, uning biror burchagi α ni belgilab olamiz. Tomonlari a ga va bir burchagi α ga teng bo'lgan romb yasab, uning yordamida rombik o'ttiz yoqli yoyilmasini hosil qilamiz.

4. Qirrasi a ga teng bo'lgan ikosaedrga ichki va tashqi chizilgan sharlarning radiuslarini yasang.

Ikosaedr ikki yoqli burchagining chiziqli burchagini 1-masalaning b punktidagi kabi yasaymiz. Uning ikkita qo'shni yoqlari markazlariga mos keluvchi P va Q nuqtalarini topib (56-v chizma), $PO \perp AF$ va $QO \perp FC$ larni o'tkazamiz. Ularning kesishish nuqtasini O bilan belgilaymiz, bunda $OP = OQ = r$ ichki chizilgan sharning, $OA = OC = R$ tashqi chizilgan sharning radiuslari bo'ladi.

§ 3.3. Dodekaedrning modelini yasash

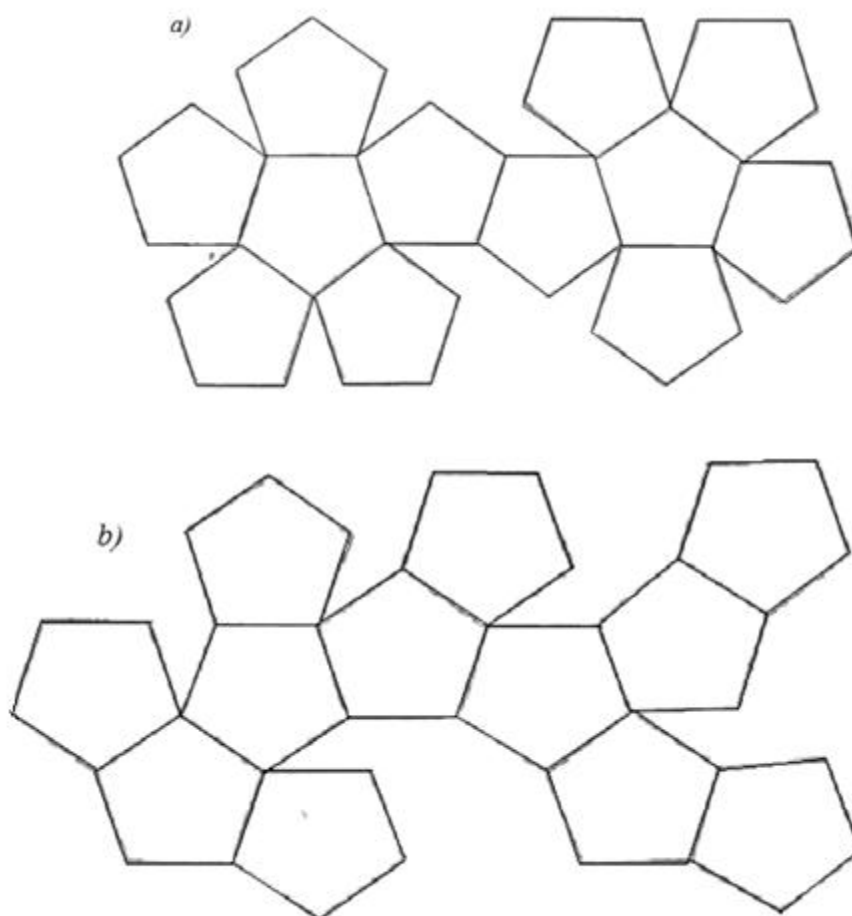
III. Dodekaedr-barcha yoqlari muntazam beshburchakdan tuzilgan muntazam ko'p yoqli bo'lib, birgina ko'rinishga ega. Uning dar bir uchida 3 ta yog'i birlashgan bo'lib, 12 ta yog'i, 20 ta uchi, 30 ta qirrasi bo'ladi.

Bu ko'p yoqlilarning hammasida deyarli berilgan qirraga ko'ra, muntazam ko'pburchak (tetraedr, oktaedr, ikosaedrlarda muntazam uchburchak, geksaedrda kvadrat, dodekaedrda esa muntazam beshburchak) yasashga to'g'ri keladi. Ularni sirkul va chizg'ich yordamida yasash yoki kartondan andaza yasab, uni ketma-ket qo'yish bilan ularning yoyilmalarini hosil qilish mumkin.

Biz har bir muntazam ko'p yoqlining bir necha xil yoyilmasini ko'rsatib ketamizki, bu yoyilmalar o'quvchilarning fazoviy tafakkurini o'stirishga hamda u yoki bu yoyilmadan foydalanishda berilgan qog'ozni tejashga imkon tug'diradi.

1. Qirrasi a ga teng bo'lgan dodekaedrning turli xil yoyilmalari va modelini yasang.

Yasash. Tomoni a ga teng bo'lgan muntazam beshburchaklarni ketma-ket yasab (yoki tomoni a ga teng bo'lgan beshburchakning karton andazasini yasab) dodekaedrning 57-a va b chizmalardagi ikki xil yoyilmasini hosil qilamiz. Yuqoridagi usuldan tashqari dodekaedrning modelini uning ikkita yarim yoyilmalaridan foydalanib yasash ham mumkin. Quyida dodekaedr modelining yarim yoyilmasini yasash usullaridan ba'zilarini ko'rsatamiz.

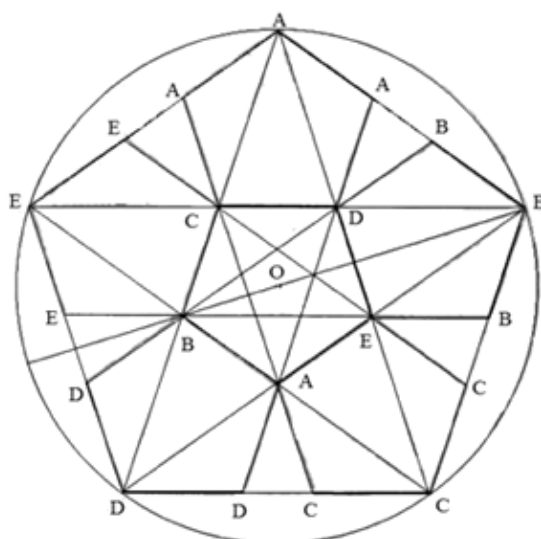


57-chizma.

2.Dodekaedr modelini uning yarim yoyilmalarini chizish usuli bilan yasang.

Yasash. Ixtiyoriy radiusli aylana chizib, uni beshta teng bo'lakka bo'lamiz, ABCDE qavariq va ACEBD yulduzsimon muntazam beshburchaklarni hosil qilamiz (58-chizma). Hosil bo'lgan A'B'C'D'E' muntazam beshburchak diagonallari (A'C', B'D', C'E', D'A', E'B') davomlarining ABCDE beshburchak tomonlari bilan kesishish nuqtalari ($A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2$) ni topamiz. Bu nuqtalar ABCDE va A'B'C'D'E' ko'pburchaklarning uchlari bilan birgalikda dodekaedr yarim yoyilmasining uchlarini hosil etadi. (Dodekaedr yarim yoyilmasi chizmada qora chiziq bilan ko'rsatilgan) [16].

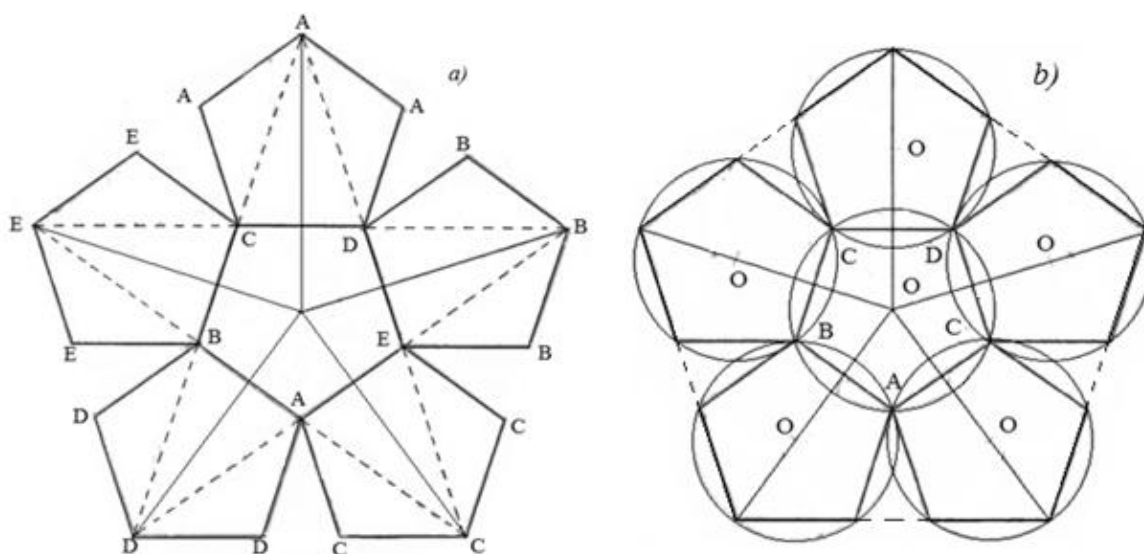
$A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, D_1, D_2, E_1, E_2, A_1$ nuqtalarni D', E', A', B' va C' nuqtalarni markaz qilib, A'B' ga teng radiusli yoy bilan ABCDE muntazam beshburchakning tomonlarini kesish bilan ham topish mumkin edi.



58-chizma.

3. Qirrasi, a ga teng bo'lgan dodekaedrning yarim yoyilmasini yasang.

1-usul. Tomoni berilgan a kesmaga teng bo'lgan $A'B'C'D'E'$ muntazam beshburchak yasab (59-chizma), uning tomonlarini davom ettirib, A, B, C, D va E nuqtalarni topamiz va ABCDE muntazam besh burchakni hosil qilamiz. So'ngra A_1, A_2, B_1, B_2 nuqtalarni topamiz (59-a chizma).



59-chizma.

A_1, A_2, B_1, B_2 nuqtalar markazlari A va C', A va D', B va D', B va E' nuqtalarda bo'lib, radiusi a ga teng bo'lgan yoylarning kesishish nuqtalariga mos keladi.

2- usul. Tomoni a ga teng bulgan muntazam $A'B'C'D'E'$ beshburchak yasaymiz (59-a chizma). Beshburchak uchlari (A', B', C', D', E') ni markaz qilib, radiusi

berilgan a kesmaga teng va xuddi shu nuqtalarni markaz qilib radiusi $A'B'C'D'E'$ beshburchakning diagonali ($A'C'$) ga teng bo'lgan yoylar chizamiz hamda bu yoylarning kesishish nuqtalari ($A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2, \dots$) ni topamiz.

$A_1, A_2, B_1, B_2, \dots$ nuqtalarni markaz qilib, a radiusli yoylar chizamiz va ularning kesishish nuqtalari A, B, C, D va E larni hosil qilamiz. Bu nuqtalarning hammasini ketma-ket kesma yordamida tutashtirib, dodekaedrning yarim yoyilmasini hosil qilamiz.

3-usul. Tomoni a kesmaga teng bo'lgan $A'B'C'D'E'$ muntazam beshburchak yasab, markazlari shu beshburchakning uchlari (A', B', C', D', E')da bo'lib, radiusi beshburchakning tomoni $C'D'$ ga teng yoylarning kesishish nuqtalari (O_1, O_2, O_3, O_4, O_5) larni topamiz.

O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 nuqtalarni markaz qilib O_1C' radiusli aylanalar chizib, ularga $C'D'$ ni ketma-ket qo'yib chiqsak, yoyilmaning nuqtalari hosil bo'ladi (59-b chizma).

Dodekaedrning yarim yoyilmasini qirrasi a ga yoki yoklarining ayrim elementlari (diagonali, ichki yoki tashqi doiralarining radiuslari va boshqalar)ga ko'ra yasash kerak bo'lsa, shu berilgan elementlariga asosan oldin dodekaedrning bir yog'i ($A'B'C'D'E'$)ni yasab, qolgan yasashlarni yuqoridagi usullardan biri yordamida o'tkazish mumkin.

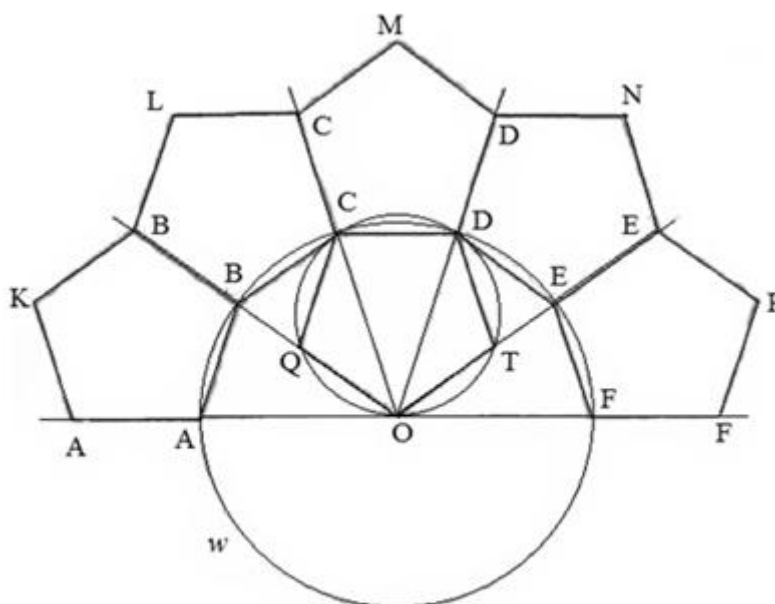
4.Yoqlarining diagonali d ga teng bo'lgan dodekaedr modelini uning yarim yoyilmasini chizish bilan yasang.

Yechish. Radiusi d kesmaga teng, markazi O nuqtada bo'lgan aylana (yoki yarim aylana) chizamiz (60-chizma). Yarim aylanada a_{10} ni topamiz. a_{10} ni sirkul bilan o'lchab, A nuqtadan boshlab, yarim aylanaga ketma-ket A, C, D, E va F nuqtalarda besh marta qo'yib chizamiz. So'ngra OA, OB, OC, OD, OF larni o'tkazib, ularning davomlarida $AA' = BB' = CC' = DD' = EE' = AB = a_{10}$ kesmalar ajratamiz. A', B', C', D', E' nuqtalarni markaz qilib, AA' ga teng bo'lgan radiusli yoylarning bir-birlari bilan kesishish nuqtalari (K, L, M, N, P) ni topamiz.

AB radius bilan C va D nuqtalarni markaz qilib yoy chizamiz va ularning OB

va OE lar bilan kesishish nuqtalari (Q va T)ni aniqlaymiz. Bu nuqtalar dodekaedr yarim yoyilmasi uchlarining nuqtalaridir.

Agar qirrasi a (yoki yoqlarining ayrim elementlari ichki, tashqi aylana radiuslari va boshqalar)ga ko'ra muntazam dodekaedr yoyilmasini yasamoqchi bo'lsak, tomoni a ga (yoki boshqa elementlarga ko'ra) teng bo'lgan muntazam $A'KABB'$ beshburchak yasab, $A'A$ va $B'B$ tomonlarining kesishish nuqtasi (O)ni topamiz yoki tomoni a ga teng bo'lgan OQCDT muntazam beshburchak yasab, markazi O nuqtada radiusi beshburchak diagonali (OS)ga teng bo'lgan aylana (yoki yarim aylana) chizib, unga $CD = a$ ni qo'yib chiqib, OA, OB, OC, OD, OE, OF larni davom ettiramiz.



60-chizma.

5.Dodekaedrning bir uchiga yopishgan yoqlarining markazlari o'zaro tutashtirilsa:

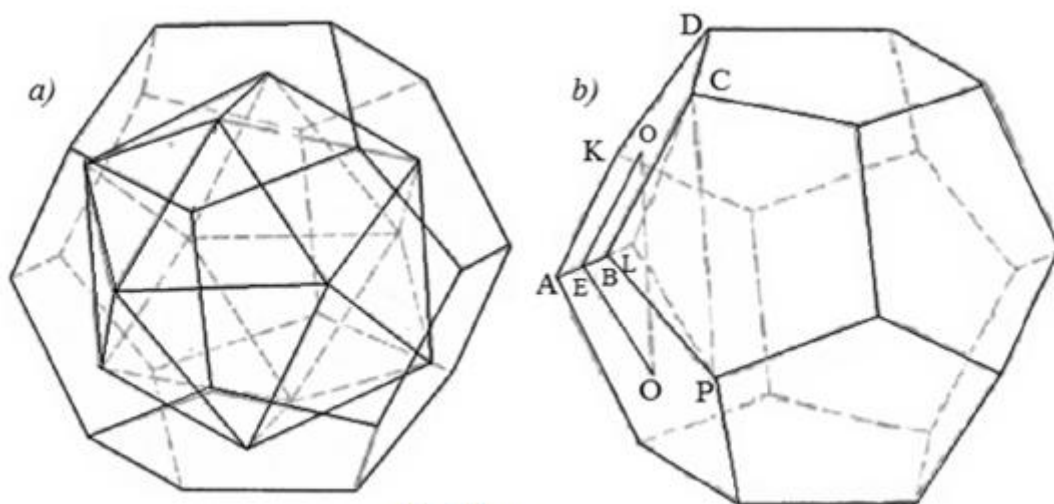
- a)dodekaedrga ichki chizilgan ikosaedr qirrlari hosil bo'lishini ko'rsating;
- b)agar dodekaedr qirrasi a ga teng bo'lsa, ikosaedr yoyilmasi va modelini yasang;
- v)agar dodekaedrga ichki chizilgan ikosaedr qirrasi a ga teng bo'lsa, unga tashqi chizilgan dodekaedr qirrasi va modelini yasang.

Yechish: a) dodekaedrning yoqlari o'zaro teng muntazam beshburchaklar bo'lib, ular orasida hosil bo'lgan ikki yoqli burchaklari ham o'zaro teng. Shu

sababli qo'shni yoqlarning markazlari orqasidagi masofalar bir-biriga teng.

Bir uchga uchta yoq birlashganligi sababli bu yoqlarning markazlarini tutashtiruvchi kesmalar muntazam uchburchak tashkil qiladi. Dodekaedrda yigirmata uch bo'lganligidan qo'shni yoqlarning markazlarini bir-biri bilan tutashtirish natijasida o'zago teng bo'lgan yigirmata muntazam uchburchak hosil bo'ladi. Ular o'zaro teng ikki yoqli burchaklar yasashi natijasida muntazam ikosaedr hosil etadi (61-a chizma). Bu ikosaedr dodekaedrga ichki chizilgan deb ataladi. Dodekaedr esa ikosaedrga tashqi chizilgan deyiladi.

b)analiz: qirrasi a ga teng dodekaedr ikki yoqli burchagining chizili burchagi O_1EO ni yasaymiz (61-b chizma). AB qirrani davom ettirib, $CL \perp AB$ va $PL \perp AB$ larni o'tkazsak, $\angle O_1EO = \angle CLP$ bo'ladi.



61-chizma.

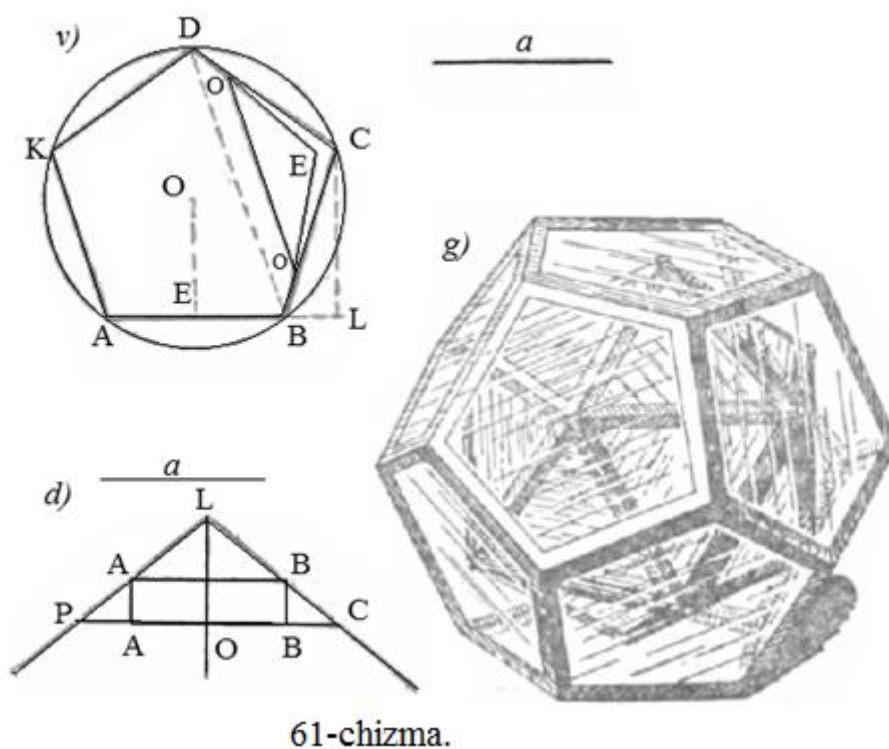
$\angle CLP$ esa CLP teng yonli uchburchakning uchidagi burchagi bo'lib, bu uchburchakning asosi CP tomoni a ga teng bo'lgan muntazam beshburchakning diagonaliga teng, yon tomonlari esa tomoni a ga teng bo'lgan muntazam beshburchakning bir uchi (C yoki P) dan ikkinchi tomon AB ning davomiga tushirilgan perpendikulyarning uzunligiga tengdir.

Dodekaedrga ichki chizilgan ikosaedrning bir qirrasi (OO_1) uchidagi burchagi $O_1EO = CLP$, yon tomonlari $O_1E = OE$ (tomoni a ga teng bo'lgan muntazam $ABCDK$ beshburchakning apofemasi) bo'lgan teng yonli uchburchak O_1EO ning

asosidan iborat.

Yasash. Qirradi a ga teng bo'lgan dodekaedr ikki yoqli burchagining chiziqli burchagini yasaymiz. Buning uchun tomoni berilgan a kesmaga teng bo'lgan ABCDK muntazam beshburchak yasab (61-v chizma), AB tomonini davom ettiramiz. Keyin $CL \perp AB$ o'tkazib, B va D larni markaz qilib, CL radiusli yoqlar chizib ularning kesishish nuqtasi E ni topamiz.

$\angle BED$ izlangan burchak bo'ladi.



61-chizma.

Agar bu burchakning DE va BE tomonlarini E nuqtani markaz qilib O_2E_1 radius bilan O_1 va O nuqtalarda kessak hamda O_1 va O ni tutashtirsak, O_1O kesma qirradi a ga teng bo'lgan dodekaedrga ichki chizilgan ikosaedrning bir qirrasiga teng bo'ladi. Shunga asosan qirradi OO_1 ga teng bo'lgan ikosaedrning yoyilmasi va modelini yasash mumkin. 61-g chizmada dodekaedrga ichki yasalgan ikosaedrning oynadan qilingan modeli ko'rsatilgan;

v)tashqi chizilgan dodekaedr qirrasini yasash uchun ixtiyoriy dodekaedr ikki yoqli burchagining chiziqli burchagi PLC ni yasaymiz. Uning bissektrisasi LO ning ustidagi biror nuqta O dan $POC \perp LO$ ni o'tkazamiz. O nuqtadan har ikki

tomoniga $OA = OB = \frac{a}{2}$ qilib, $AA_1 \perp PC$, $BB_1 \perp PC$ larni o'tkazamiz (61-d chizma).

$LA_1 = LB_1$ lar qirradi a ga teng bo'lgan ikosaedrga tashqi chizilgan dodekaedr yoqlaridan bittasining apofemasi (dodekaedr yoqlariga ichki chizilgan aylananing radiusi) bo'ladi.

Endi radiusi $LA_1 = LB_1$ bo'lgan aylana chizamiz va uni teng besh bo'lakka bo'lamiz. Bo'linish nuqtalarini E_1, E_2, E_3, E_4 va E_5 lar bilan belgilab aylanaga urinmalar o'tkazamiz hamda ABCDK muntazam beshburchak (dodekaedrning bir yog'i) ni hosil qilamiz. Bunga asosan uning yoyilmasini yasash mumkin [16].

6. Agar dodekaedr qirralariga shu qirralardan chiquvchi yoqlar bilan teng ikki yoqli burchaklar tashkil etadigan qilib tekisliklar o'tkazilsa:

a) tekisliklarning kesishishidan rombik o'ttiz yoqli hosil bo'lishini ko'rsating-,

b) agar dodekaedr qirradi a ga teng bo'lsa, o'ttiz yoqli yoyilmasi va modelini yasang;

v) agar rombik o'ttiz yoqlining qirradi a ga teng bo'lsa, dodekaedr qirrasini, yoyilmasi va modelini yasang.

Yechish. a) AB qirradan chiqqan ikki yoq bilan o'zaro teng ikki yoqli hosil qilib o'tkazilgan tekislikning kesishida romb hosil bo'ladi. Haqiqatan, dodekaedr ikki qo'shni yoqlari (ABCDK va ABPQT) ning O va O_1 markazlardan shu yoqlarga OF va O_1F_1 perpendikulyarlar o'tkazsak (62-a chizma), ularning AB ning o'rtasi E nuqtadan OO_1 ga parallel qilib o'tkazilgan FF_1 to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalari F va F_1 larni A va B nuqtalar bilan tutashtirsak, $AFBF_1$ shakl o'tkazilgan tekislik bo'lagi- romb bo'ladi, chunki uning diagonallari AB va FF_1 lar o'zaro perpendikulyar va $AE = EB$, $EF = EF_1$.

Bunday tekisliklarni BC , CD va hokazo qirralar orqali ham o'tkazib, xuddi shunday romblar hosil etiladi. Bu romblarning diagonallari mos ravishda teng bo'lgani uchun ular o'zaro teng va ularning soni o'ttiztadir, chunki dodekaedrning o'ttiz qirrasining har birida faqat bittadan romb hosil bo'ladi;

b) qirradi a ga teng bo'lgan dodekaedr ikki yoqli burchagi chiziqli burchagining haqiqiy kattaligini yasaymiz. Chiziqli burchakning yon tomonlarida mos

yoqlarning markazlariga to'g'ri keluvchi O' va O'_1 nuqtalarni topamiz. Burchakning uchi orqali to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Burchakning tomonlaridagi O' va O'_1 nuqtalarga perpendikulyarlar o'tkazamiz va ularning burchak uchidan o'tgan to'g'ri chiziq bilan kesishish nuqtalarini topamiz hamda bu nuqtalarni kesma yordamida tutashtiramiz. Bu kesma rombning katta diagonaliga, kichik diagonaliga esa berilgan a kesmaga teng bo'ladi. Bu ikki diagonaliga bo'yicha romb yasab, uning yordamida rombik o'ttiz yoqlining yoyilmasini hosil qilish va unga asosan ularning modellarini yasash mumkin;

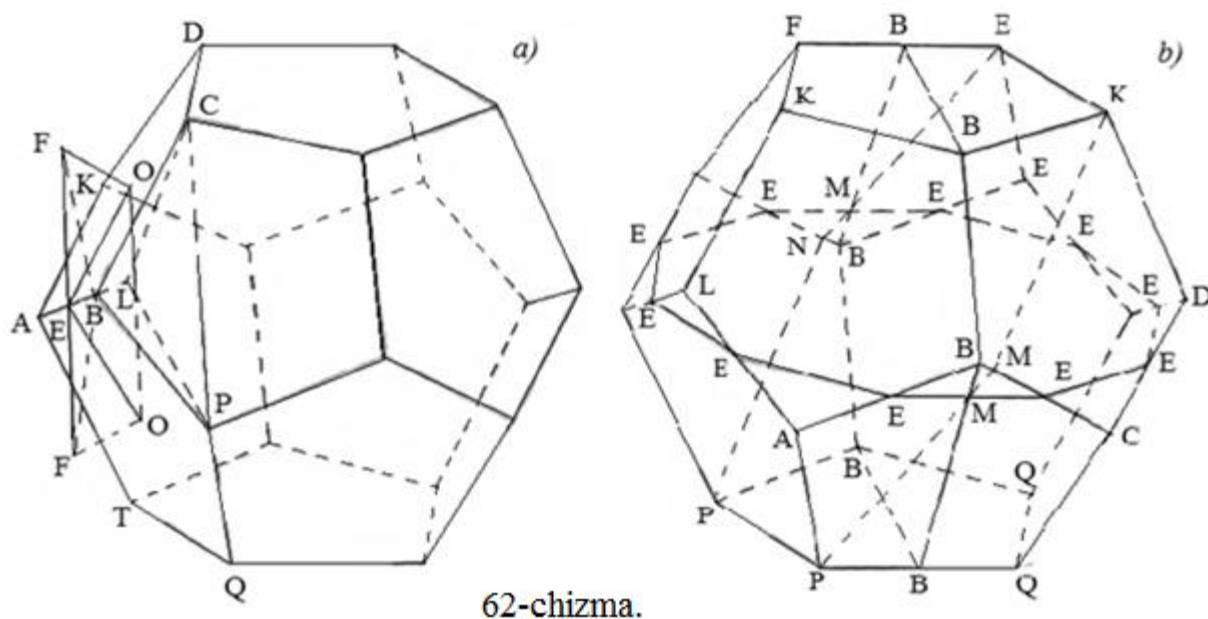
v) Oldin qirrasi ixtiyoriy uzunlikda olingan dodekaedr bazasiga yasalgan rombik o'ttiz yoqlining bir yosh (romb) ni yasab, uning bir tomonida berilgan a kesmaga teng kesma olamiz, o'xshash shakl almashtirish yordamida qirrasi a ga teng bo'lgan rombik o'ttiz yoqlining bir yog'ini hosil qilamiz. Uning kichik diagonaliga rombik o'ttiz yoqli ichidagi dodekaedrning bir qirrasiga teng bo'ladi.

Ikosaedrning qirralari orqali shu qirralarga yopishgan yoqlar bilan teng ikki yokli burchaklar tashkil qiladigan tekisliklar o'tkazilsa, ularning kesimlarida rombik o'ttiz yoqli hosil bo'lishi ma'lum. Ikosaedrning qirrasi esa o'ttiz yoqli tashkil qiluvchi romblarning kichik diagonaliga teng. Xuddi shuningdek, dodekaedrningq orqali shu qirralarga yopishgan yoqlari bilan teng ikki yoqli burchaklar hosil qiladigan tekisliklar o'tkazilsa, ularning kesimlari ham rombik o'ttiz yoqli hosil qiladi. Bunda dodekaedrning qirrasi rombik o'ttiz yoqlini tashkil qilgan romblarning katta diagonaliga teng bo'ladi.

Demak, rombik o'ttiz yoqli tashkil qiluvchi romblarning katta diagonaliga (rombik o'ttiz yoqlini yasashga baza qilib olingan) ikosaedrning qirrasiga, kichik diagonaliga esa (rombik o'ttiz yoqlini yasashda baza qilib olingan) dodekaedrning qirrasiga teng bo'lar ekan.

7. Qirrasi a ga teng bo'lgan dodekaedrning har uchiga tutashgan ikki AB va BD qirralarining o'rtalari E_1 , E_2 va CD qirrasining o'rtasi E_3 lar orqali o'tuvchi tekislik bilan kesishishidan hosil bo'lgan kesimni (62-b chizma) hamda dodekaedrning bu kesim hosil qilgan bo'laklarining yoyilmasi va modellarini yasang.

Kesim-tomoni dodekaedr yog'i diagonalining yarmiga ($E_1E_2 = \frac{AC}{2}$) ga teng bo'lgan muntazam $E_1 E_2 E_3 \dots E_{10}$ o'n burchak bo'ladi. Qirradi a ga teng bo'lgan dodekaedrning B, B_1 uchi va FF_1 qirrasining o'rtasi (62-b chizma) B_2 nuqtalardan o'tuvchi tekislik bilan kesishdan hosil bo'lgan kesimni hamda dodekaedr bo'laklarining yoyilmasi va modellarini yasang.



Kesim $BB_1B_2B_3B_4B_5$ oltiburchak bo'lib, $BB_1 = B_3B_4 = a$ va $BB_1 \parallel B_3B_4$. Shuningdek, $B_1B_2 = B_2B_3 = B_4B_5 = B_5B = h$; bunda h -tomoni a ga teng bo'lgan muntazam beshburchakning balandligi. Bundan tashqari $B_1B_2 \parallel B_4B_5$, $B_2B_3 \parallel BB_1$, $\angle B_1B_2B_3 = \angle BB_5B_4 = \alpha$; bunda α -dodekaedr ikki yoqli burchagining chiziqli burchagi.[16]

Bu berilganlardan foydalanib $BB_1B_2B_3B_4B_5$ kesimni, ya'ni oltiburchakni va dodekaedrning bu kesim hosil etgan bo'laklarining yoyilmasi va modellarini yasash mumkin.

8. Qirradi a ga teng bo'lgan dodekaedrning bir qirradi PQ dan (62-b chizma) chiquvchi ikki yog'i ($ABCQP$ va $PQQ_1B_1P_1$) ning B_4 va B uchlari orasidagi B_4B kesmani yasang.

Dodekaedr ikki yoqli burchagining chiziqli burchagini yasaymiz.

Bu burchakning uchidan boshlab, uning tomonlarida tomoni a ga teng bo'lgan muntazam beshburchakning balandligiga teng kesma ajratamiz va ularning uchlarini tutashtirsak, izlangan B_4B kesma hosil bo'ladi.

Xulosa

Matematika va geometriya o'qituvchisi o'zi o'qitadigan fanining o'qitilish uslublari va tarixini yaxshi bilishi lozim. O'quvchilarni matematika va geometriya tarixi, bu boradagi kashfiyotlar bilan tanishtirish, matematik tushunchalarni va qonuniyatlarni ro'yobga kelishda ayrim olimlarning, olimlar jamoasining va xalqlarning roli bilan tanishtirish ularning dunyo qarashini shakllantirishda, geometriyaga bo'lgan qiziqishlarini oshirishda muhim ahamiyatga ega.

Fan tarixini bilish, barcha o'quvchilar uchun kerak. O'qituvchi uchun esa u bayon qilayotgan faktlarning tarixini, u olib borayotgan fan, uning qonuniyatlarini, rivojlanish tarixini bilish absolyut zaruriyatdir. Matematikaning sistematik kursini o'rganayotgan paytda matematika tarixidan bir necha fraza keltirish o'quvchilarni qanchalik qiziqtirishini, sinfni qanchalik jonlantirishini matematika o'qituvchilarining barchasi bilishi kerak. O'quvchilarning qadimgi masalalarni qanchalik qiziqish bilan yechishlari hammaga ayon. Fanga qiziqtirish, bir vaqtda uni o'tish uchun ma'qul sharoit yaratish va uni xotirada mustahkam qoldirish demakdir. O'qituvchining o'tadigan fan tarixini yaxshi bilishi, uning ishiga ko'p yordam beradi. Xususan, matematika va geometriya tarixi o'qituvchiga matematik ta'lim jarayonlari bosqichdan-bosqichga o'zgarib borganini va bu o'zgarishlar jamiyat zaruriyati natijasida yuzaga kelgani tushuntirishda muhim omil bo'ladi. O'qituvchining o'quvchilar bilan fan tarixi haqidagi qiziqarli suhbatlari, ularda o'z kuchiga ishonchni mustahkamlaydi. Geometriya tarixi, geometriyaning barcha fanlar rivojlanishidagi rolini aniqlashda juda muhim omil bo'ladi. Bugungi kunda geometrik figuralarga qo'yilayotgan masalalarni hal qilishda turli usullardan foydalanilmoqda. Shulardan o'quvchilarning dunyoqarashini, tasavvur doirasini kengaytirish maqsadida figuralarning modellarini yasab ko'rsatish qo'yilgan masalani yechishni ancha osonlashtiradi. Har bir o'qituvchi geometrik figuralarga

oid masalalarni yechishda o'sha figuraning modelini yasab ko'rsatish, kundalik turmushdagi narsalarga bog'lab o'rgatish qo'yilgan maqsadga tezroq olib keladi va o'quvchilar berilgan masalalarni tezroq tushunishlariga olib keladi.

Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati.

1. I.A Karimov "Yuksak ma'naviyat - yengilmas kuch" Toshkent.O'qituvchi 2008-yil, 173 b.
2. I.A.Karimov "Barkamol avlod orzusi" Sharq T.1998-yil, 245 b.
3. I.A.Karimov "Tarixiy xotirasiz kelajak yo'q" Toshkent 1998-yil.
4. I.A.Karimov "Barkamol avlod - O'zbekiston taraqqiyotining poydevori". Toshkent – 1998-yil, 62 b.
5. Я.П.Панарин, З.А.Скопец."Перемещения и подобия плоскости". –Киев: Радянська школа, 1981.
6. Я.П.Понарин"Гармонический четырехугольник Квант. 1991. №10. С.48-52.
7. Прасолов.В.В. Задачи по геометрии, в 2-х ч. –М.: Наука, 1986.
8. Скопец З.А. Геометрические миниатюры. –М.: Просвещение, 1990.
9. Шарыгин И.Ф. Несколько эпизодов из жизни вписанных и описанных окружностей. Квант. 1990. №8. С. 66-69.
- 10.Прасолов.В.В Шарыгин И.Ф. Задачи по стереометрии. –М.: Наука 1989.
- 11.Я.П.Понарин "Элементарная геометрия" Том 1.Москва Издательство МЦНМО, 2004.
- 12.Я.П.Понарин "Элементарная геометрия" Том 2.Москва Издательство МЦНМО, 2006.
- 13.Атанасян Л.С. и др. Геометрия 10-11. –М.: Просвещение 1992.
- 14.Я.П.Понарин Преобразования пространства. –Киров: Вятский госпедуниверситет 2000.
- 15.Отажонов Р. К, Геометрия яшаш методлари. Тошкенг, 1958.

16. A. Nurmetov. “Matematikadan modellar yasashga doir masalalar”.
O’qituvchi nashriyoti. Toshkent 1964
17. Л.И. Звавич, М.В. Чинина “Многогранники: развертки и задачи”
Москва 2006.
18. I. Isroilov, Z. Pashayev “Geometriya” I-qism. 2-nashri. T. 2010-yil
19. S. Alixonov “ Geometriya darslarini umumlashtirish ” T. O’qituvchi.
1989-yil.
20. A. A. Rahimqoriyev “Geometriya “ 8-sinf uchun darslik. T. 2010-yil.
21. A. V. Pogorelov “ Geometriya” 7-11-sinf darsligi. T. 1991-yil.
22. I. Isroilov, Z. Pashayev “Geometriya” II-qism. 2-nashri. T. 2010-yil
23. <http://www.ziyonet.uz/ru/library/libid/10400>
24. <http://graphfunk.narod.ru>
25. <http://www.neive.by.ru>
26. <http://www.problems.ru>
27. <http://zadachi.mccme.ru>

LUG'AT

№	O'zbekcha	Ruscha	Inglizcha
1.	Balandlik	Высота	Altitude
2.	Uchburchakning balandligi	высота треугольника	altitude of a triangle
3.	Burchak	Угол	Angle
4.	Yoy	дуга	Arc
5.	Yoy uzunligi	длина дуги	arc length
6.	Yuza	Площадь	Area
7.	Asosdagi burchak	угол при основании (в $\triangle$)	base angle (of a triangle)
8.	Yuzani hisoblash	вычисление площади	calculate area
9.	Vatar	Хорда	Chord
10.	Aylana, doira	Круг	Circle
11.	Aylana markazi	центр описанной окружности	Circumcenter
12.	Tashqi chizilgan figura	описанная фигура	circumscribed figure
13.	Konus	Конус	Cone
14.	Qavariq	Выпуклый	convex , concave up
15.	Qavariq ko'pburchak	выпуклый многоугольник	convex polygon
16.	Xulosa	следствие, вывод	Corollary
17.	Kub	Куб	Cube
18.	Kesim	сечение	Cut
19.	Silindr	Цилиндр	Cylinder

20.	Yechim	Решение	Decision
21.	Gradus	Градус	degree
22.	Tashqi chizilgan	описанный	described
23.	Yasalgan burchak	построенный (развернутый) угол	developed angle
24.	Diagonal	Диагональ	Diagonal
25.	Ikki yoqli burchak	двухгранный угол	dihedral angle
26.	O'lchov	размер	dimension
27.	Nuqta	точка	dot, point
28.	Qirra	Ребро	edge
29.	Teng tomonli	Равносторонний	equilateral
30.	Teng tomonli uchburchak	равносторонний треугольник	equilateral triangle
31.	Geometriya	геометрия	geometry
32.	Gipotenuza	Гипотенуза	hypotenuse
33.	Ichki chizilgan aylana markazi	центр вписанной окружности	incenter
34.	Kesma	отрезок	intercept, segment, line segment
35.	Teng yonli	Равнобедренный	isosceles
36.	Teng yonli uchburchak	равнобедренный треуголь ник	isosceles triangle
37.	Katet	Катет	Leg
38.	Uzunlik	Длина	Length
39.	(To'g'ri)chiziq	(прямая) линия	Line
40.	Romb	Ромб	lozenge, rhombus, rhomb
41.	Perpendikulyar	Перпендикуляр	normal, perpendicular
42.	Og'ma	Наклонный	oblique
43.	Sakkizburchak	Восьмиугольник	Octagon

44.	Parallel	Параллельный	parallel
45.	Parallelepiped	Параллелепипед	parallelepiped
46.	Parallelogram	Параллелограмм	parallelogram
47.	Beshburchak	Пятиугольник	pentagon
48.	O'q, aylanish markazi	ось, центр вращения	Pivot
49.	Tekislik	плоскость	Plane
50.	Ko'pyoq	многогранник	polyhedron
51.	Prizma	Призма	prism
52.	Isbot	Доказательство	proof
53.	To'rtburchak	Четырехугольник	quadrangle
54.	Kvadrat	квадрат	quadrate, square
55.	Matematika	Математика	Mathematics
56.	Axborot	Информация	information
57.	Ta'lim	Обучение	Education
58.	Innavatsion ta'lim	Инновационная обучение	Innavation education
59.	Texnalogiya	Технология	Texnalogy
60.	Mustaqil ta'lim	Сомостоятельное обучение	Independent education
61.	Kompyuter	Компютер	computer
62.	Bilim	Знание	Knowledge
63.	Ko'nikma	Навык	Skill, practice
64.	Chizma	Чертеж	Draft
65.	Mavzu	Тема	Theme
66.	Obyekt	Объект	Obyekt