

O'zbekstan Respublukasi Xaliq Bilimlendiriw Ministrliqi

A'jiniyaz atindag'i No'kis ma'mleketlik pedagogikaliq instituti

«Informatika ha'm xabar texnologiyasi» kafedrasi

«SANLI USILLAR»

pa'ni boyinsha lektsiyalar toplami

Du'ziwshi: dots. S.Pirnazarov

No'kis-2005

LEKTSIYA N1

Bir o'zgeriwshili ten'lemelerdi sheshiw ma'selesinin' qoyiliwi.

JOBA:

1. Ma'selenin' qoyiliwi.
2. Ten'leme tubiri.
3. Ekvivalent teh'lemeler. Algebraik ten'lemeler
4. Tubirlerdi ajiratiw.
5. Aralqtl ekige boliw usili.

Bir o'zgeriwsh sızıqlı emes ten'lemelerdi sheshiw prikladnoy analizdin' tiykarg'i a'selelerinin' biri bolip tabiladi. Bulardi sheshiw Fizika, mexanika, texnika h.t.b. tarawlardin' ko'plegen ha'm ha'r tu'rli bo'limlerde kerekli boladi.

$$F(x) = 0 \quad (1.1)$$

Bunda $F(x)$ $[a, b]$ aralig'ında aniqlang'an ha'm u'zliksiz.

Qa'legen $z \in [a, b]$ san $F(x)$ funktsiyasin nolge aylandiratug'in yag'niy $F(z)=0$ (1) ten'lemenin' koreni dep ataladi.

Eki $F(x)$ ha'm $G(x)$ ten'lemeleri ten' kushli (ekvivalent) eger olardin' birewinin' qa'legen sheshimi ekinshisinin' de sheshimi bolsa, onda (1) algebraiy ten'lemenı kononikaliq tu'rge a'keliwge boladi:

$$P_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

bunda $a_0, a_1, \dots, a_n$ - ten'leme koefitsientleri, al x - belgisiz, n - ko'rsetkishli algebraiy ten'lemenin' da'rejesi dep ataladi.

Bizge belgili qa'legen algebraiy ten'leme keminde bir sheshimge iye haqiyqiy yamasa kompleks.

Eger $F(x)$ funktsiya algebraiy bolmasa onda (1) ten'leme trantsedentli dep ataladi. Trantsedentli ten'lemege misallar:

$$x - 10 \sin x = 0; \quad 2^x - 2 \cos x = 0; \quad \lg(x + 5) = \cos x.$$

Ayirim jag'daylarda trantsedentli ten'lemeler sheshiliwin algebraiy ten'lemege a'kelip sheshiwge boladi. Ko'pshilik bir o'zgeriwshi sızıqlı emes ten'lemeler matematikaliq o'zlestiriw joli (aniq metod) menen shig'arilmaydi, sonliqtan praktikada oni tek sanli metod penen shig'aradi.

Bunday ten'lemenı sheshiw bul korennin' bar yamasa joqlig'in biliw, bar bolsa neshew ekenin aniqlap ha'm berilgen aniqliqtan koren ma'nisin tabiw degen.

(1) ten'lemenin' haqiyqiy ha'm kompleks sheshimlerin sanli tabiw ma'selesı 2 etaptan turadi:

-korenlerdi ajiratiw, yag'niy qaralip atirg'an araliqtin' ju'da' kishi bo'leklerin qarap sheshimdi tabiw;

Praktikada ken' taralg'an (1) ten'lemenı sanli metodda sheshiw ushin yarim bo'liw usili, xorda usili, urinba usili (Nyuton), Ribakov usili, a'piwayi iteratsiya usili bolip tabiladi.

Jiy qollanilatug'in EEM de yarim bo'liw ha'm a'piwayi iteratsiya usilinda toqtayiq.

Tubirlerdi ajiratiw.

(1) ten'lemenı sanli sheshiwden birinshi esaptı korenlerdi ayiriw, yag'niy bir sheshim bar kishi araliqlardi quraw. Korenlerdi ajiratiw ko'pshilik jag'daylarda grafikaliq turde shig'ariw mu'mkin. (1) ten'lemenin' haqiyqiy korenleri bul $F(x)$ funktsiyasinin' obtsissa ko'sheri menen kesilisiw toshkalari dep diqqatqaalip, $F(x)$ grafigin duzip ha'm OX ko'sherinde korengı iye kesin-dilerdi belgilew kerek. (1) ten'leme og'an ten' kushli $F_1(x)=F_2(x)$ (2) ten'leme menen almastirip grafik duziwge boladi.

Bul jag'dayda $F_1(x)$ ha'm $F_2(x)$ funktsiyasini' grafiklari duziledi, al keyininen OX ko'sherinde kesindiler belgileymiz, bular grafiklin' kesilisiw toshkalarinan absissag'a tusiriledi.

Korenlerdi ajiratiw ushin EEM qollaniwg'a boladi. Meyli $F(x)=0$ ten'lemesi berilgen bolsin, korenleri $[A,B]$ araliqta aniqlansin, uzliksiz ha'm $F(A)*F(B)<0$ korenlerdi ajiratiw talap etiledi, yag'niy birlik $[a,b] \subset [A,B]$ bir koreni bar kesindini ko'rsetiw.

$x=A$ toshkadan baslap (ag'an qaray) on'g'a qaray h adim menen jilisip $F(x)$ ma'nislerin esaplaymiz.

Eger eki qon'silas $F(x)$ ma'nisinde belgileri haqiqiy bolsa, onda usi araliqta $F(x)$ funktsiya monotonli, yag'niy kesindinin' eki shetki toshkalarin qoyip, esaplag'anda belgileri o'zgerse, onda usi araliqta koreng'e iye.

Usig'an tiykarlanip algoritm duzemiz qoyil'gan ma'selenin' sheshimi bolip peshatqa x_1 ha'm x_2 parametrlar ma'nisi (kesindi shetleri) boladi.

Bunnan ten'lemenin' korenlerin aniqlaw usi qaralip atirgan jaqinlasiwda $F(x)$ funktsiyasini' xarakterlerin ha'm de saylap aling'an (h) adim shamasinda baylanisli ekenligi ko'rinip tur. Haqiqatinda da eger h kishi ma'niske iye bolsa kesindi setlerinde $[x; x+h]$ $F(x)$ funktsiyasi bir turdegi ma'nislerdi qabil etedi yag'niy $F(x)=0$ koreng'e iye emes. Biraq bul barliq waqitta bunday emes, $F(x)$ funktsiyasini' monotonliqha'm ten'leme korenleri boliwi mu'mkin.

Eger $F(x)*F(x+h)<0$ sha'rtine itibar berilmese araliqta bir emes, al bir neshe koren boladi, yamasa bol'lw mu'mkin. Usinday jag'daylardi ko're tur'p, korenlerdi ajiratiw ushin ilaji bol'g'an sha h kishi ma'nislerin saylaw tiyis.

Berilgen araliqtI ten' ekige boliw.

Meyli (1) berilip ha'm $[a,b]$ araliqtagi jal'iz koreng'e iye bolsin, ha'mde usi araliqta $F(x)$ funktsiya uzliksiz, $[a,b]$ kesindini ekige $c=(a+b)/2$ bo'lemiz.

Eger $F(c)<>0$ bolsa onda eki jag'day boladi.

$F(x)$ funktsiya $[a,c]$ araliqtada yamasa $[c,b]$ araliqtada belgisin o'zgertedi. Belgisi o'zgergen araliqtalip yarim bo'liw usili dawam etedi, bunin' menen ten'leme koreni bar ju'da' kishi araliqlarg'a shekem bo'liw mu'mkin.

Qaralg'an usildi, ten'lemenin berilgen aniqliq penen sheshiw usinday etip qollaniwg'a boladi. haqiqatinda da eger qandayda bir protsess etabinda koreni bar. $[a,b]$ araliq alinsa OX da $x=(a+b)/2$ dep shamalap alsaq, onda $D=(a-b)/2$ ma'nisinen aspaytug'in qa'telik tabamiz, usil kishi esaplawlar menen baylanisli, biraq EEM de an'sattiq penen qollaniladi.

(1) ten'lemenin' $[a,b]$ araliqta berilgen aniqliq c menen bir korenin yarim bo'liw usili menen tabiw algoritimi duzilgen.

Eger, $F(0)=0$ protsesstin' qaysi etapinda da bolosa da, algoritm u'zilisine alip kelmeydi.

Tayanish tusinikler

Ekivalent ten'lemeler. Tubirlerdi ajuratuw. Ten'lemelerdi sheshiudin' sanli usullari.

Oz betinshe uyreniw ushin sorawlar

1. Ten'lemelerdi sheshiudin' sanli usullari.
2. Syzykli emes ten'lemelerdin' tubirlerin tabiw.
3. Araliqtaki ekige boliw usylinin' algoritmi.

Paydalani'lg'an a'debiyatlar

1. Zavarikin V.M. Chislennie metodI. -M.: Prosveshenie, 1971. 176 s.
2. Siddikov A.M. Sonli usullar. Nukus. Bilim, 1996. 64 b.
3. Sbornik zadach po metodam vichisleniy. Minsk. 1983. 288 s.
4. V.T.Malikov.R.N.Kvetniy. Vichislitelnie metodi i primeneniye EVM .Kiev 1989 g.

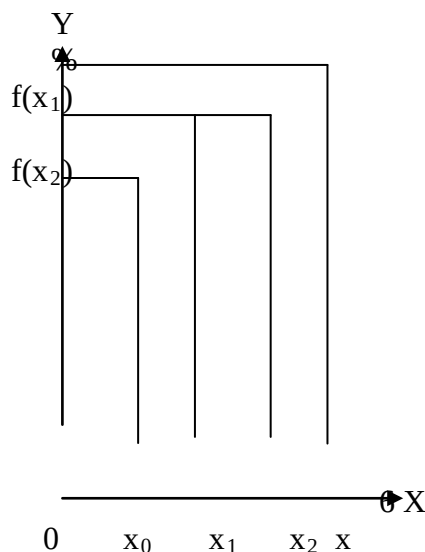
LEKTSIYA N2

A'piwayi iteratsiya usuli. Iteratsiya usullarining qateligining bahasi. Ten'lemeni iteratsialiq tu'rde turlendiriw.

JOBA:

1. Bir ozgeriwshili ten'lemelerdi EEMda sheshiwidin' ameliy shemasi.
2. Iteratsiya usullarining qateligining bahasi.
3. Ten'lemeni iteratsialiq tu'rde turlendiriw.

(1.1) ten'lemeni $x=f(x)$ ten' ku'shli ten'lemesi menen almashtiramiz x . $x=f(x)$ funksiyasining sheshimi bolsin, al x_0 x sheshiminde qanday bolmasin ulli menen jaqinlashtirish bolsin. x_0 di $x=f(x)$ ten'lemenin' on' jag'ina qoyip, $x_1=f(x_0)$ sanin tabamiz. x_1 ge de uslay isleyemiz ha'm $x_2=f(x_1)$ h, t b. tabamiz. Izbe-iz qatnaslardir almashtira otirip $x_n=f(x_{n-1})$ $n=1,2,3...$ ushin to'mendegini jazamiz:



1-suwret

$$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n \quad (2.1)$$

Buni jaqinlashtirish izbe-izdegi yamasa iteratsialiq izbe-izlik dep ataladi (latIn tilinen oterutio - qaytalaw). Iteratsialiq izbe-izlikti jasaw a'piwayi geometrialiq mag'ana beriwge iye.

Jaqlashtirish izbe-izlik jlynaqli bolwi mu'mkin bolganInday tarqalishda bolip 1-suwrette tarqalish izbe-izlik berilgen.

Eger (2.1) izbe-izlik jlynaqli bolsa ol funktsiya f u'ziliksiz onda (2.1) izbe-izlikтин' shedi $x=f(x)$ ten'lemesinin' sheshimi bolsdi.

Haqlyqatinda da $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ bold'an ten'liktegi shekke kelemiz:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_{n-1}) = f(\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n-1}) = f(\xi) \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\xi = f(\xi)$$

1-su'wrette korsetilgendey iteratsiya metodIn qollang'n menen sheshim ala almawImiz da mu'mkin.

Iteratsiya protsessin jlynaqliligi ushin jeterli jagday tomendegi teorema menen tu'sindiriledi.

Teorema: (1.1) Meyli $x=f(x)$ funksiyasi $[a;b]$ aralig'ida jalg'iz korengi iye ham tomendegi shartlar orinli bolsin.

1. $f(x)$ $[a,b]$ aralig'ida aniqqlagan ham differentsyalanlwsil.
2. $f(x) \in [a,b]$ ha'm $x \in [a,b]$
3. $|f'(x)| \leq q \leq 1$ ha'mme $x \in [a,b]$ ushIn q zarliq bar boladi.

Sonda $X_n=f(x_{n-1})$ ($n=1,2,3,\dots$) iteratsiyaliq izbe-izlik $x_0 \in [a,b]$ daslepki ag'zasinda jlynaqli boladi.

Daliyillew. Qalegen $x_0 \in [a,b]$ daslepki ag'za ashIn (2.1) tu'rindagi iteratsiyaliq izbe-izlikni du'zemiz. 2-shartke muapliq izbe-izliknin' ha'mme ag'zasI $[a,b]$ aralig'inda boladi.

$X_n=f(x_{n-1})$ ha'm $x_{n+1}=f(x_n)$ eki jaqInlasIwshI izbe-izlikni qaraymiz.

Lagranj teoremasI boyInsha en' keyingi salIstIrIwIardan

$$x_{n+1}-x_n=f(x_n)-f(x_{n-1})=f'(c)(x_n-x_{n-1}) \quad c \in [x_{n-1};x_n] \text{ ge iye bolamiz.}$$

Modulge o'tip ham 3-shartke tiykarlanIp tomendegige iye bolamiz.

$$|x_{n+1}-x_n|=|f'(c)| |x_n-x_{n-1}| \leq q|x_n-x_{n-1}|; \quad |x_{n+1}-x_n| \leq q|x_n-x_{n-1}|;$$

$$n=1,2,3,\dots \text{ bolsa}$$

$$|x_2-x_1| \leq q|x_1-x_0|$$

$$|x_3-x_2| \leq q^2|x_1-x_0|$$

$$\dots\dots\dots$$

$$|x_{n+1}-x_n| \leq q^n|x_1-x_0|$$

$$x_0+(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\dots+(x_n-x_{n-1})+\dots \quad (2.3)$$

qatardi qaraymiz. Bul qatardin' dara qosIndllarin duzemiz.

$$S_1=X_0; S_2=X_1,\dots,X_{N+1}=X_n$$

Bul jerden (2.3) nin' $(n+1)$ qatardin' dara qosIndIsI (2.1) iteratsiyaliq izbe-izliginin' n -shi ag'zasI menen u'stpe-u'st tu'sedi:

$$S_{n+1}=X_n \quad (2.4)$$

(1.7) qatardi

$$|x_1-x_0|+q|x_1-x_0|+q^2|x_1-x_0|+\dots \quad (2.5)$$

qatar menen salIstIramiz.

(2.3) absoliytlik qatardin' ag'zalarIn (2.4) menen qatnasIn alsaq ol (2.5) qatardin' ag'zalarInan aspaydi. Biraq (2.5) qatar jiynaqli bolIp, ol sheksiz ken'eyiwshi geometrialq progressiya boladi. (2.3) qatarda jiynaqli boladi ham (2.4) dara qosIndIsI shekke iye boladi. Meyli f lim $x_n=x$ bolsIn f funksiyarin' u'zi liksizliginen to'mendegige iye bolamiz.

$$n \rightarrow \infty$$

$$\xi=f(\xi)$$

Bul jerde $\xi-x=f(x)$ ten'lemesinin' sheshimi zarurli emes. Bul iteratsialq izbe-izlik jlynaqli bolIwI mumkin. Eger shrtlar orInlanbasada.

I'teratsiya metodInIn' qateliginin' bahasi

Birinshi teoremasInan onIn' qalegen shartinin' orInlanIwInda iteratsialq izbe-izlik qalegen x_0 nollik ma'nisti qabllaydi. Bul jerden iteratsiyaliq protsesstin' n jaqInlasIwIn qalegenshe onI birinshi jaqInlawI dewge boladi. Bul esaplaw protsessinde qa'te ketse, onda olar keyingi juwmaqqa keledi.

Korsetilgen iteratsiya metodi ten'leme sheshiwdegi en' bir qolayli metod bolIp tabiladi.

SonIn' menen praktikada iteratsialq izbe-izliknin' sheginin' bar bolIwI onIn' shIn ma'nisi empirikalq jol menen sheksiz iteratsiyaliq protsesste payda boladi.

Bul protsessti ko'rip shIg'Iw kerek. UsinIn' menen onIn' qateligin esapqa alIp, fprmulag'a iye bolamiz. Bul bizlerge aniqqlanIw oblastInIn' n qateligin beredi.

Meyli $x=f(x)$ ten'lemesinin' x_n shIn ma'nisine jaqInlasIwshI absoliwt qatelik modul menen bahalanadi. (2.3) ha'm (2.4) na'zerde tutIp (2.6) $\xi-x_n=\xi-S_{n+1}=(x_{n+1}-x_n)+(x_{n+2}-x_{n+1})+\dots$ iye bolamiz.

(2.6) di (2.5) qatardin' qaldIg'I menen salIstIramiz.

$$q|x_1-x_0|+q^{n+1}|x_1-x_0|+\dots \quad (2.7)$$

(2.2) dan

$$|\xi - x_n| \leq q^n |x_1 - x_0| + q^{n+1} |x_1 - x_0| + \dots = q^n (x_1 - x_0) / (1 - q)$$

Ushlay etip, n-jaqInlasIw ushIn qa'telikti bah'alaw formylasI

$$\Delta x \leq q^n (x_1 - x_0) / (1 - q) \quad (2.8)$$

Praktikada (1.12) formulasInIn' qolaylI modifikatsiasIn qollanIp x_{n-1} di nollik jaqInlasIwshI dep alamIz. Keyingi jaqInlasIwshI x_n

$0 < q < 1$ $q \leq q(n=1,2,\dots)$ dep alsaq (2.8) den

$$\Delta x \leq q (x_1 - x_0) / (1 - q) \quad (2.9)$$

TeoremanIn' 3-shartinen kelip shIqqan (2.8) h'am (2.9) formulalarIda q zatliq qollanIladI.

Praktikada q dI tuwIndInIn' joqarg'I jad'I retinde allwg'a boladI $|f'(x)|$ $x \in [a,b]$ bolsa, qansha q kishi bolsa, (2.5) qatar sonaha tez jiynaladI h'am sonsha tez iteratsialIq izbe-izlik jiynaqlanadI.

$x=f(x)$ tan kerekli praktikalIq sheshim allwg'a boladI Meyli $x=f(x)$ ten'leme iteratsiya metodi menen sheshililsin sheshimi e menen allng'an bolIwI kerek.

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon \text{ bul jerden } |x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon (1-q)/q \quad (2.10)$$

(2.10) ten'sizliginen $x=f(x)$ ten'lemesinin' sheshimin ε menen tablIw ushIn onI iteratsianI dawam ete beriw kere. Qashan qon'sillas jaqInlasIwlardIn' modul ayIrmasi $\varepsilon (1-q)/q$ g'a ten' boladi degenshe.

Ten'lemeni iteratsialIq tu'rde turle diriw

$F(x)$ funksiasI bir neshe usllar menen $x=f(x)$ tur'ine keledi. Teorema 1.1 ushIn 1 h'am 3-shi $f(x)$ ushIn orInlanIwI talap etiledi. Bir qansha jag'dayda kelesi jaf'daylardI qaraw kerek.

a) $F(x)=0$ ten'lemeni to'mendegige a'kelemiz.

$x=x-m \cdot F(x)$ bul jerde m constanta.

Bul jag'dayda $f(x)=x-mF(x)$ allwg'a boladI.

Differentsiyal $f'(x)=1-mF'(x)$ iye bolamIz.

$|f'(x)|=|1-mF'(x)| \leq q < 1$ bolIwI ushIn m di hamme x ushIn $[a,b]$ kesindinin' ma'nisi

$mF(x) \leq 1$.

b) Meyli $F(x)=0$ $x=f(x)$ tu'rinde jazIlIg'an bolsIn. Biraz $f(x)$ izertlep $[a,b]$ aralIg'inda hamme x usI aralIqta $|f'(x)| > 1$

Bunda $y=f(x)$ funksiasI ushIn $x=g(y)$ qaraymIz. $f(x)$ ushIn kerI. Endi $y=g(y)$ tenlemesinin' sheshimi.

QaytImI tuwIndIII funksia endi $[a,b]$ aralIg'Inda

$$|g'(x)| = 1/|f'(x)| < 1 \text{ orIn aladI}$$

$x=g(x)$ ten'lemesi ushIn 3-shart 1.1 teoremadag'I orInlang'an dep esaplanadI.

Iteratsiya metodIn qol menen esaplawda tablitsadan paydalanadI $f(x)$ formulasI menen jazIlIg'an.

Allng'an juwmaq bir esaplawda on' bag'ana kelesi jaqInlasIw birden-aq keyingi bag'anaga o'tip ketedi ha'm solay protsess qaytalana beredi.

tablitsa 2.1

	x_n		$x_{n+1}=f(x_n)$
0	x_0		x_1
1	x_1		x_2
			h.t.b

MIsal1.6.1. Kalkulyator jardeminde $\sin 2x - \ln x = 0$ ten'lemesinin' ko'rinisin $[1.3; 1.5]$ aralIg'inda

iteratsiya metodI menen 10^{-4} dallikte esaplan'. Berilgen ten'lemeni iteratsialIq tu'rge keltiriw bir neshe usllar menen orInlanadI:

MIIsalI:

1. $x = \exp(\sin 2x)$
2. $x = (-1)^n 0.5(\arcsin \ln x + \pi)$ $n=1, 2, \dots$
3. $x = x - m(\sin 2x - \ln x)$ $m \neq 0$

Iteratsiya metodI menen shIqqan ko'rinishi tekseremis.

1. 1-jag'dayda $f(x) = \exp(\sin 2x)$. Bul $f(x)$ funksiyaI [1.3] aralIg'Inda anIqlag'an ha'm differentsiyalanIwshI funksiya.

Biraq kalkulyator jardemi menen $f(1.3) = 1.674478$ elip shIg'adI. Kesindinin' shep jag'Indag'I funksiyanIn' ma'nisi kesindiden shIg'Ip ketedi.

2. Ekinshi jag'daydI ko'remiz Ten'leme [1.3;1.5] aralIg'Inda ten' ku'shliginen to'mendegi kelip shIg'adI:

$$x = (\pi - \arcsin \ln x)/2. \quad (2.11)$$

Bul jerde $f(x) = (\pi - \arcsin \ln x)/2$. Hamme x uhlIn [1.3;1.5] aralIg'Inda

$$f''(x) = 1/(2x\sqrt{1-\ln^2 x}) \leq 0 \text{ boladI.}$$

Son'Inan funksiya $f(x)$ usI aralIqta monoton kemeyiwshi. Endi onI [1.3;1.5] kesindisin aqIrIndag'I ma'nisin esaplaymIz:

$$f(1.3) = (\pi - \arcsin \ln 1.3)/2 = 1.4380608$$

$$f(1.5) = (\pi - \arcsin \ln 1.5)/2 = 1.3620528$$

AlIng'an juwaplar [1.3;1.5] aralIg'Inda al funksiya $f(x)$ monotonII. Onda bul jerden 1.1 teoremanIn' 2-sharti orInlanadI. 3-shartti tekseriw ushIn $f(x)$ tuwIndIII funksiyanIn' modulin izertleyemiz [1.3;1.5] aralIg'Inda

$$\varphi(x) = |f''(x)| = 1/(2x\sqrt{1-\ln^2 x})$$

φ $f(x)$ tuwIndIII funksiyanI tabamIz

$$\ln x$$

$$\varphi'(x) = 2(\sqrt{1-\ln^2 x} - \sqrt{1-\ln^2 x})/4x^2(1-\ln^2 x)$$

$\varphi'(x)$ [1.3;1.5] aralIg'Inda barIIq jerde teris. Bul $\varphi(x) = |f''(x)|$ mumg'a jetedi. $f'(1.3) = 0.3846153$. UsIlay etip teorema 1.1 din' 3-sharti orInlanadI. Eger $q=0.39$ dep alsaq, $x_0=1.4$ nollik ma'nisi menen (1;15) ten'lemesinin' korenin da'l ko'rsetiw to'mendegi tablitsada berilgen:

tablitsa 2.2

n	x_n	$x_{n+1} = -(\arcsin \ln x_n - \pi)/2$
0	1.4	1.3992123
1	1.3992123	1.3995113
2	1.3995113	1.3993978

$(\pi - \arcsin \ln x)/2$ MM da esaplaw $-(\arcsin \ln x - \pi)/2$ tu'rinde an'sat esaplawg'a boladI. Bul ha'mme esaplawdI aralIqtIn' juwmag'In jazIwslz esaplawg'a mu'mkinshilik beredi:

$$F \ln F \arcsin - \pi : 2 = H$$

(2.1) bahalI formulasIn paydalanIp ha'm $\varepsilon = 10^{-4}$ $q=0.39$ ma'nislerin esapqa alIp 3-jaqInlasIwdI $x_3 - x_2 < 10^{-4}(1-0.39)/0.39$ iye bolamIz. Bul sheshimi bolII tablIdI. AlIng'an ma'nisti do'ngeleklep ko'rsetemiz:

$$x = x - m * (\sin 2x - \ln x) \quad (2.12)$$

Bul jag'dayda

$$f(x) = x - m(\sin 2x - \ln x)$$

$$f(x) = 1 - m(2\cos 2x * (1/x))$$

$m \neq 0$ konstantasIn saylap alamIz. $f(x)$ funktsiyasI ushIn teorema 1.1 den (2) ha'm (3) shartler orInlanadI. $F(x) = \sin 2x - \ln x$ dep belgileyemiz.

$F' = 1 - m(2\cos 2x * (1/x))$ tuvIndIII funktsiya $[1.3; 1.5]$ aralIg'Inda teris ma'nisti qabIl etedi. Solay etip $F(x)$ usI aralIqta monoton kemeyedi. BunIn' ma'nisi $F(1.3) = 0.253138$ $F(1.5) = 0.264344$. $f(x)$ funktsiya $[1.3; 1.5]$ aralIg'Inda kemeyiwshi, al onIn' en' keyingi ma'nisi $f(1.3) = 1.3 - m * 0.253138$ $f(1.5) = 1.5 + m * 0.264344$ g'arezli.

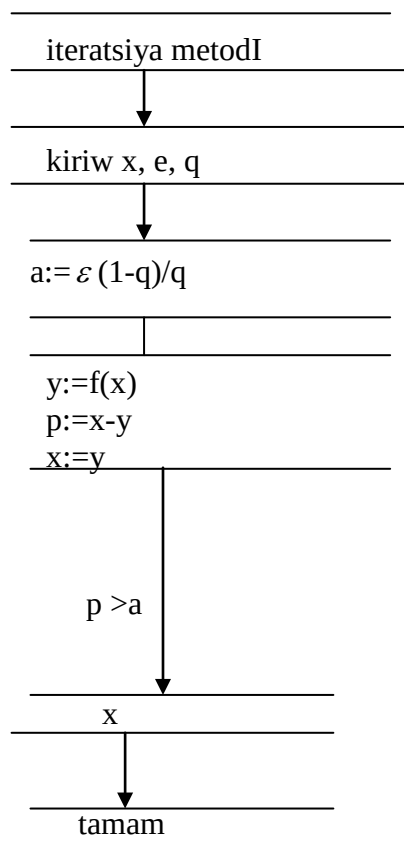
$f(x)$ funktsiasInIn' monotonIg'In esapqa alIp en' keyingi ten'likten 1.1 teoremanIn' ekinshi shsrtnin' orInlanIwIn an'sat anIqlawg'a boladI. Eger m durIs bo'lhsek bolsa. Endi biz 1.1 teoremanIn' q u'hinshi shartin tekseriw menen shug'illanamIz.

$F' = 2\cos 2x * (1/x)$ $[1.3; 1.5]$ aralIg'Inda teris ha'm monoton kemeyiwshi. OnIn' moduli on' aralIqtIn' son'Inda maksimum modulge iye.

$$|F'(1.5)| = |2\cos 3 - 1/1.5| = 2.6466526$$

Eger $m = -1/|F'(1.5)| \approx -0.37$ bolsa, onda $[1.3; 1.5]$ aralIg'Indag'I ha'mme x ushIn $m(2\cos 2x * (1/x))$ an'latpa durIs on' bo'lshek. Bul teorema 1.1 din' u'shinshi shartinin' orInlanIwIna mu'mkinshilik bersdi.

$\max |1 + 0.37(2\cos 2x * (1/x))| \approx 0.0812868 < 0.1$ $1.3 \leq x \leq 1.5$ $q = 0.1$. UsIlay etip 1.1 (2.12) ten'leme to'mendegidey ko'rinite boladI.



$$x = x + 0.37 \sin 2x - \ln x \quad (2.13)$$

A'piwayI iteratsiya usIII menen EEM de programma an'sat jazIladI. 2-su'wrette $x = f(x)$ funktsiasInIn' iteratsiya metodI menen sheshilgen ten'lemesinin' algorotmlik sxemasI ko'etilgen. Eger kelesi jaqinlasIwdI tsiklg'a qossa q onda esaplawshIg'a protokol boyInsha EEM de jIynaqlIIIqtIn tezligin ko'riw mumkinshiligi tuwIladI. Endi $\sin 2x - \ln x = 0$ ten'lemesinin' beysik tilinde programmasIn jazamIz. A'piwayI iteratsiya metodI menen 10-6 dalliginde (2.13) formulasInan paydalanana otirip

```

10 REM iteratsia
20 INPUT X, E, Q
30 A=E*(1-Q)/Q
40 Y=X+.37*(sin(2*X)-LOG(x))
50 P=X-Y: X=Y
60 PRINT "X=";X
70 IF ABS(P)>A THEN 40
80 END
  
```


Eger $x=1.4 \cdot 10^{-6}$ ha'm $q=0.1$ bolsa programmanIn' sheshimi to'lrndegishe boladI:

```
RUN
? 1.4 .000001
x=1.3994508880078
x=1.3994297174503
x=1.399428899378
10-6 da'llikti esapqa ala otIrIp shIqqan juwamaqtI u'tirden keyingi altInshI sang'a shekem
do'n'geleleymiz ha'm  $x=1.399429 \cdot 10^{-6}$ 
```

O'z betinshe u'ireniw ushIn sorawlar

1. Bir ozgeriwshi ten'lemeni sheshiwde korenlerdi ajIratIw usIlInIn' etaplarI
2. Bir ozgeriwshi ten'lemeni sheshiwde grafikallq usIllda korenlerdi ajIratIw qandai boladI.
3. Bir ozgeriwshi ten'lemeni sheshiwde grafikallq usIllda korenlerdi ajIratqanda bir ozgeriwshili funktsiya qandai qa'siyetlerge iye boladI.
4. Bir ozgeriwshili ten'lemeni sheshiwde arallqItI ten' ekige boliw usIlIn tu'sindirIn'. Bul usIl qatan' manoton funktsiya ushIn qandai boladI.
5. $x=f(x)$ ten'lemesi ushIn iteratsiya usIlInIn' jeterli sha'rti.
6. $x=f(x)$ ten'lemesin a'piwaiI iteratsiya usIl menen sheshkende berilgen e anIqlIq ushIn qandai sha'rt orInlanadI.

Tayanish tusinikler

Iteratsiya. Apiuayi iteratsiya. Jakinlatiudin' izbe-izligi. OIteratsiyalik izbe-izlik. Jakinlatiudin' geometriyalyk interpretatsiyasi. Katelik. Katelikti bahalaw.

Oz betinshe uyreniw ushin soraular

1. Ten'lemelerdi sheshiw sanli usullari arasinda tubirlerdi ajiratiw usilinin' ozgesheligi.
2. Esaplaaw jardeminde tubirlerdi ajiratiudin' grafikalik joli qalai aniklanadi?
3. Ekige boliq usili algoritmi.
4. Monoton funktsiyanin; tubiri joq kesindileri qalai alip taslanadi?

PaydalanIlg'an a'debiyatlar

1. ZavarIkin V.M. ChislennIye metodI. -M.: Prosveshenie, 1971. 176 s.
2. Siddikov A.M. Sonli usullar. Nukus. Bilim, 1996. 64 b.
3. Sbornik zadach po metodam vIchisleniy. Minsk. 1983. 288 s.
4. V.T.Malikov. R.N.Kvetniy. Vichislitelnie metodi i primeneniye EVM .Kiev 1989 g.

LEKTSIYA 3

Siziqli algebraliq ten'lemeler sistemasin sheshiw.

JOBA:

1. Aniqlama
2. Belgilew, uliwma tu'sinikler.
3. Gauss usili.

Ko'plegen ilimiy texnikaliq ma'selelerdi tabisli sheshiw belgili da'rejede siziqli algebraliq ten'lemeler sistemasinin juwmaqlarin tez ha'm aniq etip ala aliwg'a baylanisli. Siziqli emes ma'selelerdi sheshiwidin' ko'p metodlari sonday-aq bir qatar siziqli sistemalardin' izbe-izligin sheshiwge tirkeledi. Ha'zirgi waqitta siziqli algebraliq ten'lemelerdi EEM de sheshiwidin' sanli usillardin' arsekali islep shigildi. Ko'plegen metodlar ushin EEM de sheshilgen ma'selelerdin' duris belgilerinin' mug'darin aniqlawg'a ha'm sheshimlardin' da'lligin bahalawg'a mu'mkinshilik beretug'in matematikaliq apparat islep shiqqan. Sanli usillardin' siziqli algebraliq sistemalardi sheshiwidin' sanli usildin' ko'p turliligin tuwri ha'm iteratsiyaliq dep bo'liwge boladi.

Tuwri metodlar arifmetikaliq operatsiyaliq son'g'i sani ushin sistemasinin' sheshimin bere alatug'ini menen xarakterlenedi. Egerde ha'mme operatsiyalar qa'teliksiz turde islese, onda berilgen sistemanin' sheshimi de aniq boladi. Tuwri bir sheshimge iye bolsa, ha'm aniqlang'an emes, eger ol birden ko'p sheshimge iye bolsa siziqli ten'lemelerdin' 2 sistemasi ekvivalent dep ataladi, eger 1 - sistemanin' sheshimi bolsa ha'm kerisinshe.

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A kvadratliq matritssa eger ol transponirlengen matritssa ten' bolsa ($A=AT$), eger $a_{ij}=a_{ji}$ bolsa simmetriyali dep ataladi.

Eger ha'r bag'anasinin' kvadratliq elementlerinin' qasindisi birge ten' bolsa al eki ha'r qiyli bag'anasinin' sa'ykes elementlerinin' metodqa Kramer metodi, Gauss metodi ha'm onin' modifikatsiyalari tiykarg'i element metodi, kvartiraliq koren metodi, sa'wleleniw metodi ha'm t.b. ortogonalizatsiya metodi. Tuwri metodlari sanlari 103 ten u'lken bolmag'an sistemalardi EEM de sheshiw ushin qollaniladi.

Iteratsiyaliq metod jaqinlasiwshi boladi. Olar bir qiyli sxema boyinsha esaplang'an izbe-iz jaqinlasiwinin' shegi retinde sistemalardin' sheshimin beredi. Iteratsiyaliq metodqa a'piwayi iteratsiyaliq metod, Zeydel metodi, plaksatsiya metodi, gradint ha'm onin' modifikatsiyalar metodi kiredi. Praktikada iteratsiyaliq metodlar 106 ta'rtpi sanlar sistemasin sheshiwde qollaniladi.

n belgisizli m siziqli algebraliq ten'lemeler sistemasin qaraymiz.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots & \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned} \quad (3.0)$$

ol matritsaliq tu'rde $Ax=b$ tu'rinde jaziliwi mu'mkin. Bunda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

tikmu'yeshli matritsa $m \times n$ parametrli,

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - n\text{-shi}$$

ta'rtipli vektor, al

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} - m$$

ta'rtipli vektor (2.0) ten'lemeler sheshimi dep barliq ten'lemelerdin' sistemasin dutis ten'likke aylandiraturug'in $x_1=c_1, x_2=c_2, \dots, x_n=c_n$ sanlardin' ta'rtplesken jiynag'ina aytiladi.

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

A matritsag'a erikli sanlar bag'anasi qosiw joli menen alingan matritsa ken'eyttirilgen dep ataladi. Eger de A matritsanin' rangi r ken'eyttirilgen B matritsanin' rangine ten' bolsa rang $A = \text{rang } B$ bolsa sistema tek bir sheshimge iye bolatug'inlig'i belgili. Eger de A matritsasinin' rangi belgisiz n sanina ten' bolsa, onda sistema bir sheshimge iye boladi ha'm $r < n$ bolsa sheksiz ko'p sheshimge iye boladi.

Eger A matritsa kvadratlq ha'm onin' aniqlawshisi 0 ge ten' bolmasa $\det A \neq 0$ bolsa, onda ayriqsha emes dep ataladi. A matritsag'a iye n belgisizli algebralq ten'lemeler sistemasi birgelkili ha'm ol tek bir sheshimge iye.

Ayriqsha emes matritsa ushin kerri matritsa tu'sinigi kerekli bolip tabiladi. Berilgen matritsaga kerri matritsa A^{-1} , ol sol jaqtan ha'm on' jaqtan da berilgen matritsag'a ko'beytse, birlik matritsani beredi. $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ A matritsaday'i qatar ha'm bag'analardi orin almashtiriwda payda bolg'an A matritsasi transponirlengen matritsasi dep ataladi.

Siziqli ten'lemelerdin' sistemasi birgelki dep ataladi, eger ol en' keminde bir sheshimge iye bolsa, ha'm birgelki dep ataladi, eger ol sheshimge iye bolmasa. Birgelkili sistema aniqlang'an dep ataladi, eger ol tek g'ana ko'beymelerinin' qosindisi 0 ge ten' bolsa, ol ortogonal dep ataladi.

$$A A^T = E$$

A matritsanin' xarakterliq ten'lemesi dep $A - \lambda E = 0$ aytiladi.

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0$$

Xarakterlik ten'lemenin' korenleri xarakterlik (menschiklik) sanlari dep ataladi. menschiklik ma'nisi juwap beriwshi A matritsanin' menschiklik bektori dep $A=V$ matritsasın ten'lemesin qanaat-

$$\text{laniwshi} \quad V = \begin{pmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{pmatrix} \quad \text{bektotg'a aytamiz.}$$

Eger n belgisizli n siziqli ten'lemeler sistemasında A matritsasi ayriqsha (dep $A=0$) bolsa, onda ol b vektori A matritsasınin' barliq p menschiklik ma'nisine ortogonal bolsa sheksiz ko'p sheshimge iye boladi ha'm eger $(b,v)=0$, bul jerde $Av=0$ - sistemanin' jeke sheshimi, $v(vv..v)$ - A matritsanin' v menschik bektorlarinan turatug'in matritsa, al $c=(c,c,..c)$ - erkli turaqli bektor.

Endigide kvadratli matritsali siziqli ten'lemenin' sistemasin sheshiwidin' sanli usillarin ko'remiz.

Gauss usIII.

Siziqli algebraliq ten'lemeler sistemasin ko'remiz:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (3.1)$$

eger onon' matritsasi $A=(a)$ ayriqsha emes bolsa (3.1) ten'lemeler sistemasin sheshiwidin' Gawss medodi - bul belgisizdi izbe-iz shig'ariw metodi. Onin' ma'nisi (3.1) sistemani ushmueyesli sistemag'a aylandiriwdan ibarat, onda izbe-iz (keri jol menen) ha'mme belgisizlerdin' manislerin tabiwg'a boladi. Gawss metodi aniq metodqa kiredi. Bul eger de kerek bolg'an jollardi da'l orinlasaq, onda aniq da'l juwabi alinadi degendi bildiredi.

Esaplawda ketken qatelikler (do'n'gelekler h.t.b) kesirinen bul udeal qol jetersiz.

Tomende bir boliw sxemasin qaraymiz. (3.1) Sistema kelesi almastiriwg'a ushiraydi. $a_{11}=0$ (bos element) dep, (1) - ten'lemenin' a_{11} koeffitsentine bo'lemiz/ $a_{11}=0$ orinlay otirip, sistemanin' ten'lemesin orin almastiriw natijesinde to'mendegini aliwg'a boladi.

$$x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (3.2).$$

(3.2) den paydalana otirip, qalg'an sistemasinin' ten'lemesinen x_1 belgisizdi alip taslawg'a boladi. Bul ushin ha'r ten'likten (3.2) ten'lemesin sa'ykes x_1 koeffitsentine ko'beytip alsaq bolg'ani.

Bunin' izinen 1-shi ten'lemeni sol qalbinde qoyip, sistemanin' basqa ten'lemesi u'stinde da'l sonday almastiriw orinlaymiz. Bul protsessti qaytalay otirip (3.1) sistemasi ornina og'an ten' ku'shli u'shmu'yeshli matritsa alamiz.

$$\begin{aligned} x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ x_n &= b_n \end{aligned} \quad (3.3)$$

(3.3) sistemadan $x, x, \dots, x$ barliq belgisizlerdin' ma'nislerin izbe-iz tabiladi.

Solay etip, (3.1) sistemasinin' Gawss metodi sheshiw protsesi 2 etapqa bo'linedi.

1) belgisizlerdi izbe-iz shig'ariw tuwrin xod dep ataladi.

2) belgisizlerdin' manislerin tabiw-keri xod dep ataladi.

Tayanish tusinikler

Aniq usul. Iteratsion usul. Ekvivalent syzykli ten'lemeler sistemasi. Determinant. Aldin'ga qaray> artqa qaray jol. Jalgiz boliniw shemasi. Simmetrik matritsa. Keri matritsa.

Oz betinshe uireniu ushin sorawlar

1. Gauss usili qaisi tipke kiredi - aniq ya iteratsion?
2. Jalgiz boliniudin' aldinga qarai, artqa qaray jollari.
3. Aldinga qaray ham artqa qaray jollarda kontrol' qalay orinlanadi?
4. Iteratsiyalik izbe-izlik qalay quriladi?

Paydalanllg'an a'debiyatlar

1. Zavarlkin V.M. Shislennle metodl. - M.: Prosveshenie, 1971. 176 s.
2. Siddikov A.M. Sonli usullar. Nukus. Bilim, 1996. 64 b.
3. Sbornik zadash po metodam vIshisleniy. Minsk. 1983. 288 s.

LEKTSIYA N4

Iteratsiya usulinin' qatelligi.

JOBA:

1. Saulelendiridindin' qisiq boliv shartleri
2. Iteratsiyalliq protsestin' jlynaqlillig'InIn' jeterli sharti.

(4.4) - sa'wleleniwidin' qisllwshI bolatUg'In shartlerin qollanayIq. (2.8)-shi an'latpadan ko'rip turg'anday bul ma'selenin' sheshimi ken'islikti metrikalliq usllInan g'a'rezli. Meyli $x(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ha'm $y(y_1, y_2, \dots, y_n)$ - n o'lsheмли ken'isliktin' 2 toshkasI bolsIn. Iteratsiya usllInIn' praktikalliq qollanIwInda slzIqlI ten'lemeler sistemasIn ken'isliktin' to'mendegi 3 metrikanIn' birewi menen qarag'an jo'n:

$$a) \rho_1(x, y) = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i| \quad (5.1)$$

$$b) \rho_2(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| \quad (5.2)$$

$$v) \rho_3(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2} \quad (5.3)$$

MIsal. Ken'isliktin' joqarIda 3-formulanIn' ha'r biri menen metrikalliq ken'islik bolatug'InIn da'liyllin'.

(4.4) sa'uleleniwidin' ρ_1 , ρ_2 ha'm ρ_3 metrikallI ken'islikte qisllwshI shartlerin du'zeyik. Bul shartler (4.3) sistemanIn' belgisizli koeffitsentleri arqalI an'latlladI.

Solay etip metrikalliq ken'islikte (2.5) ten'lemeler menen berilgen F sa'lelendiriw qisllwshI sa'wleleniw bollwI ushIn kelesi shartlerdin' birewinin' orInlanIwI jetkilikli:

$$a) \rho_1 \text{ metrikasI menen } \alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} < 1 \quad (5.4)$$

$$b) \rho_2 \text{ menen } \alpha = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} < 1 \quad (5.5)$$

$$v) \rho_3 \text{ menen } \alpha = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} < 1 \quad (5.6)$$

yag'nIy (2.4) sistemanIn' on' jag'I birden kishi. (5.4) ha'm (5.5) shartlerdi shlg'arIw an'sat. MIsal ushIn (5.4) -shartti qarayIq.

$x'(x_1', x_2', \dots, x_n')$ ha'm $x''(x_1'', x_2'', \dots, x_n'')$ 2 toshka ushIn (2.15) ke saykes

$$y_i' - y_i'' = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} (x_j' - x_j'') \quad i=1, 2, \dots, n \text{ ge iy bolamIz.}$$

Yag'InIy absolyut u'lkenlik qa'siyeti boyInsha

$$|y_i' - y_i''| = \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| |x_j' - x_j''|, \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.7)$$

(5.7) - ten'lemedegi ha'r bir $x_j' - x_j''$ modulini $\rho_1(x'; x'')$ ma'nisi menen almashtirsaq ku'sheydi

$$|y_i' - y_i''| \leq \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \rho_1(x_j' - x_j''), \quad i=1,2,\dots,n$$

$\rho_1(x' - x'')$ ma'nisi turaqli san retinde summadan keyin jazilwga boladi, al summaning oning maksimal ma'nisi menen almashtirilwga boladi:

$$|y_i' - y_i''| \leq \left(\max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \right) \rho_1(x' - x'') \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.8)$$

(2.18) ha'mme $i=1,2,\dots,n$ ushning haqiqiy bolganliqtan ol $|y_i' - y_i''| = \rho_1(y'; y'')$ bolgandagi i ma'nislari haqiqiy:

$$\rho_1(y'; y'') \leq \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| \rho_1(x'; x'') \quad i=1,2,\dots,n \quad (5.9)$$

(5.9)-dagi (5.8) benen salastirib (5.4) -ni alamiz. (5.4)-(5.6) shartlarning ha'r biri (3.5) sawleleniwning qisilishini bolib ushning ha'm (5.5) - sharti (3.5) - sawleleniwning qisilishini bolib ushning jetlilikli.

Tayanish tusinikler

Iteratsiya. Metrika. Sawlelendiriw.

Oz betinshe uireniw ushin sorawlar

1. Iteratsiyaning jiynaqli bolw shartlari.
2. Metrikany tanlaw iteratsiyaning jiynaqli boluina qandaay ta'sir korsetedi?

Paydalanilgan adbiyatlar

1. Zavaritskiy V.M. Shislenniy metod. -M.: Prosveshenie, 1971. 176 s.
2. Siddikov A.M. Sonli usullar. Nukus. Bilim, 1996. 64 b.
3. Sbornik zadash po metodam vishisleniy. Minsk. 1983. 288 s.

SizIqlI ten'lemeler sistemasIn iteratsia ha'm Zeydel usllari menen sheshiw

JOBA:

1. Shartlerdin' jiynaqliligin tamiynlew.
2. Syzyqli ten'lemeler sistemasynyn' tubirin apiuayi iteratsiya usuli menen esaplaw.
3. A'ste-aqirin jiynaqliliq.
4. Zeydel usulinin' tiykargi mazmuni.
5. Zeydel usulinin' jiynaqlilik sharti.
6. Zeydel usulinin' algoritmi.

AldIng'llarg'a tiykarlanIp, da'slep (4.1) sistema (4.4) tu'rinde jazIwI kerek. Bunda iteratsiyallIq protsess jIynaqlIllIqI, (5.4)-(5.6) shartlerinin' orInlanIwIna alIp kelip, joqarIdag'I qarastIrIlIlg'an ush ken'isliktin' birewinde ko'rinedi.

JIynaqlI shart orInlanIwI usIn (4.1) sistemadan, sistemanIn, on' jag'Indag'I belgisiz koeffitsentlerin birden kishi dep alIp (4.3) tu'rinde sistemag'a kelemiz. Bug'an bIlayInsha erisiwimiz mumkin. (4.1) tu'rindegi sistemanI ten, kushli tu'rlandiriw arqalI bas diogonalIndag'I koeffitsentlerinin' absolyut o'lshem ten'lemenin' basqa belgisiz aldIndag'I ko'effitsentlerinin' abso-lyut olshemlerin u'lken bolg'an sistemag'a a'kelemiz. Endi eger barIIq ten'lemenin' sa'ykes diogonalI koeffitsentlerine bolsek, ha'm har bir ten'lemeden birge ten' bolg'an belgisiz koeffitsentlerin ayIrsaq (4.3) turindegi sistemsg'a iye bolamIz. Bunda barIIq $|a_{ij}| < 1$. Bul sharttin' orInlanIwI zarurli, lekin (5.4)-(5.6) paseyiw shartlerinin' orInlanIwIna jetkiliksiz. Eger joqarIda orsetilgen tu'rlandiriwler ja'rdeminde (5.4)-(5.6) shartleri orInlanbasa, onda qaytadan berilgen sistemag'a kelip, basqa jaqsI na'tiyje beretu'g'In tu'rlandiriwler orInlawg'a h'areket etiw kerek. UsInday sheshimlerge tiykarlanag'an arnawII a'meller bar.

(5.4)-(5.6) shartlerinin' en' bolmag'anda birewinin' natijesinin' qoyIIwI, a ma'nisin alIw menen, keyninen (5.1) formuladag'I k-dallik penen jaqInlasIwg'a tiykarlanadI. JIynaqlIllIq qoyIlIlg'annan keyin esaplawg'a kirisiwge boladI.

Ten'lemeler sistemasInIn' iteratsiya usllInIn' algotitm sxemasI, 1 ten'lemenin' iteratsiya usllI sxemasInday 8-suwrette ko'rsetilgen. A'dette da'slepki jaqInlasIw retinde (4.3) sistemanIn' erkin ag'zalar bag'anasI alInadI. (5.1) tiykarInan, iteratsiya protsessin berilgen e da'llikke jetiskennen keyin, toqtattIw ushIn formula shIgadI:

$$\rho(x^{(k-1)}, x^k) \leq \varepsilon (1 - \alpha) / \alpha \quad (6.1)$$

Bunda ρ - metrika

MIsal 1. SistemanI $\varepsilon = 10^{-4}$ da'llik penen a'piwayI iteratsiya usllI menen sheshin':

$$2.34x_1 - 4.21x_2 - 11.61x_3 = 14.41$$

$$8.04x_1 + 5.22x_2 + 0.27x_3 = -6.44$$

$$3.92x_1 - 7.99x_2 + 8.37x_3 = 55.56$$

Da'slep diogonal koeffitsentlerin ulken, kishisin izbe-iz jaylasqan sistemanI alamIz. BunIn' ushIn bir ten'leme retinde ekinshi, u'shinshi etip birinshini, al ekinshi etip biribshi ha'm ushinshinin' qosIndIsIn alamIz.

$$8.04x_1 + 5.22x_2 + 0.27x_3 = -6.44$$

$$6.26x_1 - 12.20x_2 - 3.24x_3 = 69.97$$

$$2.34x_1 - 4.21x_2 - 11.61x_3 = 14.41$$

Endi ha'r bir ten'lemeni onIn' dioganalInIn' koeffitsetnlerine bo'lip, ha'm ha'r bir ten'lemeden dioganalI belgisizin tabamIz.

$$\begin{aligned}x_1 &= -0.6492537x_2 - 0.03355737x_3 - 0.800995 \\x_2 &= 0.5131147x_1 - 0.2655737x_3 - 5.7352459 \\x_3 &= 0.2015503x_1 - 0.3626184x_2 - 1.2411714\end{aligned}$$

Endi jIynaqlI shartinin beriliwin tekseriwimiz kerek. ρ_2 metrika boyInsha jIynaqlIIIqI tekseremiz.

((5.5) shartin) bag'ana koeffitsentlerinin' maksimal qosIndIsinIn moduli, x_2 koeffitsentlerinin' qosIndIsinIn' moduline ten' bolatug'InIlg'I ko'rinip tur. Lekin bul qosIndI (5.5) shartti qanaatlandIrmaydI.

$$0.6492537 + 0.3626184 > 1$$

Sharttin' orInlanbawI, iteratsiya usIIIn toqtatIw degen emes. JiynaqlIIIqI evklid metrikalIq ken'isligine qoyIp ko'reyik.

$$0.6492537^2 + 0.033582^2 + 0.5131147^2 + 0.2655737^2 + 0.2015503^2 + 0.3626184^2 = 0.4215303 + 0.0011277 + 0.2632866 + 0.0705293 + 0.0412271 + 0.131221 = 0.929131 < 1$$

Ebklid ken'isliginde iteratsiyalIq protsess jaqInlasadI, qIsIIw oeffitsenti $d = \sqrt{0.9291331} = 0.96$ bolg'anda $\varepsilon = 10^{-4}$ da'lillikka erisiw ushIn jaqInlasadI.

$$\rho(x^{(k-1)}, x^{(k)}) \leq \varepsilon (1 - \alpha) / \alpha$$

ten'sizlik orInlang'an sha, bunda $\rho(x^{(k-1)}, x^{(k)}) \leq$ - keyingi 2 Evklid metrikasIndag'I jaqInlasIw arallgI ha'm $10^{-4} \alpha = 0.96$ bolg'anda.

EEMde ko'p sandag'I ten'lemelerdi sheshkende programmada koeffitsent ma'nislerin, erkin ag'zalar dI, hamde belgisiz ma'nislerin saqlaw ushIn massiv qollanIladI. (koeffitsent ha'm erkin ag'zalar matrirtsasI ushIn - eki olshemli massib, belgisiz ma'nisleri ushIn - bir o'lshe mli massiv). Bul jag'dayda koeffitsent ha'm erkin ag'zalar ma'nisin shIg'arIw jolI menen anIqlanadI. To'mendegi N sizIqlI (N belgisiz ten'lemeler sistemasIn a'piwayI iteratsiya usIII menen sheshiw din' programmasI keltirilgen. Programmada 3 massiv qollanIlg'an: 2 olshemli tuwrImuyeshli massiv A(n, N+1) koeffitsent ha'm erkin ag'zalar dIn ma'nisleri ushIn, 1 olshemli massiv belgisizdi birinshi ha'm ekinshi ma'nisleri ushIn X(N) ha'm Y(N).

Iteratsiya usIII EEM de programmalastIrlw ju'da' qolayI, biraq ten'lemeler sistemasIn kerekli (arnawI) tu'rde a'kelip, jaqInlasIw shartlerin da'lillew onIn' praktikalIq qollanIwIn qIyInlastIradI. (5.4)-(5.6) jInaqIIIq shartleri za'ru'rlI emes dep esaplap (yag'InIy bul shartler orInlanbasa protsess jIynaqlI boladI degen). Praktikada ayIrlm waqItlarI jollr qollanIladI. Sheshimge jetisiwimiz ushIn sistemanIn' barIIq belgisizlerinin' qoyIlg'an da'lillik arallg'Indag'I qon'sillas jaqInlasIwI alInadI.

$$|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}| \leq \varepsilon, \quad i=1,2,3,\dots,n.$$

(bul jerde k-jaqInlasIw nomeri)

BunIn' ushIn islenip atIrgan sistemanI (4.3) tu'rine a'keliwimiz kerek, shig'arIwIn programmadan ko'rip shIg'Iw kerek. Bul jerde olardin jetkilikli jagdaylarinin uqsasligi esapqa alinbaydi yagniy tekserilmeydi ,biraq 2,1 qayta islegenin manisli boladi.Onin natijjeni diodanal koeffitsientleri toplawshi boliwi kerek.

Meyli biz (2.1) siziqli ten'lemeler sistemasin ha'm sog'an ekvivelent (2.4) sistemani qarayiq. (2.4) sistemani a'piwayi iteratsiya usili menen esaplag'anda iteratsiyaliq protses belgisizlerdin' bar jaqinlasiwshi ma'nislerdin' taza jaqinlasiwshig'a o'tiwinen turadi. Jaqinlasiwshi bar elementlerdi

$x, x, \dots, x$ orqali, al esaplang'an yaqinlasivshi elementlari $y, y, \dots, y$ orqali belgileymiz. Esaplawshi formula to'mendegise boladi.

Zeydel usilinin' tiykarg'i maqseti bul y ma'nisinin' esaplag'anda iteratsiya protsesinin' ha'r bir aduiminda $y, y, \dots, y$ aling'an ma'nisi esapqa alinadi. Sog'an sa'ykes keliwshi esaplawshi formulalar jazamiz:

$$\begin{aligned}
 Y_1 &= \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} x_j + \beta_1; \\
 Y_2 &= \alpha_{21} y_1 + \sum_{j=2}^n \alpha_{2j} x_j + \beta_2; \\
 &\dots\dots\dots \\
 Y_i &= \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} x_j + \beta_i; \\
 &\dots\dots\dots \\
 Y_n &= \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} y_j + \alpha_{nn} x_n + \beta_n;
 \end{aligned} \tag{7.1}$$

To'mendegi tastiqlawlar orinli boladi:

1. Eger (2.4) sistemanin' koeffitsientlari ushin (2.14)-(2.16) keminde bir sha'rti orinlansa, onda Zeynel usili boyinsha iteratsiyalaw protsessi qa'legen $x, x, \dots, x$ [7] da'slepki yaqinlasivdan saylag'anda bir sheshimge iye boladi. Solay etip (2.14)-(2.16) ha'r bir sha'rti Zeydel usili boyinsha iteratsiya- law protsesi yaqinlasivshi ushin za'ru'r. (2.1) sistemasina "jol menen esaplap" o'tiw onnan keyin yaqinlasivshi ushin sha'rtlerin orinlap ha'm esaplaw qolaysiz. Zeydel metodi boyinsha iteratsiyalaw protsesin esaplawin ko'remiz.

(2.1) matritsaliq formada jazamiz.

$$Ax=B$$

onda A izlenetug'in belgisiz koeffitsientler sistemasinin' matritsa B erikli ag'zalar bag'ana vektori, x -belgisizler vektor bag'anasi. A matritsani transponirlep juwmag'i A dep belgileymiz. (2.22) sistemanin' shep ha'm on' jaqlarin A matritsaga ko'beytemiz.

$$AAX=AB$$

$AA-C$ dep alamiz ha'm $AB-D$ dep sonda sistema to'mendegi turge iye boladi.

$$CX=D \tag{2.23}$$

Usinday turdegi sistemani normal sistema dep ataw qabil etilgen. Normal sistemalar "jaqsi" qa'siyetlerge iye:

-S matritsasi belgisizler normal sistemasinda simmetriali ($a_{ij}=a_{ji}$, $i, j=1, 2, \dots, n$)s -normal sistemadag'i s matritsanin' basli dioganalindag'i hamme elementlari on' ($a_{ii}>0$, $i=1, 2, \dots, n$). Usillardi kollanip (2.22) normal sistemani to'mendegi turde boladi:

$$x_{ij=1} = \alpha_{ij} x_j + \beta_j \quad (i=1, 2, \dots, n) \tag{2.24}$$

di

$$\alpha_{ij} = -c_{ij}/c_{ii} \quad (j \neq i) \text{ ham } \beta_i = d_i/c_{ii} \tag{2.25}$$

Teorema. Jeydel iteratsiyalaw protsessi (2.24) keltirilgen sistemaham og'an ekvivalent (2.23) normal sistema ushin [6] da'slepki yaqinlasivshini sailap aliw bir sheshimge iye boladi.

Keltirip shig'aruwdi misalda ko'remiz

$$\begin{aligned}
 x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\
 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\
 x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5
 \end{aligned}$$

Berilgen sistema ushin:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Esaplaymiz:

$$C = A * A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 5 \\ 6 & 11 & 5 \\ 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = A' * B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 \\ 22 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Solay etip berilgen sistemadan normal sistemanin' to'mendegi turde boladi:

$$\begin{aligned} 6x_1 + 6x_2 + 4x_3 &= 16 \\ 6x_1 + 11x_2 + 5x_3 &= 22 \\ 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 &= 12 \end{aligned}$$

Keltirilgen sistema normal sistemasina ekfivalent turi to'mendegishe:

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_2 - 0,6667x_3 + 2,667 \\ x_2 &= -0,5455x_1 - 0,4545x_3 + 2 \\ x_3 &= -1,3333x_1 - 1,6667x_2 + 4 \end{aligned}$$

Keltirilgen sistemanin' koeffitsientleri da'lligi boyinsha u'tirden keyingi 4-shi belgige (2.25) formula menen esaplanadi. Tabilatin sistemanin' sheshimi: $x_1=1$, $x_2=1$, $x_3=1$.

Berilgen konkret jag'day ushin Zeydel iteratsialat protsessi (2.12) formula to'mendegi turge iye boladi.

$$\begin{aligned} y_1 &= -x_2 - 0,6667x_3 + 2,6667 \\ y_2 &= -0,5455y_1 - 0,4545x_3 + 2 \\ y_3 &= -1,3333y_1 - 1,6667y_2 + 4 \end{aligned}$$

x_1 , x_2 da'slepki manislerdi ha'm e da'llikti esaplawdin'kiritiwin ko'remiz. Iteratsiyalq protsestin' tamamlanu dep hamme saykes keliwshi ma'nisler eki izbe-iz kelgen jaqilashuwshI to'mendegi saykeslikti orInlasa $Y_i - X_i < E$ (i=1,2,3)

(2,1) turdegi slzIqlI ten'lemeler sistemasIn Zeydel usIII menen esaplaw tiykarg'I adimlarI:

(1) A matzitsg'a tabllatun sistemanIn' koeffisetleri ha'm B matzitsa ba'g'anag'a onIn' erikli ag'zalarIn' kiritiw.

(2) E-da'llilikt eslawin kiritiw

(3) At transpozitsiyalang'an matritsa ha'm $C = A^t A$ ha'm $D = A^t B$ normal sistemanI esaplaw.

(4) Normal sistemanI Zeydel iteratsiyalaw protsesi joq turge keltiruw.

(5) Iteratsiyalaw protsesin izbe-iz kelgen jaqInlashIwshIlardIn' ma'nislerin saykes keliwin menen ayIrmanI ulken belgisizlerdi tsikli esaplaw.

(6) $M < E$ bolg'anda iteratsiyalaw protsestsinen shIg'Iw ha'm keyingi shIqqan jaqInlasIwshIg'a saykes keliwshi belgisiz ma'nislerdi peshatqa shIgarIw.

Tayanish tusinikler

Jiynaqliliq. Iteratsiya. Metrika. Matritsa. Iteratsiya protsessi. Jaqinlastiriq. Baslapqi juuqlau.

Oz betinshe uireniu ushin sorawlar

1. Qay uaqitta iteratsiya protsesisin' shartleri jiynaqli boladi?
2. Apiuayi iteratsiya usulinin' syzyqli ten'lemeler sistemasinin' sheshiude qollaniliwinin' ozgeshelikleri
3. Iteratsiya usulinda jaqinlaushi olshemdi qandoi shart penen saylap alamiz?
4. **Zeidel usulinin' tiykargi maqseti ne?**
5. **Zeidel usulinin' baslapqi juuqlau shartleri.**
6. **Ten'lemelerdi sheshiudin' Zeidel usulinin' ozgesheligi.**
7. **Zeidel usulinin' apiuayi iteratsiya usulidan ayriqshaligi**

Paydalanilg'an a'debiyatlar

1. ZavarIkin V.M. ShislennIe metodI. -M.: Prosveshenie, 1971. 176 s.
2. Siddikov A.M. Sonli usullar. Nukus. Bilim, 1996. 64 b.
3. Sbornik zadash po metodam vIshisleniy. Minsk. 1983. 288 s.

LEKTSIYA N6

Funktsiyani interpolatsiyalaw. Logranj interpolatsion kopag'zalig'i.

JOBA:

1. Ma'selenin' qoyilwI.
2. Interpolyatsion polinomdi duziw. Maselenin' sheshiminin' bar boliwini ham jalgizligin tamiynleu shartleri
3. LogranjdIn' interpolatsion kopag'zalig'I.
4. Lagranj formulasinin' qisqa turleri.
5. Logranj formulasIn qollanIp esaplawdI sholkemlestiriw.

BasI bir f funktsyanIn' belgili ma'nisleri tomendegi tablitsaIn' du'zin'.

Tablitsa 1.

X	X_0	X_1	...	X_n
F(x)	Y_0	Y_1	...	Y_n

Bunda funktsyanIn' ma'nisin sonday qIlIp alIw kerek x argwmenttin' ma'nisi $[x; x]$ kesindide bolsIn, biraq x ($i=0, 1, 2, \dots, n$) ma'nislerine sa'ykes kelmewi kerek. Bul ma'selenin' sheshiliw usIlI - f funktsyasInIn' analitikalIq an'latpasIn paydalanIp $f(x)$ - tIn' ma'nisin esaplaw. Bul usIllda esaplaw tek g'ana f fwunktsyasInIn' analitik an'latpasIn esaplawg'a boladI. Ko'binese f funktsyasInIn' analitik an'latpasI belgisiz bolIp keledi. Bunday jag'daida basqasha ayIrIqsha jol, usIl qollanIladI. Onda tabIlg'an sheshim F funktsyaga jaqIn ha'm analitik an'latpasI menen esaplawda qollanIwg'a boladI ha'm $f(x) = F(x)$ dep alamIz (1)

Ma'seleni sheshiw din tiykargI usIlI jaqInlasIwshI funktsyanI esaplawda. $f(x)$ ha'm $F(x)$ ma'nisleri x_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$) toshkalarda saykes keliwi sha'rt, yamasa

$$F(x_0)=y_0 \quad F(x_1)=y_1 \quad \dots \quad F(x_n)=y_n \quad (2)$$

Bul jag'dayda jaqInlasIwshI funktsyanI tabIw interpolatsiya dep ataladI. $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ toshkalar interpolatsyanIn' tarmaqlarI boladI.

$F(x)$ interpolatsiyalang'an funktsyanI n da'rejeli kop ag'zalI retinde alamIz.

$$P_n(x)=a_0x_n + a_1x_{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n \quad (3)$$

Bul kopag'zalI $n+1$ koefytsentine iye. kopag'salIg'a berilgen $n+1$ (sha'rti) (2) dep alamIz. ha'm onIn koefytsentlerin anIqlaymIz. $P_n(x)$ tin' (2) sha'rtin orInlap $n+1$ belgisizler menen $n+1$ tenlemeler systemasin tabamiz.

$$\sum_{k=0}^n a_k x_i^{n-k} = y_i \quad (i=0, 1, 2, 3, \dots, n) \quad (4)$$

Ushu sistemani $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ belgisizlar menen esaplap bizlar (3) polynomining analitik anlatpasini alamiz. (4) Systema bir sheshimga iye. Sebebi onin aniklanishi algebrada Vandermond aniqlama retinde belgili:

$$\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots & x_n & 1 \end{vmatrix}$$

usidan f funksiya ushin $P_n(x)$ ynterpolyatsyalanishi kop agzali 1-tablitsada bergeni jalgiz $P_n(x)$ -da geybir kofitsientlari onin ishinde a_0 -da 0 ge teng boliv jagdayida boladi,sonliqtan berilgende ynterpolyatsyalangan polynom n darejega iye.

Lograngdin' ynterpolyatsion kopagzallig'I.

Birinshi tablitsadagi f funksiya berilsin. n darejesi ulken bolmagan ham (2) shartlari orinlanatugin $L_n(x)$ ynterpolyatsyalangan kopagzaliq duzemiz. $L_n(x)$ ni tomendegi turde izleimiz.

$$L_n(x) = l_0(x) + l_1(x) + \dots + l_n(x) \quad (5)$$

onda $l_i(x)$ -n darejeli kopagzaliq.

$$l_i(x) = \begin{cases} y_i, & \text{eger } i = k \\ 0, & \text{eger } i \neq k \end{cases} \quad (6)$$

(6) shartlari (5) penen esaplanip (2) shartlari orinlaydi.

$l_i(x)$ kopagzalilari tomendegishe jazamiz:

$$l_i(x) = c_i(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n) \quad (4.7)$$

onda c_i turaqli kofitsiyent, onin manisini (6) shartining birinshi boleginen tabamiz.

$$c_i = \frac{y_i}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}$$

c_i ni (4.7) qoyip (4.5) te esaplap tomendegige iye bolamiz.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \quad (8)$$

(8) ni Lograngdin ynterpolyatsyalangan kopagzalisi dep ataymiz. Tablitsada tabilatugin $f(x)$ funktsiyani formula (1) din jardeminde kopagzaliqtin sirtqi korinishini duziwge boladi.

Misal 1.

Tablitsada berilgan funktsiya ushin Lograng ynterpolyatsyalangan kopagzalini dizin.

Tablitsa 2

x	1	3	4	bunda $n=2$ $x_0=1$ $x_1=3$ $x_2=4$
$f(x)$	12	4	6	

(8) formulasini paydalanip tomendegige iye bolamiz.

$$(x-3)(x-4) \quad (x-1)(x-4) \quad (x-1)(x-3)$$

$$L = 12 \frac{\quad}{(1-3)(1-4)} + 4 \frac{\quad}{(3-1)(3-4)} + 6 \frac{\quad}{(4-3)(4-3)} =$$

$$= 2(x^2 - 7x + 12) + 2(x^2 - 5x + 42) + 6(x^2 - 4x + 3) = 2x^2 - 12x + 22$$

$\Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$ qollanIp Logranj funktsiyaInIn' qIsqartqan tu'rine iye bolamiz.
 $\Pi_{n+1}(x)$ tu X boyinsha dyferentsyallan

$$\Pi'_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^n (x-x_0)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n) \quad x=x_i \text{ bolsa}$$

$$(i=0,1,2,\dots,n)$$

$$\Pi'_{n+1}(x_i) = (x_i-x_0)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)$$

onda Lograng formulasi tomendegi turge iye boladi.

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n Y_i \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)} = \Pi_n(x) = \sum_{i=0}^n X_i \frac{Y_i}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x_i)} \quad (9)$$

Logranj formulasIn qollanIp esaplawdI sho'lkemlestiriw.

Logranj formulasin kollanip esaplaw ulken bir typtegi esaplawga alip keledi. Esaplawda shema kollanip esaplaw ansat boladi.

3 Tablitsada 4 tarmaq ushin shemanin duzilisi korsetilgen x tin har bir argumentine tablitsa azadan duziledi. Tablitsani toltiriw bul esaplaw ham natiyjelerdi saykes kletkalarga jazip shigiw. Bunnan keyin P_i kobeymelerdin katari boyinsha ayirmasi orinlanadi.

$$P_0 = (x-x_0)(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3)$$

$$P_1 = (x-x_0)(x_0-x_1)(x_0-x_2)(x_0-x_3) \quad \text{ham tagi basqa}$$

Tablitsa 3

X	X0	X1	X2	X3	Pi	Yi	Yi/Pi
x0	X-X0	X0-X1	X0-X2	X0-X3			
x1	X1-X0	X-X1	X1-X2	X1-X3			
x2	X2-X0	X2-X1	X-X2	X2-X3			
x3	X3-X0	X3-X1	X3-X2	X-X3			

$$S = \sum (Y_i/P_i)$$

Tablitsada P_i arqali belgilengen kobeyme bul Logranjdin (9) formulasinin boliwshisi.

$$P_i = (x-x_i)\Pi_{n+1}(x_i) \quad (i=0,1,2,\dots,n)$$

onda Lograng formulasi tomendegishe boladi.

$$L_n(x) = \Pi_{n+1}(x) * y_i/p_i$$

Basqa kerekli bolgan manislerdi izbe-iz tablytsadan tabamiz.S qosindi keyingi baganadagi elementlerdin qosindisinin kelip shigadi. $\ln(x)$ tin aqirgi manisin tawip aliw ushin S ti $\Pi_{n+1}(x)$ qa kobeitiw kerek.

Misal 2. Funktsyanin tablitsasi berilgen.

Tablitsa 4

Lograng ynterpolyatsiya kopagzaligin paydalanip $x=1,91$ toshkadagi funktsyanin manisin tabin. Esaplaw 4,5 tablitsada keltirilgen.Aqirgi juwmaqtı tabıw ushin keyingi baganadagi swmmanin manisı diagonallarınin ayırmalarınin kobeymesine kobeyiledi.

x	$f(x)$
0,41	2,63
1,55	3,75
2,67	4,87
3,84	5,03

$$f(1,91)=0,79207*5,2422=4,15$$

tablitsa 4.5

$X=1,91$	X_0	X_1	X_2	X_3	P_i	Y_i	Y_i/P_i
X_0	1,50	-1,14	-2,26	-3,43	-13,26	2,63	-0,1983
X_1	1,14	0,36	-1,12	-2,29	1,053	3,78	3,561
X_2	2,26	1,12	-0,76	-1,17	2,251	4,87	2,163
X_3	3,43	2,29	1,17	-1,93	-17,74	5,03	-0,2835

Tayanish

Interpolyatsiya. Funktsiyanin' tablitsa turde beriliwi. Jaqinlaushı funksiya .

Soraull

1. Funktsiya maanisin esaplawda qay uaqıt interpolyatsiya usullari qolaniladi?
- 2.Qanday funksiya tiykargi funksiyağa jaqinlaushı bola aladı?
3. Jaqinlaushı funksiyanin' geometriyaalıq interpretatsiyası
4. Interpolyatsion polinom bar ham jalgiz ekenin daliyllen'
5. Lagranj interpolyatsion kopagzaligi qalay quriladi?

1. Zavarİkin V.M. Shislennİe metodI. -M.: Prosveshenie, 1971. 176 s.

2. Siddikov A.M. Sonli usullar. Nukus. Bilim, 1996. 64 b.

3. Sbornik zadash po metodam vİshisleniy. Minsk. 1983. 288 s.

LEKTSIYA N 7

Ten' qashqliqta jailasqan toshkalar ushIn Nyutonnin' interpoliyatsyon ko'pag'zalarI.

JOBA:

1. Shekli ayirmalar.
2. Nyutonnin' 1-shi interpoliyatsiyalaw formulasi.
3. Nyutonnin' 2-shi interpoliyatsiyalaw formulasi.
4. Interpoliyatsyon ko'pag'zalInIn' qatelligi.
5. Funktsiya tablisasin toliqtiriw.

Tablitsada berilgen ten' ashigligta jailasqan argumentin' manisindegi funksiya interpoliyatsiyalanadi. Bul jag'daida tablitsada $h=x_{i+1}-x_i$ ($i=0,1,2$) turahli olshem. Bunday formula interpoliyatsiyalaw tablislardin'siziwe qisqalanadi.

Shekli ayirmalar.

Funktsiya 1- tablitsada berilgen bolsin (joqarIdag'I lektsiyalarg'a qaran'). Turaqli o'lshem menen berilgen bolsin. Qon'silas interpoliyatsiyalaw tarmaqta funksiyanin' manislerinin' ayirmasi birinshi qatardag'i aqirg'i ayirma dep ataladi.

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (i=0,1,2,\dots)$$

Birinshi qatardag'i aqirg'i ayirmalardan qatardag'i aqirg'i ayirma kelip shig'adi.

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \quad (i=0,1,2,\dots)$$

Usi prosessti dawamlap qalegen qatardag'i aqird'i ayirmanin' manisini arqali jazuwg'a boladi. 1-shi qatar ayirmalar anihlama boyinsha biliwge boladi. 2-qatar ayirma

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i$$

iyemiz

3-qatar ayirma tomendegishe:

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = (y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}) - (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i \text{ ha'm t.b.}$$

Matematikaliq induksiya metodi menen

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - \binom{k}{1} y_{i+k-1} + \binom{k}{2} y_{i+k-2} - \dots + (-1)^{k-1} y_i \quad (1)$$

tablitsa 1

x	y	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$	..
x_3	y_3	Δy_3	..	
x_4	y_4	..		
..	..	..		

Nyutonnin' 1-shi interpolatsialaw formulasI.

Turaqli adim menen du'silgen agiizgi ayirmalar 4.6 tablisadag'i funksiyasi menen berilsin. Interpolatsiyalang'an ko'p agzalini.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0)\dots(x-x_{n-1}) \quad (2)$$

turgetur alamiz. Bul h-shi darejeli ko'p ag'zali koeffisienti manisleri daslepki funksiya ham tarmahtag'i ko'p agzalilardin' saykes keliw shartinen tabamiz. $x=x_0$ dep alip 4.11. $y_0 = P_n(x_0) = a_0$ tabamiz, onnan $a_0 = y_0$ x, x_1 , x_2 -lerge manis berip

$$y_1 = P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) \quad a_1 = \Delta y_0 / h$$

$$y_2 = P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

$$y_2 - 2\Delta y_0 - y_0 = 2h^2 a_2 \quad \text{yamasa} \quad y_2 - 2y_1 - y_0 = 2h^2 a_2,$$

Keyin esaplap

$$a_3 = \Delta^3 y_0 / 3! h^3$$

Ullwma jag'daida anlatpa ak

$$a_k = \Delta^k y_0 / k! h^k \quad (4.12)$$

turgetur iye bolamIz.

(4.12) -ni (4.11) an'latpa arqalI an'latamIz.

$$P_n(x) = y_0 + (\Delta y_0 / h)(x - x_0) + (\Delta^2 y_0 / 2! h^2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + (\Delta^n y_0 / n! h^n)(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) \quad (3)$$

Praktikada bul formulani basqasha qollanadI.

$x - x_0$

$$\frac{x - x_0}{h} = t \quad \text{alIp} \quad x = x_0 + t \quad \text{boladI. Onda}$$

$$\frac{x - x_1}{h} = \frac{x - x_0 - h}{h} = t - 1$$

$$\frac{x - x_2}{h} = \frac{x - x_0 - 2h}{h} = t - 2$$

$$\text{AqIrInda} \quad P_n(x) = P_n(x_0 + t h) = y_0 + t \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots +$$

$$+ \frac{t(t-1)\dots(t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0 \quad (4) \quad \text{iye bolamIz.}$$

(4) formula Nyutonnin' 1-shi interpolatsiyalaw formulasi dep ataladi. Bul formulani t absolyutlik maniste kishi bolg'an gezde kesindinin' basip interpolatsiyawg'a boladi. Aldiga qaray interpolatsiyalaw sebebinen Nyutonnin' 1-interpolatsiyalaw formulasi dep ataladi.

Nyutonnin' ekinshi interpolatsialaw formulasi.

Argumenttin' manisi interpolatsiyalaw kesindinin' izine jaqin bolg'anliqtan 1-shi interpolatsiyalaw formulasi bizge qollanu w qolayli boladi. Bul jag'dayda keyinge qaray interpolatsiyalaw Nyutonnin' 2-shi interpolatsiyalaw formulasin qollanamiz.

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + a_n(x - x_n)\dots(x - x_1) \quad (5)$$

(5) Nyutonnin' birinshi formulasindag'i $A_0, A_1, \dots, A_n$ koeffitsientlar funksianin' manisleri ham interpolatsiyalar ko'p ag'zalini

$$a_k = \frac{\Delta^k y_{n-k}}{k! h^k}$$

tarmaqta saykes keliwinen kelip shig'adi. (4), (5) qoyip

$$t = \frac{x - x_n}{h}$$

o'zgeriwshige o'tiw, Nyutonnin' ekinshi interpolatsiyalar formulasin tabamiz.

$$P_n(x) = P_n(x_n + th) = y_n + t \Delta y_{n-1} + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots +$$

$$+ \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0$$

Ko'pag'zal interpolatsiyanin' qatelligi.

Eger bizge interpolatsiyalar f funktsiya analitik an'latpasi belgisi bolsa onda interpolatsiyalar qatelligin tabiiy formulasin qollanilgani boladi. $F_n(x)$ interpolatsiyalar n ko'pag'zalinin qoldiqli ag'lasini. $R_n(x) = f(x) - F_n(x)$ $f(x)$ ni $(n+1)$ qatarg'a shikemge deyin tuwindiga iye dep alayiq

$$U(x) = f(x) - F_n(x) - k \Pi_{n+1}(x),$$

komekshi funksiyaga kiritemiz, onda R -turaqli kobeyme ushuni $U(x)$ funktsiya $n+1$ korengi iye $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ interpolatsiya tarmagi K koeffitsienti sonday qilib alayiq $u(x)$ funktsiya qalegen $x^* - x_i$ ($i=0, 1, 2, \dots, n$) toshkalarda $(n+2)$ korende iye bolsin.

$$U(x^*) = 0 \text{ boluw ushuni } k = \frac{f(x^*) - F(x^*)}{\Pi_{n+1}(x^*)} \quad (6)$$

kiritiw kerek. K -nin' bul manisinde $U(x)$ funktsiya interpolatsiyalar kesindide $n+2$ korengi iye bolishi ham har bir $[n+1]$ kesindide o'ge aynaladi.

$$x_0; x_1, x_1; x_2, x_2; x^*, x^*; x_{i+1}, \dots, x_{n-1}; x_n$$

Roll teoremasi har bir kesindige qollaniladi. $U'(x)$ kemide $(n+1)$ korengi iye. $U''(x)$ kemide (n) korengi iye.

.....

$U^{(n-1)}(x)$ kemide bir korengi iye ekanligin bilemiz.

$U^{(n-1)}(z) = 0$ bolsa, z -toshka (6) ushuni $n+1$ ret differentsiyalaymiz:

$$U^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - k(n+1)! \text{ yag'ni}$$

$$k = \frac{f^{(n+1)}(x) - U^{(n+1)}(x)}{(n+1)!}$$

$$x=z \text{ de } k = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \quad (7)$$

(4.19) ha'm (4.20) ni salIatIrIp:

$$f(x^*) - F_n(x^*) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x^*)$$

iye bolamIz. Biraq x^* toshka -erikli (z, x^* -tan g'a' rezli) sonIqtan

$$f(x) - F_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x)$$

Eger $M_{n+1} = \max_{x_0 \leq x \leq x_i} |f^{(n+1)}(x)|$ onda

$$R_n(x) \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x). \quad (8)$$

(8) Lagranj interpoliyatsiyalaw metodi boyinsha qatelikti esaplawg'a qolayli. $t = (x - x_0)/n$ ham $t = (x - x_4)/n$ ornina qoyinan paydalanip ham an'latpanin' $\Pi_{n+1}(x)$ ushin saykes turde almastiriw, onda (8) formulasin Nyuton interpoliyatsiyalaw formulasi boyinsha qateligin tabwg'a boladi.

$$R_n(x) \leq \frac{h_{n+1} M_{n+1}}{(n+1)!} t(t-1)(t-2)\dots(t-n). \quad (9)$$

$$R_n(x) \leq \frac{h_{n+1} M_{n+1}}{(n+1)!} t(t+1)(t+2)\dots(t+n). \quad (10)$$

Lagranj han Nyuton ko'p ag'zalilardi interpoliyatsiyalawdin' alamiz hamde (8)-(10) formulalari praktikaliq paidali juwmaqqa kelemiz. Qatelikti esaplawda x -ti tarmaqli toshkalar interbal ortasinda alsa $\Pi_{n+1}(x)$ o'lsheimi azayadi. X tarmaqli manislerin ortasinda jaqin boliwda jup $n=2m$ sanlar tarmag'in aladi. (m tarmaqtasolda ha'm m x -tek on'da). Eger x -tarmag'in bir manisine jaqin alsaq onda taq san $n=2m+1$ tarmaqta x jaqin ham m tarmaqta solda ham onnan solg'a qaray aliwg'a boladi.

Solay etip, Nyutonnin' interpoliyatsiyaliq formulasin duzgende praktikada saykes keliwshi aqirg'i ayirmalar ten' yamasa nolge jaqin bolsa agzalarin itibarga aliwga boladi. Sonliqtan esaplag'anda Nyutonnin' interpoliyatsiyalaw formulasi uziliske iye boladi, sebebi ondag'i ayirmalar berilgen da'lillik aralig'ida turaqli.

Aqirg'i ayirma ham Nyuton formulasi boyinsha interpoliyatsiyalaw arasinda baylanis tomendegishe boladi. Fitun kishi manisinde ham $f^{(n+1)}(x)$ uzliksiz dep shama menen

$$M_{n-1} \approx \frac{D_{n+1} y}{h_{n+1}} \quad - \text{di ondag'i}$$

$$\Delta_{n+1} y = \max_{x_0 \leq x \leq x_i} \Delta_{n+1} y_m \quad (n+1)$$

tartiptegi aqirg'i ayirma modulinin' maksimumi dep esaplanadi.

Bul jag'dayda (9) ham (10)qateligin esaplag'anda Nyutonnin' 1-shi ham 2-shi interpol'yatsiyalaw funktsiyasinin' qalidqli ag'zalari to'mendegishe boladi.

$$R_n(x) \sim \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-n)}{(n+1)!} \Delta_{n+1}y \quad (11)$$

$$R_n(x) \sim \frac{t(t+1)(t+2)\dots(t+n)}{(n+1)!} \Delta_{n+1}y \quad (12)$$

(4.24)ham(4.25) formulalari qolayli, f interpol'yatsiyalanushi funktsiya (n+1) tuwindisin almay-aq, interpol'yatsiyalaw hateligin esaplaw usili boladi.(kobinese f analitik an'latpa belgizis bolsa)

Interpol'yatsiyalawdIn' aqirg'i qateligine esaplaw ta'sir etedi.

Funktsiya tablisasin toliqtiriw.

Interpol'yatsiyalaw berilgen funktsialar tablitsasin toliqtiriw ushin qollanadi. Solay etip ulken argumenttin' manisin tablisada esaplaydi. Bul a'meldi sultabylyatsiya funktsiya dep ataladi. Tabilatin tablisa turaqli adimg'a iye bolgan jag'daida Nyutonnin' interpol'yatsiali ko'p ag'zalisin qollonadi. Tarmaqlarinin' sani berilgende ЭЕМ-de esaplaw ushun Nyuton formulasi Gorner sxemasinda g'ana an'latiw qolayli Nyutonnin' 1-shi interpol'yatsiyaliq formulasi

$$P_n(x) = y_0 + t(\Delta y_0 + ((t-1)/2)(\Delta^2 y_0 + ((t-2)/3)(\Delta^3 y_0 + \dots + ((t-n+1)/n) \Delta^n y_0) \dots) \quad (13)$$

Gorner sxemasin qollong'anda tsiklda $P_n(x)$ manisin esaplawg'a boladi. Eger esaplanip atirg'an aqirg'i ayirmalardi maxsimal tartibi az bolsa, onda $P_n(x)$ manisin esaplawda Nyuton formulasin (4.14) (4.17) standart turinde qollaniwg'a boladi.

Misal 1. $k=0,005$ adimi menen $[0,15;0,18]$ araliqta bes qaanali tablisa berilgen. Usi tablisan $k=0,001$ adimi menen $[0,155;0,165]$ araliqta toliqtirin'.

Esaplanip atirg'an tablisada aqirg'i ayirmalar tablisasin dizemiz (tablisa 2) Aqirgi ayirmalardi qisqartip jasuw ushun olardin' manisindegi tsifrlardi jzamiz. Usidan olardin' ekinshi taripte jaylasqan aqirg'i ayirmalarg'a 0-ge jaqin ekenligin ko'remiz. Sonliqtan Nyutonnin' interpol'yatsiyalaw formulasin (7) qollang'anda alding'i ushqosiliwshilardi menen sheklenemiz.

$$R_n(x) \sim y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0$$

tablitsa 2.

X	SINX	Y	ΔY	$\Delta^2 Y$
0,150	0,14944	494	0	-1
0,155	0'15438	494	-1	1
0,160	0,15932	493	0	0
0,165	0,16462	493	0	-1

0,170 0,16918 493 -1
0,175 0,17411
0,180 0,17903

Nyutonnin' 1-formulasin qollanemiz. $x=0,155$ dep alamiz. x har bir manisi ushun t -nin' manisini

$$t=(x-x_0)/h$$

formulla menen tabamiz.

Tayanish tushunchalari

Tuyin, adim, shekli ayirmalar. Aldinga qaray ham artqa qaray interpolyatsiya.

savollar

1. Qay jagdaida funktsiyani interpolyatsiyalaw ushin Nyutonnin' 1-shi, 2-shi formulasi paydalaniladi?
2. Ne ushin olar aldinga qaray ham artqa qaray interpolyatsiya dep ataladi?
3. Nyuton formulalarinin qateligine ne ta'sir etedi?
4. Nyutonnin' interpolyatsion formulalari qalay quriladi?

Paydalanilgan adabiyotlar

1. Zavaritskiy V.M. Shislenniy metod. -M.: Prosveshchenie, 1971. 176 s.
2. Siddikov A.M. Sonli usullar. Nukus. Bilim, 1996. 64 b.
3. Sbornik zadach po metodam resheniya. Minsk. 1983. 288 s.

LEKTSIYA N8

Sanli differentsiyallaw ha'm integrallaw. NyutonnIn' interpolyatsiyaliq formulasI tiykarInda sanli differentsiyallaw.

JOBA:

1. Sanli differentsiyallaw ma'selesinin' ozgesheligi.
2. Ten' araliqta jaylasqan tu'yinler sistemasi. Olar ushin ushIn Lagranj interpolyatsiya formulasI.
3. Lagranj Interpolyatsyaliq formulasI tiykarinda sanli differentsiyallaw.
4. Nyutonnin interpolyatsiq kopagzalisi.
5. Nyutonnin interpolyatsinin' tuinlerdin'sani menen baylanisi.
6. Lagranj ham Nyutonnin interpolyatsinin' duziliui.

Eger analitikaliq berilgen funktsyanin' tuwindisin tabiw qiyin bolsa yamasa tuwindi an'latpasi ju'da qolaysiz formada bolsa, onda juwiq yamasa sanli differentsiyallaw qollaniladi. Bul usil funktsya tablitsaliq tu'rde berilgen bolsa ha'm kerek. Differentsiyallaw ma'selesin sheshiwidin' jollarinin' biri - interpolyatsyaliq kopag'zalilardi qollaniw.

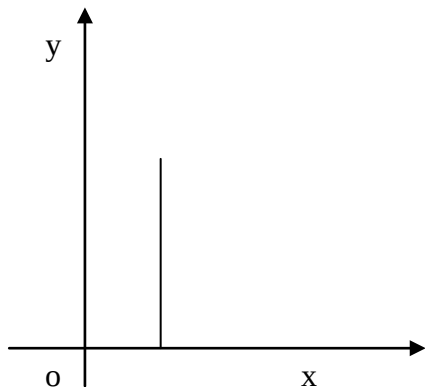
Meyli $f(x)$, $[a, b]$ araliqtag'i berilgen toshkadag'i tuwindisin tabiw kerek bolg'an funktsya, al $F_n(x)$ - $[a, b]$ araliqta du'zilgen $f(x)$ ushin interpolyatsyaliq kopag'zali $f(x)$ ti interpolyatsyaliq kopag'zali $F_n(x)$ menen almasitirsaq $F_n'(x)$ interpolyatsyaliq tuwindisi ma'nisindey $[a, b]$ araliqta $f(x)$ funktsyasinin' tuwindisin alamiz. yag'niy shaması

$$f'(x) = F_n'(x) \quad (1)$$

Analogik jol menen $f(x)$ funktsyasinin' joqari ta'rtipli tuwindilar tabiladi.

Interpolyatsiya qa'teligi

$$R_n(x) = f(x) - F_n(x)$$



1-su'wret

$F_n'(x)$ tuwindinin' qa'teligin alamiz

$$F_n'(x) = f'(x) - F_n'(x) = R_n'(x) \quad (2)$$

yagniy interpolyatsyalaniwshi funktsya tuwindisinin' qa'teligi usi funktsyanin' qa'teliginen alingan tuwinduisina ten'. Biraq sanli differentsiyalaw maselesi onsha jaqsi emes. Bunin' ma'nisi sonda, interpolyatsyaliq kopag'zalinin' tuwindisina qa'teligi, interpolyatsyanin' ozinin' qa'teligine asip ketedi.

1-su'wrette ju'da' kishi ayirmashiliqqa $f(x)$ ha'm $F_n(x)$ ma'nislerine jaqinlig'in saqlamaydi. (Li ha'm $L(F_n)$ sa'ykes $f(x)$ ha'm $f_n(x)$ ke urinadi.

Lagranj ha'm Niwton interpoliyatsiyaliq kopag'zalilari tiykarinda sanli differentsiya usilin qarayiq.

Ten' araliqta jaylasqan tu'yinler ushIn Lagranj interpoliyatsiya formulasI.

Interpoliyatsiyaliq polinomda, $[a, b]$ araliqta sanli differentsiyalar qollanif, yag'niy (araliq $x_{i+1} - x_i = h$ const ($i=0, 1, \dots, n-1$) ten' n bo'lekke bo'lingan systemasi du'ziledi.

Bul jag'dayda Interpoliyatsiyaliq adim $h = (a-b)/n$ ma'niske iye, al Logranj Interpoliyatsiyaliq kopag'zalisi (Niwton Interpoliyatsiyaliq kopag'zalisi siyaqli) ten' araliqqa jaylasqan tu'yinlerden du'ziledi ha'm kobirek qolayli tu'rge iye.

Belgilewdi kiritayik:

$$\frac{x - x_0}{h} = t \quad (3)$$

Esap mag'liwmati menen

$$L_n(x) = \Pi_{n+1}(x) = \sum_{i=0}^n \frac{Y_i}{(x-x_0)\Pi_{n+1}(x_i)}$$

$\Pi_{n+1}(x_i)$ ushIn jan'a an'latpanI alamiz.

Kiritken belgileniwshimizdi esapqa alIp.

$$\Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

ha'm qollanip,

$$x - x_0 = ht$$

$$x - x_1 = x - x_0 - h = h(t-1)$$

$$x - x_2 = x - x_0 - 2h = h(t-2)$$

yag'niy uliwma jag'dayda

$$x - x_i = x - x_0 - ih = h(t-i), \quad i=0, 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

usini qollanip

$$\Pi_{n+1}(x) = h^{n+1} t(t-1)(t-2)\dots(t-n)$$

Qisqartiw maqsetinde $t(t-1)(t-2)\dots(t-n) = t[n+1]$ belgilewdi kiritemiz. Onda $\Pi_{n+1}(x)$ an'latpa to'mendegi tu'rde keledi.

$$\Pi_{n+1}(x) = h^{n+1} t[n+1] \quad (5)$$

tu'rli adimdi esapqa alip

$$x_i = x_0 + ih, \quad i=0, 1, \dots, n$$

izbe-iz tawipto'mendegige iye bolamiz.

$$x_i - x_0 = hi$$

$$x_i - x_1 = x_i - x_0 - h = h(i-1)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x_i - x_n = x_i - x_0 - nh = h(i-n) \quad (6)$$

(5.6) n qatar ekenin an'laymiz. Sonin' menen birge birinshi i qatardin' ayirmasinin' ma'nisi on', al qalg'anlari teris (5.6) qollanip.

$$\begin{aligned} \Pi'_{n+1}(x_i) &= (x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n) = \\ &= h n i (i-1) \dots 1 (-1) \dots [-(n-1)], \text{ yag'niy} \\ \Pi'_{n+1}(x_i) &= h n i! (n-1)! (-1)^{n-1} \quad (7) \end{aligned}$$

(5) ha'm (7)ko'rinislerdi esapqa alip ((9)- O'tken lektsiyalarg'a qaran') Lagranj formulasi ten' araliqta jaylasqan tu'yinler ushin

$$L_n(x_0+th) = \sum_{i=0}^n Y_i \frac{(-1)^{n-i} t^{[n+1]}}{i!(n-i)!(t-i)} \quad (8)$$

Misal 1. Ten'araliqta jaylasqan tu'yinlerinde o'zinin' ma'nisleri menen berilgen (n=2, h=1) funktsiya ushin Interpolyatsyaliq Logranj kopag'zalisin du'zin':

Tablitsa 1.

x	2	3	4
f(x)	4	-2	6

(8) formulani qollanip

$$L(2+t) = 4 \frac{t(t-1)(t-2)}{2!t} + (-2) \frac{(-1)t(t-1)(t-2)}{t-1} + 6 \frac{t(t-1)(t-2)}{2!(t-2)} = 2(t-1)(t-2) + 2t(t-2) + 3t(t-1) = 7t^2 - 13t + 4$$

jazamiz.

Ushu formula orqali sa'ykes $t=0;1;2$; bolg'anda Funktsyanin' tu'yinli tablitsaliq ma'nislerin (4;-2;6) tabamiz.

Lagranj Interpolyatsyaliq formulasini tiykarida sanli differentsyallaw.

(1) qarap, (8) Lagranj ko'p ag'zalisini differentsyallaymiz t g'a qarata x ni funktsiya dep alip

$$f'(x) \sim L'_n(x) = \frac{dx}{dt} \sum_{i=0}^n Y_i \frac{(-1)^{n-i} d[t^{(n+1)}]}{i!(n-i)! dt [t-i]}$$

(3) boyinsha $x=x_0+th$, ham $dx/dt=h$ dep alip tomondgishe juvmaqqa kelemiz.

$$f'(x) \sim f'(x_0+th) \sim \frac{1}{h} \sum_{i=0}^n Y_i \frac{(-1)^{n-i} d[t^{(n+1)}]}{i!(n-i)! dt [t-i]} \quad (9)$$

(9) paydalana o'tirip, $f(x)$ funktsyasinin jaqin tuwindi manisini esaplawga boladi. Eger $a=x_0, x_1, \dots, x_n=b$ ten tuyinles manisleri $[a;b]$ araligida berilgen bolsa (bul ushin t parametr 1 den n ga shekemgi manislerdi oz ishine aladi).

Misal 2.

Berilgen tablytsadagi $x=4$ toshka funktsyanin tuwindisinin jaqinlasiwshi manislerin esaplap.

Tablytsa 2.

x	3	4	5
f(x)	2	-1	6

Formula (9) dan paydalanip tomendegige iye bolamiz.(bul jerde $n=2, h=1$)

$$f''(x) \sim \frac{1}{2!} \frac{d[(t-1)(t-2)]}{dt} - \frac{[(-1)d[t(t-2)]]}{dt} + \frac{1}{2!} \frac{d[t(t-1)]}{dt}$$

$$= (t-2+t-1) + (t-2+t) + 3(t-1+t) = 2t-3+2t-2+6t-3 = 10t-8$$

$x=4$ tuyin $t=1$ saykes keletuginin esapqa alip (t.e.t= $x-x_0$) tomendegige iye bolamiz.

$$f''(4) \sim 2$$

Eger $F(x)$ funktsyasinin anlytykaliq manisi belgili bolsa, sanli dyfferentsyallaw qateliginin bahasinin formulasin usi jagdayda Ynterpolyatsyanin qatelik formulasinin tiykarinda aliwga boladi.

$$R_n(x) = f(x) - F_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x)}{(n+1)!} \Pi_{n+1}(x) \quad (10)$$

bul jerde $x=x(x)-[a,b]$ kesindisinin bir manisi (5.2)qatar ham $f(x)$ $n+1$ marte differentsyallanadi dep oylap tomendegishe jazamiz.

$$r_n(x) = R'_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} \left\{ f^{(n+1)}(x) \Pi'_{n+1}(x) - \frac{d}{dx} \left[\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{2f^{(n+1)}(\xi)} \right] \right\} \quad (11)$$

(5.11) formulasi apiuayilasadi. Eger $f'(x)$ tuwindiga iye $f(x)$ funktsyanin manisleri ushin san xi tablitsasida tuyini bolsa

$$r_n(x) = R'_n(x) = (-1)^{n-1} \frac{i!(n-i)!}{(n+1)!} f^{(n+1)}(x) \quad (12)$$

bul jerde $x=x_0, x_1, \dots, x_n$ araligindagi manis

$$M_{n+1} = \max_{x_0 \leq x \leq x_n} |f^{(n+1)}| \text{ den an'latip sanli differentsyallaw}$$

tuyinleslerinin absolyut qateliklerinin joqari bahasin sanli differentsyallaw tuyininde alamiz.

$$|r_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{h^n i!(n-1)!}{(n+1)!} \quad (13)$$

$f(X)$ funktsyasi ushin $x_0, x_1, \dots, x_n$, ten tuyinlerinin manisleri menen berilgen birinshi Nyutonnin ynterpolyatsaliq kopagzalisin jazamiz. $t(t-1) \dots (t-n+1)$

$$P_n(x) = P_n(x_0 + th) = Y_0 + t \Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 - \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots + \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0$$

bul polinomdiskopkalarida aship kayta jazamiz.

$$P(x+th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t^2-t}{2} \Delta^2 y_0 - \frac{t^3-3t^2+t}{6} \Delta^3 y_0 + \frac{t^4-6t^3+11t^2-6t}{24} \Delta^4 y_0 + \dots$$

$$P_n(x_0+th) \text{ ti } t \text{ bo'yinsha differentsyallap (5.9) uqsas}$$

$$f'(x) \sim P'(x+th) = \frac{1}{h} \left[\frac{2t-1}{2} \Delta y_0 + \frac{3t^2-6t+2}{6} \Delta^2 y_0 - \frac{2t^3-9t^2+11t-3}{12} \Delta^3 y_0 + \dots \right] \quad (1)$$

alamiz.

Uqsas almastiriw joli menen tuwindisi $f(x)$ funktsyasinin bunnanda joqari tartibin aliwga boladi. Biraq har waqta $f(x)$ tuwindili funktsyanin x belgilengen toshkasindagi manislerin esaplay otirip, x_0 turinde argumenttin en jaqin shep manislin aliw kerek.

(5.4) formula ahmiyetli apiwayilastiriladi, eger x tablitsadagi natiyjeli manislerinin tuyininin birewi bolsa, bul jag'dayda har bir tiyindi baslawish tuwindi dep alsaq, on'da $x=x_0$ $t=0$ dep

$$f'(x) = \frac{1}{h} \left(\Delta y_0 - \frac{\Delta^2 y_0}{2} + \frac{\Delta^3 y_0}{3} - \frac{\Delta^4 y_0}{4} + \frac{\Delta^5 y_0}{5} - \dots \right) \quad (2)$$

Bul formula birge ansat ham jetkilikli dal tuwindilifunktsyanin manislerin aliwga mumkinshilik beredi, tablitsada berilgendey.

Funktsyanin yllustratsyasi ushin tuwindili funktsyani alamiz. Ol ansat usil menen sheshiletugin bolsin.

Misal 1.

$x=32$ toshkasindagi $f(x)=\sqrt{x}$ tuwindili funktsyanin manislerin tabin ((2) aldIn'g'I lektsiyag'a qaran') tablitsasidan paydalanip. Bul jagdayda $h=1$ boladi. (2) tablitsasinin birinshi qatarina qollana otirip tomendegini alamiz.

$$f'(x) = 0,088 + 0,002/2 + 0,001/3 = 0,089$$

$$x=32$$

alingan manis penen salistira otirip

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2 \cdot 5,657} = 0,088$$

utirden keyingi eki sannin birdey ekenligin bilemiz.

x	y= $\sqrt{x}$	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$	$\Delta^4 y$
32	5,657	88	-2	1	-1
33	5,745	86	-1	0	
34	5,831	85	-1		
35	5,916	84			
36	6,000				

qatellikin differentsyallaw formulasin keltirip shigariw ushin n.5.3 qaraymiz.(10) Formulasinan paydalana otirip Nyutonnin birinshi interpolyatsyon kopagzalisi ushin tomendegishe jazamiz

$$R_n(x) = \frac{h^{n+1}t(t-1)(t-2)\dots(t-n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

bul jerde $x_0, x_1, \dots, x_n$ tuyin ham berilgen x toshkasi arasindagi araliq. $f(x)$ $n+1$ martebe differentsyallanadi dep alip $f_n(x)$ qatellikin differentsyallaw bahasi ushin alamiz.

$$f_n(x) = R_n' = \frac{h^n}{(n+1)!} \left\{ f^{(n+1)}(\xi) \left[-t + \frac{t(t-1)}{2} + \dots + \frac{t(t-1)\dots(t-n)}{n!} \right] \right\} \quad (3)$$

(5.16) qatellikin bahasi ushin

$$R_n'(x) \Big|_{x=x_0} = (-1)^n \frac{h^n}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)$$

bul jerde $t=0$ bolganda $(df/dt)f^{(n+1)} = (-1)^n n!$ ekenligi qabil etilgen. Praktikada $f^{(n+1)}(*)$ di bahalaw an'satemes,

$$f^{(n+1)}(\xi) \sim \frac{\Delta^{n+1} Y_0}{h^{n+1}}$$

bul bizge jaqinlasiwshi formulani paydaloaniwga mumkinshilik beredi.

$$R_n(x_0) \sim \frac{(-1)^n \Delta^{n+1} Y_0}{h^{n+1}} \quad (4)$$

Tayanish tu'siniklari.

1. Tuyin. Interpolyatsion kopagzali. Qatelik. Ten' araliqta joylasqan tuyinler ushin Nyuton interpolyatsiyalaw formulasi.

Soraular

1. Sanli differentsiyallaw maselesinin' ozgesheligi nede?
2. Lagranj ham Nyuton formulalarinin' ayirmashiliqlari

Paydalanilg'an a'debiyatlar

1. Zavaritskiy V.M. Shislenniy metod. -M.: Prosveshchenie, 1971. 176 s.
2. Siddikov A.M. Sonli usullar. Nukus. Bilim, 1996. 64 b.
3. Sbornik zadach po metodam vishisleniy. Minsk. 1983. 288 s.

LEKTSIYA N9

Sanli integrallawdin' sanli usullari

JOBА:

1. Ma'selesinin' qoyliwI.
2. Trafetsiya formulasI.
3. Simpson formulasI.
4. Kvadratur formulalarIn' anIqlIg'In bahalaw.

Aniq integraldi esaplawda

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

bul jerde $f(x)$ $[a,b]$ kesindisine uzliksiz funktsya, arasinda Nyuton-Leybnitstin belgili formulasin paydalaniwga mumkinshilik boladi.

$$\int_a^b f(x) dx = f(b) - f(a) \quad (1)$$

bul jerde $F(x)$ daslepki $f(x)$ funktsyasinin biri yamasa $F'(x) = f(x)$ siyaqli funktsya. Degen menen ayirim jagdaylarda daslepki funktsyani anaalitikalik formada tabiw mumkin bolsa da aniq aniq integraldin manisin sanli juwapqa shekem jetkeriw mumkin bola bermeydi. Eger de integral astindagi funktsya tablitsa yamasa grafik turinde berilgenin esapqa ala otirip, onda (1) formula boyinsha integrallaw praktikada ken kollanilmaydi.

Usi siyaqli jagdaylarda har qiyli juwiq (sanli) integrallaw metodinan qollaniladi. Bir integrallawdi juwiq esaplaw ushin qollanilatugin formulalardi kvadratliq formulalar dep ataydi. Kvadratliq formulalardi duziwdin apiwayi qollaniliwi sonnan ibarat, $f(x)$ integral asti funktsyasi $[a,b]$ araliginda interpoliyatsyaliq kop agzali menen almastiriladi. misali Logranj kopagzalisi $\ln(x)$ penen ham juwiq tenlikti alamiz.

$$\int_a^b f(x) dx \sim \int_a^b \ln(x) dx \quad (2)$$

Bul EVM da ansat realizatsyalanatugin algoritmlerge keltiriledi ham jetkilikli dallik penen juwabin aliwga boladi.

Bul jerde $[a,b]$ araligi $a=x_0, x_1, \dots, x_n=b$ toshkalari arqali h boleklerge bolinedi dep esaplaymiz. Al bulardin koplighi $\ln(x)$ kopagzalisinin duziliwine mumkinshilik beredi.

$\ln(x)$ tin ornina o'tken lektsiyadagi korinisin qoyip tomen degide iye bolamiz.

$$\int_a^b f(x) dx \sim \int_a^b \sum_{i=0}^n Y_i \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i) \Pi'_{n+1}(x_i)} dx =$$

$$= \sum_{i=0}^n Y_i \int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i) \Pi'_{n+1}(x_i)} dx$$

usilay etip

$$\int_a^b f(x) dx \sim \sum_{i=0}^n Y_i A_i \quad (3)$$

bul jerde

$$A_i = \int_a^b \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i) \Pi'_{n+1}(x_i)} dx \quad (4)$$

alingan formulalardan koriwge boladi.

- 1) Koofitsyenti A_i $f(x)$ funktsyasina gazezli emes. Olar tek interpolatsyanin tuyini menen duzilgen.
- 2) Eger $f(x)$ n darejenin polinomi bolsa, onda (2) dal formula yamasa bul jagdayda $L_n = f(x)$

Trafetsiya formulasI.

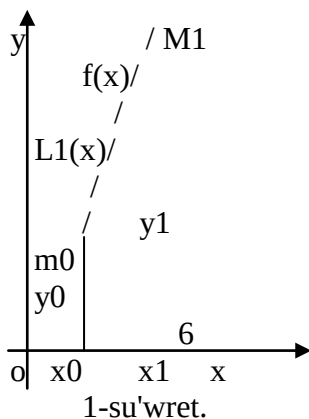
(7) formulada $n=1$ bolganda

$$H = - \int_0^1 \frac{t(t-1)}{t} dt = - \int_0^1 t(t-1) dt = - \frac{1}{2}$$

onda $[x_0; x_1]$ kesindide (5.25) formulasina tiykarlanip tomendegi integraldi alamiz.

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = (x_1 - x_0) \left(\frac{H_0 y_0 + H_1 y_1}{2} \right) = \frac{h}{2} (y_0 + y_1) \quad (9)$$

(5.26) formulasi aniq integraldi esaplawdin en apiwayi usilin beredi ham ol trafetsya metodi dep ataladi. Haqiqatinda da $n=1$ bolganda integral astindagi funktsyani Logranjdin 1-darejeli interpolatsyaliq kop agzalisina tarqatsaq al bul geometriyaliq jaqtan iymek siziqli fygura maydani menen almastiriwdi anlatadi (12-suwret).



(9) formulasin barliq kesindilerge qollansaq onda $[a; b]$ kesindisi ushin

$$\int_a^b f(x) dx = h \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2} \right) \quad (10)$$

trafetsya formulasin alamiz.

Eger integral astindagi funktsyanin analitikaliq turi belgili bolsa onda sanli integraldin esaplaw qateligin aniqlaw maselesi qoyiladi. Bul jagdayda

$$\int_a^b f(x) dx \sim \int_a^b \ln(x) dx + R_n \quad (11)$$

manisler tutiladi. Bunda $R_n(f)$ (11) kvadratliq formulasinin qalldiq agzasi boladi. Qalldiq agzani aldin $[x_0; x_1]$ kesindisi ushin alamiz.

$$R = \int_{x_0}^{x_1} f(x) dx - \frac{h}{2} (y_0 + y_1) = \int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx - \frac{h}{2} [f(x_0) + f(x_0+h)]$$

$R(0)=0$ ekeni belgili $R(h)$ ti h boyinsha differentsyallap

$$R'(h) = \left(\int_{x_0}^{x_0+h} f(x) dx \right)' - \frac{1}{2} [f(x_0) + f(x_0+h)] =$$

$$= -\frac{h}{2} [f'(x_0+h)] = f(x-h) - \frac{1}{2} f(x+h) - \frac{1}{2} f(x) - \frac{h}{2} f'(x_0+h) =$$

$$= -\frac{1}{2} [f(x_0+h) - f(x_0)] - \frac{h}{2} f'(x_0+h)$$

alamiz. Bunnan $R'(0)=0$ ekeni belgili bolsa R di 2 irt diferentsyallap

$$R''(h) = -\frac{1}{2} f'(x_0+h) - \frac{1}{2} f'(x_0+h) - \frac{h}{2} f''(x_0+h) = -\frac{h}{2} f''(x_0+h) \quad (12)$$

$[0; h]$ kesindisinde $R''(h)$ integrallap R di aniqlaymiz

$$\int_0^h R''(z) dz = R'(z) \Big|_0^h = R'(h) - R'(0) = R'(h)$$

(12) di esapqa alip

$$\int_0^h R'(z) dz = \int_0^h R''(z) dz = -\frac{1}{2} \int_0^h z f''(x_0+z) dz \quad (13)$$

(13) ga orta manis haqqindagi uliwmalasqan teoremani qollanip tomendegini alamiz.

$$R'(h) = -\frac{1}{2} f''(x_1) \int_0^h z dz = -\frac{h}{4} f''(x_1) \quad (14)$$

Bunda $x_1 \in [x_0; x_0+h]$ $x_1 - h$ tan g'arezli Soninan

$$\int_0^h R'(z) dz = R'(z) \Big|_0^h = R(h) - R(0) = R(h) \quad (15) \text{ da}$$

ha'm orta manis haqqindagi uliwmalasqan teoremani esapqa alip tomendegini alamiz.

KvadraturalIq formulalarIn' da'lligin bahalaw haqqInda.

(16) ham (21) bahalaw formulalarinan ,eger integral astindagi funktsiya analitikaliq bolganda gana Simpson ham trapetsiya formulalari menen integrallawdin qatelik bahalawi bolatuginligi kelip shigadi . Lekin , hamde usi jagdayda praktikada kennen qollanilatugin kelesi amel bar.

Izlenip atirgan integral eki ret esaplanadi: [a,b] araliqti n bolekke ham 2n bolekke bolip , keyinnen tabilgan integral manisleri tenlestiriledi (olardi I ham I dep belgileyik) ham keletugin birinshi aniqliq belgileri duris dep esaplanadi.

Simpson usilinin qatelik bahalawi ushin apiwayi formula qollaniladi.Meyli k ham k -Simpson formulasi menen integrallaw qateligi saykes n ham 2n boleklerge bolgendegi (5.36) bahalawdi esapqa alip tomendegi tenlikti duziwimizge boladi:

$$\frac{k}{k} = \frac{h}{h} \quad (23)$$

Bunda h ham h⁻¹-shi ham 2-shi jagdaydagi araliqti bolgendegi uzunliqlari (integrallaw adimi) h =h/2 ekenligi tusinikli, onda (5.38) den

$$R_n = 16R_{2n} \quad (23) \text{ -ni alamiz.}$$

Eger I-integraldin shin manis, onda I=I_n + R_n ham I=I_{2n}+R_{2n} bunnan I_n +16R_{2n} =I_{2n} +R_{2n}

$$|R_{2n}| = \frac{|I_n - I_{2n}|}{15} \quad (24)$$

(24) formula, Simpson usilinin praktikaliq qatelik bahalawina qolayli,biraq 2 ret esaplawdi talap etedi.(5.33) ham (5.36) formulalarinan, trapetsiya usili ham Simpson usili menen integrallaw qateligi, integral adimin azaytqan sayin azayatuginligi korinedi.Usigan tiykarlanip araliqti izbe-iz bolgendi kobeyken sayin, biz integraldin shin manisine kem-kemnen jaqinlasip baramizdegen natiyjege kelemiz.Biraq bul natiyje dal teoretikalik maniske iye. Bunin manisni sonda,praktikalik esaplaw protsessinde, araliq sanin izbe-iz 2- ge kobeytkenimizde , dongeleklew qateliginin salistirmali salmagi qatti kusheyip baslaydi.

EEM ushIn programmalar du'ziw. Trapetsiya ha'm Simpson formulalarI.

Simpson usili menen integrallaw programmalarin duzeyik.(25) Simpson formulasin tsiklii algoritmin sholkemlestiriw ushin tomendegi qolayli turde jazayiq (y - di qosip ham alip taslap)

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{3} \left[\frac{y_0 + y_{2m}}{2} + (2y_1 + y_2) + (2y_3 + y_4) + \dots + (2y_{2m-1} + y_{2m}) \right] \quad (26)$$

Kvadrat skobkanin ishindegini anlatpa (1 agzadan basqa) 2y +y tsiklii qosiliwshi kopagzali turinde aliwga boladi.k parametrdi har bir aylanis tsiklinde 2-ge kobeytkende, k-nin joqargi shegarasi n-1 (n=2m) boliwi kerek.Integral adimin saylaganda ham usildin qatesi bahalawi "qol" menen islense (26) formula boyinsha integral esalaw algoritmi apiwayi tsiklda boladi.

Diqqat awdarayiq, bul misaldi MK menen esaplaganimiz benen integral manisni tuwri keledi.Metod qateliginin olshemi boyinsha pikir juritse, berilgen jagdaydagi esaplaw qateligi,metod qateliginen aspaydi.Tabilgan integral manislerinin keminde utirden keyingi 4 belgi qatti maniste duris boladi dep isenimli daliyllewge boladi. Endi (23) bahalawdi qollanip ,qayta esaplaw usili menen Simpson formulasinin programmalastiriwga jaqinlawin qarastirayiq.

Eger talap etilgen dallikka ,(yagniy $|I - I| > 15e$) programmada 2 esege kemitlgen adim menen qayta esaplaw qaraliwi kerek.Usi sebeрке baylanisli integral astindagi funrtsiyanin tuyinler manislerinin massivin aldin ala duziw kerek emes.Tiyisli algoritm sxemasi 3 suwrette korsetilgen. Daslepki integral manisin 0-ge ten dep alinadi. (I sxemada) Bunnan keyin $n=4$ dep alinadi, ham I integral manisin esaplaw jurgiziledi.Eger tekseriw talap etilgen dallikka erisilmegenligin korsetse,onda I,I -ga almastirip ham araliqti n - ge boliwdi 2 esege kobeytip,protsess qaytadan aytalanadi.Sirtqi tsikl,talap etilgen dallikka eriskege shekem qaytalanadi.

Suwretlgen jaqinlasiwdi ameli qollaganda tamamlangan natiyjenin qateligin dongeleklew mumkin bolgan tasir etetuginin umitpaw kerek.Usi ameldi qollanip, solardan dallik olshemin mumkin bolgan qatelikti dongeleklew diyapazoni menen salistiriw kerek. Natiyjeni berilgen dallikka shekem dongeleklep $I=0,223244$ 10 dep alamiz.Barliq qaralgan misallardin,esaplangan integrali manislerin salistirip ,tiyisli bahalaw dalligi menen tabilgan natiyjenin tenligin toliq qayilliq bildiriwge boladi.Haqiyqatindada berilgen integraldi trapetsiya formulasi boyinsha esaplaw natiyjesinen,utirden keyingi tek 2 san 2,2 orinli ekenligi korinedi.Simpson formulasi boyinsha usi belgilerdin duris ekenligin tasiyiqqladiq.,ham eki jana belgi qostiқ 2,2.3.2.

Qayta esaplaw usili menen esaplawdi dawam etkenimizde endi qatan maniste 5 turaqli belgi berdi,bunin qatarina aldingilar ham kiredi: 2,2,3,2,4.

Shinigiw. Trapetsiya formulasi boyinsha integral esaplaw programmasin duzin.

Tayanish

Sanli integrallau.Kvadraturaliq formulalar.

Soraular

1. Nyuton-Liybnits formulalari sanli integrallauda ne ushin ken' qollanbaydi?
- 2.Kvadratura formulalarinin' qateligi
3. Simpson formulasinin qollaniw shartleri
4. Kvadratura formulalarinin' dalligi
5. Trapetsiya. Simpson formulalaarini salistirin'
6. Kesindiler sani kobeyiwi trapetsiya ham Simpson formulalarinin' dalligine qanday ta'sir korsetedi?
7. Adimdi kishireitiw joli menen katelikti sheksiz azaytiwga bolama?

Paydalanlg'an a'debiyatlar

1. ZavarIkin V.M. ShislennIe metodI. -M.: Prosveshenie, 1971. 176 s.
2. Siddikov A.M. Sonli usullar. Nukus. Bilim, 1996. 64 b.
3. Sbornik zadash po metodam vIshisleniy. Minsk. 1983. 288 s.

LEKTSIYA N 10

A'piuayI differentsiyal ten'lemelerdi sheshiw. Ma'selenin' qoyIIIwI. Pikar usIII. Eiler usIII. Runge -Kutta usIII.

Maselenin' qoyIIIwI.

Meyli

$$y' = f(x, y) \quad (1)$$

birinshi da'rejeli apiwayi differentsiyal tenleme bolsIn. Tiykarg'I masele, joqaridagi tenleme menen Koshi maselesindey belgili baylanisli:

$$y(x_0) = y_0 \quad (2)$$

Daslepki shartti qanaatlantiriwshi $y(x)$ funktsiya turinde (1) tenlemenin sheshimin tabiw.

Geometriyalıq manisi: (1-su'wret) $M_0(x_0, y_0)$ berilgen toshka arqali otetugin ham (1) tenlik orinlanganda $y=y(x)$ iymek integraldi tabiw talap etiledi. (1) tenlemenin sheshimi bar boliwi ham birligi towendegi teorema boyinsha tamiynlenedi:

Pikar teoremasi:

Eger f funktsiya aniqlangan qalegen bir G oblastta uziliksiz

$$|x - x_0| < |y - y_0| < b \quad (3)$$

tensizlik penen aniqlangan ham y boyinsha usi oblastta Lipshitsa shartin qanaatlantiradi.

$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| < M |y_1 - y_2|$ onda bazI bir $|x - x_0| \leq h$ kesindide

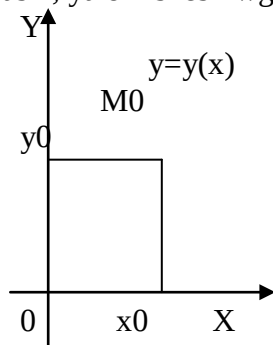
(bunda $h > 0$) bar boladi ham, ol $y = y(x)$ tek bir sheshimi boladi. Bul sheshim da'slepki $y_0 = y(x_0)$ sheshimdi qanaatlantiradi. Bul jerde M -turaqli (const Lipshitsa) ol uliwma jagdayda a ham b ga baylanisli.

Eger $f(x, y)$ G -da shegaralangan $f_y'(x, y)$ - tuwindiga iye bolsa, onda

$$(x, y) \in G \text{ da } M = \max f_y'(x, y) \quad (4)$$

dep aliwga boladi.

Klassikalıq analizde elementar (yamasa arnawli) funktsiyalar menen differentsiyal tenlemelerdin sheshimlerin tabiw jollari kop islengen. Praktikalıq maselelerdi sheshkenimizde bul usillar, ya dim paydasız, ya oni sheshiwge kop waqıt talap etedi.



1-su'wret

Usi sebepli praktikada maselelerdi sheshiw ushin differentsiyal tenlemelerdi juwıq sheshiw usillari duzilgen ,shartlı turde, sheshimnin formasına baylanisli, bul metodlar (usillas) towendegi ush tiykargı gruppaga bolinedi:

1. ANALITIKALIQ USIL qollananimızda differentsiyal tenlemelerdin sheshiliwi, analitikalıq anlatpa turinde beriledi.

2. GRAFIKALIQ USIL juwıq sheshimlerdi grsfik turinde beredi.

3. SANLI USIL izlengen funktsiya tablitsa turinde shigadi.

Korsetilgen gruppalarğa tiyisli sheshim ushin (1) turindegi 1-darejeli apiwai differentsiyal tenlemelerdi sheshiw ushin ayrim saylanıp alingan metodlardı towendegi qarastirilgan

$y(n)=f(x,y,y',\dots,y(n-1))$ n -shi tartibli differentsiyal tenleme ushin Koshi maselesi $y=y(x)$ ushIn da'slepki sha'rtler qanaatlandirillwI kerek:

$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},$$

bunda $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ berilgen sanlar, da'slepki shartti qanaatlantiriwshi $y=y(x)$ sheshimdi tabiw dan tursa onda oni 1-shi tartibli differentsiyal tenlemeler sistemasina keltiriw mumkin.

Misali. $y''=f(x,y,y')$ 2-shi tartibli tenlemeni

$$y' = z,$$

$$z' = f(x,y,z)$$

eki 1-shi tartibli tenlemeler sistemasi turinde jaziwga boladi.

Pikar usIII.

Bul usil jardeminde analitikaliq funktsiya turinde korsetilgen (1) differentsial tenlemenin jaqinlasiwshi sheshimin tabiwga boladi. (1) tenlemenin sheshimi bar ham birew ekenligi haqqindagi teoremani daliylewgede Pikar usili payda bolgan hamde ol qisiliwshi sawlelendiriwliler printsipinin qollaniliwlarinin birewi bolip tabiladi.

Meyli bar haqqindagi teoremanin shartinde (2) baslangish sharti bolgan (1) tenlemenin sheshimin tabiw qoyilgan bolsin. (1) tenlemenin eki jagin x -dep x -ke shekem integrallayiq:

$$\int_{y_0}^y dy = \int_{x_0}^x f(x,y)dx \quad \text{yamasa}$$

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(x,y)dx \quad (5).$$

Korinip turganday, (5) integral tenlemenin sheshimi (2) baslangish sharti ham (1) differentsial tenlemeni qanaatlantiradi. Haqiqatinda da, $x=x_0$ bolganda tomendegige kelemiz:

$$y(x_0)=y_0+\int_{x_0}^{x_0} f(x,y)dx=y_0$$

Usinin menen birge (5) integral tenlemesi izbe-iz jaqinlasiwshilar usilin qollaniwga mumkinshilik beredi. Meyli $y=y_0$ bolsin ham (6.5) -den birinshl jaqinlasiwshini alamiz:

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(x,y_0)dx$$

On jagindagi integralda tek x ozgeriwshi bar; usi integraldi tawgannan keyin x ozgeriwshinin funktsiyasi retindegi $y_1(x)$ jaqinlasiwshinin analitik anlatpasi tabiladi. Endi (5) tenlemedegi y -ti tabilgan $y_1(x)$ -tin manisine almastiramiz ham ekinshi jaqinlasiwshini tabamiz:

$$y_2(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(x,y_1)dx \quad \text{h.t.b.}$$

Uliwma jagdayda iteratsiyaliq formula tomendegige turge iye boladi:

$$y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(x,y_{n-1})dx \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (6)$$

(6) formulanin tsiklliq qollanoliwi funktsiyalar izbe-izligin beredi:

$$y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x), \dots \quad (7)$$

f funktsiya G oblastta uzliksiz bolganliqtan, $d(x_0, y_0)$ toshkani o'zine alatugin qandayda bir G' G oblastta shegaralangan boladi, ya'ni:

$$|f(x, y)| \leq N \quad (8)$$

bar haqqindagi teoremanin shartlarinde qisilish sawlelendirilwler printsiptin (6) tenlemege qollanip atirganda, (7) izbe-izlik jynalatuginligin korsetiw qiyin emes (bundagi jaqinlasi $|f(x) - y_0| < Nd$ shartti qanaatlantirish, $|x - x_0| < d$ segmentte aniqlangan f uzliksiz funktsiyalar kenisligindegi $r(f_1, f_2) = \max |f_1(x) - f_2(x)|$ metrika boyinsha alingan jaqinlasiw). Onin' shegi (6) integral tenlemenin sheshimi bolip tabiladi, al bunnan kelip s0igadi (2) baslangish shartlarindegi (1) differentsiyal tenlemenin sheshimi boladi. Bul bolsa (7) izbe-izliktin k-shi agzasi (1) tenlemenin dal sheshiminin aniq darejedegi jaqinlashiwshi ekenligin bildiredi.

k-shi jaqinlashiwshinin qateliginin baqlaniwi tomendegi formula menen beriledi:

$$|y(x) - y_k(x)| \leq \frac{M_k N^{k+1}}{(k+1)!} \quad (9)$$

bul jerde M-Lipshits konstantasi (4), N-(8) tensizliktegi f funktsiyanin modulinin joqargi shegarasi (gran), al $|x - x_0| < d$ dogerekti aniqlaw ushin kerek bolgan d-n manisi tomendegi formuladan esaplanadi:

$$d = \min\left(a, \frac{b}{N}\right) \quad (10)$$

MIsalI 1. $y' = x^2 + 3y$ differentsiyal tenlemenin $y(0) = 2$ baslangish shartindegi izbe-izli jaqinlashiw usili menen jaqinlashiw sheshimin tabiw kerek.

Usi berilgen masele ushin (6) formulani jazamiz:

$$y_n(x) + 2 + \int_0^x (x^2 + 3y_{n-1}) dx \quad (n=1, 2, \dots)$$

baslangish jaqinlashiwshi $y_0(x) = 2$ dep oylaymiz.

Onda:

$$y_1(x) = 2 + \int_0^x (x^2 + 6) dx = 2 + 6x + \frac{x^3}{3}$$

$$\text{Keyinnen: } y_2(x) = 2 + \int_0^x [x^2 + 3(2 + 6x + \frac{x^3}{3})] dx = 2 + 6x + 9x^2 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{20}$$

Usigan siyaqli:

$$y_3(x) = 2 + 6x + 9x^2 + 9x^3 + \frac{x^4}{4} + \frac{3x^5}{20} \quad \text{h.t.b.}$$

Ushinshi jaqinlashiwshinin qateligin baqlayiq.

(3) tensizlikler menen berilgen G oblastti aniqlaw ushin, meyli $a=1, b=2$ bolsin. G tuwrimumyeshlikte $f(x, y) = x^2 + 3y$ funrtsiya aniqlangan ham uzliksiz, hamde ((4) ham (8) kor.):

$$M = \max |f'_y(x, y)| = 3$$

$$N = \max |f(x, y)| = 7$$

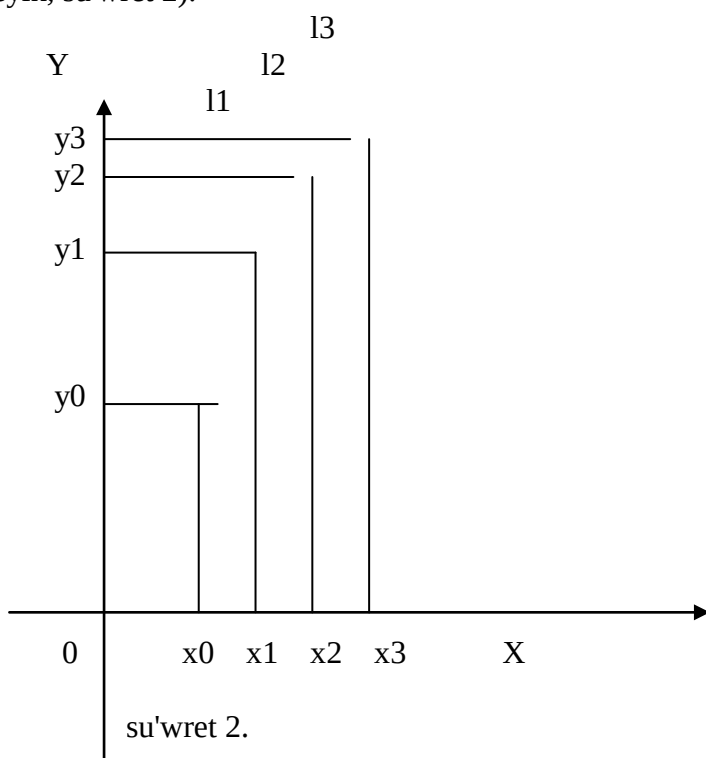
$$(10) \text{ formuladan } d = \frac{2}{7} \text{ ni tabamiz. (9) baqlawshi formuladan paydalanip tabamiz:}$$

$$|y(x)-y_3(x)| < \frac{0,053}{7^3 4!}.$$

Eyler usIII.

Eyler siniqlar usilin tiykarinda differentsiyal tenlemenin sheshimin grafikaliq duziw oyi jatadi, biraq sonon menen birge bul usil berilgen funktsiyani sanli (tablitsali) turde tabiw usilin beredi.

Meyli (2) baslangish shartindegi (1) tenlemesi berilgen bolsin. Jeterli kishi h adimdi saylap, x toshkadan baslap tenturiwshi $x_i = x_0 + ih$ ($i=0,1,2,\dots$) toshkalar sistemasin duzemiz. $[x_0, x_1]$ kesindidegi izlenip atirgan integral iymektin ornina $M_0(x_0; y_0)$ toshkadagi usi iymekke otkizilgen urinbanin kesindisin ham $y = y_0 + f(x_0; y_0)(x - x_0)$ tenlemeni alip qarayiq (urinbani L_1 dep belgileyik, su'wret 2).



$x=x_1$ bolganda L_1 urinbanin tenlemesinen alamiz:

$$y_1 = y_0 + Lf(x_0; y_0),$$

bunnan korinip turipti birinshi adimda funktsiyanin manisnin osimi tomenidegi turge iye:

$$y_0 = Lf(x_0; y_0).$$

Usigan siyaqli, $M_1(x_1; y_1)$ toshkadagi qandayda bir integral iymek dastesine L urinbani otkerip tomenidegini alamiz:

$$y = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1),$$

bul bolsa $x=x_2$ bolganda $y_2 = y_1 + Lf(x_1, y_1)$ - di beredi, yagniy y_2 y_1 -ge $y_1 = Lf(x_1, y_1)$ osimdi qosqannan payda boladi.

Demek Eyler usili jardeminde izlenip atirgan $y(x)$ funrtsiyanin manislerinen tablitsani tabiw degenimiz

$$\Delta y_k = hf(x_k, y_k)$$

$$y_{k+1}=y_k+\Delta y_k, \quad k=0,1,2,\dots \quad (11)$$

formulalar jupligin tsiklli qollaniw boladi.

Eyler usili kishi daliylikke iye , hamde har jana adimnin qateligi osip bara beredi. Bul jagdayda ameliyatta qollaniwga en qolawli daliylikti baqlaw usili bolip h ham h/2 adimlar menen alingan ekilik sanow usili tabiladi.

Eki usil menen tabilgan natiyjelerdegi onliq belgilerdin saykes keliwi olardi duris dep esaplawga tiykar beredi.

Misal 2. [0;1] kesindidegi $y(0)=1,3$ baslangish sharti menen berilgen $y'=\cos y+3x$ differentsiyal tenlemeni $h=0,2$ adim menen Eyler usili jardeminde sheshiw kerek.

Tablitsa 1 -de utirden keyin eki belgi menen alingan esaplawlardin natiyjeleri berilgen:

Tablitsa 1.

k	x _k	y _k	y _k =0,2(cos y _k +3 x _k)
0	0	1,30	0,05
1	0,2	1,35	0,16
2	0,4	1,52	0,25
3	0,6	1,77	0,32
4	0,8	2,09	0,38
5	1,0	2,47	

Bul jagdayda (baslangish manisini $k=0$) yad registrin paydalangan haldagi " Elektronika 63-18a " turindegi kalkulyator ushin duzilgen programma tomendegishe boliwi mumkin:

$$y_k = F_n \cos F_{un} X_{0,2} + y_k =$$

Uzin strelka boyinsha tsikli qaytan otir bir waqittagi k indekstin 1-ge ulkeyip korsetedi. Kelte vertikal strelkalar menen

Eyler usili

x,y,h,b kirgiziw

x,y shigariw

y:=y+hf(x,y)

x:=x+h

AWA

x< b

YAQ

soni

su'wret 3.

programmada kalkulyator indikatorinan tablitsaga aparilgan natiyjelerdin orinlari belgilengen. Bul jerde y_k manislerin tablitsada kiritpesekte boladi, yagniy tablitsadagi en keyingi baganani alip taslasaqa boladi. Bul jazilgan algoritmda EVM- de qollaniwga boladi. Su'wret 3 -de Eyler usili jardeminde (1) turindegi sxemasi korsetilgen.

Bul algoritimde baslangish berilgenler bolip: x ham y-n baslangish manisleri , k integrallaw adimi ham integrallaw kesindinin on b shegarasi tabiladi.

Har qiyli adim menen tabilgan jaqinlasiwlardin salistiriliwi saylangan adimdagi Eyler usili ulken emes -bir-eki maganali tsifrлар araliginda gana - daliylikti beretuginligin korsetedi.

Eyler usilinin daliyligin ulkeytetugin har qiyli aniqlawliqlar bar. Adette, bul usildin modifikatsiyalari(x_i,y_i) toshkadan (x_{i+1}; y_{i+1}) toshkaga qaytadan otiwdin bagdarin kobirek dal aniqlawga bagdarlangan. Misalga, Eyler-Koshi usili tomendegi esaplawlar dizimin qollanIwg'a mumkinshilik beredi:

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + hf(x_i, y_i), \\ f(x_i, y_i) &= f(x_{i+1}, y_{i+1}) \\ y_{i+1} &= y_i + h \frac{f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})}{2} \end{aligned} \quad (12)$$

Bunin geometriyalıq manisi: baslangish (x_i, y_i) toshkadagi ham qosimsha (x_{i+1}, y_{i+1}) toshkadagi iymek siziqtin bagdarin aniqlaymiz, al on keyingi manisi retinde usi bagdarlardin ortashasin alamiz.

Runge - Kutta usIII.

Eyler ham Eyler - Koshi metodi tomendegi turge iye bolgan Bazibir sanlardi aniqlaymiz:

$$a_2, \dots, a_q; p_1, \dots, p_q; b_{ij} \quad 0 \leq j \leq i, q;$$

izbe-iz esaplaymiz: k₁(h)=hf(x,y)

$$k_2(h) = hf(x + a_2 h, y + b_{21} k_1(h)),$$

$$k_q(h) = h f(x + a_q h, y + b_{q1} k_1(h) + \dots + b_{qq-1} k_{q-1}(h))$$

$$\text{ham } y(x+h) = y(x) + \sum_{i=1}^q p_i k_i(h) = z(h) \quad (13)$$

a_i, p_i, b_{ij} parametrlerin saylap aliw maselesin qarastiramiz.

f(h)=y(x+h)-z(h) dep belgileymiz ham qanday f(x,y) funktsiyada f(0)=f'(0)=...=f(s)(0)=0 dep, al bazibir f(x,y) funktsiyada tenler orinli.

$$f(h) = \sum_{i=1}^q \frac{f^{(i)}(0)}{i!} h^i - \sum_{i=1}^q \frac{f^{(i)}(s)}{(s+1)!} h^{s+1} \quad (14)$$

bunda 0 < Q < 1. f(h)-shamasInIn' adimdagi qateleginin mugdari, al s-usldIn' gatelik ta'rtibi. Onda q=1 bolganda :

$$f(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 h f(x, y)$$

$$f(0) = 0$$

$$f'(0) = (y'(x+h) - p_1 f(x, y))|_{h=0} = f(x, y)(1 - p_1)$$

$$f''(h) = y''(x+h)$$

p₁=1 shartinde gana qalghan f(x,y) funksiiasi ushin f'(0)=0 tenligi orinli ekenligi aniq.

p₁ din bul manisinde (13) formulasinan (11) formulasi kelip shigatuginligi korinip tur. Bul jagayda biz Eyler metodin alamiz. (14) ke tiykarlanIp bul metodin gateligini ushin tomendegige iye bolamiz.

$$f(h) = \frac{f''(x+Qh) h^2}{2}$$

q=2 bolgandagi jagdaydi qarastiramiz, onda

$$f(h) = y(x+h) - y(x) - p_1 h f(x, h) - p_2 h^2 f(x, y)$$

bunda x = x + a₂ h, y = y + b₂₁ h f(x,y)

Daslepki differentsiyal tenlemege tiykarlanip

$$y=f, y''=fx+fyf, y'''=fxx+2fxy+fyyf +fyy'' \quad (15)$$

(y(x) ham f(x,y) lar saykes turde y ham f arkali an'latilgan) an'latpalarina h=0 manisni qoyip tomondagigiga iye bolamiz. ((15) gathasin esapqa algan halda);

$$f(0)=0$$

$$f'(0)=(1-p_1-p_2)f$$

$$f''(0)=(1-2p_2a_2)fx+(1-2p_2b_{21})fyf$$

Tomendegi 4 parametrlil 3 tenleme 1 waqitta orinli bolganda gana talap etilgen $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$ ha'mme $f(x,y)$ ushin orinli.

$$\begin{aligned} 1-p_1-p_2 &= 0 \\ 1-2p_2a_2 &= 0 \\ 1-2p_2b_{21} &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Parametrlerdin birewine erikli manis berip h (6.16) sistemadan qalgan para-n manisni esaplaw otirip, s=2 qateler izbe-izligine iye bolgan Runge Ruttin har qiyli metodlarina iye bolamiz.

Misaliga $p_1=1/2$ bolganda (16) dan $p_2=1/2$, $a_2=1$, $b_{21}=1$ ge iye bolamiz.

Bul parametrlar manisleri ushin (13) to'mendegi tu'rge iye boladi:

$$y_{i+1}=y_i+h \frac{f(x_i,y_i)+f(x_{i+1},y_{i+1})}{2}$$

(Bunda $y(x+h)$ ornina y_{i+1} , $y(x)$ ornina y_i , $y_i+h f(x_i,y_i)$ din ornina y_{i+1} anlatpalar jazilgan.) Usilay etip, bizin qarastirip atirgan jagdayimizda Eylor-Koshi metodina saykes keliwshi (12) esaplaw for'na kelemiz. (14) formuladan kelip shigadi. Kateliktin'

$$f'''(0)$$

$$\text{bas bolimi} = \frac{f'''(0)}{6} h^3$$

adimda bar ekenligi, yag'nily h s-darejeli adimga proportsional. Esaplaw pror'da q=4 ham s=4 bolgandagi Runge - Kutta uslli jiyi qollanadi. Saykes keliyshi esaplaw formulasinin bir bariantin keltirip otemiz;

$$\begin{aligned} k_1 &= h f(x, y) \\ k_2 &= h f(x + h/2, y + k_1/2) \\ k_3 &= h f(x + h/2, y + k_2/2) \\ k_4 &= h f(x + h/2, y + k_3) \\ Dy &= z(h) - y(x) = 1/6(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \quad (17)$$

Bul jagdaydi adimdagi kateler (h^5) 5-darejeli adimga proportsional ekenligin belgilep otemiz. Bunnan (17) gormulasi boyinsha Runge-Kutt metodinan alingan (1) tenlemenin sheshimi jeterli darejede Kishi h ham kishi katelikte esaplaganda dal sheshimge jakin boladi.

(17) esaplaw formulasina iye Runge-Kutt metodin kollaniwdin geomertiyaliq manisi tomondegishe boladi. (x_i, y_i) sirittan a_1 muyesh aniqlagan bagit boyinsha jilisadi. Bunda a_1 ushin

$$tga_1 = f(x_i, y_i).$$

Bul bagitta kordinatasi $(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$ bolgan toshka saylap alinadi. Keyin (x_i, y_i) toshkadan l2 muyesh aniqlagan bagit boyinsha jilisadi. Bunda a_2 ushin $tga_2 = f(x_i + h/2, y_i + k_1/2)$. Bul bagit $(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$ koordinatalarlna iye bolg'an toshka saylap alinadi. Soninda (x_i, y_i) tpshkaddan a_3 muyesh aniq-dan baqit boyinsha jilisadi ham bunda a_3 ushin $tga_3 = f(x_i + h/2, y_i + k_2/2)$ ham bul jolda $(x_i + h, y_i + k_3)$ koordinataga iye bolgan toshka saylap alinadi. Usinin menen jane 1 bagit a_4 muyesh aniqlagan bagit beriledi.

Alingan 4 bagit (17) funktsiyaslna sa'ykes ottasha turde tusedi. Bul keyingi bagitta gezektegi toshka saylap alinadi;

$(x_{i+1}, y_{i+1}) = (x_i + h, y_i + Dy)$. Runge-Kutta uslli boyinsha differentsiyal ten'lemenin' manislerin programmasln du'zuw ushln (17) esaplaw formulasln keltirip shigargan halda bayan etilgen algori-timnin' adImln sanap shIg'amIz:

1. Das/ki shar-di saykes A ham Y arqali anlatip kiritiw
2. H integrollaw alimin ham ina/w kesindisinin a-gi toshkasi B ni kiritiw.

3. A dan B ga shekem H adimi menen tserl
4. x ham y ti shigariw
5. k1,k2,k3,k4 di esaplaw
6. Dy ti esaplaw
7. $y=y+Dy$ tagi manisin esaplaw.
8. x boyinsha tsikldin son'I.

MISAL 2. Daslepki sharti $Y(0)=1$ bolg'an, $y'=y(1-x)$ tenlemesin

Eyler-Koshi ham Runge-Kutta usIII boyInsha sheshemiz. Berilgen ten'leme analitikalik sheshilgen bolIwI mu'mkin. Berilgen daslepki sha'rtlerde bul sheshim tomen degi turge iye boladi:

$$y = e^{x - (1/2)x^2}$$

SalistIrIw ushin joqarIda korsetilgen usIllar boyInsha ten'lemenin' sheshimin esaplap ham saykes toshkalarda esaplang'an da'l sheshimnin' ma'nislerin to'mendegi tablitsada keltiremiz.

X	0	0.1	0.2	0.3	0.4
Eyler-roshi metedi	1.000	1.1050	1.2089	1.3095	1.4044
Runge Kutt metetod	1.000	1.0997	1.1972	1.2905	1.3771
dal manisi	10000	1.0997	1.1972	1.2905	1.3771

X	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1
Eyler-roshi metedi	1.4912	1.5676	1.6316	1.6812	1.7152	1.7324
Runge Kutt metetod	1.4550	1.5220	1.5762	1.6161	1.6405	1.6487
dal manisi	1.4550	1.5220	1.5762	1.6161	1.6405	1.6487

Biz Runge-Kutta metodinin' rezultatI da'l sheshim menen birdey bolip atirganin korip turmiz.

O'z betinshe u'ireniw ushIn sorawlar

1. Differentsiyal ten'lemelerdi sheshiwidin' juwIq usIllarI qanday tiykarg'I gruppalar ga bolinedi.
2. Pikar usIII boyinsha differentsiyal ten'lemenin' sheshimin qanday formada alIwg'a boladI.
3. Eyler usIIInIn' geometriyalIq mazmunIn tu'sindirIn'.
4. Runge - Kutta usIIIInIn' geometriyalIq mazmunIn tu'sindirIn'.
5. Eyler ha'm Runge - Kutta usIllarInIn' jetiskenligi ha'm kemshiligi nede.
6. Eyler usIII boyinsha differentsiyal ten'lemenin' sheshimin qanday formada alIwg'a boladI.
7. Differentsiyal ten'lemelerdi Eyler ha'm Runge - Kutta usIllarI menen juwIq integrallawda sheshimnin' anIqlIg'In bahalaw qanday anIqlanadI.

PaydalanIlg'an a'debiyatlar

1. ZavarIkin V.M. ShislennIe metodI. -M.: Prosveshenie, 1971. 176 s.
2. Siddikov A.M. Sonli usullar. Nukus. Bilim, 1996. 64 b.
3. Sbornik zadash po metodam vIshisleniy. Minsk. 1983. 288 s.